

# Algorithmentechnik — Letzte Übung

[http://i11www.ira.uka.de/teaching/WS\\_0506/algotech](http://i11www.ira.uka.de/teaching/WS_0506/algotech)

Robert Görke (rgoerke@ira.uka.de)

WS 05/06

Lineare Probleme

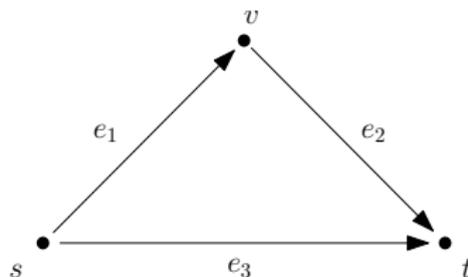
Vertex Cover

Approximationsalgorithmen

Informatik-Kolloquium

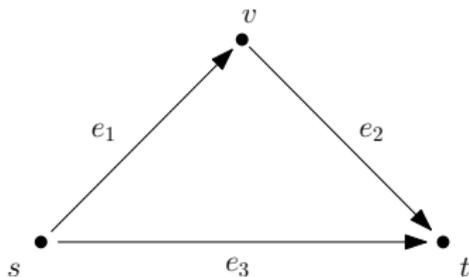
Zur Klausur...

## LP für den Spielzeugfluss



Kantenkapazitäten  $c(e_1) := 1$ ,  $c(e_2) := 2$  und  $c(e_3) := 3$ .

## LP für den Spielzeugfluss



Kantenkapazitäten  $c(e_1) := 1$ ,  $c(e_2) := 2$  und  $c(e_3) := 3$ .

Stellen Sie das Lineare Programm des maximalen Flussproblems für dieses Netzwerk in der in der Vorlesung gegebenen Form auf und bringen Sie es dann in die ebenfalls in der Vorlesung definierte Standardform. Stellen Sie anschließend das zur Standardform duale lineare Programm auf.

## LP für den Spielzeugfluss Erste Formulierung

## LP für den Spielzeugfluss

### Erste Formulierung

Kantenkapazitätsbedingungen:

$$e_1 \leq 1$$

$$e_2 \leq 2$$

$$e_3 \leq 3$$

## LP für den Spielzeugfluss Erste Formulierung

Kantenkapazitätsbedingungen:

$$e_1 \leq 1$$

$$e_2 \leq 2$$

$$e_3 \leq 3$$

Flusserhaltungsbedingung für den Knoten  $v$ :

$$e_1 - e_2 = 0$$

## LP für den Spielzeugfluss

### Erste Formulierung

Kantenkapazitätsbedingungen:

$$e_1 \leq 1$$

$$e_2 \leq 2$$

$$e_3 \leq 3$$

Flusserhaltungsbedingung für den Knoten  $v$ :

$$e_1 - e_2 = 0$$

Nichtnegativität der Kantenflüsse:

$$e_1 \geq 0$$

$$e_2 \geq 0$$

$$e_3 \geq 0$$

## LP für den Spielzeugfluss Standardform der Vorlesung

Die Bestimmung des maximalen Flusses entspricht in der Standardform aus der Vorlesung dem Minimierungsproblem

$$\min(-e_1 - e_3)$$

mit folgenden Nebenbedingungen:

## LP für den Spielzeugfluss

### Standardform der Vorlesung

Die Bestimmung des maximalen Flusses entspricht in der Standardform aus der Vorlesung dem Minimierungsproblem

$$\min(-e_1 - e_3)$$

mit folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{ll} e_1 - e_2 \geq 0 & e_1 \geq 0 \\ -e_1 + e_2 \geq 0 & e_2 \geq 0 \\ - e_1 \geq -1 & e_3 \geq 0 \\ - e_2 \geq -2 & \\ - e_3 \geq -3 & \end{array}$$

## LP für den Spielzeugfluss

### Primalprogramm PP vs. Dualprogramm DP

**(PP)**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^T p = \max! \\ Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$M = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$$

**(DP)**

$$\begin{aligned} g(u) &= u^T b = \min! \\ A^T u &\leq p \\ u &\geq 0 \end{aligned}$$

$$N = \{A^T u \leq p, u \geq 0\}$$

## LP für den Spielzeugfluss Primales Programm

Das primale Programm ist:

$$P : \quad \min c^T x \quad \text{unter} \\ Ax \geq b \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

## LP für den Spielzeugfluss

### Primales Programm

Das primale Programm ist:

$$P: \quad \min c^T x \quad \text{unter} \\ Ax \geq b \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

wobei gilt:

$$x \in \mathbb{R}^3, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$$

## LP für den Spielzeugfluss Duales Programm

Das zugehörige duale Programm ist:

$$D : \quad \max y^T b \quad \text{unter} \\ y^T A \leq c^T \quad \text{und} \quad y \geq 0$$

## LP für den Spielzeugfluss Duales Programm

Das zugehörige duale Programm ist:

$$D : \quad \max y^T b \quad \text{unter} \\ y^T A \leq c^T \quad \text{und} \quad y \geq 0$$

wobei gilt:

$$y \in \mathbb{R}^5, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$$

## LP für den Spielzeugfluss Polytop?

Ist das Lösungspolyeder beschränkt?

