

Musterlösungen zur Musterklausur

Aufgabe 1:

(3+3+6=12 Punkte)

- (a) $01010 \in L$ Wahr Falsch $1^n \in L$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ Wahr Falsch

Es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $(10)^m 01^m \in L$ Wahr Falsch

- (b) Mögliche Zustände des DEA sind Teilmengen von $\{0, 1, 2, 3\}$. Startzustand ist $\{0, 2, 3\}$. Die Übergangsfunktion der erreichbaren Zustände sind in folgender Tabelle dargestellt. Endzustände sind $\{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}\}$.

\tilde{q}	$a \in \Sigma$	$\tilde{\delta}(\tilde{q}, a)$
$\{0, 2, 3\}$	0	$\{1, 2, 3\}$
$\{0, 2, 3\}$	1	\emptyset
\emptyset	0	\emptyset
\emptyset	1	\emptyset
$\{1, 2, 3\}$	0	$\{2, 3\}$
$\{1, 2, 3\}$	1	$\{2\}$
$\{2, 3\}$	0	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	1	\emptyset
$\{2\}$	0	$\{2, 3\}$
$\{2\}$	1	\emptyset

- (c) Angenommen, die Sprache sei regulär.

Sei m die Konstante aus dem Pumping Lemma. Das Wort $0m^3$ hat Länge größer als m . Betrachte für jede mögliche Zerlegung in uvx das Wort uv^2x . Für die Länge dieses Wortes gilt $|uv^2x| = m^3 + k$, für ein k mit $0 < k < m$, und damit gilt weiter

$$\begin{aligned} m^3 &< |uv^2x| = m^3 + k \\ &< (m+1)^3 \end{aligned}$$

Falls das Wort uv^2x zur Sprache gehört, so gibt es eine natürliche Zahl l so dass $|uv^2x| = l^3$. Dann gilt $m^3 < l^3 < (m+1)^3$, was offensichtlich nicht möglich ist (denn $m^3 < l^3 \Rightarrow m < l \Rightarrow m+1 \leq l \Rightarrow (m+1)^3 \leq l^3$). Das Wort uv^2x gehört also nicht zur Sprache. Dies ist ein Widerspruch zur Aussage des Pumping Lemma, und die Annahme, dass die Sprache regulär ist, ist falsch.

Aufgabe 2:

(2+2+2+6=12 Punkte)

- (a) $(q_1)1010, (q_4)010, 0(q_4)10, 01(q_4)0, 010(q_4), 01(q_5)0$. Das Wort wird nicht akzeptiert.
- (b) $f(0) = 1$ und $f(11111011111) = 1$.
- (c) Beginnt man mit $(10, 100)$, so ist das zweite Wort länger. Egal, welches Paar man als nächstes nimmt, die beiden gebildeten Wörter stimmen am dritten Buchstaben nicht überein. Beginnt man mit $(100, 10)$, so muss man ebenfalls ein zweites Paar nehmen, und ebenfalls stimmen in beiden möglichen Fällen die Wörter an der dritten Stelle nicht überein.
- (d) Angenommen, die Sprache L ist entscheidbar. Dann gibt es eine Turingmaschine \mathcal{M}_L , die auf allen Eingaben hält und genau die Sprache L akzeptiert. Betrachte nun das Wort $\langle \mathcal{M}_L \rangle$. Es gilt entweder $\langle \mathcal{M}_L \rangle \in L$ oder $\langle \mathcal{M}_L \rangle \notin L$.
- **Fall I:** $\langle \mathcal{M}_L \rangle \in L$. Nach Definition von L wird das Wort $\langle \mathcal{M}_L \rangle$ von \mathcal{M}_L nicht akzeptiert, aber nach Definition von \mathcal{M}_L werden genau die Wörter aus L akzeptiert, dieser Fall führt also zum Widerspruch.
 - **Fall II:** $\langle \mathcal{M}_L \rangle \notin L$. Nach Definition von L wird nun das Wort $\langle \mathcal{M}_L \rangle$ von \mathcal{M}_L akzeptiert, aber nach Definition von \mathcal{M}_L wird jedes Wort, das nicht in L ist, nicht akzeptiert, wir erhalten also wieder einen Widerspruch.

