Universität Karlsruhe — Theoretische Informatik
Fakultät für Informatik — WS 2004/05
ILKD Prof. Dr. D. Wagner — 11. November 2004

Das Pumping-Lemma

Pumping-Lemma:

$$\underbrace{\boxed{\begin{array}{l}\text{Eine Sprache}\\ L \text{ ist regulär}\end{array}}}_{A} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\begin{array}{l}\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall w \in L\ (|w| > n) \quad \exists \text{ Zerl. } w = uvx \text{ mit}\\ |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon :\\ \forall i \in \mathbb{N}_0 \quad uv^i x \in L\end{array}}}_{B}$$

Dazu äquivalent ist die Aussage $\neg B \Longrightarrow \neg A$. Die Nicht-Regularität einer Sprache L kann also bewiesen werden, indem für diese die Aussage $\neg B$ gezeigt wird:

$$\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists w \in L\ (|w| > n) \quad \forall w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon :\\ \exists i \in \mathbb{N}_0 \quad uv^i x \notin L\end{array}$$

Wir müssen also in Abhängigkeit eines beliebigen n ein Wort w der Länge größer n angeben, sodass zu jeder beliebigen Zerlegung von w in uvx mit den Eigenschaften $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$ ein i angegeben werden kann, für das das Wort $uv^i x$ nicht aus der Sprache ist.

Beispiel:

$L = \{0^k 1^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wählen für gegebenes n das Wort $w_n = 0^n 1^n \in L$. Damit ist $|w_n| > n$ erfüllt. ✓

Für jede Zerlegung $w_n = uvx$ mit 1) $|uv| \leq n$ und 2) $v \neq \varepsilon$ gilt:

- Das Teilwort u besteht aus höchstens $n - 1$ Nullen (max. n wegen 1), max. $n - 1$ wegen 2)).
- Das Teilwort v besteht ebenfalls nur aus Nullen, und zwar mindestens einer (gleiche Argumentation).

Für $i = 2$ (beispielsweise; dies gilt aber auch für jedes $i > 2$) ist dann $w' = uv^i x$ nicht in L, da die Anzahl der Nullen in w' größer ist als die Anzahl der Einsen. □