## LP für den Spielzeugfluss Polytop?

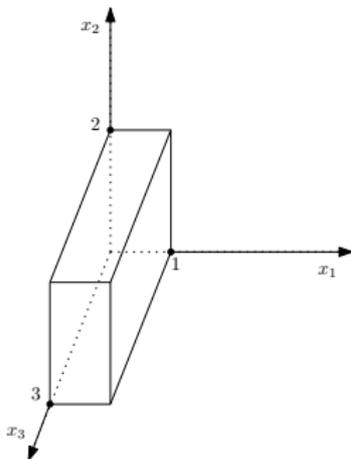
Ist das Lösungspolyeder beschränkt?

Ja, das Lösungspolyeder ist durch den Hyperquader beschränkt, der durch die Kapazitäts- und Positivitätsbedingungen bestimmt wird.

## LP für den Spielzeugfluss Polytop?

Ist das Lösungspolyeder beschränkt?

Ja, das Lösungspolyeder ist durch den Hyperquader beschränkt, der durch die Kapazitäts- und Positivitätsbedingungen bestimmt wird.



## LP für den Spielzeugfluss Graphische Darstellung

Stellen sie das durch die Kapazitätsbedingungen gegebene konvexe Polyeder graphisch dar, sowie die durch die Flusserhaltungsbedingungen gegebene Hyperebene.

## LP für den Spielzeugfluss Graphische Darstellung

Stellen sie das durch die Kapazitätsbedingungen gegebene konvexe Polyeder graphisch dar, sowie die durch die Flusserhaltungsbedingungen gegebene Hyperebene.

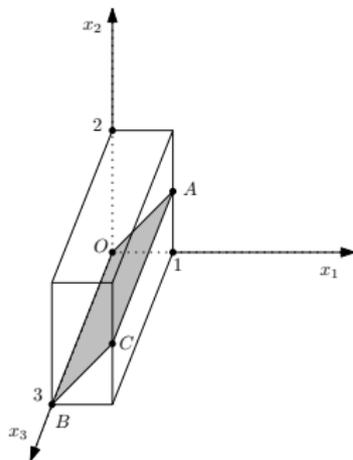


Abbildung: Graphische Darstellung des Lösungsraums in grau

## LP für den Spielzeugfluss Simplexmethode

Führen Sie die Simplexmethode auf dem *Lösungs*-Polyeder durch!

- ▶ Verbessernden Kanten?
- ▶ Welchen Flusserhöhungen entsprechen diese?
- ▶ Wie heißt der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht?

## LP für den Spielzeugfluss Simplexmethode

Führen Sie die Simplexmethode auf dem *Lösungs*-Polyeder durch!

- ▶ Verbessernden Kanten?
- ▶  $(0, A)$ ,  $(0, B)$ , wobei  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (0, 0, 3)$
- ▶ Welchen Flusserhöhungen entsprechen diese?
  
- ▶ Wie heißt der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht?

## LP für den Spielzeugfluss Simplexmethode

Führen Sie die Simplexmethode auf dem *Lösungs*-Polyeder durch!

- ▶ Verbessernden Kanten?
- ▶  $(0, A)$ ,  $(0, B)$ , wobei  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (0, 0, 3)$
- ▶ Welchen Flusserhöhungen entsprechen diese?
- ▶  $(0, A) : f(1)+ = 1, f(2)+ = 1, f(3)+ = 0$ , und  
 $(0, B) : f(1)+ = 0, f(2)+ = 0, f(3)+ = 3$
- ▶ Wie heißt der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht?

## LP für den Spielzeugfluss Simplexmethode

Führen Sie die Simplexmethode auf dem *Lösungs*-Polyeder durch!

- ▶ Verbessernden Kanten?
- ▶  $(0, A)$ ,  $(0, B)$ , wobei  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (0, 0, 3)$
- ▶ Welchen Flusserhöhungen entsprechen diese?
- ▶  $(0, A) : f(1)+ = 1, f(2)+ = 1, f(3)+ = 0$ , und  
 $(0, B) : f(1)+ = 0, f(2)+ = 0, f(3)+ = 3$
- ▶ Wie heißt der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht?
- ▶  $C = (1, 1, 3)$

## Allgemeines LP Formulierung

Betrachten wir nun ein allgemeines Flussproblem.

$$\max \sum_{(s,i) \in E} x_{s,i} - \sum_{(i,s) \in E} x_{i,s}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} x_{i,j} \leq c_{i,j} \\ x_{i,j} \geq 0 \end{array} \right\} \quad \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{i:(i,j) \in E} x_{i,j} - \sum_{i:(j,i) \in E} x_{j,i} = 0 \quad \forall j \in V \setminus \{s, t\}$$

## Allgemeines Fluss-LP Matrix-Formulierung

In Matrixform laute dies

$$\max a^T x$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \text{I} \quad x &\leq c \\ -\text{I} \quad x &\leq 0 \\ B \quad x &= 0 . \end{aligned}$$

Dabei sei  $\text{I}$  eine Einheitsmatrix und  $B$  die Matrix, die sich aus den Flusserhaltungsbedingungen ergibt.

