Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmentechnik
WS 05/06

4. Musterlösung

Problem 1: Kreuzende Schnitte **

Zwei Schnitte $(S, V \setminus S)$ und $(T, V \setminus T)$ in einem Graph $G = (V, E)$ *kreuzen sich*, wenn keine der Mengen $A := S \cap T$, $B := S \setminus T$, $C := T \setminus S$ und $D := V \setminus (S \cup T)$ leer ist. Sei $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ eine Kantengewichtsfunktion auf G.

(a) Sind $(S, V \setminus S)$ und $(T, V \setminus T)$ zwei sich kreuzende Schnitte minimalen Gewichts λ in G, so gilt $c(A, D) = c(B, C) = 0$ und $c(A, B) = c(B, D) = c(D, C) = c(C, A) = \lambda/2$.

Lösung. Zur Veranschaulichung der sich kreuzenden minimalen Schnitte $(S, V \setminus S)$ und $(T, V \setminus T)$ betrachten wir die folgende Abbildung:

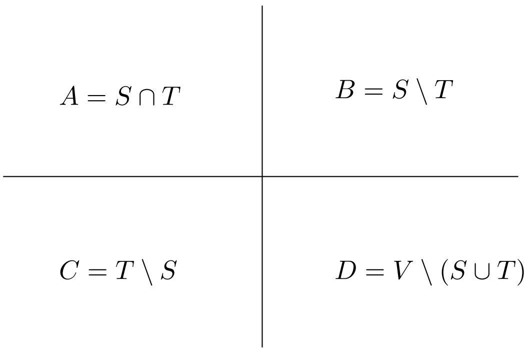

Abbildung 1: Aufteilung von V in disjunkten Mengen A, B, C und D.

Die folgenden Gleichungen kann man aus der Abbildung (1) entnehmen:

$$\lambda = c(S, V \setminus S) = c(A, C) + c(B, D) + c(A, D) + c(B, C) \tag{1}$$
$$\lambda = c(T, V \setminus T) = c(A, B) + c(C, D) + c(A, D) + c(B, C) \tag{2}$$

- Behauptung 1: $c(A, D) = c(B, C) = 0$.

  Beweis:
  Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt:

  $$c(A, C) + c(A, B) + c(B, D) + c(C, D) + 2c(A, D) + 2c(B, C) = 2\lambda. \tag{3}$$

  Annahme $c(A, D) > 0$:
  Aus Gleichung (3) und $2c(A, D) > 0$ folgt:

  $$\begin{aligned} & c(A, C) + c(A, B) + c(B, D) + c(C, D) + 2c(B, C) < 2\lambda \\ \Rightarrow\ & c(A, C) + c(C, D) + c(B, C) < \lambda \quad \text{oder} \quad c(A, B) + c(B, D) + c(B, C) < \lambda. \end{aligned}$$

Für die Gewichte der Schnitte $(C, V \setminus C)$ und $(B, V \setminus B)$ würde dann gelten:

$$c(C, V \setminus C) = c(A, C) + c(C, D) + c(B, C) < \lambda$$

oder

$$c(B, V \setminus B) = c(A, B) + c(B, D) + c(B, C) < \lambda.$$

Dieses Ergebnis ist aber ein Widerspruch, da sonst die Schnitte $(S, V \setminus S)$ und $(T, V \setminus T)$ nicht minimal wären. Somit ist die Annahme $c(A, D) > 0$ falsch und es muss gelten $c(A, D) = 0$.

Eine analoge Berechnung ergibt $c(B, C) > 0$.

- Behauptung 2: $c(A, B) = c(B, D) = c(D, C) = c(C, A) = \lambda/2$.

  Beweis:
  Aus der bewiesenen Behauptung 1 und den Gleichungen aus 1 und 2 ergibt sich:

  $$c(A, B) + c(C, D) + c(A, C) + c(B, D) = 2\lambda.$$

  Nun betrachten wir die Schnitte $(A, V \setminus A)$, $(B, V \setminus B)$, $(C, V \setminus C)$ und $(D, V \setminus D)$. Da ein minimaler Schnitt des Graphen das Gewicht λ hat, können wir die Gewichte dieser Schnitte wie folgt abschätzen:

  $$c(A, V \setminus A) = c(A, B) + c(A, C) \geq \lambda \tag{4}$$
  $$c(B, V \setminus B) = c(A, B) + c(B, D) \geq \lambda \tag{5}$$
  $$c(C, V \setminus C) = c(C, D) + c(A, C) \geq \lambda \tag{6}$$
  $$c(D, V \setminus D) = c(C, D) + c(B, D) \geq \lambda. \tag{7}$$

