3. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 22. November 2004, *zu Beginn* der Vorlesung

Besprechung: Donnerstag, 25. November 2004, Raum -101, 11:30 Uhr

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie: Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen, die numerische Werte haben, dann sind auch e^X und e^Y unabhängige Zufallsvariablen.

(b) Finden Sie eine möglichst allgemeine hinreichende Bedingung für Funktionen f, so dass mit X und Y auch stets $f(X)$ und $f(Y)$ unabhängige Zufallsvariablen sind.

(c) Ist Ihre Bedingung aus Teilaufgabe (b) auch notwendig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2
Eine Zufallsvariable X_i heisst *geometrisch verteilt mit Parameter* p, wenn sie Werte $t \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ annimmt und gilt:

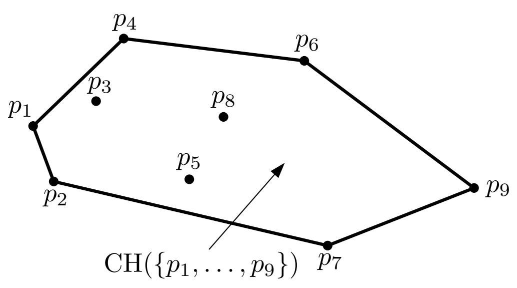
$$\mathbf{Pr}\left[X_i = t\right] = p(1-p)^{t-1} .$$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen.

(b) Es seien nun $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch und geometrisch (mit gleichem Parameter p) verteilte Zufallsvariablen und $X = X_1 + \cdots + X_n$. Berechnen Sie den Erwartungswert μ von X.

(c) Versuchen Sie, für den Fall $p = 1/2$ analog zu den Rechnungen im Beweis von Satz 4.15, Teil 1, den Wert $\mathbf{Pr}\left[X \geq (1+\delta)\mu\right]$ für $\delta \geq 0$ nach oben abzuschätzen.

Aufgabe 3



Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heisst *konvex*, falls für alle Punktepaare $\{p, q\} \subseteq M$ gilt, dass die Strecke $\overline{pq}$ ebenfalls in M enthalten ist. Die *konvexe Hülle* einer (endlichen) Punktemenge $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ist definiert als Schnitt über alle konvexen Mengen, die P enthalten:

$$\mathrm{CH}(P) = \bigcap_{C \text{ konvex, } P \subseteq C} C.$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für $\mathrm{CH}(P)$ auch folgende Charakterisierung gilt:

$$\mathrm{CH}(P) = \bigcap_{H \text{ Halbebene, } P \subseteq H} H.$$

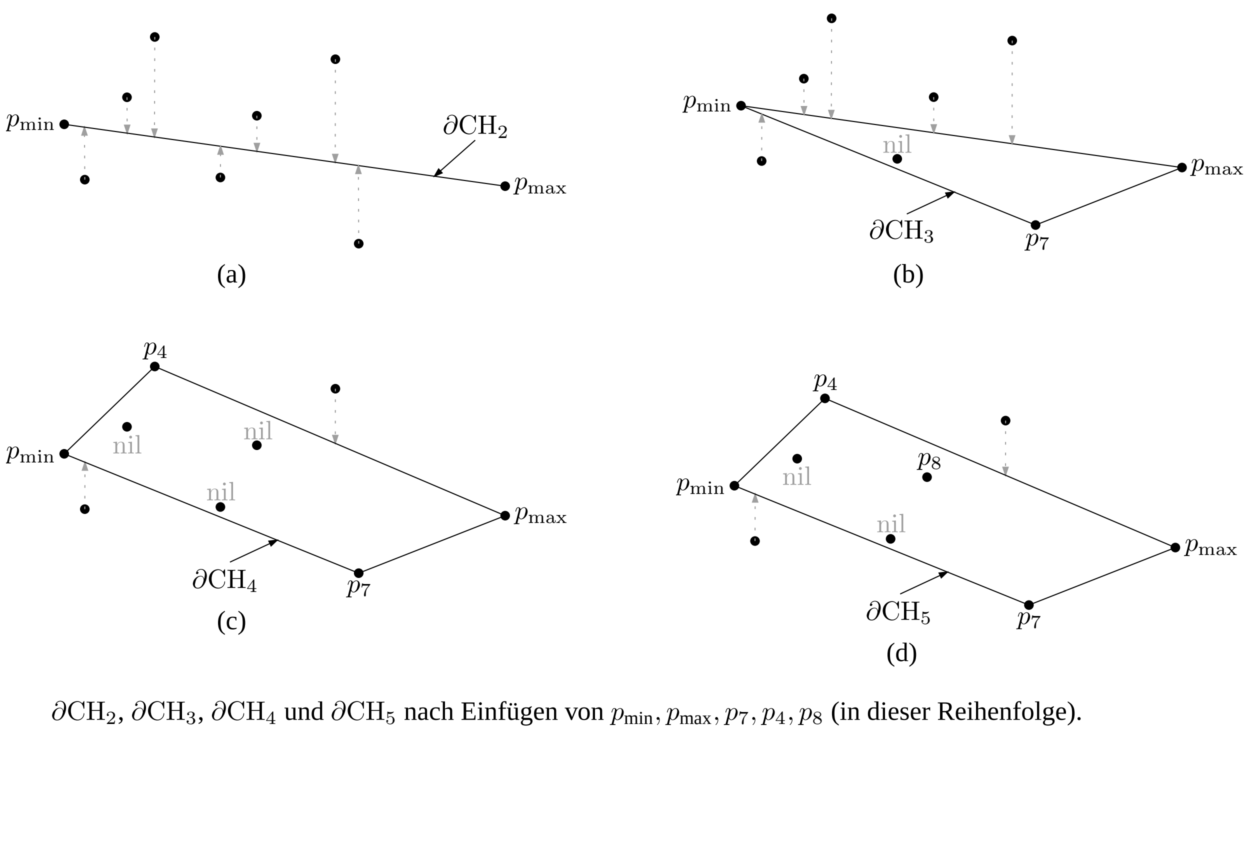
Zeigen Sie weiterhin, dass der Rand $\partial\mathrm{CH}(P)$ von $\mathrm{CH}(P)$ ein Polygon ist, dessen Eckpunkte sämtlich in P liegen. Das heisst, der Rand kann als zyklische Liste $(p_1, \ldots, p_i)$ der Eckpunkte im Uhrzeigersinn aufgefasst werden.