## Allgemeines Fluss-LP

### Dimensionen der Bausteine

Welche Dimensionen haben  $a$ ,  $\mathbb{I}$  und  $B$ ?

## Allgemeines Fluss-LP

### Dimensionen der Bausteine

Welche Dimensionen haben  $a$ ,  $\mathbb{I}$  und  $B$ ?  
Sei  $m = |E|$  und  $n = |V|$ . Dann gilt:

## Allgemeines Fluss-LP

### Dimensionen der Bausteine

Welche Dimensionen haben  $a$ ,  $\mathbb{I}$  und  $B$ ?

Sei  $m = |E|$  und  $n = |V|$ . Dann gilt:

- ▶  $a \in \mathbb{R}^m$ : Ein Fluss entspricht der Belegung aller Kanten  $e \in E$  mit den jeweiligen Flusswerten  $f(e)$ .

## Allgemeines Fluss-LP

### Dimensionen der Bausteine

Welche Dimensionen haben  $a$ ,  $\mathbb{I}$  und  $B$ ?

Sei  $m = |E|$  und  $n = |V|$ . Dann gilt:

- ▶  $a \in \mathbb{R}^m$ : Ein Fluss entspricht der Belegung aller Kanten  $e \in E$  mit den jeweiligen Flusswerten  $f(e)$ .
- ▶  $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ : Für jede Kante gibt es eine Kapazitätsbedingung.

## Allgemeines Fluss-LP

### Dimensionen der Bausteine

Welche Dimensionen haben  $a$ ,  $I$  und  $B$ ?

Sei  $m = |E|$  und  $n = |V|$ . Dann gilt:

- ▶  $a \in \mathbb{R}^m$ : Ein Fluss entspricht der Belegung aller Kanten  $e \in E$  mit den jeweiligen Flusswerten  $f(e)$ .
- ▶  $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ : Für jede Kante gibt es eine Kapazitätsbedingung.
- ▶  $B \in \mathbb{R}^{n-2 \times m}$ : Für jeden der  $n - 2$  Knoten aus  $V \setminus \{s, t\}$  wird die Flusserhaltungsbedingung als Gleichung über die an ihm inzidenten Kanten ausgedrückt.

## Allgemeines Fluss-LP

### Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

## Allgemeines Fluss-LP

### Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

- ▶ Unzusammenhängend?

## Allgemeines Fluss-LP

### Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

- ▶ Unzusammenhängend? Sei Flussgraph zusammenhängend

## Allgemeines Fluss-LP

### Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

- ▶ Unzusammenhängend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- ▶ Sei  $LK = \sum \alpha_j z_j = 0$  eine Linearkombination der Zeilen

## Allgemeines Fluss-LP

### Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

- ▶ Unzusammenhängend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- ▶ Sei  $LK = \sum \alpha_j z_j = 0$  eine Linearkombination der Zeilen
- ▶  $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$ , sonst  $v \in V \setminus S \Rightarrow$  Schnitt

## Allgemeines Fluss-LP

### Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

- ▶ Unzusammenhängend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- ▶ Sei  $LK = \sum \alpha_j z_j = 0$  eine Linearkombination der Zeilen
- ▶  $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$ , sonst  $v \in V \setminus S \Rightarrow$  Schnitt
- ▶ Zsh.  $\Rightarrow \exists (u, v)$  oder  $(v, u) \in E$  mit  $u \in S, v \in V \setminus S$

## Allgemeines Fluss-LP

### Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

- ▶ Unzusammenhängend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- ▶ Sei  $LK = \sum \alpha_j z_j = 0$  eine Linearkombination der Zeilen
- ▶  $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$ , sonst  $v \in V \setminus S \Rightarrow$  Schnitt
- ▶ Zsh.  $\Rightarrow \exists (u, v)$  oder  $(v, u) \in E$  mit  $u \in S, v \in V \setminus S$
- ▶  $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$  und  $v \in S \Rightarrow \alpha_v = 0$ .

## Allgemeines Fluss-LP

### Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

- ▶ Unzusammenhängend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- ▶ Sei  $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$  eine Linearkombination der Zeilen
- ▶  $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$ , sonst  $v \in V \setminus S \Rightarrow$  Schnitt
- ▶ Zsh.  $\Rightarrow \exists (u, v)$  oder  $(v, u) \in E$  mit  $u \in S, v \in V \setminus S$
- ▶  $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$  und  $v \in S \Rightarrow \alpha_v = 0$ .
- ▶ Betrachte im Ergebnis der  $LK$  diejenige Koordinate, die zur Kante  $(u, v)$  gehört:  $LK_{(u,v)} \neq 0$

