



Institut für Theoretische Informatik  
Universität Karlsruhe (TH)

# Druckzonenermittlung in Wasserversorgungssystemen mittels graphentheoretischer Ansätze

Studienarbeit von Thomas Gramer

März 2009



Betreuung: Prof. Dr. Dorothea Wagner  
Dipl.-Inf. Ignaz Rutter  
Dipl.-Ing. Philipp Klingel

Titelbild: Ergebnis der Zerlegung des Wassernetzes einer Stadt in Nordafrika.

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig angefertigt habe. Verwendetes Material aus anderen Arbeiten habe ich kenntlich gemacht.

Karlsruhe, den 27. März 2009





## **Zusammenfassung**

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Ermittlung von Druckzonen in bestehenden Wasserverteilungssystemen. Dabei stehen Modellierungen, welche auf ganzzahliger linearer Programmierung basieren deutlich im Vordergrund. Es werden verschiedene Arten der Modellierung als gemischt ganzzahliges lineares Programm für die grundlegendsten Anforderungen der Ermittlung von Druckzonen vorgestellt. Als Resultat stehen dabei verschiedene Formulierungen zur Auswahl, die entweder sehr schnell eine bereits akzeptable Lösung auch für große Netz finden, oder mit etwas mehr Aufwand qualitativ besser Lösungen ausfindig machen. Es zeigt sich, dass die erfolgten Verbesserungen der Laufzeit nur wenig an der Qualität der resultierenden Druckzonen ändern.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Wasserverteilungssysteme . . . . .	3
2.1.1	Komponenten von Wasserverteilungssystemen . . . . .	3
2.1.2	Hydraulische Zusammenhänge . . . . .	4
2.1.3	Druckzonen . . . . .	5
2.2	Graphentheoretische Grundlagen . . . . .	6
2.3	Wasserverteilungssysteme als graphentheoretisches Modell . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Problemdefinition</b>	<b>11</b>
3.1	Allgemeine Problemstellung . . . . .	11
3.2	Formale Beschreibung . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Modellierung</b>	<b>15</b>
4.1	Greedyansatz . . . . .	15
4.2	Ganzzahlige Lineare Programmierung (ILP) . . . . .	17
4.2.1	Optimierungsfunktion . . . . .	17
4.2.2	Nebenbedingungen . . . . .	17
4.2.3	Formulierung des ILP . . . . .	27
4.3	Heuristiken zur Vereinfachung des Graphen . . . . .	30
4.3.1	Abschneiden von Bäumen . . . . .	30
4.3.2	Vorpartitionierung . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Analyse</b>	<b>32</b>
5.1	Testumgebung . . . . .	32
5.2	Modellanalyse . . . . .	32
5.2.1	Korrektheit der Minimierungsfunktion . . . . .	33
5.2.2	Bestimmung geeigneter Parameterverhältnisse . . . . .	44
5.3	Laufzeitanalyse . . . . .	44
5.3.1	Modellierung Größenbalancierung . . . . .	44
5.3.2	Abschneiden von Bäumen . . . . .	45
5.3.3	Modellierung des Zusammenhangs . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>50</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	50
6.2	Ausblick . . . . .	50
<b>A</b>	<b>Beispielnetze</b>	<b>52</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Fluss in einem Rohr . . . . .	4
2.2	Einteilung in Druckzonen . . . . .	5
2.3	(Un)gerichteter Graph . . . . .	7
2.4	Zyklischer Graph - Graph als Baum . . . . .	7
2.5	Modellierung eines Wassernetzes als Graph . . . . .	10
4.1	Problematischer Verlauf des Algorithmus 1 . . . . .	16
4.2	Modellierung des Zusammenhangs mittels Fluss . . . . .	22
4.3	Beispiel der Spannbaummodellierung . . . . .	24
4.4	Abschneiden von Bäumen . . . . .	31
5.1	Balancierung bei steigender Schrankegewichtung (DB7) . . . . .	34
5.2	Balancierung bei steigender Schrankegewichtung (DB1) . . . . .	35
5.3	Balancierung bei steigender Schrankegewichtung (DB12) . . . . .	35
5.4	Balancierung bei steigender Schrankegewichtung (DB20) . . . . .	36
5.5	Zerlegung von DB7 bei Gewichtungsverhältnis 0:1:0 . . . . .	36
5.6	Zerlegung von DB7 bei Gewichtungsverhältnis 0:1:4 . . . . .	37
5.7	Zerlegung von DB7 bei Gewichtungsverhältnis 0:1:10 . . . . .	37
5.8	Balancierung bei steigendem Schnittkanteneinfluss (DB7) . . . . .	38
5.9	Balancierung bei steigendem Schnittkanteneinfluss (DB1) . . . . .	39
5.10	Balancierung bei steigendem Schnittkanteneinfluss (DB12) . . . . .	39
5.11	Balancierung bei steigendem Schnittkanteneinfluss (DB20) . . . . .	40
5.12	Zerlegung von DB1 bei Gewichtungsverhältnis 0:1:0 . . . . .	41
5.13	Zerlegung von DB1 bei Gewichtungsverhältnis 500:1:0 . . . . .	42
5.14	Zerlegung von DB1 bei Gewichtungsverhältnis 4000:1:0 . . . . .	43
5.15	Zerlegung von DB7 bei Flussmodellierung . . . . .	47
5.16	Zerlegung von DB7 bei Spannbaummodellierung . . . . .	47
A.1	Beispielnetz DB20 . . . . .	52
A.2	Beispielnetz DB7 . . . . .	53
A.3	Beispielnetz DB1 . . . . .	54
A.4	Beispielnetz DB12 . . . . .	55

# Kapitel 1

## Einleitung

### Motivation

Eine der großen Herausforderungen der Menschheit in diesem Jahrhundert ist, mehr Menschen den Zugang zu sauberem Trinkwasser zu ermöglichen. Die Wichtigkeit dieser Thematik unterstreicht die Aufnahme dieser Herausforderung in die UN Millenniumsziele, welche bereits im Jahr 2000 verabschiedet wurden. Dabei wird als eine der Hauptursachen der fehlenden Trinkwasserversorgung nicht nur der Mangel an der Ressource selbst genannt, sondern vielmehr das Fehlen geeigneter Infrastruktur, sowie der marode Zustand vorhandener Infrastruktur, welcher direkt mit der Qualität zusammenhängt, sowie für große Verluste bei der Verteilung von Trinkwasser verantwortlich ist [UN08]. Ein Aspekt zur Lösung dieses Problems ist demnach die Analyse und Optimierung bestehender Systeme in betroffenen Regionen. Dies ist eine der Kernkompetenzen des Instituts für Wasser- und Gewässerentwicklung (IWG) Abteilung III - Wasserversorgung der Universität Karlsruhe, von der auch die Idee zur Durchführung dieser Arbeit ausging.

Herausforderungen bei der Verteilung von Wasser sind, die Qualität des Wassers aufrecht zu erhalten, die Wasserverluste möglichst gering zu halten, sowie den Abnehmern Wasser in ausreichender Menge bei adäquatem Druck zur Verfügung zu stellen. Es muss also zu jeder Zeit ein Mindestdruck gewährleistet werden, um Verschmutzung des Leitungsnetzes und die daraus resultierende Verkeimung des Wassers zu vermeiden. Eine sehr gebräuchliche Methode, dies zu verwirklichen, ist, Wasser in einen hoch gelegenen Behälter zu pumpen und von dort das Netz zu versorgen, denn durch das Volumen des Behälters werden Bedarfsschwankungen ausgeglichen. Der geodätische Höhenunterschied zwischen Behälter und Abnahmepunkt gewährleistet zudem einen bestimmten Druck. Bei dieser Art der Wasserverteilung ist die Verwendung von Druckzonen gebräuchlich. Druckzonen gewährleisten die Einhaltung von Druckgrenzen, erleichtern die betriebliche Transparenz des Netzes, ermöglichen die Aufstellung von Mengenbilanzen und erleichtern die Ortung von Leckagen. Zur Einteilung in Druckzonen versucht man, das Netz in hydraulisch unabhängige Teile aufzuteilen, von denen jeder durch einen eigenen Behälter versorgt wird [KDP07].

Wasserversorgungsnetze in Entwicklungsländern beinhalten häufig die Problematik, dass Netze, nachdem sie einmal (meist in Kolonialzeiten) geplant und

gebaut wurden, unkontrolliert und unstrukturiert mit den Städten mitgewachsen sind. Solche Netze verfügen über keine Versorgungszonen oder folgen sonst einer logischen Ordnung. Die Aufgabe bei der Einteilung in Druckzonen beginnt demnach mit der Ermittlung zusammenhängender logischer Strukturen in den bestehenden Netzen.

## Ziele

Die Ziele dieser Arbeit leiten sich aus der Aufgabe der Ermittlung der Druckzonen ab. Es soll ein Verfahren entwickelt werden, Druckzonen in bestehenden Netzen zu ermitteln. Hierbei sollen vor allem graphentheoretische Ansätze zur Anwendung kommen. Es wird dabei kein Wert auf eine umfassende Evaluierung aller zur Verfügung stehenden Möglichkeiten gelegt, sondern es soll eine Basis geschaffen werden, auf der weitere Entwicklungen zur Ermittlung der Versorgungszonen aufbauen können.

## Bestehende Verfahren

Zur Realisierung der Ziele dieser Arbeit dienen als Anregung Arbeiten, die sich mit Partitionierung im Allgemeinen beschäftigen, sowie Arbeiten, die sich mit Teilaspekten von Partitionierung befassen, die für diese Arbeit ebenfalls interessant sind. Eine allgemeine Partitionierung von Wassernetzen in Versorgungszonen wird in [SPV08] vorgestellt. Allerdings verzichten die Autoren auf die Garantie, jeder Zone einen Versorgungspunkt zuzusichern. Zudem werden Höhenvorgaben nicht berücksichtigt, welche bei der gravitären Versorgung und der Einhaltung der Druckgrenzen eine bedeutende Rolle spielen.

Auch [Deu08] beschäftigt sich mit der Zerlegung von Wasserverteilungsnetzen. Der Autor beschränkt sich auf die Unterscheidung versorgter und nicht versorgter Teilbereiche. Eine Zerlegung nach Druckkriterien findet ebenfalls keine Anwendung, wird aber vom Autor als wichtiges noch zu betrachtendes Zerlegungskriterium erwähnt.

Einige Ansätze, jeder Partition spezielle Punkte zuzuordnen, finden sich in [CSGW04] wieder. Die Autoren beschäftigen sich hier allerdings nicht mit Wasserverteilungssystemen, sondern damit, die Schüler einer Stadt der für sie günstigsten Schule zuzuordnen. Parallelen entstehen dadurch, dass die Stadt in Gebiete aufgeteilt wird, von denen jedes eine Schule enthalten muss. Anderen Randbedingungen, wie zum Beispiel die Topologischen Eigenschaften, die bei Druckzonen eine Rolle spielen, messen die Autoren ebenfalls keine Bedeutung zu.

# Kapitel 2

## Grundlagen

Zunächst einmal ist es wichtig zu betrachten, wie Wasserverteilungssysteme prinzipiell aufgebaut sind und welcher Zusammenhang mit der Graphentheorie besteht. Hierzu werden im Folgenden einige grundlegende Bestandteile von Wasserverteilungssystemen vorgestellt (siehe Abschnitt 2.1), ein paar für diese Arbeit wichtige Begriffe aus der Graphentheorie erläutert (siehe Abschnitt 2.2), um schließlich den Zusammenhang beider Themengebiete herzustellen (siehe Abschnitt 2.3).

### 2.1 Wasserverteilungssysteme

Dieser Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über Wasserverteilungssysteme im Allgemeinen. Hierzu werden kurz die wesentlichen Komponenten von Wasserverteilungssystemen erläutert (Abschnitt 2.1.1), ein Überblick über hydraulische Zusammenhänge gegeben, welche für diese Arbeit von Bedeutung sind (Abschnitt 2.1.2), und Druckzonen in gravitären Wasserverteilungssystemen definiert (Abschnitt 2.1.3).

#### 2.1.1 Komponenten von Wasserverteilungssystemen

Wasserversorgungssysteme gliedern sich in die Bereiche Gewinnung, Aufbereitung, Förderung, Speicherung und Verteilung. Das Wasserverteilungssystem fasst das System von der Aufbereitung bis zur Verteilung zusammen. Die Speicherung kann bei Netzen auch entfallen, wenn das aufbereitete Wasser direkt in das Verteilungsnetz gepumpt wird. In dieser Arbeit werden allerdings ausschließlich Netze betrachtet, bei denen das Wasser zur Speicherung in einen Behälter gepumpt wird, von wo es dann durch Gravitationsunterschiede über das Verteilungsnetz zum Verbraucher gelangt. In Wasserverteilungssystemen wird zwischen Zubringerleitungen und Verteilungsleitungen unterschieden. Zubringerleitungen übernehmen den Transport des Wassers bis zur Speicherung, während die Verteilungsleitungen die Weiterleitung an die Abnahmepunkte regeln. Diese Methode der Verteilung über Speicherung wird *gravitäre* Verteilung genannt.

Wasserverteilungsnetze bestehen aus Rohrnetzen, über die der Transport des Wassers erfolgt. Es existieren in den Rohrnetzen Stellen, an denen Wasser eingespeist wird (*Einspeisepunkte*) und Punkte, an denen Wasser wieder entnommen

wird (*Bedarfpunkte*), zum Beispiel Hausanschlüsse. Bei den Einspeisepunkten handelt es sich in gravitären Netzen um die Behälter, in denen das Wasser Zwischengespeichert wird. Um Wasser aus dem Leitungsnetz entnehmen zu können muss an den Bedarfspunkten ein Mindestdruck anliegen [WCS01], welcher durch eine Mindestpotentialdifferenz zum Behälter erreicht werden kann. Darüber hinaus gibt es noch verschiedene Armaturen, die auf das Verhalten des Wasserverteilungssystems Einfluss nehmen. Solche Armaturen können druckverstärkend (zum Beispiel Pumpen) oder druckreduzierend (zum Beispiel Druckminderer) wirken. Andere Armaturen regeln andere hydraulische Eigenschaften (zum Beispiel den Durchfluss), spielen in dieser Arbeit aber keine weitere Rolle.

### 2.1.2 Hydraulische Zusammenhänge

Maßgeblich für den Fluss eines *Fluids* in einer Leitung ist der Druck, der auf das Fluid wirkt. Ein Fluid bezeichnet einen beliebigen Stoff, der in flüssiger Form vorliegt. Druck in einer mit Fluid gefüllten Leitung entsteht, wenn zwischen dem Anfang und dem Ende der Leitung eine Energiedifferenz existiert. Diese kann hervorgerufen werden durch unterschiedliche Höhe an beiden Leitungsenden oder durch die Geschwindigkeit, die ein Fluid bereits besitzt. Dem Druck entgegen wirken hingegen innere Reibungskräfte des Fluids, sowie äußere Reibungskräfte mit der Leitungswand. Die dem Druck entgegenwirkenden Kräfte führen zu Druckverlusten, welche sich im Rohr in Form von kontinuierlich vermindertem Potential bemerkbar machen.

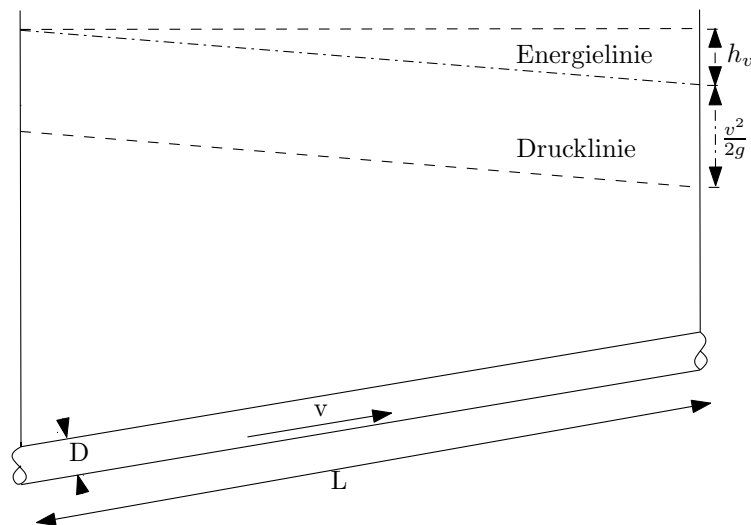
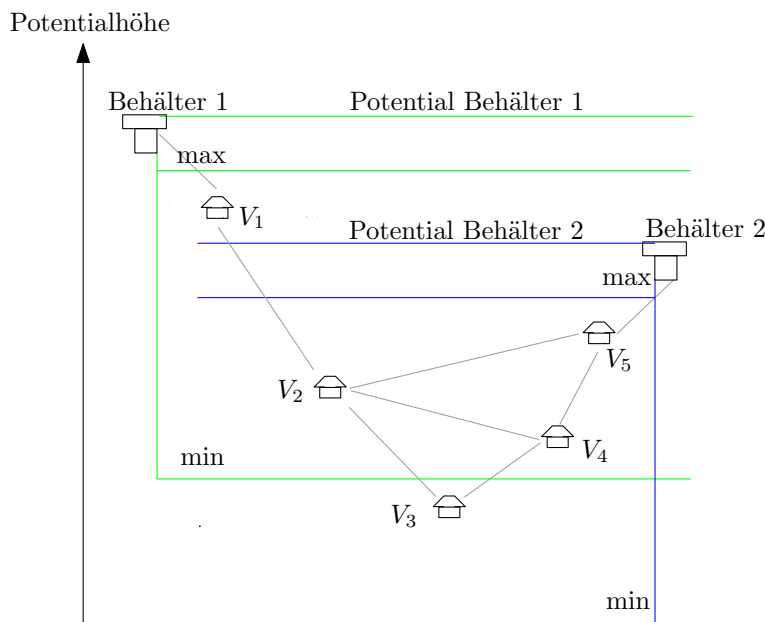


Abbildung 2.1 – Fluss in einem Rohr

Abbildung 2.1 zeigt ein Rohr mit konstantem Innendurchmesser  $D$  und der Länge  $L$ , welches von links nach rechts mit der Geschwindigkeit  $v$  durchströmt wird. Mit zunehmender Leitungslänge steigt der Druckhöhenverlust  $h_v$ , welcher die innere und äußere Reibung angibt, kontinuierlich an. Die Drucklinie gibt das Potential am jeweiligen Punkt der Leitung an. Weitere Ursache für den Fluss in Richtung  $v$  ist die kinetische Energie ( $v^2/2g$ ), die dem Potential aufsummiert wird. Die kinetische Energie resultiert aus der Geschwindigkeit,





**Abbildung 2.2** – Einteilung in Druckzonen

die ein Körper oder Stoff bereits besitzt. Das Niveau der Gesamtenergie wird durch die Energielinie repräsentiert. Der aus der Energie resultierende Druck wird in der Hydraulik üblicherweise in der Einheit [m] (Meter) angegeben. Dem interessierten Leser sei zu hydraulischen Zusammenhängen [MS07] empfohlen.

