Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ILKD Prof. Dr. D. Wagner

Theoretische Informatik
WS 2004/05
15. November 2004

Die Nerode-Relation

Die *Nerode-Relation* R_L zu einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine über Σ^* definierte Äquivalenzrelation: Seien $x, y \in \Sigma^*$, so ist x genau dann äquivalent zu y (in Zeichen: $x\,R_L\,y$), falls für jedes $z \in \Sigma^*$ gilt: $xz \in L \Longleftrightarrow yz \in L$.
Mit anderen Worten sind x und y genau dann äquivalent, falls sie dasselbe 'Anhängeverhalten' haben, d. h. das Anhängen eines *beliebigen* Wortes an x bzw. y führt dazu, dass die erweiterten Wörter entweder beide in L liegen oder beide nicht.

Aufgabe

Sei Σ ein Alphabet, $w \in \Sigma^*$. Bestimmen Sie die Nerode-Äquivalenzklassen der Sprache $\Sigma^* w$.

Lösung

Sei $w = w_1 \cdots w_n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ (insbesondere ist also $w = \varepsilon$ möglich). Die Äquivalenzklassen sind die Mengen

$$[w_1 \cdots w_i] = \left\{ v = uw_1 \cdots w_i \;\middle|\; \begin{array}{c} u \in \Sigma^*,\ w_1 \cdots w_i \text{ längstes Suffix} \\ \text{von } v \text{, das Präfix von } w \text{ ist} \end{array} \right\}$$

für $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Beweis:
Zunächst ist zu bemerken, dass durch die Bedingung

$$w_1 \cdots w_i \text{ längstes Suffix von } v \text{, das Präfix von } w \text{ ist}$$

die angegebenen Äquivalenzklassen wohldefiniert sind; insbesondere kann *jedes* Wort aus Σ^* einer Klasse zugeordnet werden.

Weiterhin gilt zu zeigen, dass Wörter aus derselben Klasse zueinander äquivalent und Wörter aus verschiedenen Klassen nicht äquivalent sind.

- *Wörter aus derselben Klasse:*

  Seien $x, y \in [w_1 \cdots w_i]$ für ein i. Da nach Definition kein Suffix der Länge größer als i von x bzw. y Präfix von w ist, ist einzig das — gemeinsame — Suffix $w_1 \cdots w_i$ dafür entscheidend, ob durch Anhängen eines beliebigen Wortes an x bzw. y ein Wort aus L entsteht oder nicht.

- *Wörter aus verschiedenen Klassen:*

  Hierzu genügt es, für je zwei Wörter aus verschiedenen Äquivalenzklassen ein Wort aus Σ^* anzugeben, welches, an die beiden Wörter angehängt, zwei Wörter liefert, von denen das eine in L liegt und das andere nicht.

  Seien also $x \in [w_1 \cdots w_i]$, $y \in [w_1 \cdots w_j]$ mit $i < j$ und $z = w_{j+1} \cdots w_n$. Dann gilt offensichtlich $yz \in L$; hingegen ist $xz \notin L$, da $w_1 \cdots w_i$ längstes Suffix von x ist, welches gleichzeitig Präfix von w ist.