## Allgemeines Fluss-LP

### Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

- ▶ Unzusammenhängend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- ▶ Sei  $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$  eine Linearkombination der Zeilen
- ▶  $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$ , sonst  $v \in V \setminus S \Rightarrow$  Schnitt
- ▶ Zsh.  $\Rightarrow \exists (u, v)$  oder  $(v, u) \in E$  mit  $u \in S, v \in V \setminus S$
- ▶  $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$  und  $v \in S \Rightarrow \alpha_v = 0$ .
- ▶ Betrachte im Ergebnis der  $LK$  diejenige Koordinate, die zur Kante  $(u, v)$  gehört:  $LK_{(u,v)} \neq 0$
- ▶  $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$

## Allgemeines Fluss-LP

### Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

- ▶ Unzusammenhängend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- ▶ Sei  $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$  eine Linearkombination der Zeilen
- ▶  $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$ , sonst  $v \in V \setminus S \Rightarrow$  Schnitt
- ▶ Zsh.  $\Rightarrow \exists (u, v)$  oder  $(v, u) \in E$  mit  $u \in S, v \in V \setminus S$
- ▶  $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$  und  $v \in S \Rightarrow \alpha_v = 0$ .
- ▶ Betrachte im Ergebnis der  $LK$  diejenige Koordinate, die zur Kante  $(u, v)$  gehört:  $LK_{(u,v)} \neq 0$
- ▶  $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- ▶ Nur triviale Linearkombination  $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$  möglich

## Allgemeines Fluss-LP

### Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

- ▶ Unzusammenhängend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- ▶ Sei  $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$  eine Linearkombination der Zeilen
- ▶  $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$ , sonst  $v \in V \setminus S \Rightarrow$  Schnitt
- ▶ Zsh.  $\Rightarrow \exists (u, v)$  oder  $(v, u) \in E$  mit  $u \in S, v \in V \setminus S$
- ▶  $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$  und  $v \in S \Rightarrow \alpha_v = 0$ .
- ▶ Betrachte im Ergebnis der  $LK$  diejenige Koordinate, die zur Kante  $(u, v)$  gehört:  $LK_{(u,v)} \neq 0$
- ▶  $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- ▶ Nur triviale Linearkombination  $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$  möglich
- ▶  $\Rightarrow$  **L.U.**

## Allgemeines Fluss-LP

### Der zulässige Bereich

Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

## Allgemeines Fluss-LP

### Der zulässige Bereich

Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

- ▶ Zeile von  $B \iff$  Hyperebene der Dimension  $m - 1$  im  $\mathbb{R}^m$ .

## Allgemeines Fluss-LP

### Der zulässige Bereich

Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

- ▶ Zeile von  $B \iff$  Hyperebene der Dimension  $m - 1$  im  $\mathbb{R}^m$ .
- ▶  $c_i \geq 0 \Rightarrow$  Kapazitätsbedingungen-Hyperquader nichtleer (O);

## Allgemeines Fluss-LP

### Der zulässige Bereich

Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

- ▶ Zeile von  $B \iff$  Hyperebene der Dimension  $m - 1$  im  $\mathbb{R}^m$ .
- ▶  $c_i \geq 0 \Rightarrow$  Kapazitätsbedingungen-Hyperquader nichtleer (O);
- ▶ Hyperebene  $\cap$  Hyperquader  $\cap$  andere Hyperebenen  $\neq \emptyset$  (O).

## Allgemeines Fluss-LP

### Der zulässige Bereich

Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

- ▶ Zeile von  $B \iff$  Hyperebene der Dimension  $m - 1$  im  $\mathbb{R}^m$ .
- ▶  $c_i \geq 0 \Rightarrow$  Kapazitätsbedingungen-Hyperquader nichtleer (O);
- ▶ Hyperebene  $\cap$  Hyperquader  $\cap$  andere Hyperebenen  $\neq \emptyset$  (O).
- ▶  $\exists n - 2$  L.U. Hyperebenen.

## Allgemeines Fluss-LP

### Der zulässige Bereich

Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

- ▶ Zeile von  $B \iff$  Hyperebene der Dimension  $m - 1$  im  $\mathbb{R}^m$ .
- ▶  $c_i \geq 0 \Rightarrow$  Kapazitätsbedingungen-Hyperquader nichtleer (O);
- ▶ Hyperebene  $\cap$  Hyperquader  $\cap$  andere Hyperebenen  $\neq \emptyset$  (O).
- ▶  $\exists n - 2$  L.U. Hyperebenen.
- ▶  $\Rightarrow$  Dimension des Lösungspolyeder:  $m - (n - 2)$ .

