4. Übungsblatt

Ausgabe: 9. Dezember 2005
Abgabe: 19. Dezember, 14 Uhr im ITI Wagner (Informatik-Hauptgebäude, 3. Stock)

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Kreuzende Schnitte **

Zwei Schnitte $(S, V \setminus S)$ und $(T, V \setminus T)$ in einem Graph $G = (V, E)$ *kreuzen sich*, wenn keine der Mengen $A := S \cap T$, $B := S \setminus T$, $C := T \setminus S$ und $D := V \setminus (S \cup T)$ leer ist. Sei $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ eine Kantengewichtsfunktion auf G.

(a) Sind $(S, V \setminus S)$ und $(T, V \setminus T)$ zwei sich kreuzende Schnitte minimalen Gewichts λ in G, so gilt $c(A, D) = c(B, C) = 0$ und $c(A, B) = c(B, D) = c(D, C) = c(C, A) = \lambda/2$.

(b) Sind s und t zwei adjazente Knoten mit $c(\{s, t\}) > 0$, so enthält die Menge der minimalen Schnitte von G, die s und t trennen, keine zwei sich kreuzenden Schnitte.

Problem 2: Mehr Schnitte **

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und Kantengewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}$. Für zwei Knoten s und t in G bezeichne $(S_{st}, V \setminus S_{st})$ einen s-t-Schnitt minimalen Gewichts in G und $c_{st} = c(S_{st}, V \setminus S_{st})$ das Gewicht eines solchen Schnittes.

(a) Sei $v_1, v_2, \ldots, v_k$ eine beliebige Folge von paarweise verschiedenen Knoten in G. Zeigen Sie: $c_{v_1,v_k} \geq \min\{c_{v_1,v_2}, c_{v_2,v_3}, \ldots, c_{v_{k-1},v_k}\}$.

Hinweis: Betrachten Sie einen v_1-v_k-Schnitt $(S_{v_1,v_k}, V \setminus S_{v_1,v_k})$ minimalen Gewichts. Begründen Sie, daß es ein ℓ gibt, so dass $c_{v_1,v_k} \geq c_{v_\ell,v_{\ell+1}}$. Schließen Sie dann auf die zu zeigende Aussage.

(b) Seien u, v, w drei paarweise verschiedene Knoten in G. Zeigen Sie, daß es eine Reihenfolge c_1, c_2, c_3 der Werte c_{uv}, c_{vw}, c_{wu} gibt, so daß $c_1 = c_2 \leq c_3$ gilt.

Problem 3: Stoer und Wagner – negativ? **

An welcher Stelle im Korrektheitsbeweis zum Algorithmus von Stoer und Wagner wurde verwendet, daß die Kantengewichte nicht negativ sind? Finden Sie ein Beispiel eines Graphen mit negativen Kantengewichten und einen Startknoten a, so daß der Algorithmus von Stoer und Wagner keinen minimalen Schnitt liefert.

Problem 4: Spektrale Analyse

***

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ und der Kantengewichtsfunktion $c \equiv 1$. Sei A die Adjazenzmatrix von G und D die $n \times n$ Matrix, auf deren Diagonale die Knotengrade stehen, d.h. $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit

$$d_{ij} = \begin{cases} d_G(i) & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da die Matrix $L := D - A$ symmetrisch ist, sind die Eigenwerte von L alle reell und es gibt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren[1] von L.

(a) Zu einem $a \in \mathbb{R}$ sei für eine Teilmeng $S \subset V$ der Indikatorvektor $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ von S definiert durch $x_i = a$, falls $i \in S$ und $x_i = a - 1$ sonst. Zeigen Sie

$$c(S, V \setminus S) = \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2.$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^t L x = \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2$.

(c) Ist v ein Eigenvektor von L zum Eigenwert λ, so gilt $\lambda = \frac{v^t L v}{v^t v} \geq 0$.

(d) Der kleinste Eigenwert von L ist $\lambda_0 = 0$ mit zugehörigem Eigenvektor $(1, \ldots, 1)^t$.

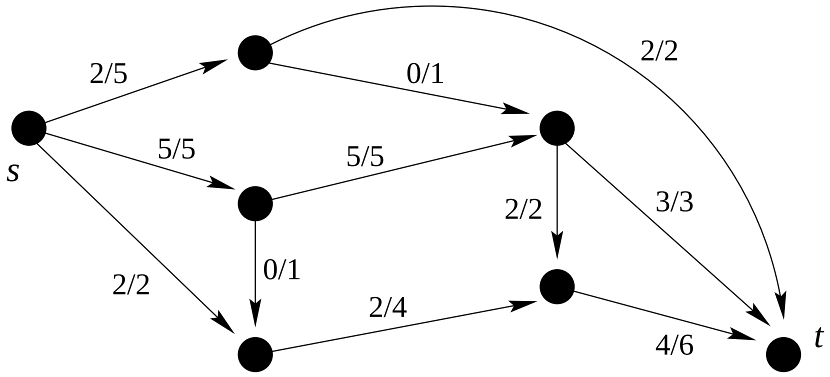
(e) Zwischen dem zweitkleinsten Eigenvektor λ_1 und dem Gewicht λ eines minimalen Schnittes in G gilt die Beziehung

$$\lambda_1 \leq \lambda(1 + \frac{1}{n-1}).$$

Problem 5: Finde den Fluss

*

Bestimmen Sie ausgehend vom eingetragenen Fluß f einen Maximalfluß im nachstehenden Netzwerk $(D; s, t; c)$. Dabei ist die Beschriftung der Kanten $e \in E$ als $f(e)/c(e)$ zu lesen. Weisen Sie die Maximalität Ihres Flusses anhand eines minimalen s-t-Schnittes nach.



[1] Ein Vektor $v \neq 0$ heißt Eigenvektor einer Matrix A, wenn es eine Zahl λ mit $Av = \lambda v$ gibt. Die Zahl λ heißt dann Eigenwert von A.