  <u>1. Fall:</u> Annahme $c(A, B) < \lambda/2$.
  Aus den Ungleichungen (4) und (5) folgt $c(A, C) > \lambda/2$ und $c(B, D) > \lambda/2$. Für den Schnitt $(S, V \setminus S)$ würde dann gelten:

  $$c(S, V \setminus S) = c(A, C) + c(B, D) > \lambda$$

  Das ist ein Widerspruch da $c(S, V \setminus S) = \lambda$.

  <u>2. Fall:</u> Annahme $c(A, B) > \lambda/2$.
  Aus der Ungleichung (4) folgt $c(A, C) < \lambda/2$. Hieraus und aus der Ungleichung (6) folgt nun $c(C, D) > \lambda/2$. Für den Schnitt $(T, V \setminus T)$ würde dann gelten:

  $$c(T, V \setminus T) = c(A, B) + c(C, D) > \lambda$$

  Das ist ein Widerspruch wegen $c(T, V \setminus T) = \lambda$.

  Somit gilt: $c(A, B) = \lambda/2$.

  Analog kann man für c(B,D), c(D,C) und c(C,A) beweisen:

  $$c(B, D) = c(D, C) = c(C, A) = \lambda/2. \qquad \square$$

(b) Sind s und t zwei adjazente Knoten mit $c(\{s, t\}) > 0$, so enthält die Menge der minimalen Schnitte von G, die s und t trennen, keine zwei sich kreuzenden Schnitte.

Lösung. Annahme $(S, V \setminus S)$ und $(T, V \setminus T)$ wären zwei sich kreuzende minimale Schnitte die s und t trennen. Ohne Einschränkung soll gelten $s \in S \cap T$.

Es gilt:

$$(s \in S \cap T) \Rightarrow (s \in S) \wedge (s \in T) \Rightarrow (t \in V \setminus T) \wedge (t \in V \setminus S) \Rightarrow (t \in V \setminus (S \cup T)).$$

Aus $c(\{s,t\}) > 0$ ergibt sich:

$$c(S \cap T, V \setminus (S \cup T)) > 0.$$

In der Teilaufgabe (a) haben wir aber bereits folgendes für zwei sich kreuzende minimale Schnitte bewiesen:

$$c(A, D) = c(S \cap T, V \setminus (S \cup T)) = 0.$$

Wir erhalten also einen Widerspruch. Es existieren also keine zwei sich kreuzende minimale Schnitte, die s und t trennen. □

Problem 2: Mehr Schnitte **

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und Kantengewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}$. Für zwei Knoten s und t in G bezeichne $(S_{st}, V \setminus S_{st})$ einen s-t-Schnitt minimalen Gewichts in G und $c_{st} = c(S_{st}, V \setminus S_{st})$ das Gewicht eines solchen Schnittes.

(a) Sei $v_1, v_2, \ldots, v_k$ eine beliebige Folge von paarweise verschiedenen Knoten in G. Zeigen Sie: $c_{v_1,v_k} \geq \min\{c_{v_1,v_2}, c_{v_2,v_3}, \ldots, c_{v_{k-1},v_k}\}$.

Lösung. Ohne Einschränkung sei $v_1 \in S_{v_1,v_k}$. Dann ist $v_k \in V \setminus S_{v_1,v_k}$. Wir betrachten einen v_1-v_k-Schnitt $(S_{v_1,v_k}, V \setminus S_{v_1,v_k})$ minimalen Gewichts. Die Folge $v_1, v_2, \ldots, v_k$ enthält zwei Knoten v_l und v_{l+1}, so dass $v_l \in S_{v_1,v_k}$ und $v_{l+1} \in V \setminus S_{v_1,v_k}$. Andernfalls lägen alle Knoten in S_{v_1,v_k} oder $V \setminus S_{v_1,v_k}$. Dieser Schnitt ist somit ebenfalls ein v_l-v_{l+1}-Schnitt. Da $c_{v_l,v_{l+1}}$ der minimale Wert eines v_l-v_{l+1}-Schnittes ist, muss gelten:

$$c_{v_1,v_k} \geq c_{v_l,v_{l+1}} \geq \min\{c_{v_1,v_2}, c_{v_2,v_3}, \ldots, c_{v_{k-1},v_k}\}.$$ □

(b) Seien u, v, w drei paarweise verschiedene Knoten in G. Zeigen Sie, dass es eine Reihenfolge c_1, c_2, c_3 der Werte c_{uv}, c_{vw}, c_{wu} gibt, so dass $c_1 = c_2 \leq c_3$ gilt.