## Allgemeines Fluss-LP

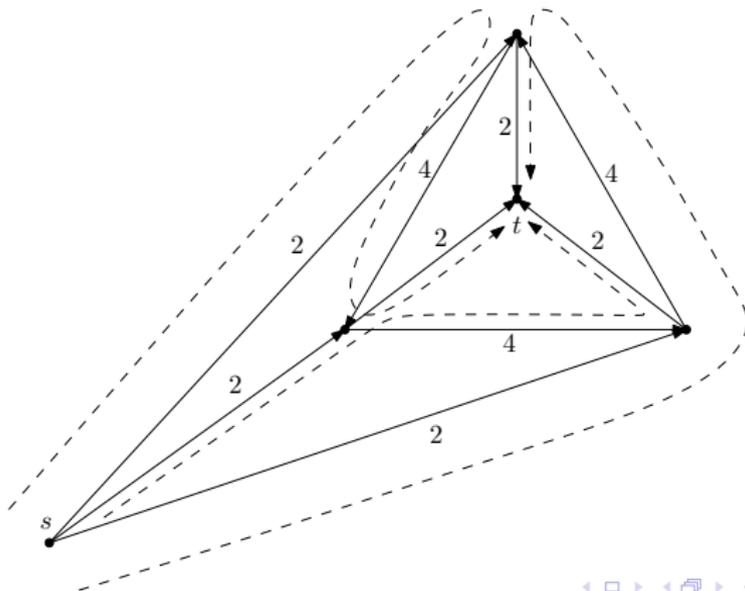
### Flusserhöhung auf $s$ - $t$ -Weg $\Rightarrow$ Simplexschritt?

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Erhöhung des Flusses entlang eines erhöhenden Weges entspricht einem Schritt im Simplexverfahren.

## Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg  $\Rightarrow$  Simplexschritt?

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Erhöhung des Flusses entlang eines erhöhenden Weges entspricht einem Schritt im Simplexverfahren.



# Allgemeines Fluss-LP

## Flusserhöhung auf $s$ - $t$ -Weg $\Rightarrow$ Simplexschritt?

## Allgemeines Fluss-LP

### Flusserhöhung auf $s$ - $t$ -Weg $\Rightarrow$ Simplexschritt?

- ▶ Erhöhe Fluss folgendermaßen

## Allgemeines Fluss-LP

### Flusserhöhung auf $s$ - $t$ -Weg $\Rightarrow$ Simplexschritt?

- ▶ Erhöhe Fluss folgendermaßen
- ▶  $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

## Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg  $\Rightarrow$  Simplexschritt?

- ▶ Erhöhe Fluss folgendermaßen
- ▶  $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- ▶  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$

## Allgemeines Fluss-LP

### Flusserhöhung auf $s$ - $t$ -Weg $\Rightarrow$ Simplexschritt?

- ▶ Erhöhe Fluss folgendermaßen
- ▶  $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- ▶  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- ▶  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$

## Allgemeines Fluss-LP

### Flusserhöhung auf $s$ - $t$ -Weg $\Rightarrow$ Simplexschritt?

- ▶ Erhöhe Fluss folgendermaßen
- ▶  $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- ▶  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- ▶  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- ▶ Aber:  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) =$   
 $1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$   
wobei  $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$ ,  $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$  zulässig!

## Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg  $\Rightarrow$  Simplexschritt?

- ▶ Erhöhe Fluss folgendermaßen
- ▶  $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- ▶  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- ▶  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- ▶ Aber:  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) =$   
 $1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$   
wobei  $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$ ,  $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$  zulässig!
- ▶  $\Rightarrow (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$  keine Ecke

## Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg  $\Rightarrow$  Simplexschritt?

- ▶ Erhöhe Fluss folgendermaßen
- ▶  $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- ▶  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- ▶  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- ▶ Aber:  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) =$   
 $1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$   
wobei  $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$ ,  $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$  zulässig!
- ▶  $\Rightarrow (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$  keine Ecke
- ▶  $\Rightarrow$  kein Simplexschritt

## Allgemeines Fluss-LP

### Simplexschritt $\Rightarrow$ Flusserhöhung auf $s$ - $t$ -Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

## Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt  $\Rightarrow$  Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- ▶ Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.

## Allgemeines Fluss-LP

### Simplexschritt $\Rightarrow$ Flusserhöhung auf $s$ - $t$ -Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- ▶ Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- ▶ Zielfunktion = Größe des  $s$ - $t$ -Flusses.

## Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt  $\Rightarrow$  Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- ▶ Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- ▶ Zielfunktion = Größe des  $s$ - $t$ -Flusses.
- ▶  $\Rightarrow$  Simplexschritt erhöht  $s$ - $t$ -Fluss.

## Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt  $\Rightarrow$  Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- ▶ Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- ▶ Zielfunktion = Größe des  $s$ - $t$ -Flusses.
- ▶  $\Rightarrow$  Simplexschritt erhöht  $s$ - $t$ -Fluss.
- ▶  $\exists$  eine Kante  $(s, v)$ , wo Fluss erhöht wurde.

## Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt  $\Rightarrow$  Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- ▶ Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- ▶ Zielfunktion = Größe des  $s$ - $t$ -Flusses.
- ▶  $\Rightarrow$  Simplexschritt erhöht  $s$ - $t$ -Fluss.
- ▶  $\exists$  eine Kante  $(s, v)$ , wo Fluss erhöht wurde.
- ▶ Flusserhaltung bei  $v \Rightarrow \exists$  Kante  $(v, w)$  wo Fluss erhöht wurde.

## Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt  $\Rightarrow$  Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- ▶ Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- ▶ Zielfunktion = Größe des  $s$ - $t$ -Flusses.
- ▶  $\Rightarrow$  Simplexschritt erhöht  $s$ - $t$ -Fluss.
- ▶  $\exists$  eine Kante  $(s, v)$ , wo Fluss erhöht wurde.
- ▶ Flusserhaltung bei  $v \Rightarrow \exists$  Kante  $(v, w)$  wo Fluss erhöht wurde.
- ▶ ...

## Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt  $\Rightarrow$  Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- ▶ Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- ▶ Zielfunktion = Größe des  $s$ - $t$ -Flusses.
- ▶  $\Rightarrow$  Simplexschritt erhöht  $s$ - $t$ -Fluss.
- ▶  $\exists$  eine Kante  $(s, v)$ , wo Fluss erhöht wurde.
- ▶ Flusserhaltung bei  $v \Rightarrow \exists$  Kante  $(v, w)$  wo Fluss erhöht wurde.
- ▶ ...
- ▶ Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist  $t$  (dort gibt es keine Flusserhaltung).

## Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt  $\Rightarrow$  Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- ▶ Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- ▶ Zielfunktion = Größe des  $s$ - $t$ -Flusses.
- ▶  $\Rightarrow$  Simplexschritt erhöht  $s$ - $t$ -Fluss.
- ▶  $\exists$  eine Kante  $(s, v)$ , wo Fluss erhöht wurde.
- ▶ Flusserhaltung bei  $v \Rightarrow \exists$  Kante  $(v, w)$  wo Fluss erhöht wurde.
- ▶ ...
- ▶ Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist  $t$  (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- ▶ ( $s$  kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine  $s$ - $t$ -Flusserhöhung, sondern Kreis)

## Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt  $\Rightarrow$  Flusserhöhung auf  $s$ - $t$ -Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- ▶ Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- ▶ Zielfunktion = Größe des  $s$ - $t$ -Flusses.
- ▶  $\Rightarrow$  Simplexschritt erhöht  $s$ - $t$ -Fluss.
- ▶  $\exists$  eine Kante  $(s, v)$ , wo Fluss erhöht wurde.
- ▶ Flusserhaltung bei  $v \Rightarrow \exists$  Kante  $(v, w)$  wo Fluss erhöht wurde.
- ▶ ...
- ▶ Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist  $t$  (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- ▶ ( $s$  kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine  $s$ - $t$ -Flusserhöhung, sondern Kreis)
- ▶  $\Rightarrow$  Erhöhender  $s$ - $t$ -Weg (der nicht notwendigerweise einfach sein muss) gefunden.

## Was ist Vertex-Cover

Ein *Vertex-Cover* eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Teilmenge  $V' \subseteq V$ , so dass jede Kante aus  $E$  zu mindestens einem Knoten aus  $V'$  inzident ist. Das Problem VERTEX COVER (VC) besteht nun darin, ein Vertex-Cover mit minimaler Kardinalität zu finden.

## Ein Algorithmus für Vertex-Cover

Approximationsalgorithmus für VERTEX COVER

**Eingabe:** Graph  $G = (V, E)$

**Ausgabe:**  $S$  (Vertex Cover von  $G$ )

- ▶  $S := \emptyset$
- ▶ Für alle Kanten  $\{v_i, w_i\} \in E$  tue
- ▶     Falls  $\{v_i, w_i\}$  nicht durch  $S$  überdeckt ist tue
- ▶          $S \leftarrow v_i$
- ▶          $S \leftarrow w_i$

## Ein Algorithmus für Vertex-Cover Approximationsgüte?

Zeigen Sie, dass der Algorithmus eine Faktor-2-Approximation für das Problem Vertex Cover liefert.

1. Algorithmus liefert ein Vertex Cover.
2. Approximationsgüte ?

## Ein Algorithmus für Vertex-Cover Approximationsgüte?

Zeigen Sie, dass der Algorithmus eine Faktor-2-Approximation für das Problem Vertex Cover liefert.

1. Algorithmus liefert ein Vertex Cover.
2. Approximationsgüte ?

Betrachte Algorithmus, der bereits eine optimale Lösung  $S^*$  als Eingabe bekommt und diese auch wieder ausgibt.

## Ein Algorithmus für Vertex-Cover

**Ein:**  $G$ . **Aus:**  $S$  (Vertex Cover von  $G$ )

- ▶  $S := \emptyset$
- ▶ Für alle Kanten  $\{v_i, w_i\} \in E$  tue
- ▶     Falls  $\{v_i, w_i\}$  nicht durch  $S$  überdeckt ist tue
- ▶          $S \leftarrow v_i$
- ▶          $S \leftarrow w_i$

## Ein Algorithmus für Vertex-Cover

**Ein:**  $G$ . **Aus:**  $S$  (Vertex Cover von  $G$ )

- ▶  $S := \emptyset$
- ▶ Für alle Kanten  $\{v_i, w_i\} \in E$  tue
- ▶     Falls  $\{v_i, w_i\}$  nicht durch  $S$  überdeckt ist tue
- ▶          $S \leftarrow v_i$
- ▶          $S \leftarrow w_i$