### 2.1.3 Druckzonen

Eine *Druckzone* ist ein von einem Behälter versorgter, hydraulisch unabhängiger Teilbereich eines Verteilungsnetzes, in dem alle Punkte innerhalb bestimmter Druckgrenzen liegen. Die Druckgrenzen beschränken die geodetischen Höhen, die ein Knoten besitzen darf, um einer Druckzone anzugehören. Die obere Grenze ist gegeben durch den Mindestdruck, den man gewährleisten will und die zu erwartenden Druckhöhenverluste (siehe Kapitel 2.1.2), die überwunden werden müssen. Da die Druckhöhenverluste vom aktuellen Fließzustand abhängig sind, welcher sich über die Zeit verändert und dessen Berechnung sehr aufwendig ist, wird in dieser Arbeit der Druckhöhenverlust als konstant angenommen und findet sich im Mindestdruck wieder, den es zu gewährleisten gilt. Die Untergrenze ist davon abhängig, wie viel Druck die verwendeten Netzelemente aushalten. Am günstigsten ist eine Begrenzung der Drücke innerhalb einer Druckzone ausschließlich durch die Vermeidung zu großer Potentialunterschiede zwischen Behälterpotential und den Netzbereichen der Druckzone. Ein zu hoher Druck kann aber durch den immer noch kostengünstigen Einsatz von Druckminderern verringert werden. Der höchste Druck entsteht dann, wenn kein Wasser entnommen wird, also auch kein Fluss existiert. Leitungsverluste treten in diesem Fall auch nicht auf, da diese durch Reibungen entstehen. Der Leitungsverlust kann also bei der unteren Grenze für die Druckzone vernachlässigt werden. Um zu gewährleisten, dass alle Knoten einer Druckzone versorgt werden, stellt eine

Druckzone immer einen zusammenhängenden Teil eines Netzes dar.

Abbildung 2.2 zeigt den Querschnitt eines Wasserverteilungssystems mit zwei Behältern und fünf exemplarischen Wasserentnahmepunkten. Für jeden Behälter ist zudem sein Potential skizziert, sowie die Mindest- und Höchstpotentiale, welche die Entnahmepunkte haben müssen bzw. dürfen, um der Druckzone des jeweiligen Behälters anzugehören. Somit kann Entnahmepunkt  $V_1$  ausschließlich Behälter 1 zugeordnet werden und Entnahmepunkt  $V_3$  ausschließlich Behälter 2, wenn nicht weitere Armaturen zum Einsatz kommen. Alle anderen Entnahmepunkte könnten beiden Behältern zugeordnet werden. Weiterhin ist darauf zu achten, dass kein Leitungsabschnitt das Potential des ihm zugeordneten Behälters überschreitet, da sonst kein Durchfluss über diesen Leitungsabschnitt erfolgen würde. Genauere Erläuterungen zu Druckzonen finden sich unter anderem in [WCS01].

Zur Wahrung der Mindestpotentialgrenze ist der relativ kostengünstige Einsatz von Druckminderern möglich. Bei der Realisierung von gravitären Netzen versucht man allerdings, den Einsatz von Druckminderern zu minimieren, um die Kosten zur Realisierung des Netzes möglichst gering zu halten.

Bei einem bestehendem Wasserverteilungsnetz werden die Druckzonen nach deren Ermittlung durch Schließen von Leitungen hydraulisch voneinander getrennt und so das Netz unterteilt. Um den Aufwand des Abtrennens der Druckzone gering zu halten ist man daher daran interessiert, die Zahl der Verbindungen zum restlichen Netz gering zu halten.

## 2.2 Graphentheoretische Grundlagen

Dieser Abschnitt erläutert einige grundlegende graphentheoretische Begriffe und Zusammenhänge. Dabei wird hier weniger Wert auf Vollständigkeit gelegt als darauf, einen Überblick über die für diese Arbeit bedeutsamen Zusammenhänge zu geben. Eine umfassendere Ausführung ist unter anderem in [CLRS01] zu finden, woran auch die in diesem Abschnitt beschriebenen Erläuterungen angelehnt sind.

Ein *Graph*  $G$  ist ein Tupel  $(V, E)$  einer Menge von Knoten  $V$  und einer weiteren Menge von Kanten  $E$ , welche eine binäre Relation auf  $V$  darstellt. Ein Graph kann *gerichtet* (Digraph) oder *ungerichtet* sein. Gerichtet, bedeutet, dass die Kanten aus  $E$  aus geordneten Paaren  $(u, v)$  mit  $u, v \in V$  und  $u \neq v$  bestehen. Bei ungerichteten Graphen sind die Paare  $u, v$  ungeordnet. Anschaulich bedeutet das, dass bei einem gerichteten Graph eine Kante zwischen Knoten  $A$  und  $B$  von  $A$  nach  $B$  zeigt, oder umgekehrt. Abbildung 2.3 stellt einen Graph mit jeweils vier Knoten und Kanten dar, einmal als gerichteten Graph (a) und einmal als ungerichteten Graph (b).

Für die Knoten ist es von Interesse zu betrachten, wie viele Kanten in ihm zusammenlaufen. So können Rückschlüsse über die Lage des Knotens im Graph gezogen werden. Ein Knoten, der nur mit einer Kante inzident ist, ist mit Sicherheit ein Blatt eines Baumes. Knoten mit sehr vielen Kanten stellen sehr zentrale Knoten dar, bei denen es sich oft um Behälter handelt. Die Anzahl der Kanten, die mit einem Knoten inzident sind wird als *Grad* bezeichnet, bei gerichteten Graphen wird dabei zwischen Eingangs- und Ausgangsgrad unterschieden.

Definition 1 beschreibt, wie ein *Pfad* in einem Graph verstanden wird.

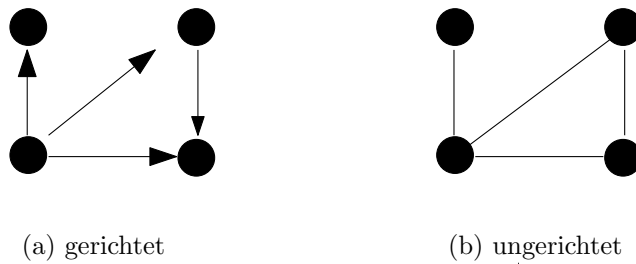


Abbildung 2.3 – Graph  $G(V, E)$

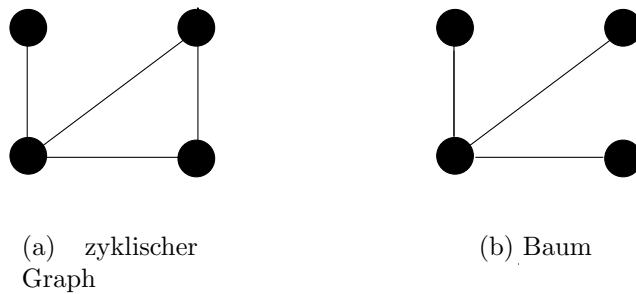


Abbildung 2.4 – Graph  $G(V, E)$

**Definition 1 (Pfad eines Graphen)** Ein Pfad  $p$  von einem Knoten  $u$  zu einem Knoten  $v$  in einem Graphen  $G$  ist eine Folge  $p = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  von Knoten mit  $u = v_0$  und  $v = v_k$  so dass für alle  $i = 1, 2, \dots, k$  gilt:  $(v_{i-1}, v_i) \in E$

Ein Graph ist *zusammenhängend*, wenn von jedem Knoten  $u$  aus  $V$ , jeder andere Knoten  $v$  aus  $V$  erreichbar ist, das heißt, es gibt von jedem Knoten  $u$  einen Pfad zu jedem Knoten  $v$ . Ein zusammenhängender *Teilgraph* ist demnach ein Graph  $G' = (V', E')$ , mit  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$ , der zusammenhängend ist. Bei gerichteten Graphen wird in der Regel für den Zusammenhang zusätzlich gefordert, dass eine Kante ein Knotenpaar nur in ihrer Richtung verbindet. Kanten, welche zusammenhängende Teilgraphen miteinander verbinden, werden *Schnittkanten* genannt.

Kanten eines Graph können gewichtet werden. Das *Gewicht* einer Kante  $e = (u, v)$  liefert die Gewichtungsfunktion  $\omega(u, v)$ . Das *Gesamtgewicht* eines Graphen kann als

$$\omega(G) = \sum_{(u,v) \in E} \omega(u, v)$$

definiert werden und beschreibt somit die Summe aller Kantengewichte.

Unter einem *Baum* versteht man einen Graphen, in dem von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten genau ein Pfad existiert, andernfalls ist der Graph nicht zusammenhängend (es gibt Knotenpaare, die nicht mit einem Pfad verbunden sind) oder zyklisch (es gibt Knotenpaare, die durch mehr als einen Pfad verbunden sind). Abbildung 2.4 stellt den Unterschied zwischen einem zyklischen Graph (a) und einem Baum (b) dar. Ein Baum kann einen ausgezeichneten Knoten besitzen, der dann als *Wurzel* bezeichnet wird.

Für die Modellierung, welche in Kapitel 4 vorgestellt wird, sind Kürzeste-

Wege-Bäume von Bedeutung, deswegen sollen diese bereits an dieser Stelle kurz erklärt werden. Analog zum Gewicht eines Graphen  $\omega(G)$  kann das Gewicht eines Pfades  $p$  als die Summe der Kantengewichte

$$\omega(p) = \sum_{e \in E, e \in p} \omega(e)$$

definiert werden. Das Gewicht des kürzesten Pfades  $p$  von  $u$  nach  $v$  ( $\delta(p)$ ) kann somit definiert werden als

**Definition 2 (Gewicht des kürzesten Pfades)**

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{\omega(p)\} & \text{für alle Pfade } p \text{ von } u \text{ nach } v \\ \infty & \text{wenn kein Pfad von } u \text{ nach } v \text{ existiert} \end{cases}$$

Der kürzeste Pfad von  $u$  nach  $v$  ist der Pfad  $p$  von  $u$  nach  $v$ , für dessen Gewicht  $\omega(p)$  die Gleichung  $\omega(p) = \delta(u, v)$  erfüllt ist.

Ein kürzeste-Wege-Baum für  $s \in V$  ist ein Baum mit der Wurzel  $s$ , der sich über alle von  $s$  erreichbaren Knoten aus  $V$  aufspannt. Die Pfade im Baum sind dabei Pfade im Graph, so dass gilt:

$$d[v] = \delta(v, s) \text{ für alle } v \in V \quad (2.1)$$

wobei  $d[v]$  die Distanz des Knoten  $v$  nach  $s$  im Baum angibt.

## 2.3 Wasserverteilungssysteme als graphentheoretisches Modell

Für die mathematische Abbildung von Wasserverteilungssystemen ist es üblich, diese als Graphen zu modellieren. Hierzu werden Werkzeuge wie Epanet<sup>1</sup> ([EPA07]) oder das am IWG entwickelte Kanet ([IWG08]) verwendet. Da sich die Werkzeuge im Detail unterscheiden sei im Folgenden die Terminologie von Kanet verwendet.

In Wasserverteilungsnetzen sind immer homogene Leitungsabschnitte von Interesse. Homogene Leitungsabschnitte sind Abschnitte, in denen sich die hydraulischen Eigenschaften (zum Beispiel Rohrmaterial, Rohrdurchmesser) nicht ändern. In homogenen Leitungsabschnitten gelten die hydraulischen Zusammenhänge aus Abschnitt 2.1.2. Da eine Änderung der hydraulischen Eigenschaften eine Änderung des Verhaltens mit sich führt, wird jede Änderung einer Eigenschaft als Knoten modelliert. Zudem werden Knoten eingesetzt an Verzweigungen, Entnahme- und Einspeisepunkten. Sämtliche Knoten werden in der Knotenmenge  $V$  zusammengefasst, sämtliche homogenen Leitungsabschnitte in der Kantenmenge  $E$ . Knoten und Kanten werden mit hydraulischen Attributen versehen, zum Beispiel mit der Lage im Raum, der Leitungslänge, dem Leitungsdurchmesser oder dem Durchfluss bei Kanten oder dem Bedarf bei Knoten [Kli07].

---

<sup>1</sup>Entwickelt von der US Umweltbehörde EPA (Environmental Protection Agency)

Für eine Unterscheidung der Knoten wird in Kanet das Attribut Typ eingeführt. Es wird dabei zwischen Bedarfs-, Zwischen- und Einspeiseknoten unterschieden. Einspeise- und Bedarfsknoten bestimmen die Stellen im Netz, an denen Wasser dem System zugeführt, bzw. entnommen wird. Bei Zwischenknoten handelt es sich um Kanet spezifische Knoten, die der realistischeren Darstellung des Leitungsverlaufs dienen oder eine Änderung der hydraulischen Eigenschaften anzeigen. An Zwischenknoten liegt kein Bedarf an, an ihnen muss also kein Mindestdruck zur Entnahme gewährleistet werden. Um den Durchfluss an Leitungen zu gewährleisten ist allerdings darauf zu achten, dass Zwischenknoten nicht über dem Potential des ihnen zugeordneten Behälters liegen [Kli07].

Der Graph des Wasserverteilungssystems ist zunächst ungerichtet, da die Leitungen in beiden Richtungen durchflossen werden können. Dennoch empfiehlt es sich bei der Modellierung von Wassernetzen einen gerichteten Graphen zu verwenden, da so die Richtung des Flusses an Hand des Vorzeichens abgelesen werden kann. In dieser Arbeit spielt die Durchflussrichtung keine Rolle, weswegen im Folgenden ungerichtete Graphen verwendet werden.

Da bei Wasserversorgungsnetzen das Potential von Interesse ist, welches unter anderem durch Gravitationsunterschiede entsteht (siehe Abschnitt 2.1) werden die Knoten im 3 dimensionalen Raum abgebildet. Zu seinen Koordinaten besitzt also jeder Knoten noch seine geodätische Höhe, aus der sich das Potential des Knotens ableiten lässt.

Wasserverteilungsnetze bestehen aus verästelten und vermaschten Bereichen. In der Terminologie der Graphentheorie sind diese Begriffe zu Bäumen und Zyklen äquivalent.

Abbildung 2.5 zeigt den Stadtplan einer Stadt in Nordafrika, in dem der für die Modellierung resultierende Graph eingezeichnet ist. Die hellen kleinen Kreise stellen Bedarfs- oder Zwischenknoten dar (rosa Farbe), bei den größeren dunkleren Kreisen handelt es sich um Behälter (grüne Farbe).



**Abbildung 2.5** – Beispiel zur Modellierung des Wassernetzes einer Stadt in Nordafrika als Graph

# Kapitel 3

## Problemdefinition

In diesem Kapitel werden die Anforderungen der Partitionierung zunächst in Abschnitt 3.1 informell erfasst. Anschließend werden sie in Abschnitt 3.2 formalisiert.

### 3.1 Allgemeine Problemstellung

Gegeben ist ein Wasserverteilungssystem, welches sich aus Einspeise-, Zwischen- und Entnahmepunkten zusammensetzt, die wiederum durch Rohre verbunden sind. Gesucht ist eine Zerlegung dieses Systems in eine vorgegebene Anzahl von Druckzonen, so dass die Zerlegung folgenden Kriterien genügt:

1. Alle Druckzonen sind paarweise disjunkt.
2. Die Zahl der Schnittkanten soll möglichst klein sein.
3. Jede Druckzone muss mindestens einen Einspeisepunkt (Behälter) beinhalten.
4. Jede Druckzone muss in sich zusammenhängend sein.
5. Die Größen der Druckzonen sollen möglichst ähnlich sein. Die Größe wird als Summe der Leitungslängen definiert.
6. Bedarfsknoten müssen mindestens 15 Meter unterhalb des zugeordneten Behälterpotentials liegen, Zwischenknoten höchstens auf gleicher Höhe.
7. Die Potentialdifferenz der Bedarfsknoten zu dem ihnen zugeordneten Behälter soll 60m möglichst nicht überschreiten.
8. Knoten, die nirgendwo zugeordnet werden können, sollen in einer gesonderten Partition zusammengefasst werden, für welche keinerlei Bedingung zu beachten ist. Die Anzahl solcher Knoten soll möglichst gering gehalten werden.

Anforderung 1 ergibt sich aus der Tatsache, dass die Druckzonen im Betrieb getrennt voneinander laufen sollen. Ein Knoten kann daher nur einer Zone zugeordnet werden. Die kostenreduzierenden Maßnahmen spiegeln sich in Anforderungen 2 (weniger Rohre müssen geschlossen werden) und 7 (Einsatz von

Druckminderern wird reduziert) wieder. Die Versorgung der Bedarfsknoten wird durch Punkte 3, 4 und 6 abgedeckt. In realen Netzen ist es gelegentlich der Fall, dass Bedarfsknoten mit keinem Behälter verbunden sind, dessen Potential höher ist als das Potential des Knotens selbst. Manche Knoten besitzen auch gar keine Verbindung zu einem Behälter. Diese Fälle werden durch Anforderung 8 abgedeckt, welche gewährleistet, dass alle nicht zuordenbaren Knoten bei der Zerlegung unberücksichtigt bleiben.

Die Anforderungen lassen sich in harte und weiche Kriterien untergliedern. Harte Kriterien sind solche, die in jedem Falle erfüllt werden müssen, da sonst eine Einteilung in Druckzonen gar nicht erst möglich ist. Hierzu zählen Anforderung 1, 3, 4 und 6. Alle anderen sind weiche Kriterien deren Einhaltung erwünscht aber nicht zwingend notwendig ist. Kriterien, deren Erfüllung nicht durch eine feste Schranke eindeutig ist, begünstigen sich nicht zwingendermaßen gegenseitig, laufen teilweise sogar zuwider. So stellt eine Zerlegung mit möglichst wenig Schnittkanten nicht automatisch eine Zerlegung mit balanciertem Größenverhältnis der Partitionen dar (siehe Abschnitt 5.2.1). Es stellt sich somit die Frage, welches Kriterium welche Priorität besitzt, um eine gute Zerlegung des Wasserverteilungssystems zu erhalten.

Der Wert für die Obergrenze der Bedarfsknoten kann von Netz zu Netz unterschiedlich sein. Sie hängt ab vom Mindestdruck, den man gewährleisten will und den zu erwartenden Druckverlusten. Da es sich hier um ein Planungskriterium handelt, welches im Vorfeld festgeschrieben wird, ist die Grenze als unveränderbar anzusehen. Bei dem in Anforderung 6 angegebenen Wert von 15 Metern handelt es sich um den für die vorliegenden Beispielnetze festgeschriebenen Wert. Ebenso ist der Wert aus Anforderung 7 von 60 Metern ein für die Beispielnetze üblicherweise verwendeter Wert, der aber bei der Verwendung von anderen Materialien in anderen Netzen ebenfalls ein Anderer ist.

## 3.2 Formale Beschreibung

Das Wasserverteilungssystem wird durch einen Graph  $G = (V, E)$  modelliert (siehe Abschnitt 2.3). Die Menge  $V$  repräsentiert alle Knoten des Wasserverteilungssystems, die Menge  $E$  alle Rohre, welche die Knoten aus  $V$  verbinden. Eine weitere Menge  $T \subset V$  umfasst alle Einspeisepunkte des Netzes. Die Zerlegung wird durch die Teilmengen  $C_0, \dots, C_k \subseteq V$  repräsentiert.  $C_0$  bis  $C_{k-1}$  entsprechen den zu erstellenden Partitionen,  $C_k$  fasst alle nicht zuordenbaren Knoten zusammen.