Lösung. Betrachte Abbildung 2. Sei ohne Einschränkung $c_{uv} \leq c_{vw}$ und $c_{uv} \leq c_{uw}$ (sonst können die Knoten entsprechend umbenannt werden). Sei $(S_{uv}, V \setminus S_{uv})$ ein minimaler u-v-Schnitt. Sei ohne Einschränkung $v, w \in S_{u,v}$ (sonst vertausche u und v). Der Schnitt $(S_{uv}, V \setminus S_{uv})$ ist auch ein u-w-Schnitt (siehe Abbildung 2). Daraus folgt $c_{uw} \leq c_{uv}$. Wegen $c_{uv} \leq c_{vw}$ folgt dann: $c_{uv} = c_{vw}$. Daraus folgt die Behauptung. □

Problem 3: Stoer und Wagner – negativ? **

An welcher Stelle im Korrektheitsbeweis zum Algorithmus von Stoer und Wagner wurde verwendet, dass die Kantengewichte nicht negativ sind? Finden Sie ein Beispiel eines Graphen mit negativen Kantengewichten und einen Startknoten a, so dass der Algorithmus von Stoer und Wagner keinen minimalen Schnitt liefert.

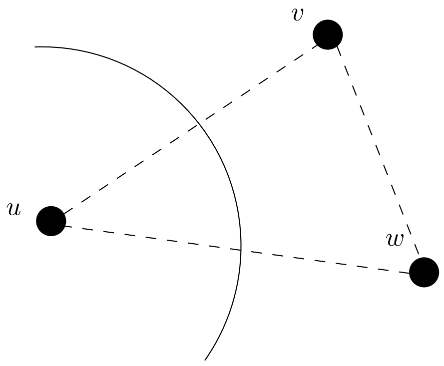

Abbildung 2: Anordnung der Knoten u, v und w.

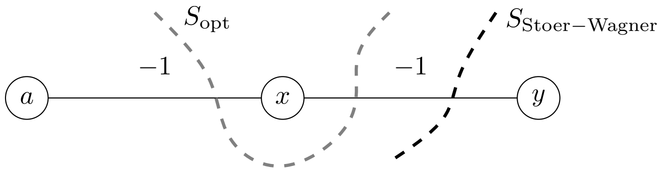

Abbildung 3: Der minimale Schnitt ist grau gezeichnet (Gewicht -2). Der Algorithmus von Stoer und Wagner findet jedoch nur den schwarzen Schnitt (Gewicht -1)

Lösung. Das nichtnegative Kantengewicht wird im Induktionsschritt zum Beweis der Korrektheit von MINSCHNITTPHASE benutzt. Nachdem argumentiert wird dass :

$$\begin{aligned}(S_u \setminus S_v, u) &\subseteq (S'_u, (V \setminus S') \cap (S_u \cup \{u\})) \qquad \text{und}\\ (S'_v, (V \setminus S') \cap (S_v \cup \{v\})) &\subseteq (S'_u, (V \setminus S') \cap (S_u \cup \{u\})) \qquad \text{zudem gilt noch}\\ (S_u \setminus S_v, u) \cap (S'_v, (V \setminus S') \cap (S_v \cup \{v\})) &= \emptyset \qquad \text{(Disjunktheit)},\end{aligned}$$

wird geschlossen dass aus dem Addieren zweier Schnittkosten die Summe nicht kleiner sein wird, als die Summanden:

$$\begin{aligned}c(S_u, u) &\leq c(S'_v, (V \setminus S') \cap (S_v \cup \{v\})) + c(S_u \setminus S_v, u)\\ &\leq c(S'_u, (V \setminus S') \cap (S_u \cup \{u\})) \qquad \text{(Nur bei nichtnegativen Summanden!)}.\end{aligned}$$

