Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

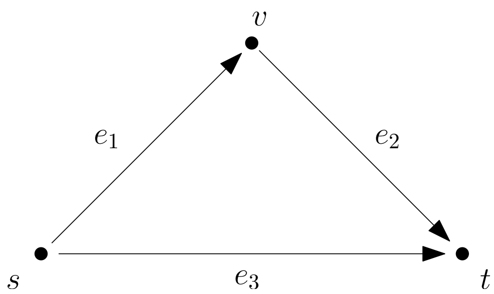
Algorithmentechnik
WS 05/06

Letztes Übungsblatt

Ausgabe: 3. Februar 2006
Abgabe: 13. Februar, 14 Uhr im ITI Wagner (Informatik-Hauptgebäude, 3. Stock)

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Lineare Probleme **,*,*,**,*,**,**,***,****



Für das obige Netzwerk seien die Kantenkapazitäten $c(e_1) := 1$, $c(e_2) := 2$ und $c(e_3) := 3$ gegeben.

(a) Stellen Sie das Lineare Programm des maximalen Flussproblems für dieses Netzwerk in der in der Vorlesung gegebenen Form auf und bringen Sie es dann in die ebenfalls in der Vorlesung definierte Standardform. Stellen Sie anschließend das zur Standardform duale lineare Programm auf.

(b) Ist das Lösungspolyeder beschränkt?

(c) Stellen sie das durch die Kapazitätsbedingungen gegebene konvexe Polyeder graphisch dar, sowie die durch die Flusserhaltungsbedingungen gegebene Hyperebene.

(d) Führen Sie die Simplexmethode auf dem Polyeder durch: Starten Sie dazu im Nullpunkt. Welches sind die *verbessernden Kanten* von dort aus? Welchen Flusserhöhungen im Ausgangsgraphen entsprechen diese? Wie heißt der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht.

Betrachten wir nun ein allgemeines Flussproblem.

$$\max \sum_{(s,i)\in E} x_{s,i} - \sum_{(i,s)\in E} x_{i,s}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\left.\begin{array}{r} x_{i,j} \leq c_{i,j} \\ x_{i,j} \geq 0 \end{array}\right\} \quad \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{i,j} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{j,i} = 0 \qquad \forall j \in V \setminus \{s,t\}$$

In Matrixform laute dies

$$\max \ a^T x$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \quad x \quad &\leq c \\ -\mathbb{I} \quad x \quad &\leq 0 \\ B \quad x \quad &= 0 \ . \end{aligned}$$

Dabei sei $\mathbb{I}$ eine Einheitsmatrix und B die Matrix, die sich aus den Flusserhaltungsbedingungen ergibt.

(e) Welche Dimensionen haben a, $\mathbb{I}$ und B?

(f) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

(g) Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

(h) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Erhöhung des Flusses entlang eines erhöhenden Weges entspricht einem Schritt im Simplexverfahren. (Hinweis: Ein Extrempunkt eines Polygons P kann nicht als Konvexkombination $\lambda \cdot s + (1 - \lambda) \cdot t$ zweier verschiedener Punkte von P dargestellt werden. Ein Punkt auf einer Kante von P kann nur als konvexe Kombination zweier verschiedener Punkte der selben Kante dargestellt werden.)

(i) Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

Problem 2: Bin Packing *

Zeigen Sie, dass für den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus Next Fit für Bin Packing nicht nur gilt $\mathcal{R}_{\mathrm{NF}} \leq 2$, sondern sogar gilt $\mathcal{R}_{\mathrm{NF}} = 2$.

Problem 3: Bin Packing **

Ein *Vertex-Cover* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$, so dass jede Kante aus E zu mindestens einem Knoten aus V' inzident ist. Das Problem VERTEX COVER (VC) besteht nun darin, ein Vertex-Cover mit minimaler Kardinalität zu finden.

Algorithmus 1 : Approximationsalgorithmus für VERTEX COVER

Eingabe : Graph $G = (V, E)$
Ausgabe : S (Vertex Cover von G)
$S := \emptyset$
Für *alle Kanten* $\{v_i, w_i\} \in E$
  Wenn $\{v_i, w_i\}$ *nicht durch* S *überdeckt ist*
    $S \leftarrow v_i$
    $S \leftarrow w_i$

Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 eine Faktor-2-Approximation für das Problem Vertex Cover liefert.