**Disjunkte Partitionen** Dass alle Teilmengen  $C_i$  paarweise disjunkt sind (Kriterium 1) wird durch

$$C_i \cap C_j = \emptyset, 0 \leq i < j \leq k \quad (3.1)$$

ausgedrückt. Durch die Beschreibung der Partitionen als Knotenmengen  $C_i$ , welche alle Untermengen von  $V$  sind, genügt es zu fordern, dass der Schnitt der Teilmengen  $C_i$  leer ist. Somit ist jeder Knoten genau einer Partition zugeordnet und Überschneidungen werden vermieden.



**Versorgung der Partition durch Behälter** Die Forderung aus Anforderung 3, jeder Partition mindestens einen Behälter zuzuordnen, wird durch

$$C_i \cap T \neq \emptyset, \text{ für alle } i \quad (3.2)$$

beschrieben. In jedem  $C_i$  muss ein Behälter aus der Menge  $T$  enthalten sein, der Schnitt beider Mengen ist also niemals leer.

**Reduzierung der Schnittkanten** Im Gegensatz zu den Knoten, welche eindeutig einer Partition zugeordnet werden können, kann eine Kante  $e = (u, v)$ , welche Knoten  $u$  mit Knoten  $v$  verbindet, innerhalb einer Partition liegen (falls  $u, v \in C_i$ ), oder außerhalb ( $u \in C_i, v \notin C_i$ ). Letztere Kanten werden im Folgenden als Schnittkanten bezeichnet.

Die Zahl dieser Schnittkanten  $e = \{u, v\}$  mit  $u \in C_i, v \notin C_i$  soll gemäß Anforderung 2 minimiert werden.

$$\min \sum_i \sum_{\substack{e=(u,v) \\ u \in C_i, v \notin C_i}} 1 \quad (3.3)$$

Die Summe über  $i$  in Gleichung 3.3 dient als Zähler aller Kanten, die zwei Partitionen miteinander verbinden.

**Partitionsgröße** Da die Netztopologie im Voraus nicht bekannt ist, empfiehlt es sich nicht, für die Partitionsgröße feste Schranken vorzugeben. Es ist aber wünschenswert, die Größe der Partition durch eine weiche Schranke zu begrenzen. Als Partitionsgröße kann die Zahl der Knoten oder Kanten dienen, die in einer Partition liegen, aber auch jedes Attribut, mit dem Knoten oder Kanten gewichtet werden, kann als Grundlage zur Festlegung der Partitionsgröße herangezogen werden. Allen gemeinsam ist:

$$\omega(C_i) \leq \frac{\omega(G)}{k}(1 + \epsilon) \quad (3.4)$$

$$\omega(C_i) \geq \frac{\omega(G)}{k}(1 - \epsilon) \quad (3.5)$$

Gleichung 3.4 legt die maximale, Gleichung 3.5 die minimale Partitionsgröße  $\omega(C_i)$  fest als den Quotient aus dem Gesamtgewicht ( $\omega(e) + \omega(v)$ ) des Graphen und der Zahl der Partitionen mal einen konstanten, frei wählbaren, Faktor  $(1 \pm \epsilon)$ . Da wir in dieser Arbeit nur Leitungslängen betrachten nimmt im Folgenden  $\omega(v)$  stets den Wert 0 an. Die Gewichtsfunktion  $\omega(C_i)$  gibt die Größe einer Partition  $C_i$  an. Je größer dabei  $\epsilon$  ist, desto weicher ist die Schranke für die Partitionsgröße. Das Gesamtgewicht kann über das Knotengewicht oder das Kantengewicht definiert werden, was in der Modellierung keinen Unterschied macht. Daher beschränkt sich diese Arbeit auf die Betrachtung des Kantengewichtes. Als Gewicht dient die Leitungslänge. Es werden also Partitionen erzeugt, deren Gesamtleitungslängen möglichst nah beieinander sind.

**Zusammenhang** Eine Partition  $C_i$  ist genau dann zusammenhängend, wenn für jedem Knoten  $v$  aus  $C_i$  ein Pfad  $p$  von  $v$  zum Behälter  $t$  aus  $C_i$  existiert.

**Potentialunterschiede** Um die Potentialunterschiede innerhalb einer Partition  $C_i$  zu ermitteln bedarf es einer Funktion  $h(v)$ , welche die das Potential bestimmende, geodätische Höhe eines Knotens  $v$  aus  $V$  zurückgibt. Dem Potential des Behälters muss zusätzlich noch seine Füllhöhe aufaddiert werden, welche in dieser Arbeit der maximalen Füllhöhe entspricht und mit  $maxWL$  bezeichnet wird. Für jede Partition  $C_i$  muss also gelten, dass das höchste vorkommende Potential für Bedarfsknoten mindestens um 15 kleiner ist, als das Potential des Behälters.

$$h(t) + maxWL - 15 \geq h(v_i), i < k \quad (3.6)$$

Gleichung 3.6 beschreibt diesen Zusammenhang.

Für die Untergrenze des Potentials kann eine weiche Schranke formuliert werden, ähnlich der Formulierung der Partitionsgröße.

$$h(t) - 60 \leq h(v_i) \cdot (1 + \epsilon), i < k \quad (3.7)$$

Durch geeignete Wahl von  $\epsilon$  in Gleichung 3.7 kann ein Knoten  $v$  mit zu geringem Potential trotzdem noch die Gleichung erfüllen und somit der Partition  $C_i$  zugeordnet werden. Dies genügt der Aussage aus Anforderung 7, dass es zwar eine Untergrenze gibt, diese aber unter Umständen unterschritten werden darf.

# Kapitel 4

## Modellierung

Dieses Kapitel stellt verschiedene Ansätze zur Zerlegung in Druckzonen vor. Ein heuristischer Ansatz basierend auf einem Greedy-Algorithmus wird in Abschnitt 4.1 beschrieben, eine Formulierung mittels Ganzzahliger Linearer Programmierung (ILP) in Abschnitt 4.2. Der Greedyansatz soll hierbei nur kurz angerissen werden, da er bei sehr geringer Laufzeit schon passable Ergebnisse liefert. Da er aber keine Garantie gibt, immer die Optimale Lösung zu finden, liegt der Fokus dieser Arbeit bei der Erstellung und Analyse einer ILP Formulierung der in Kapitel 3 beschriebenen Zerlegung.

### 4.1 Greedyansatz

Ein Greedy-Algorithmus verhält sich immer so, dass er den Schritt in Richtung Lösungsfindung geht, der ihn am nächsten an sein Ziel bringt. Ein Greedyalgorithmus zur Zerlegung des Graphen nach den Anforderungen aus Kapitel 3 könnte demnach wie in Algorithmus 1 aussehen. Algorithmus 1 lässt, von den Behältern ausgehend, die Partitionen  $C_i$  wachsen, in dem er in jedem Durchlauf der kleinsten Partition  $C_i$  den Nachbarknoten zuweist, welcher der Partition den größten Zuwachs der Partitionsgröße einbringt.

Ein freier Nachbarknoten ist ein Knoten, der von einem bereits zugeordneten Knoten aus  $C_i$  durch eine Kante aus  $E$  mit  $C_i$  verbunden ist und noch keiner anderen Partition  $C_j$  angehört. Den schwersten Knoten auswählen bedeutet den Knoten zu wählen, der das höchste Gewicht hat (bei Betrachtung von Knotengewichten) oder dessen Verbindungskante zu  $C_i$  das größte Gewicht hat. Mit geeigneten Datenstrukturen kann mit diesem Ansatz eine Laufzeit von  $O(V \log V + E)$  erreicht werden [CLRS01], wenn das Ausbreiten auf Grundlage des Dijkstra-Algorithmus implementiert wird. Es wird jeder Partition genau ein Behälter zugeordnet, und durch das Betrachten der jeweils kleinsten Partition ist auch eine ausgewogene Balancierung zu erwarten. Die Tatsache, dass immer ein direkter Nachbar zu einer Partition zugefügt wird, gewährleistet den Zusammenhang der Partitionen. Bevor ein Nachbarknoten einer Partition zugeordnet wird, wird noch seine Eignung hinsichtlich der Druckgrenzen dieser Druckzone geprüft. Erfüllt der Knoten die Grenzen, darf er zur Partition hinzugefügt werden, erfüllt er sie nicht, so muss er als Knoten, der nicht zur Partition zugeordnet werden darf aus der Liste der potentiellen Nachbarn entfernt werden.

---

**Algorithmus 1** : Zerlegung mit Greedyansatz

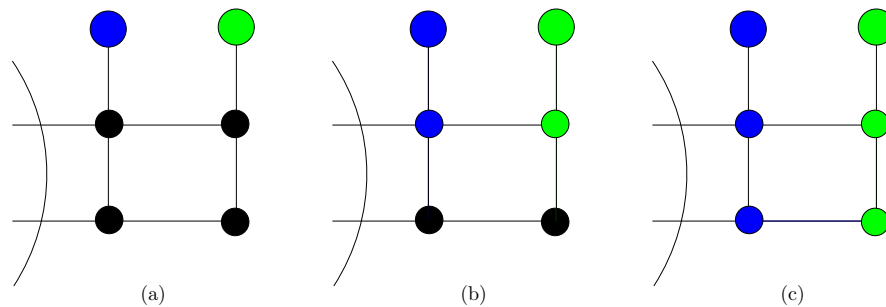
---

**Eingabe** : Graph  $G(V, E)$ , Menge an Einspeiseknoten  $T \in V$ ,  
Gewichtungsfunktion  $\omega(e)$

**Ausgabe** : Zerlegung  $C_i$

```
1 Beginn
2   Weise jeder Partition  $C_i$  einen Knoten aus  $T$  zu;
3   solange Es gibt mindestens ein  $C_i$ , welches noch freie Nachbarknoten
      hat tue
4     wenn Nachbarknoten erfüllt Druckgrenzen dann
5       Füge dem kleinsten  $C_i$  den schwersten freien Nachbarknoten
        hinzu;
6     Ende
7   sonst
8     Markiere Nachbarknoten als nicht zu  $C_i$  zuordenbar
9   Ende
10  Ende
11  zurück  $C_1 \cdots C_k$ ;
12 Ende
```

---



**Abbildung 4.1** – Problematischer Verlauf des Algorithmus 1

Alle harten Kriterien kann dieser sehr einfache Algorithmus somit erfüllen. Auf die Reduzierung der Schnittkanten geht Algorithmus 1 allerdings gar nicht ein und auch die Balancierung ist nicht immer gewährleistet, wie Abbildung 4.1 verdeutlicht. Abgebildet sind drei Zustände eines möglichen Verlaufs von Algorithmus 1. Die größeren Kreise oben stellen die Behälter dar, welche initial (a) ihrer jeweils eigenen Partition zugeordnet werden. Die restlichen Knoten sind Bedarfsknoten, welche anfangs keiner Partition zugeordnet sind. Die Länge der Kanten sei jeweils 1. Teil (b) von Abbildung 4.1 zeigt den Zustand nach zwei Schleifendurchläufen. Wird die blaue Partition nun nach links fortgesetzt, könnte die grüne Partition über die verbleibenden nicht zugeordneten Knoten weiter wachsen. Tritt hingegen der dritte abgebildete Zustand (c) ein, wird ein weiteres Wachstum der grünen Partition verhindert.

## 4.2 Ganzzahlige Lineare Programmierung (ILP)

Eine anderer Ansatz, die Zerlegung unter gegebenen Bedingungen durchzuführen, ist die Formulierung als Ganzzahliges Lineares Programm (ILP). Ganzzahligkeit des ILP wird gefordert, weil ein Knoten entweder in einer, oder in einer anderen Partition, aber nie teilweise in einer und teilweise in anderen Partitionen liegen kann. Der Ansatz der Linearen Programmierung hat den Vorteil, dass man unerwünschte Zustände mit hohen Kosten verbinden kann. Eine Situation, wie sie im Ansatz aus Abschnitt 4.1 aufgetreten ist, bleibt zwar eine gültige Lösung, wird aber beim Fund einer besseren Lösung wieder verworfen. Im Verlauf dieses Abschnittes werden aus der Problemdefinition aus Kapitel 3 Stück für Stück die Optimierungsfunktion und die Randbedingungen für die Formulierung des ILP abgeleitet und diskutiert.

### 4.2.1 Optimierungsfunktion

Grundlage eines jeden ILPs ist die Zielfunktion, welche optimiert wird. Zur Optimierung wird die Zielfunktion entweder minimiert oder maximiert. Aus den Anforderungen aus Kapitel 3.2 lassen sich drei Komponenten für die Zielfunktion ableiten. Optimiert werden können alle Bedingungen, die keine festen Vorgaben an den Zielwert richten. Darunter fallen die Zahl der Schnittkanten, die Partitionsgröße und die untere Grenze des Potentialunterschiedes. Fasst man die Optimierung der Partitionsgröße als Reduzierung der Größendifferenz zur Durchschnittsgrenze auf und modelliert die Optimierung der unteren Schranke ebenfalls als Differenz zu den Behälterpotentialen, so kann man als Zielfunktion eine Minimierungsfunktion wählen.

$$\text{minimiere } A + B + C \tag{4.1}$$

Gleichung 4.1 beschreibt informell das Aussehen der Zielfunktion als Summe der in diesem Abschnitt beschriebenen Komponenten. Der Summand  $A$  aus Gleichung 4.1 steht für die Anzahl der Schnittkanten,  $B$  für die Summe aus den Abständen der Partitionsgrößen zur durchschnittlichen Partitionsgröße und  $C$  für den der Knotenpotentiale zu dem ihnen zugewiesenen Behälterpotential.

### 4.2.2 Nebenbedingungen

Dieser Abschnitt beschreibt die Nebenbedingungen zur Zielfunktion aus Abschnitt 4.2.1. Die Nebenbedingungen resultieren aus den in Abschnitt 3 beschriebenen Anforderungen.

#### Partitionszugehörigkeit

Um Partitionen voneinander unterscheiden zu können, wird für jede Partition ein Index  $i$  eingeführt. Dieser Index  $i$  nummeriert die Partitionen fortlaufend, beginnend mit 0. Es gilt somit  $0 \leq i \leq k$ . Der Index  $k$  wird für die nicht verbundenen Teilbereiche verwendet. Die Variable  $x_{v,i} \in \{0, 1\}$  drückt aus, ob sich Knoten  $v$  in Partition  $i$  befindet, oder nicht. Wir interpretieren dabei  $x_{v,i} = 1$ , dass sich Knoten  $v$  in Partition  $i$  befindet. Nimmt  $x_{v,i}$  den Wert 0 an, nehmen wir an, dass Knoten  $v$  nicht zu Partition  $i$  gehört. Da sich jeder Knoten nur in

einer Partition befinden soll, wird gefordert:

$$\sum_{i=0}^k x_{v,i} = 1, \text{ für alle } v \in V \quad (4.2)$$

Wäre ein Knoten Teil von mehreren Partitionen, wäre die Summe aus Gleichung 4.2 größer oder gleich 2. Analog dazu kann durch

$$\sum_{t \in T} x_{t,i} \geq 1, \text{ für alle } i \quad (4.3)$$

ausgedrückt werden, dass jede Partition mindestens einen Behälter enthält. Die Knotenmenge  $T \subseteq V$  fasst alle Behälter zusammen (siehe Abschnitt 3.2). Gleichung 4.3 führt dazu, dass jede Partition einen Behälter enthält. Pro Behälter in der Partition wird 1 auf die Summe aufaddiert. Die Ungleichheit erlaubt, dass auch mehrere Behälter pro Partition existieren dürfen. Eine ähnliche Formulierung für beide Fälle findet sich in [CSGW04].

### Bestimmung der Schnittkanten

Um die Anzahl der Schnittkanten zu minimieren bedarf es der Variable  $x_e$ , die angibt, ob eine Kante  $e = (u, v)$  eine Schnittkante ist oder nicht. Interpretiert wird dabei für  $x_e = 1$  damit, dass  $e$  eine Schnittkante ist. Außerdem führen wir die Variable  $x_{e,i} \in \{0, 1\}$  ein, welche ausdrückt, ob sich Kante  $e$  komplett in Partition  $i$  befindet, oder nicht. Eine Kante  $e = (u, v)$  befindet sich genau dann in Partition  $i$ , wenn sowohl  $u$ , als auch  $v$  in Partition  $i$  liegen. Es gilt dann  $x_{u,i} = x_{v,i} = 1$ . Wir interpretieren dabei  $x_{e,i} = 1$ , wenn sich Kante  $e$  in Partition  $i$  befindet. Sonst gilt  $x_{e,i} = 0$ . Da die Variable  $x_e$  Kanten als Schnittkanten identifiziert, kann sie direkt für die Zielfunktion verwendet werden, indem man als Summand  $A$  der Zielfunktion aus Abschnitt 4.2.1 den Term  $\sum_{e \in E} x_e$  wählt. Für jede Schnittkante wird so der Wert 1 auf die Zielfunktion aufaddiert, für alle restlichen Kanten der Wert 0. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Schnittkanten zu identifizieren, von denen zwei in diesem Abschnitt erklärt werden sollen.

**Bestimmung mittels Anfang und Endknoten** Eine Möglichkeit ist, die bestehenden Variablen der Kantenendpunkte  $(u, v)$  zu nutzen. Liegt eine Kante  $e$  in einer Partition  $i$ , so liegen sowohl  $u$ , als auch  $v$  in dieser Partition. Es gilt somit:

$$x_{u,i} = x_{v,i} = 1, \text{ für alle } i; u, v \in V \quad (4.4)$$

Für Schnittkanten gilt Gleichung 4.4 nicht. Allerdings gilt für jede Schnittkante  $e = (u, v)$  folgende Beziehung:

$$\text{Es existieren } i, j \text{ mit } i \neq j : x_{u,i} = x_{v,j} = 1, u, v \in V \quad (4.5)$$

Da Gleichung 4.5 nur für genau ein Paar  $i, j$  gilt, kann für  $x_e$  folgende Ungleichung definiert werden:

$$x_e \geq x_{u,i} + x_{v,j} - 1, \text{ für alle } i \neq j \quad (4.6)$$

Für eine Schnittkante zwischen den Partitionen  $i$  und  $j$  nimmt Gleichung 4.6 die Form  $x_e \geq 1$  an. Da  $x_e \in \{0, 1\}$ , wird  $x_e$  für Schnittkanten den Wert 1

annehmen. Für andere Kanten kann  $x_e$  zwar 0 oder 1 werden, da  $x_e$  aber durch die Zielfunktion minimiert wird, wird für Kanten innerhalb einer Partition  $x_e$  immer 0 sein.

Um die Anzahl an Schnittkanten zu minimieren, muss für jedes  $e$  aus  $E$  die Variable  $x_e$  als Summand in die Minimierungsfunktion aufgenommen werden. Alle  $x_e$  lassen sich in der Summe  $\sum_{e \in E} x_e$  zusammenfassen.