Die letzte Zeile benutzt die Nichtnegativität der Kantengewichte. Ein Gegenbeispiel ist leicht konstruiert, wie in Abbildung 3 zu sehen ist. □

Problem 4: Spektrale Analyse ***

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ und der Kantengewichtsfunktion $c \equiv 1$. Sei A die Adjazenzmatrix von G und D die $n \times n$ Matrix, auf deren Diagonale die Knotengrade stehen, d.h. $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit

$$d_{ij} = \begin{cases} d_G(i) & \text{falls } i = j\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Da die Matrix $L := D - A$ symmetrisch ist, sind die Eigenwerte von L alle reell und es gibt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren[1] von L.

[1]Ein Vektor $v \neq 0$ heißt Eigenvektor einer Matrix A, wenn es eine Zahl λ mit $Av = \lambda v$ gibt. Die Zahl λ heißt dann Eigenwert von A.

(a) Zu einem $a \in \mathbb{R}$ sei für eine Teilmeng $S \subset V$ der Indikatorvektor $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ von S definiert durch $x_i = a$, falls $i \in S$ und $x_i = a - 1$ sonst. Zeigen Sie

$$c(S, V \setminus S) = \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2.$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^t L x = \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2$.

(c) Ist v ein Eigenvektor von L zum Eigenwert λ, so gilt $\lambda = \frac{v^t L v}{v^t v} \geq 0$.

(d) Der kleinste Eigenwert von L ist $\lambda_0 = 0$ mit zugehörigem Eigenvektor $(1, \dots, 1)^t$.

(e) Zwischen dem zweitkleinsten Eigenvektor λ_1 und dem Gewicht λ eines minimalen Schnittes in G gilt die Beziehung

$$\lambda_1 \leq \lambda(1 + \frac{1}{n-1}).$$

Lösung:

(a) Da gilt $(x_i - x_j)^2 = (x_j - x_i)^2$ ist die Summe wohldefiniert und es gilt mit $c \equiv 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2 &= \sum_{\substack{\{i,j\} \in E \\ i,j \in S}} (a-a)^2 + \sum_{\substack{\{i,j\} \in E \\ i,j \notin S}} ((a-1) - (a-1))^2 + \sum_{\substack{\{i,j\} \in E \\ i \in S, j \notin S}} (a - (a-1))^2 \\
&= 0 \qquad\qquad + 0 \qquad\qquad + \sum_{\substack{\{i,j\} \in E \\ i \in S, j \notin S}} 1 \\
&= c(S, V \setminus S)
\end{aligned}$$

(b) Seien im Folgenden d_i der Grad des Knoten i, und $(a_{ij})_{ij}$ die Elemente der Adjazenzmatrix. Es gilt

$$\begin{aligned}
x^T L x &= x^T D x && - x^T A x \\
&= \sum_i (d_i \cdot x_i^2) && - \sum_i \sum_{j \neq i} (a_{ij} \cdot x_i x_j) \\
&= \sum_i ((\sum_{j \neq i} a_{ij}) \cdot x_i^2) && - \sum_i \sum_{j \neq i} (a_{ij} \cdot x_i x_j) \\
&= \sum_i ((\sum_{j < i} a_{ij}) \cdot x_i^2) + \sum_i ((\sum_{i<j} \underbrace{a_{ij}}_{=a_{ji}}) \cdot x_i^2) && - \sum_i \sum_{j<i} (a_{ij} \cdot x_i x_j) - \sum_i \sum_{i<j} (\underbrace{a_{ij}}_{=a_{ji}} \cdot x_i x_j) \\
&= \sum_{j<i} (a_{ij} \cdot x_i^2) + \sum_{i<j} (a_{ji} \cdot x_i^2) && - \sum_{j<i} (a_{ij} \cdot x_i x_j) - \sum_{i<j} (a_{ji} \cdot x_j x_i) \\
&= \sum_{j<i} (a_{ij} \cdot x_i^2) + \sum_{j<i} (a_{ij} \cdot x_j^2) && - \sum_{j<i} (a_{ij} \cdot x_i x_j) - \sum_{j<i} (a_{ij} \cdot x_i x_j) \\
&= \sum_{j<i} a_{ij} (x_i^2 - 2 x_i x_j + x_j^2)) \\
&= \sum_{j<i} (a_{ij} \cdot (x_i - x_j)^2) \\
&= \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2)
\end{aligned}$$

(c) Für λ als Eigenwert zu Eigenvektor v gilt $v^T v > 0$, und somit

$$\lambda = \lambda \cdot \frac{v^T v}{v^T v} = \frac{v^T v \cdot \lambda}{v^T v} = \frac{v^T L v}{v^T v} \quad .$$

Aus Teilaufgabe (b) folgt zudem, dass $v^T L v \geq 0$ (Summe von Quadraten), und somit $\lambda \geq 0$.

