UNIVERSITÄT KARLSRUHE – FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR ALGORITHMEN UND KOGNITIVE SYSTEME
INSTITUT FÜR LOGIK, KOMPLEXITÄT UND DEDUKTIONSSYSTEME

5. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 20. Dezember 2004, *zu Beginn* der Vorlesung

Besprechung: Donnerstag, 23. Dezember 2004, Raum -101, 11:30 Uhr

Aufgabe 1
Gesucht ist ein Algorithmus, der für eine Menge P von n achsenparallelen Rechtecken alle Paare sich schneidender Rechtecke findet. Sei $k = k(P)$ die Anzahl dieser Paare.

(a) Setzen Sie voraus, dass Sie eine Datenstruktur zur Verfügung haben, die eine Menge von m Intervallen so verwaltet, dass für ein Anfrageintervall I in $O(k' + \log m)$ Zeit alle Intervalle geliefert werden, die I schneiden, wobei k' gerade deren Anzahl sei. Einfügen und Löschen eines Intervalls sei in $O(\log m)$ Zeit möglich.

Geben Sie damit einen Algorithmus für das Rechtecksschnittproblem an, der in $O(k + n \log n)$ Zeit läuft.

(b) Welche sich schneidenden Paare von Rechtecken werden nicht gefunden, wenn man in Ihrem Algorithmus statt obiger Datenstruktur einen dynamischen Suchbaum für Zahlen verwendet, in dem man die Endpunkte der Intervalle verwaltet?

Aufgabe 2
In Aufgabe 3.3 wurde ein statischer randomisiert-inkrementeller Algorithmus zur Bestimmung der konvexen Hülle von n Punkten vorgestellt, dessen erwartete Laufzeit $O(n \log n)$ ist.

(a) Geben sie unter Beibehaltung der Laufzeit einen semi-dynamischen randomisiert-inkrementellen Algorithmus für dieses Problem an. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass $p_{\min}$ und $p_{\max}$ bekannt sind und als erste Punkte eingefügt werden, und dass sich alle restlichen Punkte oberhalb von $\overline{p_{\min} p_{\max}}$ befinden. Geben Sie eine Struktur $\mathrm{history}(i)$ an, aus der sich die Kante von CH_i schnell bestimmen läßt, das vertikal unter einem neu hinzuzufügenden Punkt liegt. Zeigen Sie, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit hat.

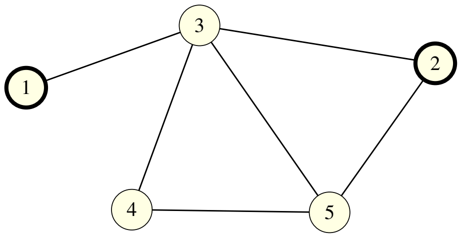
(b) Derandomisieren Sie den Algorithmus, indem Sie die Datenstruktur $\mathrm{history}(i)$ geeignet ersetzen. Das Ergebnis sollte ein deterministischer semi-dynamischer Algorithmus sein, der die konvexen Hülle in $O(n \log n)$ Zeit bestimmt.

Aufgabe 3
Bearbeiten Sie folgende Probleme ohne den Zusammenhang zwischen elektrischen Netzwerken und Random Walks zu verwenden, d.h. nur mit elementaren probabilistischen Methoden.
Bestimmen Sie

(a) m_{uw} für zwei beliebige Knoten $u \neq w$ im vollständigen Graphen K_n,

(b) die erwartete Abdeckungszeit des K_n , d.h. die Zeit, bis ein Agent jeden Knoten mindestens einmal besucht hat,

Aufgabe 4
Gegeben sei folgender Graph G:



Sie gehen zufällig auf dem Graphen spazieren. Sobald Sie Knoten 1 oder 2 erreichen, endet ihr Spaziergang. Solche Knoten werden als *absorbierend* bezeichnet.

Ihnen wird folgendes Spiel vorgeschlagen: Sie starten in Knoten 4 und für jedes Passieren von Knoten 5 müssen Sie einen Euro zahlen. Hingegen erhalten Sie einen Euro für jedes Passieren von Knoten 3.

(a) Notieren Sie die Übergangsmatrix $P(G) = (p_{ij})$ (bzgl. der gegebenen Knotensortierung), in der der Eintrag p_{ij} der Wahrscheinlichkeit entspricht, von Knoten i zu Knoten j in einem Schritt zu gelangen. Dabei ist $p_{ii} = 1$, falls i ein absorbierender Knoten ist und 0 sonst.

(b) Sei nun G ein belieber Graph mit n Knoten, von denen m absorbierend sind. Zeigen Sie, dass für G eine Knotenreihenfolge existiert, bzgl. der die Übergangsmatrix $P(G)$ folgende Gestalt hat:

$$P(G) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass $Q^k \to 0$ für $k \to \infty$ gilt. Was bedeutet das für Ihren Spaziergang?

(d) Zeigen Sie, dass $N = (I_{n-m} - Q)^{-1}$ existiert, und dass $N = I_{n-m} + \sum_{k=1}^{\infty} Q^k$ gilt.

(e) Welche probabilistische Interpretation hat der Eintrag (i, j) von N?

(f) Spielen Sie für obiges G mit?