UNIVERSITÄT KARLSRUHE – FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR LOGIK, KOMPLEXITÄT UND DEDUKTIONSSYSTEME

3. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 26. November 2003, *zu Beginn* der Vorlesung

Aufgabe 1

Gegeben seien $n \times n$ Gitterpunkte.

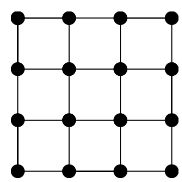

Abbildung 1: Gitternetzwerk für $n = 4$.

Sei S eine Teilmenge der Gitterpunkte mit $|S| < n^2$. Das *Escape Problem* besteht darin zu entscheiden, ob es $|S|$ viele knotendisjunkte Wege gibt, so dass jeder Weg von einem Knoten aus S startet und an einem Randpunkt des Gitters endet.

(a) Geben Sie für $n = 4$ eine Ja-Instanz mit möglichst vielen Startknoten an, sowie eine Nein-Instanz mit möglichst wenig Startknoten.

(b) Modellieren Sie das Escape Problem als ganzzahliges lineares Programm.

Aufgabe 2

Zu einer Punktmenge $P = \{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$ ist $G := \{(x, y) \mid x \in \{x_1, ..., x_n\} \vee y \in \{y_1, ..., y_n\}\}$ das von P erzeugte Gitter. Zu jeder beliebigen Punktmenge P gibt es immer minimale Manhattan-Netzwerke, die ausschließlich auf G verlaufen. Beweisen Sie, dass es aus dieser Teilmenge ein minimales Manhattan- Netzwerk gibt, so dass auf jeder Geraden des Gitters G höchstens ein zusammenhängendes Intervall zu M gehört.

Aufgabe 3

Eine beliebige $n \times m$-Matrix heißt *total unimodular*, falls die Determinanten sämtlicher möglichen quadratischen Teilmatrizen $0, 1$ oder -1 sind. Dabei entstehen Teilmatrizen durch beliebiges Streichen von Zeilen und Spalten.

(a) Seien $M_1, ..., M_k$ total unimodulare Matrizen. Zeigen Sie, dass dann auch M total unimodular ist.

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M_k \end{bmatrix}$$

(b) Sei ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ mit $V = \{1, ..., n\}$, $A = \{e_1 = (a_1, b_1), ..., e_m = (a_m, b_m)\}$ gegeben. Dann sei $M = (m_{ij})$ die $n \times m$-Matrix mit

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = a_j, \\ -1, & \text{falls } i = b_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass M total unimodular ist.

Aufgabe 4

Sei wiederum ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ gegeben. Nun sei M die $(n-1) \times m$-Matrix, die durch Streichen der letzten Zeile aus der Matrix von Aufgabe 3(b) entsteht. Eine Kantenteilmenge $A_B \subset A$ mit $|A_B| = n-1$ induziert eine $(n-1) \times (n-1)$ Matrix B durch Streichen der zu $A \setminus A_B$ gehörigen Spalten. B heißt Basis von D, falls $\det B \neq 0$ ist.

Charakterisieren Sie alle Basen B von D, indem Sie ein Kriterium für den von A_B induzierten Teilgraphen angeben.