(d) Es ist $\lambda_0 = 0$ Eigenwert zum Eigenvektor $(1, \ldots, 1)$ da gilt:

$$L(1, \ldots, 1) = (d_i + \sum_j a_{ij})_i = (0, \ldots, 0)^T.$$

Aus Teilaufgabe (c) folgt dass $\lambda_0 = 0$ kleinster Eigenvektor ist.

(e) Da L symmetrisch ist, gibt es eine Orthonormalbasis U von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren u_i (mit Eigenwerten λ_j) von L. Es gelte $0 = \lambda_0 < \lambda_1 <, \ldots, < \lambda_k$ Es gilt durch Darstellung mit Hilfe einer Orthonormalbasis U für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit geeigneten α_i:

$$v = \sum_i \alpha_i u_i$$

Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned}
v^T L v &= (\sum_i \alpha_i u_i)^T L (\sum_i \alpha_i u_i) \\
&= \sum_i \sum_j (\alpha_i u_i^T L \alpha_j u_j) \\
&= \sum_i \sum_j (\alpha_i \alpha_j u_i^T \lambda_j u_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i^2 \lambda_i) \qquad \text{da für } i \neq j \text{ gilt } u_i \perp u_j \text{ und } u_i^T u_i = 1 \\
&\geq \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i^2 \lambda_1) \qquad \text{Da } \lambda_0 = 0.
\end{aligned}$$

Falls $||v|| = 1$ dann gilt sogar $\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i^2 \lambda_1) = \lambda_1$. Es gilt Gleichheit in der letzten Zeile, falls $v \perp u_0$ ist. Also minimiert u_1 den Wert von $v^T L v$ unter allen Vektoren v mit $||v|| = 1$ und $v \perp u_0$. Sei nun u_0 der normierte Eigenvektor zum Eigenwert 0, dann gilt:

$$v^T u_0 = (\sum_i \alpha_i u_i)^T u_0 = \sum_i (\alpha_i u_i^T u_0) = \alpha_0 \tag{8}$$

Weiterhin gilt für die Summe der Koeffizientenquadrate bezüglich einer Orthonormalbasis stets:

$$||x||^2 = x^T x = (\sum_i \alpha_i u_i)^T (\sum_i \alpha_i u_i) = \sum_i \alpha_i^2 \tag{9}$$

Beachte dass alle Teilaufgaben für einen beliebigen Wert von a funktionieren. Nun können wir die Aufgabe lösen, sei dazu x ein Indikatorvektor:

$$\begin{aligned}
\lambda = c(S, V \setminus S) \underbrace{=}_{\text{(b)}} x^T L x \\
\underbrace{\geq}_{\text{siehe oben}} \sum_{i>0} \alpha_i^2 \lambda_1 \\
= ||x||^2 \lambda_1 - \alpha_0^2 \lambda_1 & \quad \text{siehe Gleichung 9} \\
= \lambda_1(||x||^2 - (\underbrace{x^T u_0}_{=x^T(1,\dots,1)})^2) & \quad \text{siehe Gleichung 8} \\
= \lambda_1(||x||^2 - (\sum_i x_i)^2) \\
\underbrace{=}_{\text{setze } a=1} \lambda_1(|S| - \frac{|S|^2}{n}) & \quad \text{wird (nichttrivial) minimal für } |S| = 1 \\
\geq \lambda_1(1 - \frac{1}{n})
\end{aligned}$$

Und somit folgt:

$$\lambda_1 \leq \lambda \frac{n}{n-1}$$

□

Problem 5: Finde den Fluss *

Bestimmen Sie ausgehend vom eingetragenen Fluß f einen Maximalfluß im nachstehenden Netzwerk $(D; s, t; c)$. Dabei ist die Beschriftung der Kanten $e \in E$ als $f(e)/c(e)$ zu lesen. Weisen Sie die Maximalität Ihres Flusses anhand eines minimalen s-t-Schnittes nach.

