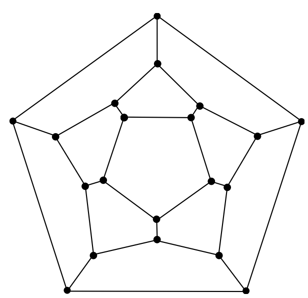
UNIVERSITÄT KARLSRUHE – FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR LOGIK, KOMPLEXITÄT UND DEDUKTIONSSYSTEME

4. Übungsblatt

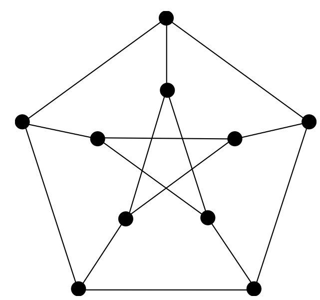
Abgabe: Mittwoch, 10. Dezember 2003, *zu Beginn* der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Ein einfacher Kreis $K = (V_K, E_K)$ in G heisst *Hamilton-Kreis* falls $V = V_K$ ist.
Graphen, für die ein Hamilton-Kreis existiert, heissen *Hamilton-Graphen*.



(a) Dodekaeder-Graph



(b) Petersen-Graph

(a) Geben Sie einen Hamilton-Kreis für den *Dodekaeder-Graphen* an.

(b) Beweisen Sie, dass der *Petersen-Graph* kein Hamilton-Graph ist. Zeigen Sie ferner, dass durch Entfernen eines beliebigen Knotens des Petersen-Graphen ein Hamilton-Graph entsteht.
(Der Petersen-Graph ist der einzige Graph mit weniger als 11 Knoten, der diese Eigenschaft besitzt.)

Aufgabe 2

Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist ein *(Kanten-)Matching* M eine Kantenteilmenge $M \subseteq E$, so dass jeder Knoten $v \in V$ höchstens zu einer gematchten Kante inzident ist.
Ein Matching heisst *perfekt*, falls jeder Knoten zu genau einer gematchten Kante inzident ist.

Sei nun $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph bezüglich der Knotenpartition $V = L \cup R$, weiterhin gelte $|L| = |R|$. Die Nachbarschaft N einer Knotenteilmenge $X \subseteq V$ ist definiert als

$$N(X) := \{y \in V \mid \{x, y\} \in E \text{ für ein } x \in X\}.$$

Zeigen Sie, dass G genau dann ein perfektes Matching besitzt, wenn $|A| \leq |N(A)|$ für alle Knotenteilmengen $A \subseteq L$ gilt.

Aufgabe 3

Sei A eine ganzzahlige $(n \times m)$-Matrix mit Zeilenrang n. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist total unimodular.

(ii) $[\ I_n \ \ A\ ]$ ist unimodular.

(iii) Der Polyeder $\{x \mid x \geq 0,\ Ax \leq b\}$ ist ganzzahlig für jeden ganzzahligen $(n \times 1)$-Vektor b.

Aufgabe 4

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit der Eigenschaft, dass jede Kante $e \in E$ in einer ungeraden Anzahl einfacher Kreise enthalten ist. Zeigen Sie, dass G eulersch ist. (Die Rückrichtung gilt auch.)