UNIVERSITÄT KARLSRUHE – FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR ALGORITHMEN UND KOGNITIVE SYSTEME
INSTITUT FÜR LOGIK, KOMPLEXITÄT UND DEDUKTIONSSYSTEME

8. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 14. Februar 2005, *zu Beginn* der Vorlesung

Besprechung: Donnerstag, 17. Februar 2005, Raum -101, 11:30 Uhr

Aufgabe 1

Ein deterministischer Online-Algorithmus A heißt *strikt c-kompetitiv*, wenn für alle Eingabeinstanzen I gilt: $\mathrm{A}(I) \leq c \cdot \mathrm{OPT}(I)$.

Ein randomisierter Online-Algorithmus A heißt *strikt c-kompetitiv*, wenn für alle Eingabeinstanzen I gilt: $E[\mathrm{A}(I)] \leq c \cdot \mathrm{OPT}(I)$. Dabei ist in beiden Fällen c das Infimum über alle möglichen Werte, für die die Ungleichungen gelten.

Sie haben sich entschlossen, diesen Winter Skifahren zu gehen, allerdings wissen Sie weder, wie oft dies der Fall sein wird, noch besitzen Sie Skier. Sie können nun bei jeder Skiausfahrt zu Kosten 1 Skier leihen oder für Kosten N Skier kaufen.

(a) Geben Sie einen strikten $(2 - 1/N)$-kompetitiven deterministischen Online-Algorithmus an. Zeigen Sie, dass es keinen deterministischen Online-Algorithmus gibt, der eine bessere Kompetivität hat.

(b) Zeigen Sie, dass der folgende randomisierte Online-Algorithmus für $N \to \infty$ gegen eine Kompetivität von $e/(e-1) \approx 1.58$ strebt. Der Algorithmus wählt vorab ein zufälliges $i \in \{1, \ldots, N-1\}$ und kauft die Skier beim i. Skifahren. Die Wahrscheinlichkeit p_i, dass i gewählt wird, beträgt $p_i = \alpha\rho^i$, wobei $\rho = N/(N-1)$ und $\alpha = (\rho - 1)/(\rho^N - 1)$ ist.

Aufgabe 2

Für das Seitenwechselproblem aus der Vorlesung betrachten wir nun einen Rechner mit Cache der Größe c und Hauptspeicher der Größe $c + 1$.

(a) Zeigen Sie, dass jeder deterministische Online-Algorithmus auch für beliebig lange Eingaben einen 'cache miss' pro Anfrage verursachen kann.

(b) Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung behandelte Algorithmus MIN auf einer Eingabe der Länge n im schlechtesten Fall n/c 'cache misses' verursacht.

(c) Zeigen Sie, dass ein deterministischer Online-Algorithmus höchstens c-kompetitiv ist.

Aufgabe 3

(a) Geben Sie die Definition eines metrischen Raumes.

(b) Gegeben sei das Seitenwechselproblem mit gewichteten Elementen aus Punkt 8.19 des Vorlesungsskriptes. Die Kosten für das Laden eines Elementes x in den Cache werden mit $w(x)$ bezeichnet. Für alle x sei $w(x) > 0$.

Definieren Sie einen metrischen Raum M mit Abstandsmaß $d : M^2 \to \mathbb{R}$, so dass die Kosten für das k-Server-Problem dafür im Wesentlichen mit den Kosten des Seitenwechselproblems mit gewichteten Elementen übereinstimmen.

Aufgabe 4
Zeigen Sie:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}.$$

Aufgabe 5
Für einen Graphen G sei wie in der Vorlesung $L(G)$ die Menge der lokal minimalen Kanten und $B(G)$ der Graph, der nach einer Borůvka-Phase aus G entsteht.

(a) Zeigen Sie, dass eine Borůvka-Phase in Zeit $O(m + n)$ implementierbar ist. Mit welchen Datenstrukturen repräsentieren Sie dabei den Graphen?

(b) Zeigen Sie im Detail, dass die Kanten aus $L(G)$ und die Kanten eines minimalen Spannbaumes von $B(G)$ zusammen einen minimalen Spannbaum von G bilden.