1. Übungsblatt

Abgabe: Mittwoch, 29. Oktober 2003, *zu Beginn* der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben ein ungerichteter ungewichteter zusammenhängender Graph $G(V, E)$ mit $V = \{s, v_1, \ldots, v_n\}$ und kürzeste Wege W_i von s nach v_i für $i = 1, \ldots, n$. Sei $\mathrm{vorg}(v_i)$ der letzte Knoten vor v_i in W_i. Zeigen Sie, dass die Menge B_s aller gerichteten Kanten $(v_i, \mathrm{vorg}(v_i))$ (a) einen Baum bildet, (b) der Baum V aufspannt und (c) alle Kanten im Baum in Richtung s gerichtet sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wieviele Kanten kann ein Graph G mit n Knoten höchstens besitzen, wenn er

(a) ungerichtet ist, (a') gerichtet ist,

(b) ungerichtet und d-regulär ist, das heißt, wenn alle Knoten Grad d haben,
(*Bemerkung:* es gibt d-reguläre Graphen nicht für alle Kombinationen von n und d.)

(c) ungerichtet und planar ist, das heißt, wenn man ihn so in der Ebene zeichnen kann, dass sich keine zwei Kanten schneiden.
Tipp: Benützen Sie Eulers Formel, die besagt, dass $|F| - |E| + |V| = 2$, wobei V die Knotenmenge von G, E die Kantenmenge von G und F die Menge der Flächen in einer beliebigen planaren Zeichnung von G bezeichne. Bei F wird die äußere Fläche mitgezählt, das heißt, dass etwa ein Dreieck zwei Flächen bildet und ein Baum eine. Schätzen Sie $|F|$ mithilfe von $|E|$ ab.

Geben Sie jeweils einen Graphen mit mindestens drei Knoten an, der zeigt, dass Ihre Schranke scharf ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ordnen Sie die angegebene Folge $f_1, f_2, \ldots$ von Funktionen entsprechend ihres asymptotischen Wachstums so um, dass für die geordnete Folge $f_1', f_2', \ldots$ gilt: $\mathcal{O}(f_1') \subseteq \mathcal{O}(f_2') \subseteq \ldots$ (ohne Beweis).

$$n^2 + 10\sqrt{n},\quad 200\log n,\quad n^n,\quad \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},\quad e^n,\quad n!,\quad n^2 + n^3,\quad 2 + n,\quad \sqrt{n},\quad 10^{80},\quad n^2\sqrt{n},\quad \sqrt[4]{7n}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die Adjazenzmatrix $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \{0,1\}^{n \times n}$ eines gerichteten Graphen $G(V, E)$ mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei M^k die k-te Potenz von M, also die Matrix, die man erhält, wenn man M k-mal mit sich selbst multipliziert.

(a) Zeichnen Sie das „Haus des Nikolaus“. Orientieren Sie die Kanten so, wie Sie sie (in einem Zug!) gezeichnet haben. Stellen Sie die Adjazenzmatrix M dieses Graphen auf und berechnen Sie M^0, M^2 sowie M^4.

(b) Zeigen Sie, wie man M^k mit höchstens $2\lfloor \log_2 k \rfloor$ Matrizenmultiplikationen berechnen kann.

(c) Zeigen Sie, dass für beliebige gerichtete Graphen $G(V, E)$ mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ der Eintrag m_{ij}^k in Zeile i und Spalte j von M^k die Anzahl der Wege der Länge k vom Knoten i zum Knoten j angibt.