Problematisch an dieser Variante der Schnittkantenbestimmung ist, dass sie eine Nebenbedingung für jedes Paar  $(i, j)$  erzeugt, was dem ILP eine hohe Bandbreite an Lösungsmöglichkeiten bietet und somit eine längere Berechnungsdauer zur Lösung des ILP zur Folge hat.

**Bestimmung über Kanten, die in einer Partition liegen** Mit weniger Nebenbedingungen kommt eine Variante aus, die sich von [Hü08] ableiten lässt. Hat man einmal herausgefunden, dass  $e$  keiner Partition angehört, kann  $x_e$  mit Gleichung 4.7 bestimmt werden:

$$\sum_i x_{e,i} + x_e = 1, \text{ für alle } e \in E \quad (4.7)$$

Ist  $e$  keiner Partition zugehörig, nimmt die linke Summe aus Gleichung 4.7 den Wert 0 an und somit wird  $x_e$  auf 1 gesetzt. Hierzu muss aber noch  $x_{e,i}$  bestimmt werden. Die Variable  $x_{e,i}$  soll den Wert 1 annehmen, wenn beide Endpunkte in der gleichen Partition liegen. Dies ist der Fall, wenn es ein  $i$  gibt, so dass  $x_{u,i} = x_{v,i} = 1$  gilt. Für das ILP leiten sich daraus folgende Bedingungen ab:

$$x_{u,i} + x_{v,i} - 2x_{e,i} \leq 1, \text{ für alle } i, e \in E \quad (4.8)$$

$$x_{u,i} + x_{v,i} - 2x_{e,i} \geq 0, \text{ für alle } i, e \in E \quad (4.9)$$

Gleichung 4.8 gewährleistet, dass  $x_{e,i}$  den Wert 1 annimmt, wenn beide Knoten einer Partition zugeordnet sind, Gleichung 4.9 stellt hingegen sicher, dass  $x_{e,i}$  den Wert 0 annimmt, sollte ein Knoten nicht in Partition  $i$  liegen. Ist dies der Fall, nimmt Gleichung 4.9 die Form  $1 - 2x_{e,i} \geq 0$  an, was nur durch  $x_{e,i} = 0$  erfüllt wird.

Im Vergleich zur direkten Realisierung müssen nur zwei Bedingungen pro Partition und Kante erzeugt werden. Außerdem wird  $x_{e,i}$  für die Bestimmung der Partitionsgröße noch benötigt und muss ohnehin bestimmt werden, weswegen die Realisierung dieser Arbeit letztere Variante verfolgt.

### Balancierung der Partitionsgröße

Zur Balancierung der Partitionsgrößen bedarf es zunächst für jede Partition  $i$  der Variable  $\omega(C_i)$ , welche die Größe der Partition angibt. Die Funktion  $\omega(e)$  geht als Konstante für jede Kante  $e$  in die Partitionsgröße mit ein. Für die Partitionsgröße  $\omega(C_i)$  wird  $\omega(C_i) \geq 0$  gefordert. Die Partitionsgröße  $\omega(C_i)$  kann so bestimmt werden mit

$$\omega(C_i) = \sum_{e \in E} (\omega(e) \cdot x_{e,i}) \text{ für alle } i \quad (4.10)$$

Gemäß Gleichung 4.10 geht das Kantengewicht  $\omega(e)$  nur dann in  $\omega(C_i)$  ein, wenn  $x_{e,i}$  den Wert 1 hat, also in der Partition  $i$  liegt. Hat man die Partitionsgröße

bestimmt muss man  $\omega(C_i)$  noch an die durchschnittliche Partitionsgröße anpassen. Bei Netzen mit geringer Anzahl an Partitionen ist es dabei ausreichend, die Partition minimaler und maximaler Größe aneinander anzunähern um ein ausgewogenes Verhältnis aller Partitionen zu erreichen. Es kann jedoch vorkommen, dass die geodätischen Rahmenbedingungen ein Anpassen der minimal oder maximal großen Partition nicht zulassen, da sonst die Potentialbedingung der Druckzonengrenzen verletzt werden würde. In solchen Fällen muss jede Partition an die durchschnittliche Partitionsgröße angenähert werden. Da diese Annäherung durch die Optimierungsfunktion erfolgt, ist allerdings eine höhere Laufzeit zu erwarten. Beide Varianten sollen in diesem Abschnitt vorgestellt werden.

**Modellierung mittels minimaler und maximaler Partitionsgröße** Eine gleichmäßige Verteilung der Partitionsgröße erreicht man, indem man das Maximum (Minimum) der Partitionsgröße aller Partitionen minimiert (maximiert). Das Maximum wird durch die Variable  $C_{\max}$  ausgedrückt, das Minimum durch die Variable  $C_{\min}$ . In der Zielfunktion geht die Differenz  $C_{\max} - C_{\min}$  als Summand  $B$  ein. So erreicht man, dass die beiden Werte sich annähern, da  $C_{\max}$  minimiert und  $C_{\min}$  durch Negation maximiert wird.

Zur Bestimmung der Werte  $C_{\max}$  und  $C_{\min}$  im ILP genügt es, über alle Gewichte (z.B. Knotenanzahl oder Leitungslänge) aufzusummieren und zu fordern, dass diese Summe  $\leq$  (bzw.  $\geq$ )  $C_{\max}$  ( $C_{\min}$ ) ist. Es resultieren folgende Bedingungen:

$$\omega(C_i) \leq C_{\max}, \text{ für alle } i \quad (4.11)$$

$$\omega(C_i) \geq C_{\min}, \text{ für alle } i \quad (4.12)$$

Durch das Aufsummieren von  $C_{\max}$  auf die Minimierungsfunktion versucht das ILP, ein möglichst geringes Maximum zu finden, welches gerade noch einer existierenden Partitionsgröße  $\omega(C_i)$  entspricht. Analog dazu erhält man  $C_{\min}$ , indem man  $C_{\min}$  von der Minimierungsfunktion abzieht. Die Variablen  $C_{\max}$  und  $C_{\min}$  bilden somit die (weichen) Schranken für  $\omega(C_i)$  aus Gleichung 4.10. Ein kleines Beispiel soll die Funktionsweise von Bedingungen 4.11 und 4.12 verdeutlichen. Gegeben sei hierzu ein Graph  $G$  zerlegt in die Partitionen  $C_1, C_2$  und  $C_3$  mit den Partitionsgrößen

$$\omega(C_1) = 235$$

$$\omega(C_2) = 280$$

$$\omega(C_3) = 229$$

Durch Bedingung 4.11 könnte  $C_{\max}$  zum Beispiel den Wert 300 annehmen. Optimiert man jetzt  $C_{\max}$ , indem man es der Minimierungsfunktion aufsummiert, wird das ILP  $C_{\max}$  auf den Wert 280 reduzieren. Durch einen niedrigeren Wert wäre Bedingung 4.11 verletzt und stellt somit keine gültige Lösung des ILP mehr dar. Analog zur maximalen Partitionsgröße muss die minimale Partitionsgröße in der Zielfunktion abgezogen werden um bei der Minimierung ihren Wert möglichst groß zu halten.

Es wäre auch denkbar, die Partitionen nur über das Maximum zu balancieren. Man spart sich dadurch eine Variable in der Optimierungsfunktion, was das Finden von gültigen Lösungen beschleunigt. Es kann dadurch aber passieren, dass Lösungen günstiger sind, die alle Partitionen ein wenig über den Durchschnitt



heben, auf Kosten einer Partition, deren Größe dann extrem vom Durchschnitt abweicht. Da eine solche Verteilung nicht erwünscht ist, sollte man auf eine Optimierung beider Randgrößen setzen.

**Modellierung durch Annäherung aller Partitionsgrößen** Sind maximale oder minimale Partitionsgröße auf Grund anderer Randbedingungen unveränderbar und liegen weit auseinander, kommt man um eine Balancierung aller Partitionsgrößen nicht herum, möchte man zumindest im restlichen Teil des Netzes eine ausgewogene Balancierung erzielen.

Zunächst muss die Differenz  $\Delta C_i$  aus Partitionsgröße  $\omega(C_i)$  und der durchschnittlichen Partitionsgröße  $C_{\text{avg}}$  gebildet werden. Die durchschnittliche Partitionsgröße  $C_{\text{avg}}$  ist eine Konstante und gibt den Quotient aus Gesamtgröße des Wassernetzes und der Anzahl der zu erstellenden Partitionen an. Die Differenz  $\Delta C_i$  wird dann durch Aufsummieren auf die Minimierungsfunktion minimiert, was einer Anpassung der Partitionsgröße an die Durchschnittsgröße gleichkommt. Eine ausgewogene Balancierung erhält man, wenn jedes  $\Delta C_i$  einen Wert nahe bei 0 annimmt. Die Summe der Abstände der Partitionsgrößen  $\Delta C_i$  muss also minimiert werden und entspricht somit dem Summanden B der Minimierungsfunktion aus Gleichung 4.1. Da im Vorfeld nicht bekannt ist, ob eine Partition sich von oben oder von unten an  $C_{\text{avg}}$  annähert, müssen zusätzlich  $\Delta C_{i,\text{oben}}$  und  $\Delta C_{i,\text{unten}}$  mit  $\Delta C_{i,\text{oben}}, \Delta C_{i,\text{unten}} \geq 0$  definiert werden, so dass gilt:

$$\Delta C_{i,\text{oben}} = \begin{cases} \omega(C_i) - C_{\text{avg}} & \text{falls } \omega(C_i) \geq C_{\text{avg}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\Delta C_{i,\text{unten}} = \begin{cases} C_{\text{avg}} - \omega(C_i) & \text{falls } \omega(C_i) < C_{\text{avg}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.14)$$

Die Variable  $\Delta C_{i,\text{oben}}$  gibt somit den Abstand von  $\omega(C_i)$  zu  $C_{\text{avg}}$ , sollte  $\omega(C_i)$  größer sein als  $C_{\text{avg}}$ , sonst nimmt es den Wert 0 an. Im Umgekehrten Fall ( $\omega(C_i) < C_{\text{avg}}$ ) wird der Abstand von  $\omega(C_i)$  zu  $C_{\text{avg}}$  in  $\Delta C_{i,\text{oben}}$  gespeichert. Nun genügt es,  $\omega(C_i)$  aus der Summe von  $\Delta C_{i,\text{oben}}$  und  $\Delta C_{i,\text{unten}}$  zu bilden, da höchstens eine von beiden Differenzen ungleich 0 ist.

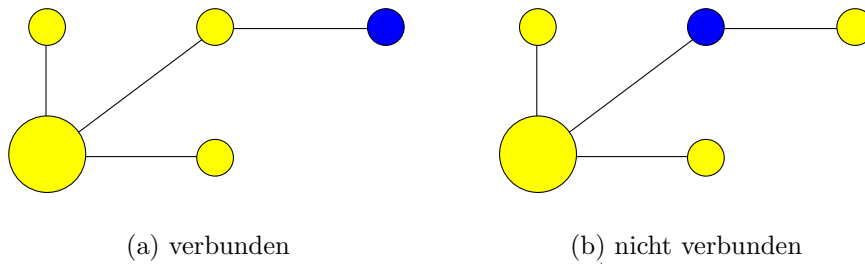
Für das ILP lassen sich aus Bedingungen 4.13 und 4.14 zwei Bedingungen ableiten, welche in den Gleichungen 4.15 und 4.16 beschrieben sind.

$$\omega(C_i) - \Delta C_{i,\text{oben}} \leq C_{\text{avg}} \quad (4.15)$$

$$\omega(C_i) + \Delta C_{i,\text{unten}} \geq C_{\text{avg}} \quad (4.16)$$

Gleichungen 4.15 und 4.16 entsprechen den Bedingungen aus Gleichungen 4.13 und 4.14. Bei reiner Gleichheit entstünde eine reine Zuweisung von  $\Delta C_{i,\text{oben}}$  und  $\Delta C_{i,\text{unten}}$ . Damit wäre das ILP unter Garantie unlösbar, da eine von beiden Differenzen negativ werden würde, wir aber gefordert haben, dass beide Differenzen positiv sind. Die Ungleichheit in Gleichungen 4.15 und 4.16 bewirkt, dass beide Differenzen bei wachsendem (sinkenden)  $\omega(C_i)$  trotzdem noch erfüllt sein können. Letztlich wird in Gleichung 4.17 noch die Zuweisung zu  $\Delta C_i$  beschrieben.

$$\Delta C_i - \Delta C_{i,\text{unten}} - \Delta C_{i,\text{oben}} = 0 \quad (4.17)$$



**Abbildung 4.2** – Modellierung des Zusammenhangs einer Komponente mittels Fluss

$\Delta C_{i,\text{oben}}$  und  $\Delta C_{i,\text{unten}}$  werden durch direkte Bindung an  $\Delta C_i$  in Gleichung 4.17 minimiert, da  $\Delta C_i$  teil der Minimierungsfunktion ist. Somit nehmen  $\Delta C_{i,\text{oben}}$  und  $\Delta C_{i,\text{unten}}$  genau den Wert 0 an, sollte die Differenz in den negativen Bereich rutschen.

### Modellierung des Zusammenhangs der Partitionen

Die Modellierung des Zusammenhangs kann über verschiedene Arten erfolgen, zum Einen über einen positiven Fluss, für den an jedem Knoten ein Gleichgewicht gefordert wird und zum Anderen über Spannbäume. Der wesentliche Vorteil der Flussmodellierung liegt darin, dass sie alle möglichen Lösungen in Betracht zieht, während die Spannbaummodellierung nur eine oder wenige Lösungen findet, ohne zu garantieren, dass es die optimale Lösung ist. Dafür ist letztere Modellierung in Sachen Laufzeit vor allem bei großen Netzen deutlich überlegen (siehe Kapitel 5). Beide Modellierungen sollen in diesem Abschnitt vorgestellt werden.

**Modellierung durch Flussgleichgewicht** Grundlage der Flussmodellierung ist es, von jedem Knoten zu fordern, dass die Summe aller eingehenden Flüsse gleich der Summe aller ausgehenden Flüsse ist, abzüglich seines eigenen Bedarfs, der auf 1 gesetzt werden kann. Negative Flüsse sind dabei nicht zugelassen. Einspeisepunkte haben keinen Eingangsfluss und die Summe der Ausgangsflüsse beträgt den Wert des Gesamtflusses ihrer Partition. Der Gesamtfluss einer Partition entspricht der Zahl der zu dieser Partition zugehörigen Knoten. Jede Kante, die nicht Schnittkante ist, hat die Kapazität, so groß wie die Zahl der Knoten im Netz, jede Schnittkante die Kapazität 0. Durch dieses Gleichgewicht nimmt, vom Behälter ausgehend, der Fluss zu den Rändern der Partition hin an jedem Knoten um den Wert 1 ab.

Zulässige Lösungen sind unter diesen Voraussetzungen nur noch zusammenhängende Partitionen. Ist ein Teil der Partition durch eine Schnittkante getrennt, und besitzt keinen weiteren Pfad zum Behälter der Partition, wird durch die Schnittkante der Fluss auf 0 begrenzt. Der abgetrennte Teil kann so das Gleichgewicht an den Knoten nicht mehr erfüllen, da die Flüsse nicht negativ sein dürfen, der Bedarf eines jeden Knoten aber den Wert 1 hat. Abbildung 4.2 zeigt die Situation in zusammenhängenden und in nicht zusammenhängenden Partitionen. Der große Knoten stellt jeweils den Einspeiseknoten dar. Der Gesamtfluss in der gelben Partition ist jeweils 3, da insgesamt drei Knoten

dem gelben Behälter zugeordnet wurden. Dadurch ist aber in der nicht verbundenen Partition die Bedingung des Flussgleichgewichtes im isolierten Knoten nicht mehr erfüllt, da seine einzige Kante eine Schnittkante mit der Kapazität 0 ist. Durch die Bedingung des Flussgleichgewichtes müssten seine eingehenden Kanten mindestens eine Flusseinheit zu diesem Knoten transportieren, was zu einem Widerspruch führt. Partitionierung (b) aus Abbildung 4.2 stellt somit eine ungültige Zerlegung dar.

Zur Modellierung des Flusses führen wir die Variable  $f_{u,v}$  für jede Kante  $\{u,v\}$  ein. Die Variable  $f_{u,v} \geq 0$  gibt für eine Kante  $e = (u,v)$  den Fluss von Knoten  $u$  nach Knoten  $v$  an. Da nicht von vornherein bekannt ist, in welche Richtung sich der Fluss ausbreitet wird zwischen beiden Richtungen einer Kante unterschieden. Auf jeder Kante  $\{u,v\}$  gibt es somit zwei verschiedene Flüsse  $f_{u,v}$  und  $f_{v,u}$ . Weiterhin ist der Gesamtfluss nach oben hin zu begrenzen. Die maximal vorkommende Partitionsgröße ist die Größe des kompletten Netzes, daher folgt für den Fluss  $f_{u,v}$  einer Kante  $(u,v)$ :  $0 \leq f_{u,v} \leq n$ .

$$\sum_{e(u,v) \in E} f_{u,v} - \sum_{e(u,v) \in E} f_{v,u} = 1 \text{ für alle } v \in V, v \notin T \quad (4.18)$$

Gleichung 4.18 modelliert das in diesem Abschnitt beschriebene Knotengleichgewicht. Die erste Summe aus Gleichung 4.18 summiert die eingehenden Flüsse eines jeden Knoten  $v$ , die zweite Summe die Gesamtheit aller ausgehenden Flüsse. Die Differenz beider Summen ergibt 1. Es geht also an jedem Knoten eine Flusseinheit verloren. Für den Gesamtfluss bedeutet das, dass er genau so groß sein muss, wie Knoten der Partition zugewiesen sind.

$$\sum_{(t,v) \in E; t \in T} f_{t,v} - \sum_{v \in V} x_{v,i} = -1, \text{ für } 0 \leq i < k \quad (4.19)$$

Gleichung 4.19 definiert den Gesamtfluss, der auf alle ausgehenden Kanten eines Behälters verteilt wird. Zieht man die Anzahl aller Knoten, die sich der Partition des Behälters befinden, ab, erhält man den Wert -1. Dies ist auf den Bedarf des Behälters zurückzuführen, der auch gemäß dem Knotengleichgewicht den Wert 1 hat.

Kanten, die Teil des Schnittes sind, haben keinen Fluss, daher wird eine Kante nur dem Flussgewicht aufaddiert, wenn es sich nicht um eine Schnittkante handelt.

$$f_{u,v} + n \cdot \sum_{(u,v) \in E} x_e \leq n \text{ für alle } u, v \in V \setminus T \quad (4.20)$$

$$f_{v,u} + n \cdot \sum_{(u,v) \in E} x_e \leq n \text{ für alle } u, v \in V \setminus T \quad (4.21)$$

Gleichungen 4.20 und 4.21 gewährleisten, dass die Kante von  $u$  nach  $v$  die maximale Kapazität hat, wenn die Kante  $(u,v)$  keine Schnittkante ist. In diesem Fall ist die Variable  $x_e = 0$  und  $f_{u,v}, f_{v,u}$  können alle Werte von 0 bis  $n$  annehmen. Ist  $x_e = 1$  können die Variablen  $f_{u,v}$  und  $f_{v,u}$  nur noch mit dem Wert 0 die Ungleichungen 4.20 und 4.21 erfüllen.

