UNIVERSITÄT KARLSRUHE – FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR ALGORITHMEN UND KOGNITIVE SYSTEME
INSTITUT FÜR LOGIK, KOMPLEXITÄT UND DEDUKTIONSSYSTEME

1. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 25. Oktober 2004, *zu Beginn* der Vorlesung

Besprechung: Donnerstag, 28. Oktober 2004, Raum -101, 11:30 Uhr

Aufgabe 1

Beweisen Sie:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \;=\; \ln n + \mathcal{O}(1).$$

Aufgabe 2

Sie würfeln mit einem fairen Würfel einmal und erhalten als Elementarereignis eine Zahl entsprechend den Augen des Würfels. Geben Sie den Ereignisraum, die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse und den Erwartungswert an.

Nun würfeln Sie mit zwei Würfeln und erhalten als Elementarereignis die Summe der Augen beider Würfel. Geben Sie wiederum den Ereignisraum, die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse und den Erwartungswert an. Was ist der Erwartungswert der absoluten Differenz der beiden Augen?

Aufgabe 3

Dieses Spiel wurde von Nicholas Bernoulli 1713 beschrieben und wird als Sankt-Petersburg-Paradoxon bezeichnet.

Ein Spieler wirft eine Münze. Falls er Kopf wirft, gewinnt er 2 Cents, falls er Zahl wirft, kann er wieder spielen. In diesem Fall wird die Summe, die er gewinnen kann verdoppelt. Wirft er also erst beim zweiten Versuch Kopf, dann gewinnt er 4 Cents, beim dritten Versuch 8 Cents *usw.*

Sie besitzen ein Casino und wollen dieses Spiel ihren Kunden anbieten. Zu welchem Einsatz müssen Sie das Spiel mindestend anbieten, damit Sie über eine lange Zeit Gewinn machen?

Als Casinoverantwortlicher finden Sie dieses Spiel (mit unbegrenzter Gewinnmöglichkeit) zu gefährlich. Daher begrenzen Sie den Maximalgewinn auf 1 Million Euro. Sie entscheiden sich, das Spiel für 30 Cents Einsatz anzubieten. Was ist jetzt die Gewinnerwartung des Casinos? Was ist die Gewinnerwartung des Spielers?

Aufgabe 4

In einer Schale liegen drei weiße und fünf schwarze Kugeln. Zunächst ziehen Sie blind eine Kugel aus der Schale. Sie legen diese Kugel zurück in die Schale und legen zusätzlich eine weitere Kugel der gleichen Farbe dazu. Nun ziehen Sie blind eine zweite Kugel aus der Schale. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit keine, genau eine bzw. zwei weiße Kugeln gezogen zu haben?

bitte umblättern

Aufgabe 5

Seien $A, B \in \mathbb{E}$ zwei Ereignisse eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathbb{E}, Pr[\cdot])$. Dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $Pr[A|B]$, dass A eintrifft unter der Annahme, dass B wahr ist

$$Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}.$$

(a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass die Augenzahl eines Würfels 2 ist unter der Kenntnis, dass der Wurf gerade ist.

(b) Eine Kommode mit acht Schubladen enthält mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p \leq 1$ einen Regenschirm. Falls sich der Schirm in der Kommode befindet, so ist jede Schublade gleichwahrscheinlich. Sie öffnen sieben Schubladen, die alle leer sind. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Schirm in der achten Schublade befindet?