7. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 4. Februar 2004, *zu Beginn* der Vorlesung

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung bewiesene obere Schranke von $3/2$ für den Approximationsfaktor des Algorithmus' CRISTOFIDES-E-TSP scharf ist, indem Sie eine streng monoton wachsende Folge $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen und eine Folge von Punktemengen $(P_{a(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ angeben, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\text{CHRISTOFIDES-E-TSP}(P_{a(n)})|}{|OPT(P_{a(n)})|} \quad = \quad \frac{3}{2},$$

wobei $|R|$ die euklidische Länge einer Rundreise R und $OPT(P)$ eine kürzeste Rundreise für P bezeichne.

Aufgabe 2

Für eine Menge P von n Punkten in der Ebene sei $E(P)$ die Menge der Punktepaare $\{p, q\} \subseteq P$, die auf auf dem Rand von *leeren* Kreisscheiben liegen, d.h. $\{p, q\} \in E(P)$, falls es eine offene Kreisscheibe D gibt, so dass $P \cap D = \emptyset$ und p und q liegen auf dem Rand ∂D von D. Die Menge $E(P)$ läßt sich in $O(n \log n)$ Zeit berechnen. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Alle Punktepaare mit minimalem Abstand $\min_{p,q\in P} |pq|$ liegen in $E(P)$.

(b) Jeder euklidische minimale Spannbaum von P enthält eine Kante, die zwei Punkte p, q mit minimalen Abstand verbindet.

(c) $E(P)$ enthält die Kantenmenge eines euklidischen minimalen Spannbaums von P.

(d) Wenn P in *allgemeiner Lage* ist, d.h. wenn keine vier Punkte auf einem Kreis liegen, besteht $E(P)$ nur aus $O(n)$ Punktepaaren.

(e) Ein euklidischer minimalen Spannbaum von n Punkten in allgemeiner Lage kann in $O(n \log n)$ Zeit berechnet werden.

Aufgabe 3

Der Nachwuchsweihnachtsmann Benkert hat sich beim Verteilen der Geschenke im letzten Jahr total verausgabt. Daher bittet er seinen Vorgesetzten um einen besseren Tipp bei der Planung seiner Geschenkverteil-Route zu den n Häusern $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}^2$ dieses Jahr. Nach langem Nachdenken schlägt ihm Oberweihnachtsmann Wolff folgendes Verfahren vor. Benkert solle zuerst das Haus h_k bestimmen, das am nächsten von h_1 ist. Die Rundtour $R_2 = (h_1, h_k)$ solle Benkert nun sukzessive zu einer Rundtour R_n durch alle n Häuser erweitern, indem er zu R_i immer jenes Haus h hinzunimmt, das von allen bisher unberücksichtigten Häusern den geringsten Abstand von den Häusern in R_i besitzt. Sei h' das Haus in R_i, das h am nächsten ist. Das neue Haus h solle er hinter h' in R_i einfügen.

Beweisen Sie, dass R_n höchstens doppelt so lang ist wie eine kürzeste Rundtour durch $h_1, \ldots, h_n$.

Tipp: Denken Sie an den Algorithmus von Prim!

Aufgabe 4

Gegeben sei eine Menge P von n Punkten in der Ebene und eine Zahl $r > 0$. Gesucht ist eine ∞-*Beschriftung* von P, d.h. eine Menge von $2n$ offenen Kreisscheiben mit Radius r mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt von genau zwei Kreisscheiben berührt wird und sich keine zwei Kreisscheiben schneiden.

Leider ist es NP-schwer zu entscheiden, ob eine gegebene Punktemenge P eine ∞-Beschriftung mit $r = 1$ besitzt oder nicht. Geben Sie daher einen einfachen Algorithmus an, der in $O(n \log n)$ Zeit eine ∞-Beschriftung von P mit $r \geq r_{\text{opt}}(P)/2$ liefert, wobei $r_{\text{opt}}(P)$ der größtmögliche Radius ist, der gerade noch eine ∞-Beschriftung von P erlaubt.

Tipp: Betrachten Sie ein Punktepaar mit minimalem Abstand.