Lösung:

Wir bestimmen den maximalen Fluss mit der Methode der erhöhenden Wegen (nach Edmonds und Karp). Wir erhalten den Fluss in der Abbildung 5.

Nach dem Max-Flow-Min-Cut-Satz induziert die Menge S der Knoten, die durch einen erhöhenden Weg in diesem maximalen Fluss von s erreichbar sind, einen Schnitt $(S, V \setminus S)$ minimalen Gewichts (siehe Abbildung 6). In unserem Fall ist $S = \{s, a\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
c(S, V \setminus S) &= c(s,b) + c(s,c) + c(a,d) + c(a,t) \\
&= 5 + 2 + 1 + 2 \\
&= 10 \\
&= 3 + 5 + 2 \\
&= f(s,a) + f(s,b) + f(s,c) \\
&= w(f).
\end{aligned}$$

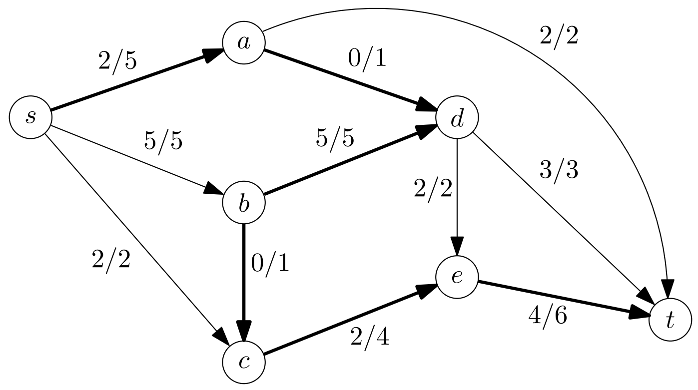

Abbildung 4: Bestimmung eines erhöhenden Weges.

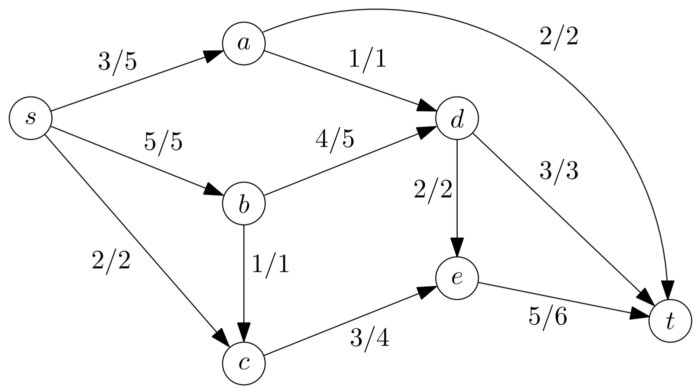

Abbildung 5: Keine erhöhende Wege ⇒ Maximaler s-t-Fluss.

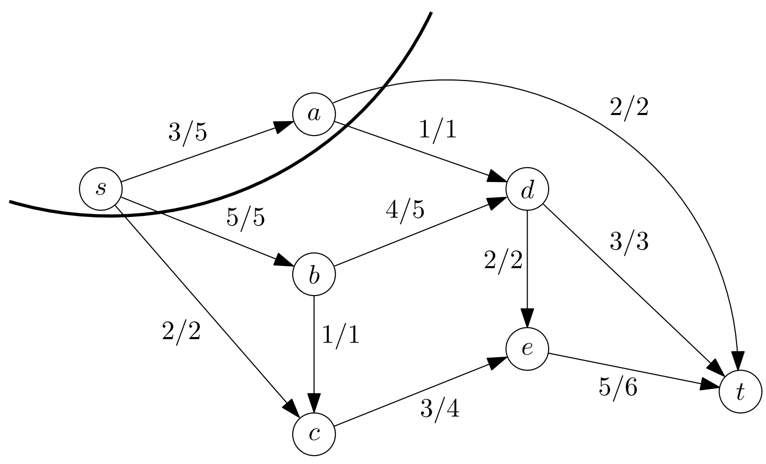

Abbildung 6: Minimaler s-t-Schnitt.