**Ein:**  $G$ , Optimallösung  $S^*$ . **Aus:**  $S$  (Minimales Vertex Cover von  $G$ )

- ▶  $S := \emptyset$
- ▶ Für alle Kanten  $\{v_i, w_i\} \in E$  tue
- ▶     Falls  $\{v_i, w_i\}$  nicht durch  $S$  überdeckt ist tue
- ▶         Falls  $v_i \in S^*$
- ▶              $S \leftarrow v_i$
- ▶         Falls  $w_i \in S^*$
- ▶              $S \leftarrow w_i$

## Ein Algorithmus für Vertex-Cover Approximationsgüte 2 ist scharf

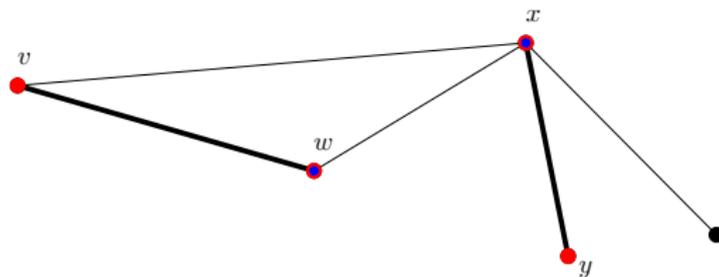
# Ein Algorithmus für Vertex-Cover

## Approximationsgüte 2 ist scharf



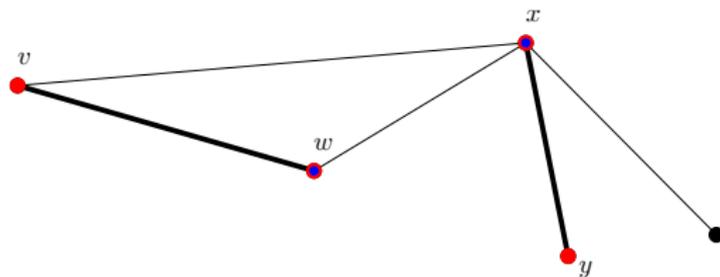
# Ein Algorithmus für Vertex-Cover

## Approximationsgüte 2 ist scharf



## Ein Algorithmus für Vertex-Cover

Approximationsgüte 2 ist scharf



Optimallösung:  $|S| = 2$

Approximierte Lösung:  $|S| = 4$

## First Fit (FF)

Analyse siehe neues Skript

First Fit ist ein etwas besserer Algorithmus als NF für Bin-Packing:

**Eingabe:** Menge  $M$  und Gewichtsfunktion  $s$

**Ausgabe:** Approximationslösung für Bin Packing

1. Füge  $a_1$  in  $B_1$  ein
2. Für  $a_i \in \{a_2, \dots, a_N\}$  tue
3.  $j \leftarrow \max \ell : B_1, \dots, B_\ell$  nichtleer
4.  $r \leftarrow \min \{t \leq j + 1 : s(a_i) \leq 1 - \sum_{a \in B_t} s(a)\}$
5. Füge  $a_i$  in  $B_r$  ein

## First Fit (FF)

Analyse siehe neues Skript

First Fit ist ein etwas besserer Algorithmus als NF für Bin-Packing:

**Eingabe:** Menge  $M$  und Gewichtsfunktion  $s$

**Ausgabe:** Approximationslösung für Bin Packing

1. Füge  $a_1$  in  $B_1$  ein
2. Für  $a_i \in \{a_2, \dots, a_N\}$  tue
3.      $j \leftarrow \max \ell : B_1, \dots, B_\ell$  nichtleer
4.      $r \leftarrow \min \{t \leq j + 1 : s(a_i) \leq 1 - \sum_{a \in B_t} s(a)\}$
5.     Füge  $a_i$  in  $B_r$  ein

Man kann zeigen:  $\text{FF}(I) < \frac{17}{10} \cdot \text{OPT}(I) + 1$

## List Scheduling

Analyse siehe neues Skript

List Scheduling ordnet eine Menge von  $n$  Jobs  $J_i$  mit Bearbeitungsdauer  $p_i$  eine Menge von  $m$  Maschinen zu, damit möglichst schnell alle Jobs fertig sind.

## List Scheduling

Analyse siehe neues Skript

List Scheduling ordnet eine Menge von  $n$  Jobs  $J_i$  mit Bearbeitungsdauer  $p_i$  eine Menge von  $m$  Maschinen zu, damit möglichst schnell alle Jobs fertig sind.

**Eingabe:**  $n$  Jobs mit Zeiten  $p_i$  und  $m$

**Ausgabe:** Zeitplan

1. Lege ersten  $m$  Jobs auf die Maschinen
2. Sobald eine Maschine stillsteht, gib ihr einen neuen Job

## List Scheduling

Analyse siehe neues Skript

List Scheduling ordnet eine Menge von  $n$  Jobs  $J_i$  mit Bearbeitungsdauer  $p_i$  eine Menge von  $m$  Maschinen zu, damit möglichst schnell alle Jobs fertig sind.

**Eingabe:**  $n$  Jobs mit Zeiten  $p_i$  und  $m$

**Ausgabe:** Zeitplan

1. Lege ersten  $m$  Jobs auf die Maschinen
2. Sobald eine Maschine stillsteht, gib ihr einen neuen Job

Laufzeit ist in  $O(n)$

Relative Gütegarantie ?

