UNIVERSITÄT KARLSRUHE – FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR LOGIK, KOMPLEXITÄT UND DEDUKTIONSSYSTEME

5. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 7. Januar 2004, *zu Beginn* der Vorlesung

Aufgabe 1

Ein *Turniergraph* ist ein gerichteter Graph, der für jedes Knotenpaar genau eine Kante enthält. Bei einem Tennisturnier mit n Teilnehmern tritt jeder gegen jeden genau einmal an. Die Ergebnisse werden in einem Turniergraphen festgehalten, wobei die gerichtete Kante (i, j) bedeutet, dass Teilnehmer i Teilnehmer j geschlagen hat.

(a) Zeigen Sie, dass eine Reihenfolge aller Teilnehmer gefunden werden kann, so dass die unmittelbaren Nachfolger jedes Teilnehmers (bis auf den letzten) in dieser Reihenfolge immer Besiegte sind.

(b) Wie schnell läßt sich so eine Reihenfolge finden?

Aufgabe 2

Eine Matrix $M \in \{0, \pm 1\}^{(n \times m)}$ ist genau dann total unimodular, wenn sich jede Spaltenteilmenge S in zwei Teilmengen S_1 und S_2 aufteilen läßt, so dass

$$\sum_{s \in S_1} s \; - \sum_{s \in S_2} s \in \{0, \pm 1\}^n.$$

Sei M nun die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten. $M = (m_{v,e})$ ist also eine $(n \times m)$-Matrix mit

$$m_{v,e} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \in e, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: M ist genau dann total unimodular, wenn G bipartit ist.

(b) Überlegen Sie sich ein interessantes Problem, das wegen (a) in Polynomialzeit gelöst werden kann. Beachten Sie hierbei auch Aufgabe 3 von Übungsblatt 4 (falls Sie Ganzzahligkeit für Ihr Problem benötigen).

Aufgabe 3

Bei der alljährigen Besprechung der Weihnachtsmänner bekommt der junge Weihnachtsmann Benkert diesmal eine besonders lange Liste mit n zu beliefernden Häusern $p_1, \ldots, p_n$ zugeteilt. Unter diesen darf er sich einen beliebigen Startpunkt aussuchen, von dem er zu seiner Geschenketour aufbrechen und nach getaner Arbeit auch wieder zurückkehren wird. Da er die Kinder nicht lange warten lassen (und selbst natürlich auch schnell wieder zuhause sein) will, überlegt er nun fieberhaft, in welcher Reihenfolge er die Häuser besuchen soll, damit die Tour so kurz wie möglich wird.

Vertrauensvoll wendet er sich an den ihm direkt höhergestellten, erfahrenen Weihnachtsmann Wolff. Dieser rät ihm, in p_1 zu starten, dann jeweils das momentan näheste, noch nicht besuchte Haus anzusteueren und vom letzten einfach nach p_1 zurückzukehren.

b.w.

Ist der junge Weihnachtsmann von seinem Chef gut beraten worden?

Betrachten Sie zunächst den Fall, daß der Nachwuchsweihnachtsmann Glück hat und alle n Häuser an einer geraden Straße liegen. Danach den allgemeinen Fall. Geben Sie eine Familie $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punktemengen $P_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$ an, so dass der Weihnachtsmann für jedes n im Vergleich zu einer kürzesten Tour durch P_n mindestens um einen konstanten Faktor c länger unterwegs ist. Berechnen Sie c für Ihre Beispiele explizit!