**Modellierung durch Spannbaum für jede Partition** Alternativ zur eben vorgestellten Methode der Modellierung über das Flussgleichgewicht kann der

Zusammenhang einer Partition auch über einen Baum erfolgen, dessen Wurzel der zu einer Partition zugehörige Behälter ist. Jeder Behälter ist somit Wurzel seines eigenen Partitionsbaumes, von denen jeder sich über den kompletten mit dem Behälter verbundenen Graph erstreckt. Zur Modellierung des Baumes genügt es, jedem Knoten seinen Vorgänger in Richtung Wurzel zuzuweisen. Ein Knoten kann demzufolge nur in einer Partition sein, wenn sein Vorgänger ebenfalls in der Partition ist. Der Vorgänger eines Knotens  $v$  in der Partition  $i$  wird als  $\text{Pred}(v, i)$  bezeichnet. Der Vorgänger  $u = \text{Pred}(v, i)$  ist der Knoten  $u$ , welcher auf dem Pfad von  $v$  nach  $t$  als nächstes kommt. Der Pfad von  $v$  nach  $t$  entspricht dem Ast des Baumes, der den Behälter  $t$  der Partition  $i$  mit dem Knoten  $v$  verbindet. Der Vorgänger  $u$  des Knotens  $v$  zu einer Partition  $i$  ist also der Knoten  $u$ , der auf dem kürzesten Pfad von  $v$  nach  $t$  liegt und direkter Nachbar des Knotens  $v$  ist.

Als Bedingung für das ILP lässt sich aus dieser Vorgängerbeziehung folgende Bedingung ableiten:

$$x_{v,i} - x_{\text{Pred}(v,i),i} \leq 0 \quad (4.22)$$

Wenn Knoten  $v$  in Partition  $i$  liegt, entsteht aus Gleichung 4.22 der Term  $1 - x_{\text{Pred}(v,i),i} \leq 0$ . Dies ist nur dann erfüllt, wenn  $x_{\text{Pred}(v,i),i} = 1$  gilt, der Vorgänger von  $v$  also ebenfalls in Partition  $i$  liegt. Anders herum bewirkt die Ungleichheit, dass der Vorgänger von Knoten  $v$  auch in Partition  $i$  liegen darf, wenn  $v$  selber nicht in Partition  $i$  liegt.

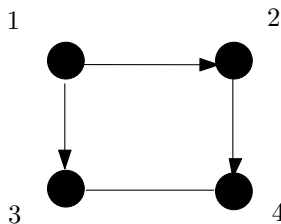


Abbildung 4.3 – Beispiel der Spannbbaummodellierung

Da nur ein Vorgänger pro Knoten definiert wird, ist es offensichtlich, dass bei dieser Modellierung nicht alle möglichen Lösungen betrachtet werden. Es könnte demnach sein, dass  $\text{Pred}(v, i) = u$  für ein bestimmtes  $i$  definiert wurde, die optimale Lösung aber Knoten  $v$  und  $w$  in der Partition  $i$  vereint, der Knoten  $u$  sich hingegen in einer anderen Partition  $j$  befindet. Abbildung 4.3 zeigt dazu einen Graph mit einem wie in diesem Abschnitt beschriebenen Spannbbaum. Durch die Vorgängerbedingung (siehe Gleichung 4.22) wird die Partition  $\{1, 3, 4\}$  von Anfang an ausgeschlossen. Durch eine geeignete Wahl der Baumart, kann aber noch auf das mögliche Resultat Einfluss genommen werden. So versprechen Breitensuchbäume oder Kürzeste Wege Bäume eine eher kompakte, sehr dicht am Einspeisepunkt sich ausbreitende Partition, während beispielsweise die Verwendung von Tiefensuchbäumen eher langgezogene Partitionen erwarten lässt.

Betrachtet man zusätzlich die Rechenzeit, die sich um den Faktor 100 oder mehr von der Modellierung mit Flussgleichgewicht unterscheidet, nimmt man den Verlust einiger Lösungen vielleicht gerne in Kauf (siehe Abschnitt 5.3.3). Eine ähnliche Verwendung der in diesem Kapitel verwendeten Vorgängerbeziehung findet sich in [HW06]

## Nicht zuordenbare Teilbereiche

Ein Problem bei der Partitionierung liegt darin, dass nicht alle Knoten einer Partition zugeordnet werden können. Dies kann daran liegen, dass sie keinen Zugang zu einem Behälter haben, oder dass sie höher liegen, als alle Behälter, mit denen sie verbunden sind, so dass eine Versorgung nicht möglich ist. Diese Punkte werden in einer eigenen Partition  $C_k$  zusammengefasst, was durch setzen der Variable  $x_{v,k}$  auf den Wert 1 angezeigt wird. Gesetzt wird  $x_{v,k}$  durch Gleichung 4.2 aus Abschnitt 4.2.2, nämlich genau dann, wenn keine andere Variable  $x_{v,i}$  den Wert 1 annimmt. Bei Modellierung nicht verbundener Teilbereiche treten Probleme vor allem bei der Modellierung des Zusammenhangs der Partitionen auf.

**Modellierung durch Spannbäume** Bei der Modellierung mittels Spannbäumen werden nicht verbundenen Teilbereichen keine Vorgänger zugeordnet. Problematisch ist dabei, dass es Knoten geben kann, deren Weg zu einem Behälter über eine, über das Behälterpotential hinausgehende, Erhöhung führt. Bei der Konstruktion des Baumes darauf zu achten, dass der kürzeste Weg vom Knoten zum Behälter nicht über diese Erhöhung führt. Falls es Alternativen gibt, soll der kürzeste Weg über einen Umweg führen, der immer unterhalb des Behälterpotentials liegt. Liegen keine alternativen Wege vor, wird diesem Knoten kein Vorgänger für diese Partition zugeordnet. Wird dieser Knoten sonst keiner regulären Partition zugeordnet, erhält er den Status "nicht verbunden".

Es stellt sich die Frage, wie verhindert wird, dass nicht alle Knoten den Status "nicht verbunden" erhalten. Dies impliziert die Optimierung der Partitionsgrößen. Durch diese Optimierung wird durch Zuweisen eines Knotens  $v$  zu einer Partition  $i$  versucht, die Partitionsgrößen  $\omega(C_i)$  an die durchschnittliche Partitionsgröße anzupassen. Die Zielfunktion wird also genau dann minimal, wenn kein Knoten den Status "nicht verbunden" erhält.

**Modellierung durch Flussgleichgewicht** Bei der Modellierung durch den Fluss ist es aufwendiger, nicht verbundene Teilbereiche abzugrenzen. Gleichung 4.18 besagt, dass der Fluss aller eingehenden Kanten gleich dem Fluss aller ausgehenden Kanten  $-1$  sein muss. Bei einem isolierten Knoten, der keine Kantenverbindung besitzt, ist dies offensichtlich nicht erfüllbar. Aber auch jeder Knoten, der keine Verbindung zu einem Behälter hat, erhält als Gesamteingangsfluss immer den Wert 0. Es ist also zur Modellierung notwendig, den Bedarf eines Knotens auf 0 zu setzen, sollte er nicht zuordenbar sein. Eine Identifizierung dieses Zustandes kann durch die Variable  $x_{v,k}$  erfolgen, welche anzeigt, ob ein Knoten zuordenbar ist, oder nicht. Diese Variable wird dann zu Gleichung 4.18 addiert, woraus Gleichung 4.23 resultiert.

$$\sum_{e(u,v) \in E} f_{u,v} - \sum_{e(u,v) \in E} f_{v,u} + x_{v,k} = 1, v \in V \setminus T \quad (4.23)$$

Somit reduziert sich der Bedarf auf 0, sollte ein Knoten keiner anderen Partition zuordenbar sein.

## Modellierung der Druckzonengrenzen

Zur Ermittlung der Druckzonen ist es wichtig, die Druckzonengrenzen festzulegen. Dies bedeutet, dass die geodätische Höhe eines Knotens innerhalb dieser Grenzen liegen muss, wenn er dieser Druckzone angehören soll (siehe Abschnitt 2.1.3). Die Obergrenze des Bereichs wird durch das Potential des Behälters bestimmt, welches immer echt größer sein muss, als die geodätischen Höhen der Bedarfsknoten. Die Untergrenze des Potential kommt daher, dass der Druck im Wasserverteilungssystem nicht zu hoch werden darf. Hier sind 60m Potentialunterschied ein Richtwert (siehe Abschnitt 3.1). Es kann aber durchaus Knoten geben, die diese Grenze verletzen, wenn an ihnen zum Beispiel kein Wasser entnommen wird. Zudem kann durch Einsatz von Druckminderern der Druck nochmals reduziert werden (siehe Abschnitt 2.1.3). Die Untergrenze der Druckzonen kann somit als weiche Schranke aufgefasst werden.

Die Obergrenze der Druckzone ist durch das Potential des Behälters bestimmt. Die Zone kann nur mit Wasser versorgt sein, wenn die geodätische Höhe in allen Bereichen der Partition unter dem Potential des Behälters liegt. Hierzu muss eine Funktion  $h(v)$  eingeführt werden, welche für einen Knoten  $v$  dessen geodätische Höhe angibt, für einen Behälter  $t_i$  dessen Potential. Für das ILP ergibt sich daraus folgende zusätzliche Bedingung:

$$h(t_i) - h(v) \cdot x_{v,i} \geq \text{minPres}, i < k, v \in V \quad (4.24)$$

Gleichung 4.24 garantiert, dass Knoten einer Partition nie oberhalb des zugehörigen Einspeiseknotens liegen. Dies erfolgt dadurch, dass im Falle der Zugehörigkeit eines Knotens zur Partition  $i$  dessen Höhe mit in die Bedingung einfließt. Ist ein Knoten höher als der Zugehörige Einspeiseknoten, muss  $x_{v,i}$  in jedem Falle 0 sein, da sonst durch die Höhe von  $v$  die Bedingung nicht erfüllt wäre. Die Konstante  $\text{minPres}$  gibt in Gleichung 4.24 den vorgegebenen Mindestdruck an, der bei Entnahme anliegen soll. In Kanet wird dabei zwischen Bedarfsknoten und Zwischenknoten unterschieden (siehe Abschnitt 2.1.1). An Zwischenknoten ist es ausreichend, dass ein Fluid gerade so fließt. Die Konstante  $\text{minPres}$  kann somit den Wert 0 annehmen. Für Bedarfsknoten entspricht  $\text{minPres}$  der Summe aus dem Leitungsverlust (Abschnitt 2.1.2) sowie dem Druck, den man bei Entnahme des Fluids garantieren will.

Die Untergrenze kann variabel gestaltet werden, da bei steigender Höhendifferenz immer noch die Wasserversorgung aufrecht erhalten werden kann. Da steigender Druck zu schwerer werdender Handhabbarkeit des Wassernetzes führt (nach [WCS01] werden für zu Hohe Drücke druckreduzierende Armaturen benötigt), sollte die Untergrenze jedoch nach oben hin optimiert werden. Es ist also notwendig, für jeden Knoten und jede Partition eine Variable  $\Delta h(v)$  einzuführen, welche die Differenz der Knotenhöhe mit der Höhe des Behälters in seiner aktuellen Partition angibt.

$$\Delta h(v) = \sum_{i < k} (h(t_i) \cdot x_{v,i}) - h(v), v \in V \quad (4.25)$$

Es gibt genau ein  $x_{v,i}$ , welches den Wert 1 annimmt, und genau durch dieses  $x_{v,i}$  fließt das der Partition  $i$  zugehörige Behälterpotential  $h(t_i)$  in die Differenz ein. Da es sich hier um eine weiche Schranke handelt, muss  $\Delta h(v)$  für jeden Knoten  $v$  zur Minimierungsfunktion addiert werden. Dies führt dazu, dass Lösungen

bevorzugt werden, bei denen möglichst viele Knoten eine geringe Höhendifferenz zu ihrem zugehörigem Behälter aufweisen. Die Summe der Höhendifferenzen  $\sum_{v \in V \setminus T} \Delta h(v)$  entspricht also dem Summanden C der Minimierungsfunktion aus Gleichung 4.1.

### 4.2.3 Formulierung des ILP

Zusammenfassend soll in diesem Abschnitt die komplette Formulierung des ILP angegeben werden, wobei zwischen den verschiedenen Varianten, welche in diesem Kapitel vorgestellt wurden unterschieden werden soll. Gegeben ist ein ein als Graph modelliertes Wassernetz  $G = (V, E)$  mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten. Als Konstante fließt das Planungskriterium  $\minPres$  als der zu gewährleistende Mindestdruck ein. Die Funktion  $h(v)$  gibt als festen Wert die geodätische Höhe der Knoten an. Für einen Behälter  $t$  gibt  $h(t)$  dessen Potential wieder. Es resultiert eine Partitionierung in  $k$  Partitionen, bei der für jeden Behälter  $t$  eine Partition  $i$  erzeugt wird. In der ILP Formulierung finden sich diese Werte ebenfalls als Konstante wieder. Da sowohl Schnittkanten, Größendifferenz, als auch Höhendifferenz minimiert werden sollen, bietet sich als Optimierungsfunktion eine Minimierungsfunktion an:

$$\text{minimiere } \sum_{e \in E} x_e + \Delta C + \sum_{v \in V} \Delta h(v) \quad (4.26)$$

unter den Nebenbedingungen

Partitionszugehörigkeit

$$\sum_i x_{v,i} = 1 \quad v \in V \quad (a)$$

$$\sum_T x_{t,i} \geq 1, \quad i < k, t \in T \quad (b)$$

Schnittkantenbestimmung

$$x_e - x_{u,i} - x_{v,j} \geq -1 \quad e \in E, i \neq j \quad (c)$$

---

Balance

$$\sum_{v \in V} x_{v,i} - C_{\max} \leq 0 \quad \text{für alle } i \quad (d.1)$$

$$\sum_{v \in V} x_{v,i} - C_{\min} \geq 0 \quad \text{für alle } i \quad (d.2)$$

oder

$$\omega(C_i) - \Delta C_{i,\text{oben}} - C_{\text{avg}} \leq 0 \quad \text{für alle } i \quad (d.1)$$

$$\omega(C_i) + \Delta C_{i,\text{unten}} - C_{\text{avg}} \geq 0 \quad \text{für alle } i \quad (d.2)$$

$$\Delta C_i - \Delta C_{i,\text{unten}} - \Delta C_{i,\text{oben}} = 0 \quad \text{für alle } i \quad (d.3)$$


---

Konnektivität

$$\sum_{e=(t,v) \in E} f_{t,v} - \sum_{v \in V} x_{v,i} = -1 \quad t \in T; i < k \quad (\text{e.1})$$

$$\sum_{e=(u,v) \in E} f_{u,v} - \sum_{e=(v,w) \in E} f_{v,w} + x_{v,k} = 1 \quad v \in V \quad (\text{e.2})$$

$$f_{u,v} + n \cdot \sum_{e=(u,v) \in E} x_e \leq n \quad u, v \in V \setminus T \quad (\text{e.3})$$

$$f_{v,u} + n \cdot \sum_{e=(u,v) \in E} x_e \leq n \quad u, v \in V \setminus T \quad (\text{e.4})$$

oder

$$x_{v,i} - x_{\text{Pred}(v,i),i} \leq 0 \quad i < k, v \in V \quad (\text{e.1})$$

Druckgrenzen

$$h(t_i) - h(v) \cdot x_{v,i} \geq \text{minPres} \quad i < k, v \in V \quad (\text{f.1})$$

$$\sum_{i \in T} (h(t_i) \cdot x_{v,i}) - h(v) - \Delta h(v) = 0 \quad i < k, v \in V \quad (\text{f.2})$$

Der Summand  $\Delta C$  der Minimierungsfunktion entspricht entweder der Differenz  $C_{\max} - C_{\min}$  oder der Summe aus allen  $\Delta C_i$ , abhängig davon, welche Formulierung man für die Balancierung der Partitionsgröße verwendet.

Da für die Laufzeit des ILP die Zahl der erzeugten Bedingungen und Variablen interessant ist, soll diese in Abhängigkeit der Zahl der Knoten, Kanten und Behälter angegeben werden. Tabelle 4.1 zeigt die Zahl der erzeugten Variablen, Tabelle 4.2, wie viele Bedingungen in der Formulierung erzeugt werden.

Bei Variablen ist zusätzlich von Interesse, ob es sich um ganzzahlige Variablen handelt oder nicht. Der Variablentyp hängt mit der Laufzeit der Berechnung zusammen, da durch Ganzzahligkeit eine größere Beschränkung erfolgt. Ganzzahlige Variablen werden durch das Kürzel  $i$  angezeigt, Gleitkommazahlen durch das Kürzel  $f$ . Die Anzahl der insgesamt zu erwartenden Bedingungen kann mit  $O(n \cdot m + mk^2 + n \cdot k)$  abgeschätzt werden.

Es ist zwar jetzt klar, welche Summanden in der Gewichtungsfunktion eine Rolle spielen, es bleibt aber zu evaluieren, in welchem Verhältnis die Summanden stehen müssen, um sinnvolle Ergebnisse zu liefern. Hierzu werden noch drei Faktoren eingefügt, welche die Gewichtungsfunktion aus Gleichung 4.26 wie folgt verändern:

$$\text{minimiere } a \cdot \sum_{e \in E} x_e + b \cdot \Delta C + c \cdot \sum_{v \in V} \Delta h(v) \quad (\text{4.27})$$

Ein Gewichtsverhältnis zwischen den Faktoren  $a$ ,  $b$  und  $c$  soll in Kapitel 5 evaluiert werden.



Bed	Anzahl	Typ	Bemerkung
(a)	$n \cdot k$	i	eine pro Behälter und Knoten
(b)	0		Behälter sind in der Knotenmenge enthalten
(c)	$m$	i	pro Kante, ob sie eine schnittkante ist oder nicht
(d)	2	f	eine Variable für die minimale und eine Variable für die maximale Partitionsgröße
oder	$4k$	f	für jede Partition deren Größe, deren Abstand zum Durchschnitt von oben und von unten und eine für den Betrag des Abstandes zur Durchschnittsgröße
(e)	$2m$	i	je Eine Variable für den Hin- und Rückfluss auf einer Kante
oder	0		alle Vorgänger sind wiederum in der Knotenmenge enthalten
(f)	0		Höhenangaben sind für eine Formulierung konstant

**Tabelle 4.1** – Anzahl der Variablen des ILP

Bed	Anzahl	Bemerkung
(a)	$O(n)$	eine Bedingung pro Knoten
(b)	$O(k)$	eine Bedingung pro Behälter
(c)	$O(m \cdot k^2)$	pro Kante und Partitionenpaar eine Bedingung
(d)	$O(2)$	zwei Bedingungen, eine für die minimale und eine für die maximale Partitionsgröße
oder	$O(3k)$	drei Bedingungen pro Partition, zwei für den Betrag des Abstandes zur Durchschnittsgröße und eine für die festlegung der Partitionsgrößendifferenz zum Durchschnitt
(e)	$O(k + n \cdot m + 2m)$	eine pro Partition (e.1), eine für das Flussgleichgewicht in jedem Knoten (e.2) je eine für pro Kante die begrenzung des Flusses in beide Richtungen
oder	$O(n \cdot k)$	eine Bedingung pro Knoten und Partition
(f)	$O(2k \cdot n)$	Je zwei pro Knoten und Behälter eine zur Einhaltung des Mindestdrucks (f.1) eine zur bestimmung des Abstandes zum Behälter (f.2)

**Tabelle 4.2** – Anzahl der Bedingungen des ILP

## 4.3 Heuristiken zur Vereinfachung des Graphen

Es ist von Interesse, den Graphen im Vorfeld so zu vereinfachen, damit eine akzeptable Laufzeit gewährleistet werden kann. Eine Vereinfachung erzielt man dadurch, dass das ILP auf einen oder mehrere reduzierte Graphen angewandt wird, ohne dass Information verloren geht. Es bestehen folgende Möglichkeiten:

- Abschneiden von Bäumen, in denen kein Behälter vorkommt.
- Aufteilen des Problems in kleinere Teilprobleme (Vorpartitionierung).