## Deutschlands Informatik-Größen hören und sehen! Kolloquienreihe im kommenden Semester

**Thema:** „*Algorithm Engineering*“

**Termin:** Montags 17:30 Uhr

**Infos (in Zukunft):** [www.informatik.uni-karlsruhe.de](http://www.informatik.uni-karlsruhe.de)

## Deutschlands Informatik-Größen hören und sehen! Kolloquienreihe im kommenden Semester

**Thema:** „*Algorithm Engineering*“

**Termin:** Montags 17:30 Uhr

**Infos (in Zukunft):** [www.informatik.uni-karlsruhe.de](http://www.informatik.uni-karlsruhe.de)

**Erster Vortrag:** Kurt Mehlhorn (am 24.April)

## ...ein paar Informationen

## ...ein paar Informationen

- ▶ Ähnliche Struktur wie *Informatik 3*

## ...ein paar Informationen

- ▶ Ähnliche Struktur wie *Informatik 3*
- ▶ 60 Minuten (leider)

## ...ein paar Informationen

- ▶ Ähnliche Struktur wie *Informatik 3*
- ▶ 60 Minuten (leider)
- ▶ Fragen zu jedem Thema

## ...ein paar Informationen

- ▶ Ähnliche Struktur wie *Informatik 3*
- ▶ 60 Minuten (leider)
- ▶ Fragen zu jedem Thema
- ▶ Nicht alle sind zu lösen um eine 1 zu bekommen

## ...ein paar Informationen

- ▶ Ähnliche Struktur wie *Informatik 3*
- ▶ 60 Minuten (leider)
- ▶ Fragen zu jedem Thema
- ▶ Nicht alle sind zu lösen um eine 1 zu bekommen
- ▶ Multiple-Choice-Teil ist auch dabei

## ...ein paar Informationen

- ▶ Ähnliche Struktur wie *Informatik 3*
- ▶ 60 Minuten (leider)
- ▶ Fragen zu jedem Thema
- ▶ Nicht alle sind zu lösen um eine 1 zu bekommen
- ▶ Multiple-Choice-Teil ist auch dabei
- ▶ Schwerpunkte der Vorlesung beachten, z.B.:
  - ▶ Union-Find
  - ▶ Goldberg-Tarjan
  - ▶ Kreisbasen
  - ▶ ...

## ...ein paar Informationen

- ▶ Ähnliche Struktur wie *Informatik 3*
- ▶ 60 Minuten (leider)
- ▶ Fragen zu jedem Thema
- ▶ Nicht alle sind zu lösen um eine 1 zu bekommen
- ▶ Multiple-Choice-Teil ist auch dabei
- ▶ Schwerpunkte der Vorlesung beachten, z.B.:
  - ▶ Union-Find
  - ▶ Goldberg-Tarjan
  - ▶ Kreisbasen
  - ▶ ...
- ▶ Skript ist ab morgen vollständig online

## Eine grobe Einstufung der Übungsaufgaben

Natürlich sind eigentlich alle relevant. Diese Einstufung ist ohne Gewähr und keinerlei Garantie dafür dass eine Aufgabenart drankommt oder nicht drankommt!

## Eine grobe Einstufung der Übungsaufgaben

Natürlich sind eigentlich alle relevant. Diese Einstufung ist ohne Gewähr und keinerlei Garantie dafür dass eine Aufgabenart drankommt oder nicht drankommt!

**Blatt 1:** 1BW(aK, bK, cK+, dK, eK+); 2BW(K); 3(K++); 4BW(K); 5BW(K+); 6BW(K); 7BW(K)

**Blatt 2:** 1(K+); 2BW(aK+, bK, cK); 3(K++); 4BW(K); 5BW(aK, bK, cK+, dK++, eK+);

**Blatt 3:** 1(aK, bK+, cK+, dK++); 2BW(a,b); 3; 4BW(K); 5BW(aK, bK, cK, dK); 6BW(K); 7(aK+, bK+)

**Blatt 4:** 1(aK++, bK++); 2BW(aK++, bK++); 3BW(K++); 4(alle K++); 5BW(K)

**Blatt 5:** 1BW(aK, bK); 2BW(K); 3(aK; bK+; cK++); 4BW(aK, bK, cK++); 5BW(alle K)

**Blatt 6:** 1BW(K); 2BW(K); 3BW(aK+, bK+, cK++, dK); 4(K++); 5BW(K+); 6BW(alle K)

**Blatt 7:** 1BW(aK, bK, cK, dK, eK, fK+, gK+, hK++, iK++); 2BW(K); 3BW(K)

BW: Besonders Wichtig, der Stoff zu dieser Aufgabe, gehört zum Kern der Vorlesung.

K: Klausurniveau

K+: etwas zu langwierig/speziell/schwer, oder eine schwere Klausuraufgabe

K++: deutlich zu langwierig/speziell/schwer, oder eine sehr schwere Klausuraufgabe

kein „K“: eher zu leicht/basic/hintergründig/unwichtig