Betrachten Sie folgenden Algorithmus zur Berechnung des Randes der konvexen Hülle einer gegebenen Punktemenge $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

In einem Initialschritt werden zwei Punkte p_{min} und p_{max} mit minimaler bzw. maximaler x-Koordinate bestimmt. Der Rand der konvexen Hülle dieser beiden Punkte ist gegeben durch $\partial\mathrm{CH}_2 = (p_{\text{min}}, p_{\text{max}})$. Nun werden sukzessive alle anderen Punkte in einer zufälligen Reihenfolge eingefügt und jeweils $\partial\mathrm{CH}_i$, der Rand der konvexen Hülle nach Einfügen der ersten i Punkten berechnet. Der Algorithmus erhält folgende Invariante: Nach dem Einfügen von i Punkten hat jeder noch nicht eingefügte Punkt einen Zeiger auf die von ihm aus vertikal sichtbare Kante von $\partial\mathrm{CH}_i$, falls er außerhalb von $\partial\mathrm{CH}_i$ liegt, ansonsten referenziert sein Zeiger nil. Anfangs erhält also jeder Punkt aus $P \setminus \{p_{\text{min}}, p_{\text{max}}\}$ oberhalb von $\overline{p_{\min} p_{\max}}$ einen Zeiger auf die Kante $(p_{\text{min}}, p_{\text{max}})$; die unterhalb auf die Kante $(p_{\text{max}}, p_{\text{min}})$. Die Zeiger noch nicht eingefügter Punkte werden aktualisiert, falls sich ihre sichtbare Kante durch den Übergang von $\partial\mathrm{CH}_i$ zu $\partial\mathrm{CH}_{i+1}$ ändert. Beim Einfügen des $(i+1)$-ten Punktes q ergibt sich $\partial\mathrm{CH}_{i+1}$ aus $\partial\mathrm{CH}_i$ mit Hilfe des Zeigers von q: Falls q auf nil zeigt, ist $\partial\mathrm{CH}_{i+1} = \partial\mathrm{CH}_i$. Ansonsten sei $\{x, y\}$ die von q referenzierte Kante. Dann werden mit zwei Suchen auf $\partial\mathrm{CH}_i$, von x und y beginnend, die Eckpunkte x' und y' von $\partial\mathrm{CH}_i$ gesucht, so dass aus $\partial\mathrm{CH}_i = (p_{\min}, \ldots, x', \ldots, y', \ldots, p_j)$ folgt $\partial\mathrm{CH}_{i+1} = (p_{\min}, \ldots, x', q, y', \ldots, p_j)$.

(b) Geben Sie eine Punktemenge und ein zugehöriges CH_i und q an, so dass $x \neq x'$ und $y \neq y'$.

(c) Zeigen Sie, dass die erwartete Laufzeit des Algorithmus $O(n \log n)$ ist. Benutzen Sie amortisierte Analyse und Rückwärtsanalyse.



$\partial\mathrm{CH}_2$, $\partial\mathrm{CH}_3$, $\partial\mathrm{CH}_4$ und $\partial\mathrm{CH}_5$ nach Einfügen von $p_{\text{min}}, p_{\text{max}}, p_7, p_4, p_8$ (in dieser Reihenfolge).