### 4.3.1 Abschneiden von Bäumen

Grundlegende Idee dieser Vereinfachung ist, dass es in Bäumen zwischen zwei Knoten nur eine Verbindung gibt. Wird also der Wurzelknoten von einem bestimmten Einspeiseknoten versorgt, so können alle in diesem Baum befindlichen Knoten auch nur durch diesen Einspeisepunkt versorgt werden, sofern kein weiterer Einspeisepunkt mehr im Baum existiert. Man kann also so tun, als ob der Baum aus einem einzigem Knoten bestünde, welcher das Gewicht des gesamten Baumes in sich vereint. Diese Reduzierung des Graphen kann als Vorverarbeitung der Modellierung implementiert werden, wie Algorithmus 2 beispielhaft beschreibt.

---

**Algorithmus 2** : Abschneiden der Bäume des Graphen

---

**Eingabe** : Graph  $G(V, E)$ , Menge an Einspeiseknoten  $T \in V$ ,  
Gewichtungsfunktion  $\omega(e)$

**Ausgabe** : Graph  $G'(V', E')$

1 **Beginn**

2     **solange** *Es gibt mindestens ein  $v \in V$  mit dem Grad 1 tue*

3         Entferne Knoten  $v$  aus  $G$ ;

4         Übertrage  $\omega(e)$ ,  $h(v)$  auf Knoten  $u$ ;

5         Entferne Kante  $e = (u, v)$  aus  $G$ ;

6     **Ende**

7     **zurück**  $G$ ;

8 **Ende**

---

Algorithmus 2 nutzt die Eigenschaft, dass jedes Blatt in einem Baum nur eine Verbindung hat, nämlich die zu seinem Vorgängerknoten. Sind alle Blätter, die in  $G$  existieren, entfernt, entstehen genau so lange wieder neue Blätter, bis alle Bäume aus  $G$  eliminiert wurden. Es ist wichtig, das Gesamtgewicht des Baumes auf die Wurzel zu übertragen, denn eine Partition, die diesen Baum zugeteilt bekommt, wächst eben um genau dieses Gewicht. Zur Wahrung der Obergrenzenbedingung darf ein Baum auch nur einer Partition zugeteilt werden, wenn selbst der höchstgelegene Knoten im Baum noch vom Behälter der Partition versorgt werden kann. Deswegen müssen auch die Höhenangaben über die Wurzel ersichtlich sein. Abbildung 4.4 verdeutlicht die Arbeitsweise von Algorithmus 2 an Hand eines Graphen mit zwei Bäumen (a). Im ersten Schritt werden alle Blätter entfernt (b), wodurch wieder ein neues Blatt entsteht. Die-

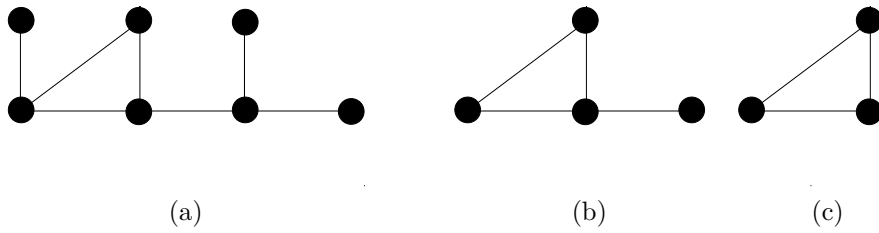


Abbildung 4.4 – Abschneiden von Bäumen

ses wird schließlich im zweiten Durchlauf ebenfalls entfernt, woraus ein Graph resultiert, der nur noch eine Schleife enthält (c).

### 4.3.2 Vorpartitionierung

Eine andere Möglichkeit zur Reduzierung der Laufzeit könnte ein Vorpartitionierungsschritt sein, in dem der Graph  $G$  in zwei oder drei gleich große Partitionen vorzerlegt wird, auf denen dann das ILP, welches in diesem Abschnitt beschrieben wird, angewandt wird. Eine solche Zerlegung könnte zum Beispiel nach dem Verfahren aus [KK99] oder nach dem Verfahren aus Abschnitt 4.1 erfolgen. Eine Beschleunigung ist vor allem deshalb zu erwarten, weil die Dauer zur Findung der optimalen Lösung des ILP überproportional zur Größe des Graphen steigt. Aus Zeitgründen findet diese Möglichkeit in dieser Arbeit aber keine Berücksichtigung mehr.

# Kapitel 5

## Analyse

Zur Analyse des in Kapitel 4 beschriebenen ILP stellen sich im Wesentlichen zwei Fragen. Zum Einen, ob die angewandten Formulierungen geeignet sind, die Forderungen aus Kapitel 3 zu erfüllen, zum anderen, ob man eine Aussage machen kann, in welchem Verhältnis die Gewichtungsfaktoren der Minimierungsfunktion (Gleichung 4.27) stehen müssen, um eine sinnvolle Zerlegung zu erhalten. Diese Fragestellungen sind Inhalt dieses Kapitels (siehe Abschnitt 5.2). In Abschnitt 5.3 werden anschließend Experimente zur Laufzeit vorgestellt, welche sich im Wesentlichen auf die Unterscheidung der in Kapitel 4 vorgestellten Varianten beziehen.

### 5.1 Testumgebung

Zum Testen wurde der CPLEX Solver, Version 1.12, verwendet, eingebettet in eine für diese Problemstellung implementierte Java Applikation, in welcher eventuelle Vorverarbeitungsschritte realisiert wurden. Beispielnetze, welche vom IWG zur Verfügung gestellt wurden, lagen in Form von einfachen Knoten- und Kantentabellen vor. Es handelt sich dabei sowohl um Netze aus Projekten des IWG, sowie um Netze, welche als Benchmarks für Flussberechnungsmodelle in der Wasserversorgung anerkannt sind. Aus Gründen der einfacheren Handhabbarkeit, wurden die Netze in das `.graphml` Format konvertiert. Zur Visualisierung der Ergebnisse am IWG erfolgt die Ausgabe wiederum in tabellarischer Form, da am IWG zur Graphenvisualisierung GIS oder Kanet verwendet wird, welche beide das `.graphml` Format nicht unterstützen.

Für die Experimente werden 4 Netze verwendet, dabei handelt es sich um zwei Städte in Nordafrika (DB1 und DB12), eine Stadt aus Baden-Württemberg (DB7) und ein synthetisches Netz, welches als Epanet-Benchmark für Wasserverteilungsberechnungen dient (DB20). Tabelle 5.1 listet einige Daten der eben erwähnten Netze auf. Abbildungen der verwendeten Netze finden sich in Anhang A.

### 5.2 Modellanalyse

Dieser Abschnitt evaluiert, inwiefern das in Kapitel 4 generierte Modell geeignet ist, die Problemstellung aus Kapitel 3 abzubilden (Abschnitt 5.2.1). Darauf folgt

Name	Knoten	Kanten	Max Höhe	Min Höhe	Partitionen
DB1	1263	1324	549m	474.58m	6
DB7	521	567	326m	122.31m	3
DB12	5414	5615	1795m	1350m	38
DB20	96	117	220m	-5m	5

**Tabelle 5.1** – Beschreibung der zur Analyse verwendeten Netze

eine kurze Empfehlung, die angibt, in welchem Verhältnis die Gewichtungsparemeter idealerweise stehen (siehe Abschnitt 5.2.2). In Abschnitt 5.3 werden anschließend die verschiedenen Varianten in Bezug auf ihre Ausführungsdauer betrachtet.

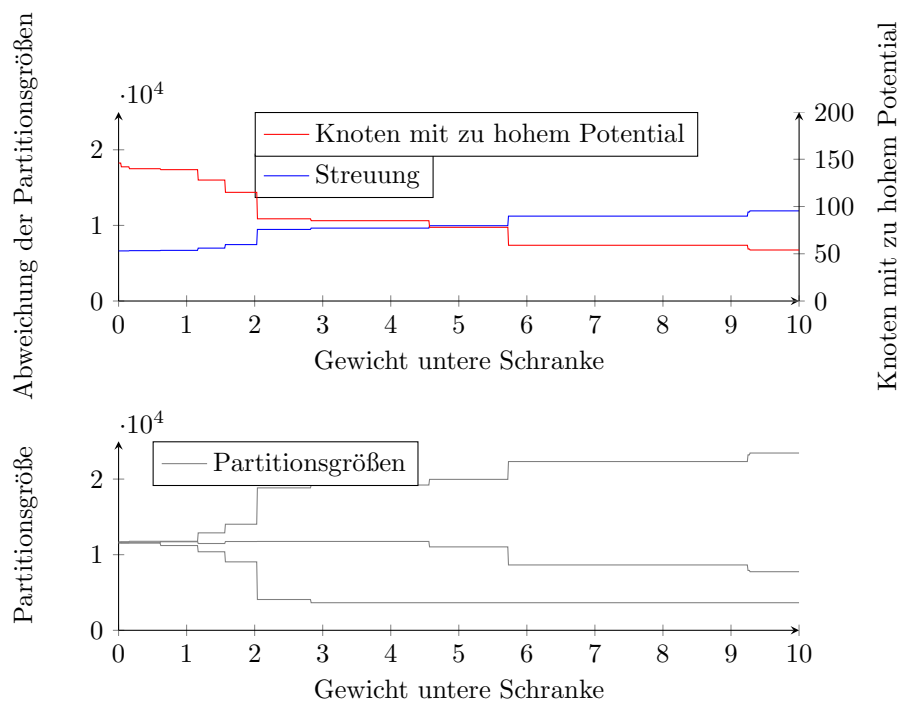
### 5.2.1 Korrektheit der Minimierungsfunktion

Um zu zeigen, dass die Formulierung des ILP korrekte Ergebnisse produziert, ist es notwendig die drei Gewichtungsfaktoren gesondert voneinander zu betrachten. Eine Möglichkeit ist, zwei Faktoren fix zu lassen, während der dritte an Gewicht zunimmt. Setzt man darüber hinaus einen Faktor auf 0, kann man die Funktionsweise der anderen Faktoren direkt ablesen, da eine Gewichtszunahme eines Faktors, eine Veränderung des Verhältnisses bedeutet, welche man auch durch Gewichtsabnahme des anderen Faktors erreichen kann. Von Interesse ist somit nur das Verhältnis, in dem die Faktoren zueinander stehen. In dieser Arbeit ist der Gewichtungsfaktor für die Balancierung der Größe der Partitionen immer gleich 1. Die anderen Faktoren der Minimierungsfunktion werden mit 0 initialisiert und nehmen dann an Gewicht zu. In den folgenden Abschnitten nimmt zunächst der Gewichtungsfaktor für die untere Schranke der Druckzonen zu, dannach der Faktor, welcher den Einfluss der Schnittkantenoptimierung gewichtet.

#### Untergrenze für Druckzonen

Abbildungen 5.1 - 5.4 zeigen, wie sich die Ausgewogenheit der Partitionsgrößen gegenüber den Knoten verhält, die ein Potential aufweisen, welches größer als  $60m$  ist. Auf der x-Achse ist der Gewichtungsfaktor für die Optimierung der unteren Schranke aufgetragen, der dem Gewichtungsfaktor 1 für die Partitionsgrößenbalancierung gegenübersteht. Die linke Ordinate zeigt zum einen die Partitionsgrößen als Summe der Leitungslängen für jede Partition, zum andern die Standardabweichung der Partitionsgrößen von der durchschnittlichen Partitionsgröße. Auf der rechten Ordinate ist die Anzahl der Knoten aufgetragen, die das Maximalpotential von  $60m$  überschreiten. Die grauen Linien zeigen die absolute Größe der Partitionen, wobei in Abbildung 5.3 wegen der hohen Zahl an Partitionen darauf verzichtet wurde, diese mit anzuzeigen.

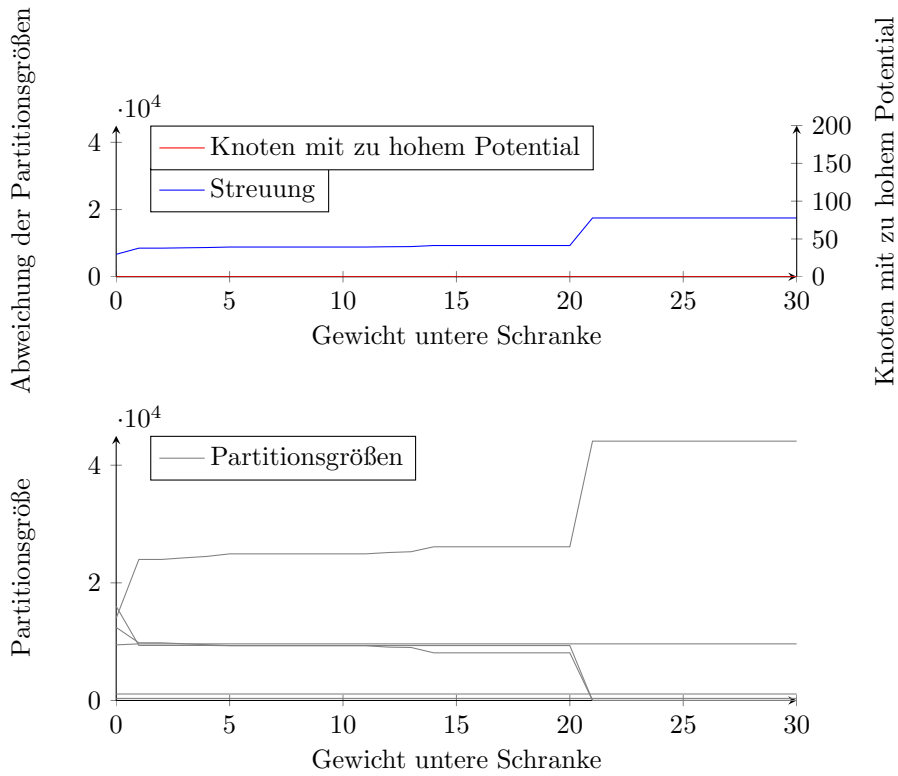
Allen Netzen gemeinsam ist, dass die Anzahl der Knoten mit zu hohem Potential kontinuierlich abnimmt oder zumindest gleich bleibt. Im Gegensatz dazu nimmt die Standardabweichung der Partitionsgrößen meist kontinuierlich zu. Dies bedeutet, dass die Partitionsgrößen immer größer werdende Differenzen zum Mittelwert aufweisen. Ungereimtheiten treten dabei allerdings in Abbildung 5.3 auf. Dies ist zunächst damit zu erklären, dass die Standardabweichung aus



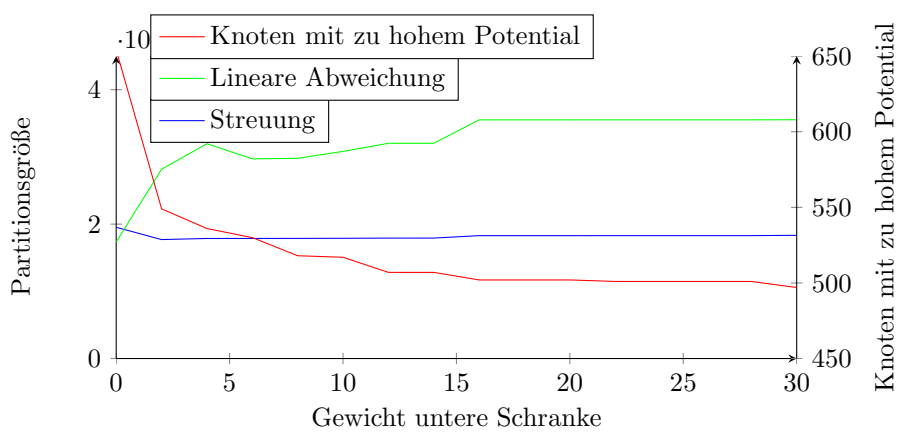
**Abbildung 5.1** – Balancierung der Partitionsgrößen bei steigender Gewichtung der unteren Schranke (DB7)

der Varianz berechnet wird, welche die quadratische Abweichung vom Mittelwert angibt. Größere Abstände fallen dadurch mehr ins Gewicht. In der Formulierung aus Kapitel 4 geht die Abweichung der Partitionsgrößen aber nur linear in die Zielfunktion ein. Deswegen ist in Abbildung 5.3 noch die lineare Abweichung aufgetragen, welche stetig zunimmt. Dass selbst die lineare Abweichung zwischenzeitlich wieder etwas fällt, ist damit zu begründen, dass in der Formulierung des ILP auf den Durchschnitt optimiert wird, der mittels der Gesamtgröße berechnet ist. Durch das Herausnehmen von Kanten aus den Partitionen (Schnittkanten) verringert sich daher das Gesamtgewicht aller Partitionen.

