6. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 21. Januar 2004, *zu Beginn* der Vorlesung

Aufgabe 1

Sie befinden sich in einem Labyrinth. Ihre Aufgabe besteht darin, alle Wege des Labyrinths in jeder Richtung genau einmal abzulaufen und dann wieder an den Ausgangsort zurückzukehren.

(a) Beweisen Sie, dass die Aufgabe in jedem (zusammenhängenden) Labyrinth lösbar ist.

(b) Beschreiben Sie einen Algorithmus, mit dessen Hilfe Sie die Aufgabe vor Ort ohne vorherige Kenntnis des Labyrinths lösen können – Ihr einziges Hilfsmittel ist ein *kurzes* Stück Kreide!

(c) Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus'.

Aufgabe 2

Sei $G(V, E)$ ein ungerichteter Graph mit n Knoten. Sei $\overline{G}$ der Graph, den man erhält, wenn man sukzessive Kanten zu G hinzufügt, die Knoten verbinden, deren Gradsumme mindestens n ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{G}$ wohldefiniert ist, dass man also immer den gleichen Graphen erhält – unabhängig davon, in welchen Reihenfolge man Kanten zu G hinzufügt.

(b) Bestimmen Sie die minimale Kantenzahl eines Graphen mit 6 Knoten, für den $\overline{G}$ der vollständige Graph ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\overline{G}$ genau dann hamiltonsch ist, wenn G hamiltonsch ist.

(d) Zeigen Sie mit (c), dass jeder Graph mit Minimalgrad $\delta \geq n/2$ hamiltonsch ist.

Aufgabe 3

Der *Kantengraph* $G'(V', E')$ eines ungerichteten Graphen $G(V, E)$ hat als Knoten gerade die Kanten von G und eine Kante zwischen zwei Knoten genau dann, wenn die entsprechenden Kanten in G zum gleichen Knoten inzident sind. Gilt $G = G''$? Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

(a) Wenn G eulersch ist, so ist G' eulersch und hamiltonsch.

(b) Wenn G hamiltonsch ist, so ist G' ebenfalls hamiltonsch.

Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (b) im allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass ein gerichteter eulerscher Graph $D(V, A)$ mit $w \in V$

$$\sigma_w \cdot \Pi_{v \in V}(\deg_{\mathrm{out}}(v) - 1)!$$

verschiedene Eulerkreise besitzt, wobei σ_w die Anzahl der gerichteten Spannbäume in G mit Wurzel w bezeichne.