Da beide Fälle zum Widerspruch führen, kann die Annahme nicht stimmen, und die Sprache L ist nicht entscheidbar.

Aufgabe 3:

(6+6=12 Punkte)

- (a) Es genügt zu zeigen, dass $\text{TWO-CLIQUE} \in \mathcal{NP}$ und $\text{CLIQUE} \propto \text{TWO-CLIQUE}$. Da wir wissen, dass CLIQUE \mathcal{NP} -vollständig ist, ist damit auch TWO-CLIQUE \mathcal{NP} -vollständig.

Für zwei Teilmengen der Knoten überprüft man, ob die Teilmengen jeweils aus k verschiedenen Knoten bestehen, und ob im Graph alle Knoten der Teilmenge paarweise durch Kanten verbunden sind. Die Anzahl der zu überprüfenden Knotenpaare ist höchstens quadratisch in der Eingabegröße, also ist die Laufzeit polynomial in der Eingabegröße. Für Instanzen, die zwei Cliques der Größe k enthalten, gibt es natürlich zwei solche Teilmengen, für die die Antwort „Ja“ lautet. Für Instanzen, die nicht zu TWO-CLIQUE gehören ist die Antwort immer „Nein“. Damit ist $\text{TWO-CLIQUE} \in \mathcal{NP}$.

Konstruiere nun einen Graph G' , der aus zwei Kopien von G besteht. Bilde $\langle G, k \rangle$ auf $\langle G', k \rangle$ ab. Der Graph wird nur um eine Kopie von sich selbst erweitert, also ist die Abbildung in Polynomialzeit machbar. Wenn G eine Clique der Größe k enthält, so enthält G' sicherlich zwei Cliques der Größe k – je eine in jeder Kopie von G . Umgekehrt, wenn G' zwei Cliques der Größe k enthält, so kann jede dieser Cliques nur Teil *einer* Kopie von G sein, denn die beiden Kopien sind durch keine Kanten verbunden. Also muss G selbst eine Clique der Größe k enthalten. Also $\text{CLIQUE} \propto \text{TWO-CLIQUE}$.

- (b) Angenommen, es gibt einen absoluten Approximationsalgorithmus \mathcal{A} , mit $\text{OPT}(I) - \mathcal{A}(I) \leq K$. Zu einer Instanz I konstruiere eine Instanz I' , die aus $(K + 1)$ Kopien des Graphen in I besteht. Die Laufzeit der Konstruktion ist polynomial, da die konstruierte Instanz $(K + 1)$ mal so groß wie I ist. Es gilt $\text{OPT}(I') = (K + 1)\text{OPT}(I)$, da sich eine unabhängige Menge in I' aus den $(K + 1)$ unabhängigen Mengen der einzelnen Kopien zusammensetzen lässt. Nun gilt

$$\text{OPT}(I') - \mathcal{A}(I') = (K + 1)\text{OPT}(I) - \mathcal{A}(I') \leq K. \quad (1)$$

In einer unabhängige Menge für I' der Größe $\mathcal{A}(I')$ müssen mindestens $\mathcal{A}(I')/(K + 1)$ Knoten in einer der Kopien des Ausgangsgraphen enthalten sein, es gibt also eine unabhängige Menge für I der Größe $\mathcal{L}(I) = \lceil \mathcal{A}(I')/(K + 1) \rceil$, damit gilt also

$$\mathcal{A}(I') \leq (K + 1)\mathcal{L}(I). \quad (2)$$

Einsetzen von (2) in (1) ergibt

$$(K + 1)\text{OPT}(I) - (K + 1)\mathcal{L}(I) \leq K \quad (3)$$

und weiter

$$\text{OPT}(I) - \mathcal{L}(I) \leq K/(K + 1) < 1. \quad (4)$$

Da nur ganzzahlige Werte möglich sind, bedeutet (4), dass $\mathcal{L}(I)$ der Wert einer optimalen Lösung ist, und mit Hilfe des Algorithmus \mathcal{A} kann also INDEPENDENT SET in polynomialer Laufzeit optimal gelöst werden. Da $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ vorausgesetzt wurde, ist dies ein Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 4:

(2+4+4+2=12 Punkte)

(a)

$$S \rightarrow aaSb, S \rightarrow aab$$

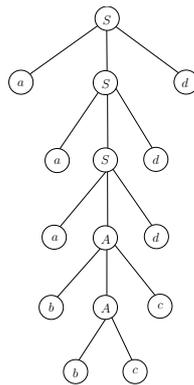
(b)

$$\begin{aligned} \delta(q_1, a, a) &= \{(q_2, aa)\} \\ \delta(q_1, a, Z_0) &= \{(q_2, aZ_0)\} \\ \delta(q_1, b, a) &= \{(q_3, \varepsilon)\} \\ \delta(q_2, a, a) &= \{(q_1, a)\} \\ \delta(q_3, b, a) &= \{(q_3, \varepsilon)\} \\ \delta(q_3, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_3, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

(c)

- Ersetze Buchstaben durch Variablen Y.
 $S \rightarrow Y_aSY_d | Y_aAY_d, A \rightarrow Y_bAY_c | Y_bY_c | \varepsilon, Y_a \rightarrow a, Y_b \rightarrow b, Y_c \rightarrow c, Y_d \rightarrow d.$
- Entferne zu lange Regeln.
 $S \rightarrow Y_aC_1, C_1 \rightarrow SY_d, S \rightarrow Y_aC_2, C_2 \rightarrow AY_d, A \rightarrow Y_bC_3, C_3 \rightarrow AY_c,$
 $A \rightarrow Y_bY_c | \varepsilon, Y_a \rightarrow a, Y_b \rightarrow b, Y_c \rightarrow c, Y_d \rightarrow d.$
- Entferne $A \rightarrow \varepsilon$.
 $S \rightarrow Y_aC_1, C_1 \rightarrow SY_d, S \rightarrow Y_aC_2, C_2 \rightarrow AY_d, A \rightarrow Y_bC_3, C_3 \rightarrow AY_c,$
 $A \rightarrow Y_bY_c, Y_a \rightarrow a, Y_b \rightarrow b, Y_c \rightarrow c, Y_d \rightarrow d, C_2 \rightarrow Y_d, C_3 \rightarrow Y_c.$
- Entferne Kettenregeln. Die Lösung lautet:
 $S \rightarrow Y_aC_1, C_1 \rightarrow SY_d, S \rightarrow Y_aC_2, C_2 \rightarrow AY_d, A \rightarrow Y_bC_3, C_3 \rightarrow AY_c,$
 $A \rightarrow Y_bY_c, Y_a \rightarrow a, Y_b \rightarrow b, Y_c \rightarrow c, Y_d \rightarrow d, C_2 \rightarrow d, C_3 \rightarrow c.$

(d)



Aufgabe 5:

(12 Punkte)

Jede endliche Sprache ist regulär.

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wahr	Falsch

Falls $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, so ist 2SAT \mathcal{NP} -vollständig.

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wahr	Falsch

Jedes \mathcal{NP} -vollständige Problem ist entscheidbar.

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wahr	Falsch

Der Index der Nerode-Relation einer endlichen Sprache L ist echt kleiner als die Anzahl der Wörter in L .

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Wahr	Falsch

Alle Sprachen sind semientscheidbar.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Wahr	Falsch

Die regulären Ausdrücke $b^*(ab^*)^*$ und $(a^* \cup b)^*$ sind äquivalent.

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wahr	Falsch

Es gibt eine Sprache, die entscheidbar und semientscheidbar ist.

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wahr	Falsch

Zu jeder regulären Sprache gibt es einen PDA, der sie erkennt.

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wahr	Falsch

Das Wortproblem für kontextfreie Sprachen ist entscheidbar.

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wahr	Falsch

Das Komplement jeder semientscheidbaren Sprache ist semientscheidbar.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Wahr	Falsch

MAX3SAT ist \mathcal{NP} -vollständig.

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wahr	Falsch

Um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist, genügt es zu zeigen, dass sie nicht kontextfrei ist.

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wahr	Falsch