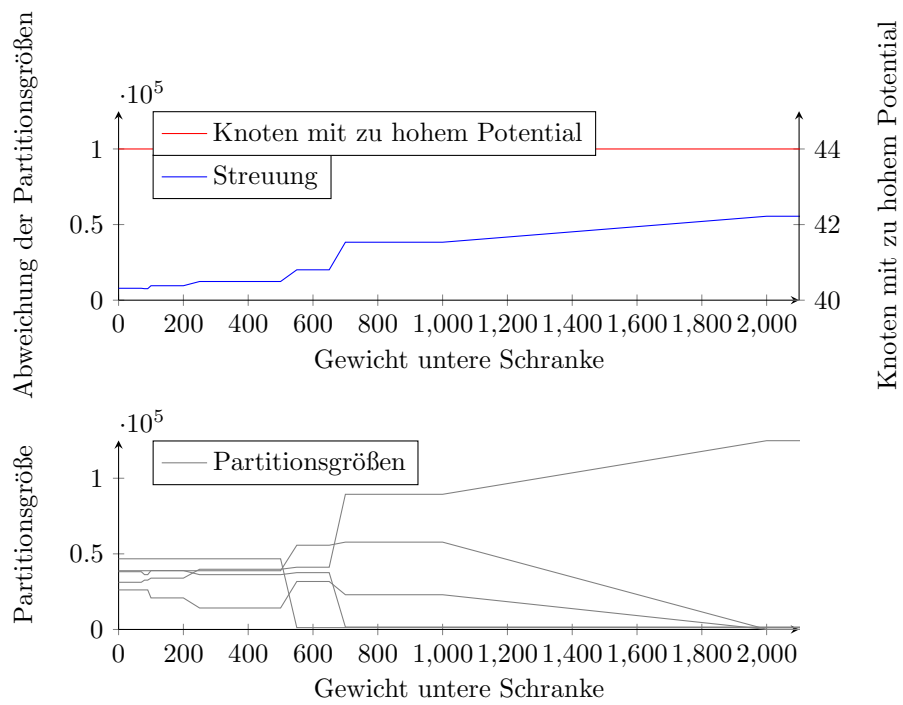
Als Beispiel der unterschiedlichen Resultate bei Erhöhung des Gewichtes für die Potentialuntergrenze dienen Abbildungen 5.5, 5.6 und 5.7. Die Abbildungen zeigen das Verteilungsnetz der Stadt aus DB7 mit der zu Grunde liegenden Topographie. Die geodätische Höhe, nimmt von den hellgrünen Flächen zu den grauen Flächen hin zu. Die größeren Kreise stellen die drei Behälter dar. Nicht zu erkennen ist auf den Abbildungen, dass Leitungen teilweise parallel verlaufen. So ist es möglich, dass der hellblaue Behälter die Bedarfsknoten auf der anderen Talseite versorgen kann, obwohl zwischen ihm und der hellblauen Zone fast nur Knoten der roten Zone liegen.



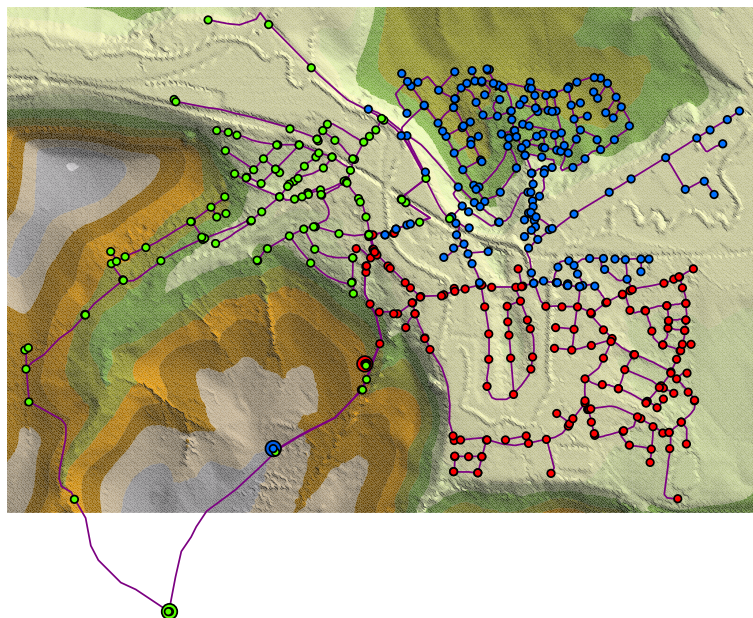
**Abbildung 5.2** – Balancierung der Partitionsgrößen bei steigender Gewichtung der unteren Schranke (DB1)



**Abbildung 5.3** – Balancierung der Partitionsgrößen bei steigender Gewichtung der unteren Schranke (DB12)

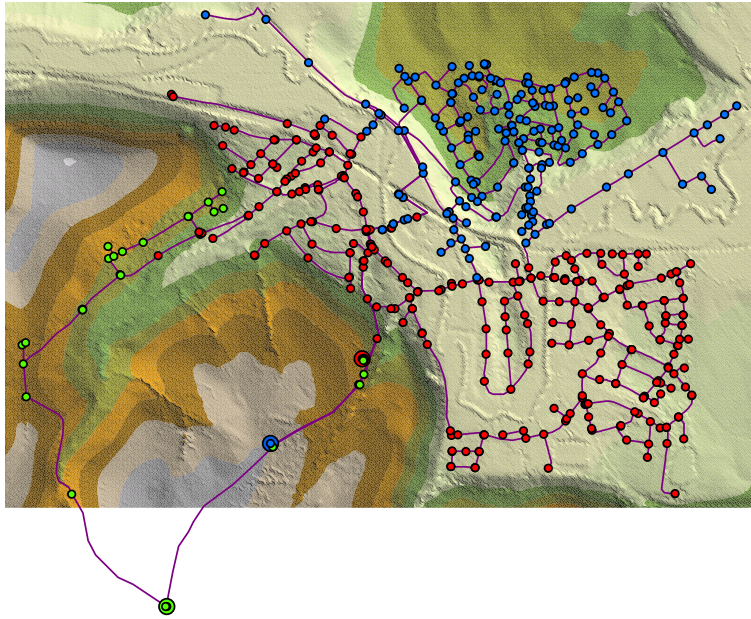


**Abbildung 5.4** – Balancierung der Partitionsgrößen bei steigender Gewichtung der unteren Schranke (DB20)

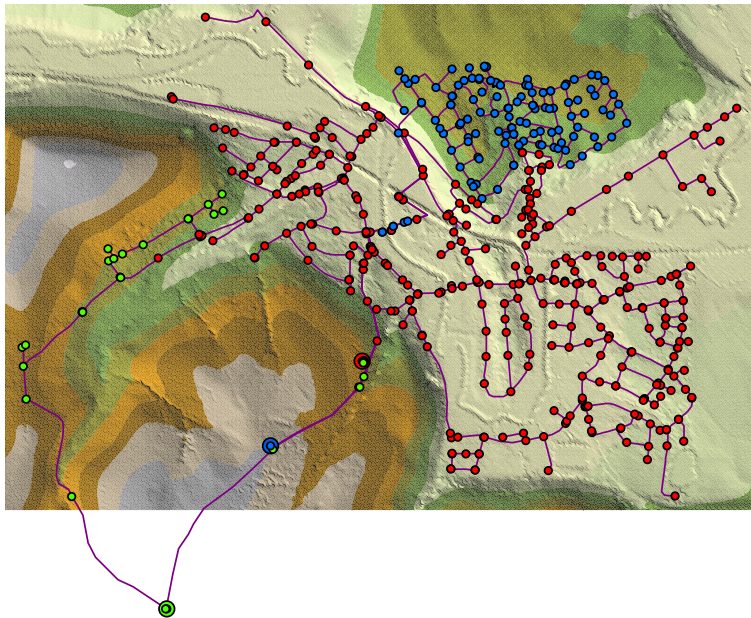


**Abbildung 5.5** – Verteilung der Partitionen von DB7 bei Gewichtungsverhältnis 0:1:0

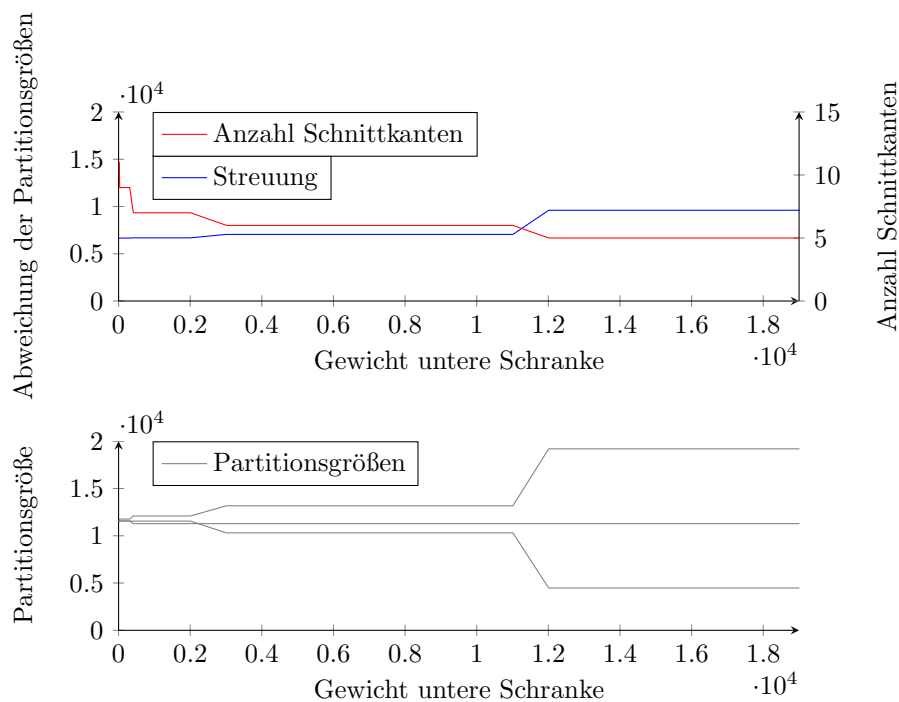




**Abbildung 5.6** – Verteilung der Partitionen von DB7 bei Gewichtungsverhältnis 0:1:4



**Abbildung 5.7** – Verteilung der Partitionen von DB7 bei Gewichtungsverhältnis 0:1:10



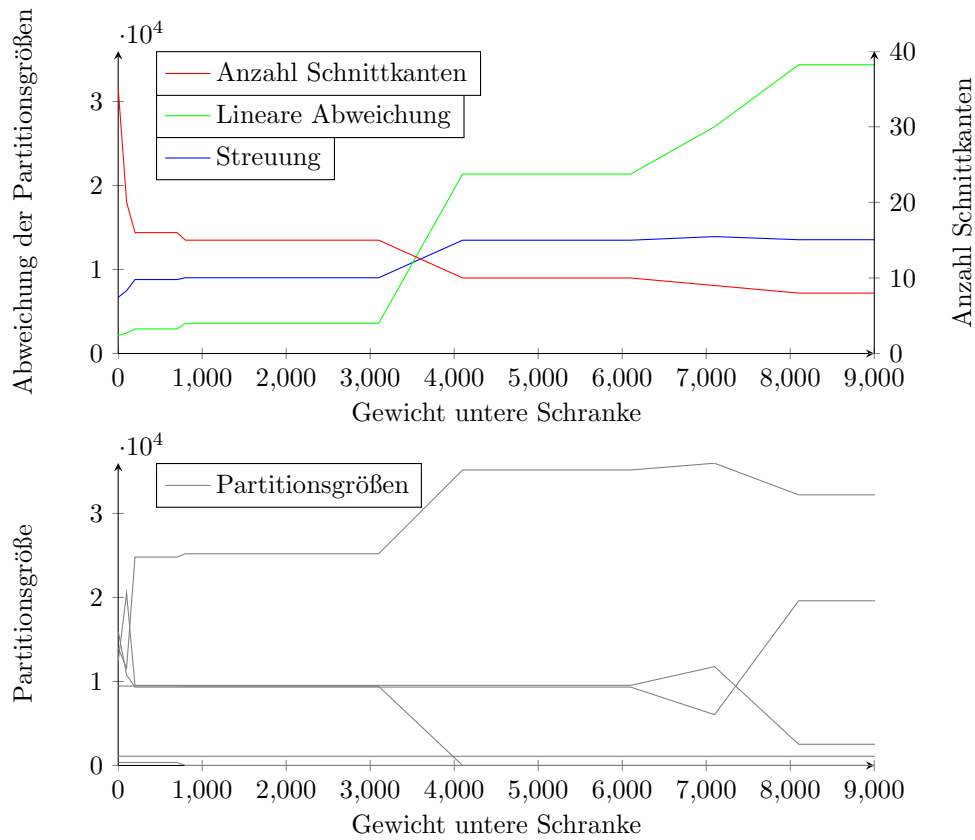
**Abbildung 5.8** – Balancierung der Partitionsgrößen bei steigender Gewichtung der Schnittkanten (DB7)

### Schnittkanten

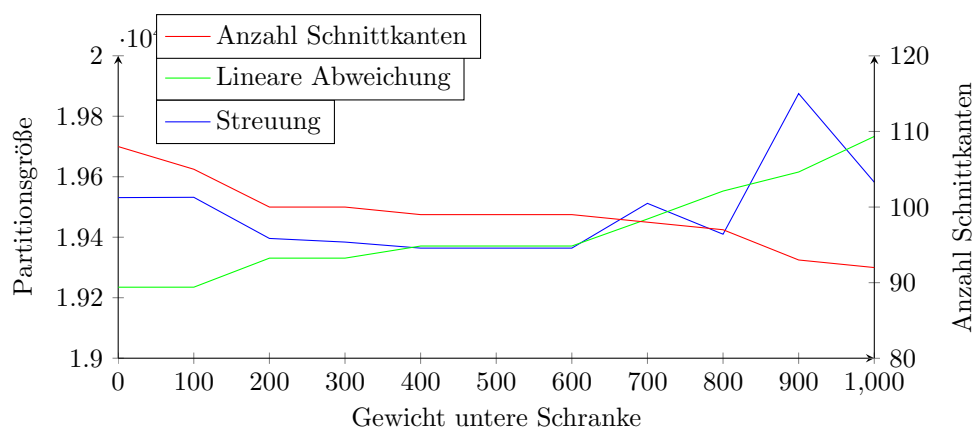
Die Analyse des Verhältnisses zwischen Schnittkanten und Partitionsgrößenbalancierung erfolgt analog zu der in Abschnitt 5.2.1 vorgestellten Analyse der Untergrenzenoptimierung. Abbildungen 5.8 bis 5.11 zeigen den Grad der Balancierung gegenüber der Schnitkantenanzahl bei steigender Gewichtung der Schnitkantenoptimierung. Auf der Abszisse ist dabei das steigende Gewicht der Schnitkantenminimierung in der Zielfunktion aufgetragen. Die linke Ordinate stellt die Partitionsgröße dar, während die rechte Ordinate die Zahl der Schnitkanten angibt. Die grauen Linien bilden die Größen der Partitionen für jedes Gewicht ab. Der Streuung liegt die Standardabweichung zu Grunde und ist somit ein Maß dafür, wie weit die Partitionsgrößen von der durchschnittlichen Partitionsgröße entfernt liegen. In den Fällen, in denen die Standardabweichung trotz sinkendem Gewicht zeitweise fällt, ist die lineare Abweichung der Partitionsgrößen mit aufgetragen, welche auch in der Zielfunktion des ILP verwendet wird.

Bei allen Netzen wird mit zunehmendem Gewicht der Minimierung der Schnitkanten die Anzahl der Schnitkanten reduziert. Die Streuung der Partitionsgrößen steigt gleichzeitig monoton, betrachtet man die lineare Abweichung. Im Gegensatz dazu nimmt die Streuung auf Basis der Standardabweichung nicht stetig zu. Der Grund dafür ist, wie schon in Abschnitt 5.2.1 in der linearen Formulierung der Zielfunktion zu suchen.

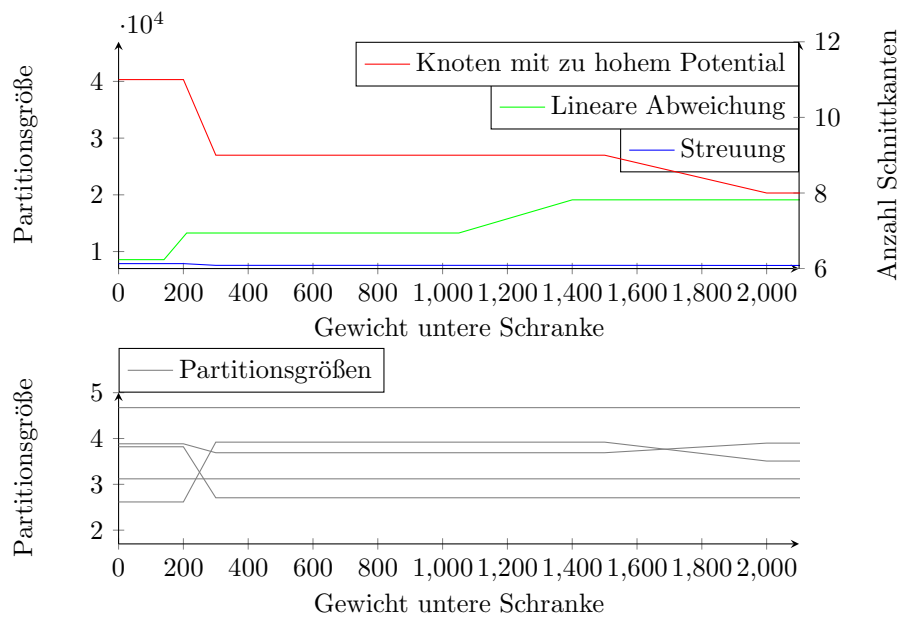
Abbildungen 5.12 bis 5.14 zeigen die Partitionierungen bei unterschiedlichem Einfluss der Schnitkanten. Auffällig ist, dass bei reiner Größenbalancierung oh-



**Abbildung 5.9** – Balancierung der Partitionsgrößen bei steigender Gewichtung der Schnittkanten (DB1)



**Abbildung 5.10** – Balancierung der Partitionsgrößen bei steigender Gewichtung der Schnittkanten (DB12)



**Abbildung 5.11** – Balancierung der Partitionsgrößen bei steigender Gewichtung der Schnittkanten (DB20)

ne Schnittkanteneinfluss (siehe Abbildung 5.12) die Partitionen sehr ineinander verflochten sind. Bei zu hohem Gewicht der Schnittkantenoptimierung ist eine Dominanz der roten Partition festzustellen (siehe Abbildung 5.14), was dem Ansatz der Balancierung der Partitionsgrößen entgegen steht.

### Zusammenfassung der Korrektheitsanalyse

In beiden Analysen zeigt sich, dass die angewendeten Faktoren zur Erstellung einer Partitionierung dazu geeignet sind, eine spezielle Eigenschaft zu priorisieren. Die Qualität der Ergebnisse ist dabei noch keineswegs optimal. So dürfte zum Beispiel, wie aus den hier gezeigten Beispielen auch deutlich wird, eine Quadrierung des Partitionsgrößenabstandes noch mehr dazu beitragen, eine ausgewogenere Partitionierung herzustellen. Dabei sind allerdings Laufzeiteinbußen zu erwarten. Was aus der Analyse in diesem Abschnitt ebenfalls nicht hervorgeht, ist das Zusammenspiel aller Parameter, was Thema des folgenden Abschnitt ist.



**Abbildung 5.12** – Verteilung der Partitionen von DB1 bei Gewichtungsverhältnis 0:1:0 - Partitionen sehr ineinander verflochten





**Abbildung 5.13** – Verteilung der Partitionen von DB1 bei Gewichtsverhältnis 500:1:0 - eine gute Partitionierung



**Abbildung 5.14** – Verteilung der Partitionen von DB1 bei Gewichtungsverhältnis 4000:1:0 - große Dominanz der roten Partition

## 5.2.2 Bestimmung geeigneter Parameterverhältnisse

In diesem Abschnitt soll eine Empfehlung erarbeitet werden, mit welchem Parameterverhältnis für ein beliebiges Netz eine zufriedenstellende Lösung berechnet werden kann. Dazu wird aus Abschnitt 5.2.1 ein Parameterpaar ausgewählt, deren resultierende Partitionierung schon zufriedenstellende Ergebnisse erzielt. Da in die Planung von Druckzonen weitaus mehr Parameter einfließen als in dieser Arbeit berücksichtigt, welche sich zudem schwer verallgemeinern lassen wurde als Maß einer zufriedenstellenden Partitionierung im Wesentlichen auf die Erfahrung der Mitarbeiter des IWG zurückgegriffen. Als Vergleich dienten auch Netze mit herkömmlich geplanten Druckzonen (DB1 und DB7).

Netz	Schnittkanten	Gewicht	
		Größenbalancierung	Untergrenzen
DB1	100 - 1000	1	0 - 5
DB7	20 - 15000	1	0.1 - 6
DB12	100 - 1000	1	1 - 6
DB20	150 - 1000	1	0 - 45

**Tabelle 5.2** – Gewichtungsfaktoren mit zufriedenstellenden Ergebnissen

Tabelle 5.2 zeigt die Parameterbereiche für die getesteten Netze, bei denen zufriedenstellende Ergebnisse erzielt wurden. Der geringe Höhenunterschied zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Punkt in DB1 macht sich dadurch bemerkbar, dass auch ohne Optimierung der unteren Schranke sinnvolle Ergebnisse erzielt werden. Bei Netzen mit extremerer Topographie sollte dieser Wert immer größer als 0 sein. In DB20 sind die Netze von vornherein so strukturiert, dass eine fehlende Optimierung der unteren Schranke ebenfalls kaum Auswirkungen hat. Eine allgemeine Empfehlung für ein gutes gewichtungsverhältnis könnte gemäß Tabelle 5.2 das Verhältnis 500:1:3 sein.

## 5.3 Laufzeitanalyse

Zur Analyse der Laufzeit soll dieses Kapitel auf die verschiedenen Varianten der Modellierung, im Hinblick auf die Ausführungsdauer ihrer Berechnung, eingehen. Sämtliche Berechnungen zur Messungen der Laufzeiten wurden auf einem Intel(R) Xeon(R) E5430 Prozessor mit 2.66GHz und 6 MB Cache durchgeführt. Es stehen die Modellierung der Partitionsgrößenbalancierung (Abschnitt 5.3.1), die Verbesserungsheuristik durch Abschneiden der Bäume (Abschnitt 5.3.2), sowie die verschiedenen Modellierungen des Partitionszusammenhangs (Abschnitt 5.3.3) im Blickpunkt.

### 5.3.1 Modellierung Größenbalancierung

Im folgenden soll eine Übersicht gegeben werden, wie sich die Laufzeit verhält, wenn man nicht mehr alle Partitionsgrößen bei der Berechnung betrachtet, sondern nur versucht, das Minimum und das Maximum der Partitionsgrößen aneinander anzugleichen. Als problematisch stellt sich dabei die Tatsache heraus, dass die Partitionsgrößen den wichtigsten Summanden der Zielfunktion des ILP darstellen. Dies bedeutet, dass andere Teile durch das Wegnehmen einiger



Partitionsgrößen aus der Zielfunktion deutlich an Gewicht gewinnen, was ein Vergleich der Ergebnisse bei gleichem Gewichtungungsverhältnis nahezu unmöglich macht. Um ähnliche Ergebnisse zu erzielen müsste man den Gewichtungsfaktor für die Partitionsgröße um etwa  $k/2$  erhöhen, da jetzt nicht mehr  $k$  Abstände zur Durchschnittspartitionsgröße in die Zielfunktion einfließen, sondern lediglich zwei Abstände betrachtet werden. Um einen Laufzeitvergleich anzustellen, werden in diesem Abschnitt die gleichen Gewichtungsverhältnisse angewendet wie in Abschnitt 5.3.2 und 5.3.3. Auf einen Vergleich der Ergebnisqualität wird dann aber verzichtet, da dieser, wie eben erläutert, in den meisten Fällen nicht aussagekräftig wäre.

Netz	Laufzeit (in Sekunden)		Ersparnis in %
	alle Partitionen	Min/Max Partition	
DB1	1039	113	89,1
DB7	52	46	11,5
DB12	638	388	39,2
DB20	66	41	37,9

**Tabelle 5.3** – Laufzeit bei Partitionierung bei Balancierung aller Partitionen und bei Annäherung der minimalen an die maximale Partition

Tabelle 5.3 zeigt die Summe der Laufzeiten nach 20 Berechnungen verschiedener Gewichtungsverhältnisse. Die Spanne der Zeitersparnis reicht von 11,5 % bis 89,1 %. Eine hohe Zeitersparnis ist bei Netzen mit entweder besonders viel zu erstellenden Partitionen zu erwarten (zum Beispiel DB12) oder, wenn durch geringe Höhenunterschiede, Partitionen nicht durch die Druckzonengrenzen bereits eingeschränkt werden (zum Beispiel DB1).

### 5.3.2 Abschneiden von Bäumen

Schneidet man existierende Bäume ab, wie in Abschnitt 4.3.1 beschrieben, so verringert sich die Anzahl der Knoten im Netz bei den verwendeten Netzen um 16% (DB20) bis zu 63% (DB1). Die dadurch entstehende Verbesserung der Laufzeit ist in Tabelle 5.4 aufgezeigt.

Netz	Laufzeit (in Sekunden)		Ersparnis in %
	mit Abschneiden	ohne Abschneiden	
DB1	1195	1039	13,1
DB7	58	52	10,3
DB12	1360	638	45,7
DB20	79	66	16,5

**Tabelle 5.4** – Laufzeit bei Partitionierung mit kompletten Netz und nach Abschneiden der Bäume des Netzes

Die Angaben unter der Spalte Laufzeit repräsentieren die Summe der Laufzeiten aus je 20 Messungen, da besonders bei kleinen Netzen kaum Unterschiede in den Laufzeiten auszumachen sind. Ob diese Unterschiede dann auch repräsentativ sind, wird erst durch das mehrmalige Ausführen unter verschiedenen Gewichtungsverhältnissen deutlich. Die Messungen aus Tabelle 5.4 machen deutlich, dass durch diesen Vorverarbeitungsschritt mindestens 10% an Berechnungs-

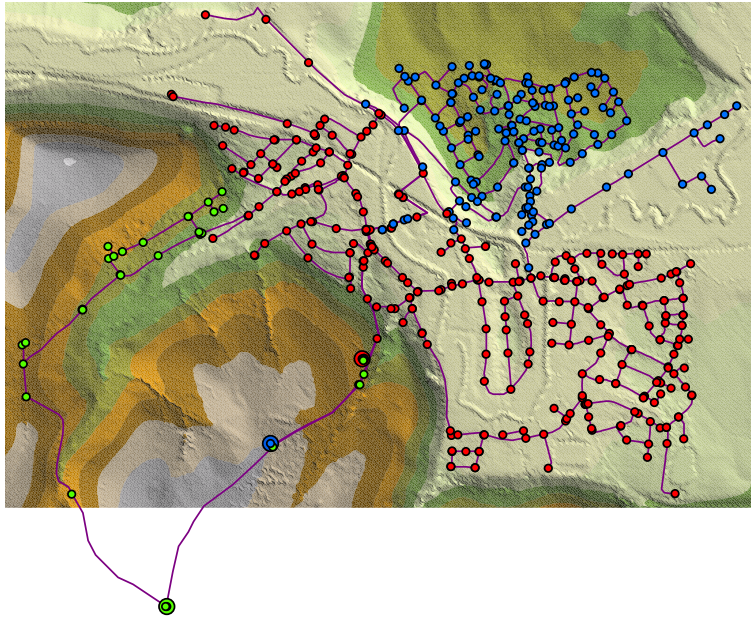
zeit eingespart wird, in günstigen Fällen sogar erheblich mehr. Die Qualität der Ergebnisse ist mit diesem Verfahren exakt die gleiche wie ohne das Abschneiden der Bäume.

### 5.3.3 Modellierung des Zusammenhangs

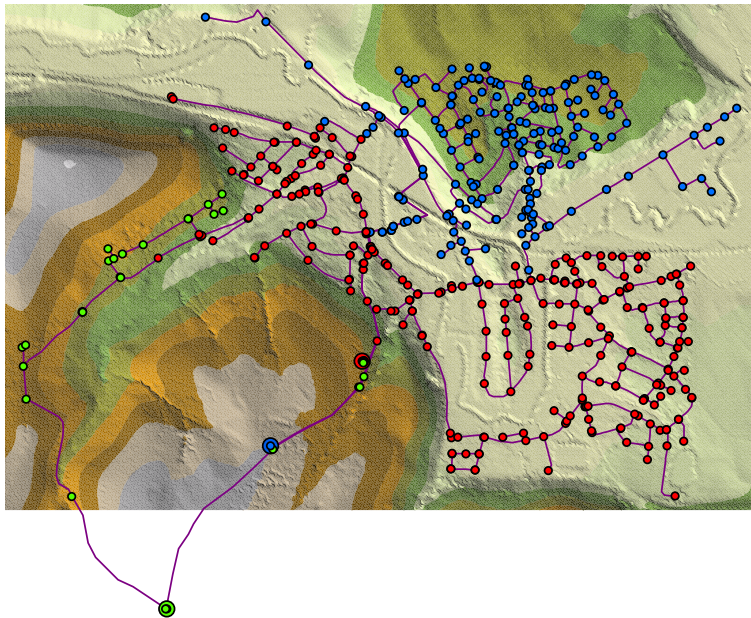
Bei der Modellierung des Zusammenhangs einzelner Partitionen wurden in Kapitel 4 zwei Varianten verwendet, eine Modellierung mittels Spannbäumen und eine Modellierung mittels Flussgleichgewicht in den Knoten. Erste Analysen haben gezeigt, dass es bei großen Netzen mit der Flusszusammenhangsberechnung sehr lange dauert, bis eine Berechnung zu einem Ergebnis kommt (teilweise mehr als 1 Woche). Deswegen beschränkt sich diese Analyse auf die Betrachtung der kleineren Netze DB1, DB7 und DB20. Es werden auch nur Berechnungen betrachtet, die mit einem Gewichtungsverhältnis der Zielfunktion arbeiten, welche zufriedenstellende Partitionierungen erzeugen.

In Abbildungen 5.15 und 5.16 wird eine Auswahl unterschiedlicher Resultate bei gleichem Gewichtungsverhältnis dargestellt. Die Höhe nimmt von der hellgrünen Färbung zur grauen Färbung zu. Es lässt sich deutlich erkennen, dass den Behältern sehr ähnliche Partitionen zugeteilt werden. Lediglich an den Rändern weisen die Partitionen geringfügige Unterschiede auf.

Tabelle 5.5 zeigt die Laufzeitunterschiede für die angegebenen Netze. Da sich die Laufzeiten im einzelnen sehr stark unterscheiden und 20 Messungen auch sehr lange dauern, sind hier die Einzelmessungen zu verschiedenen Gewichtungsverhältnissen angegeben. Insgesamt lässt sich feststellen, dass die Modellierung des Zusammenhangs durch Flussgleichgewichte sehr viel länger dauert und sollte deswegen nur bei sehr kleinen Netzen verwendet werden. Der Vorteil der Flussmodellierung liegt darin, dass alle möglichen Ergebnisse in Betracht gezogen werden. Die Messungen beziehen sich auf die Zeiten, die der Solver des ILP benötigt um ganz ans Optimale Ergebnis zu gelangen. Oft wird dabei viel Zeit darauf verwendet, zu beweisen, dass eine bereits gefundene Lösung die Optimale ist. Eine deutliche Laufzeitverbesserung kann also schon dadurch erzielt werden, wenn man die Berechnung früher abbricht. Bricht man die Berechnung ab, wenn man zum Beispiel 10 % am Optimum dran ist, hat man meist schon das optimale Ergebnis oder eines, was dem optimalen Ergebnis sehr nahe ist.



**Abbildung 5.15** – Verteilung der Partitionen von DB7 bei Zusammenhangsmo-  
dellierung mittels Flussgleichgewicht



**Abbildung 5.16** – Verteilung der Partitionen von DB7 bei Zusammenhangsmo-  
dellierung mittels Spannbäume

Parameter- Verhältnis	Laufzeit (s)		Parameter- Verhältnis	Laufzeit (s)		Ersparnis (in %)	Parameter- Verhältnis	Laufzeit (s)	
	Baum	Fluss		Baum	Fluss			Baum	Fluss
DB1			DB20				DB7		
500 : 1 : 0	77	> 500000	150 : 1 : 0	5	493	98,99	100 : 1 : 0	4	2404
500 : 1 : 5	91	> 500000	150 : 1 : 5	3	2549	99,88	100 : 1 : 2	3	> 500000
500 : 1 : 10	51	> 500000	150 : 1 : 10	4	211	98,10	100 : 1 : 4	2	> 500000
500 : 1 : 15	92	> 500000	150 : 1 : 15	4	586	99,32	100 : 1 : 6	2	> 500000
500 : 1 : 20	11	> 500000	150 : 1 : 20	4	764	99,48	100 : 1 : 8	3	> 500000
1000 : 1 : 0	90	9761	300 : 1 : 0	2	124	98,39	100 : 1 : 10	2	440759
1000 : 1 : 5	143	85728	300 : 1 : 5	3	158	98,10	500 : 1 : 0	3	382
1000 : 1 : 10	153	236367	300 : 1 : 10	3	232	98,70	500 : 1 : 2	3	90
1000 : 1 : 15	20	> 500000	300 : 1 : 15	3	77	96,10	500 : 1 : 4	3	836
1000 : 1 : 20	11	19511	300 : 1 : 20	3	122	97,54	500 : 1 : 6	3	323219
3000 : 1 : 0	53	6358	600 : 1 : 0	4	208	98,08	500 : 1 : 8	3	63688
3000 : 1 : 5	36	4355	600 : 1 : 5	3	81	96,30	500 : 1 : 10	2	104588
3000 : 1 : 10	19	3187	600 : 1 : 10	3	81	96,30	1000 : 1 : 0	4	557
3000 : 1 : 15	16	1329	600 : 1 : 15	2	160	98,75	1000 : 1 : 2	3	57
3000 : 1 : 20	10	1333	600 : 1 : 20	3	75	96,00	1000 : 1 : 4	3	177
5000 : 1 : 0	52	4685	1000 : 1 : 0	3	165	98,19	1000 : 1 : 6	3	587
5000 : 1 : 5	69	5585	1000 : 1 : 5	4	70	94,29	1000 : 1 : 8	3	125
5000 : 1 : 10	25	1824	1000 : 1 : 10	4	66	93,94	1000 : 1 : 10	3	183
5000 : 1 : 15	10	1803	1000 : 1 : 15	3	65	95,38			
5000 : 1 : 20	10	1123	1000 : 1 : 20	3	48	93,75			

**Tabelle 5.5** – Laufzeit bei Partitionierung bei Zusammenhangmodellierung durch Spannbäume und durch Flussgleichgewicht

Parameter- verhältnis	Zielfunktionswert		Schnittkanten		$\Delta h(v) > 60m$		Streuung	
	Fluss	Baum	Fluss	Baum	Fluss	Baum	Fluss	Baum
DB7								
500 : 1 : 0	4438,24	5411,68	8	7	99	90	209,09	524,85
500 : 1 : 2	36609,14	37221,68	7	7	50	55	2825,41	2485,31
500 : 1 : 4	59963,18	60991,46	7	5	50	49	2825,41	3816,17
500 : 1 : 6	82640,26	83637,44	9	6	17	35	6533,09	5419,29
500 : 1 : 8	102482,88	105289,38	10	6	13	35	6866,65	5419,29
500 : 1 : 10	122213,34	126941,32	10	6	13	35	6866,65	5419,29
1000 : 1 : 0	8438,24	8911,68	8	7	99	90	209,09	524,85
1000 : 1 : 2	40109,14	40224,76	7	5	50	49	2825,41	3816,17
1000 : 1 : 4	63463,17	63491,46	7	5	50	49	2825,41	3816,17
1000 : 1 : 6	85801,06	86551,98	5	5	29	37	5854,31	5205,59
1000 : 1 : 8	106781,89	108289,38	6	6	27	35	6058,11	5419,29
1000 : 1 : 10	127213,34	129941,32	10	6	13	35	6866,65	5419,29

**Tabelle 5.6** – Zielfunktionswertevergleich für DB7

Tabelle 5.6 zeigt, exemplarisch für DB7, einen Vergleich der Ergebnisqualität. Es werden für die Gewichtungsverhältnisse, welche bei der Laufzeitmessung bereits verwendet wurden, der Zielfunktionswert für die Spannbaum- und die Flussmodellierung verglichen. Es zeigt sich, dass die wesentlich schnellere Modellierung mittels Spannbäumen Zielfunktionswerte liefert, die denen der Flussmodellierung sehr ähnlich sind. Dies bestätigt den aus Abbildungen 5.15 und 5.16 gewonnenen Eindruck der Ähnlichkeit der zerlegung. Die Zielfunktionswerte der Flussmodellierung können als Referenz für weitere, schnellere Heuristiken herangezogen werden.

## Kapitel 6

# Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

Diese Arbeit formuliert die grundlegenden Kriterien der Druckzonenermittlung derart, dass eine anschließende Überführung dieser Kriterien in ein lineares Programm möglich ist. Aufgrund der Komplexität und Individualität verschiedener Wassernetze, die von Fall zu Fall unterschiedliche Probleme aufwerfen, kann eine Formulierung nicht ohne weiteres generalisiert werden. Es entsteht dennoch eine Formulierung, die bereits unterschiedlichen Anforderungen gerecht wird und als Basis einer Erweiterung dienen kann. Es kann auch durch Einstellen der Gewichtungsfaktoren direkt auf das Resultat der Zerlegung Einfluss genommen werden.

Zudem werden unterschiedliche Ansätze der Modellierung vorgestellt und experimentell evaluiert. Es zeigt sich, dass die unterschiedlichen Modellierungen, mitunter sehr starke Auswirkung auf die Laufzeit der Optimierung haben, aber auch die Zerlegung an sich beeinflussen können. Es wurde auch festgestellt, dass die Formulierungen des Zusammenhangs die Qualität der Zerlegung nur gering beeinflussen. In manchen Fällen treten bei den Formulierungen für die Balancierung größere Unterschiede bei der Zerlegung auf. Der Einfluss der Modellierungsart auf die Laufzeit ist in den meisten Fällen sehr hoch.

### 6.2 Ausblick

Diese Arbeit liefert eine Basis zur Ermittlung von Druckzonen mittels linearer Programmierung. Die teilweise sehr zeitintensiven Berechnungen, die sehr genaue Ergebnisse liefern, können als Grundlage für schnellere Verfahren dienen, welche in Abschnitt 4.1 angerissen wurden. Als Vergleich neuer Heuristiken kann etwa der Zielfunktionswert des linearen Programms dienen. Ein vielversprechender Ansatz wäre das Aufteilen in Partitionen nach dem Greedyansatz, um die resultierenden Partitionen anschließend nachzubearbeiten. So könnte man sich auf die Betrachtung an den Rändern der Partitionen beschränken um sich der Zielfunktion des ILP Ansatzes zu nähern.

Weitere Verbesserungen der Laufzeit in Zusammenhang mit der Flussmodellierung aus Abschnitt 4.2.2 sind zu erwarten, indem man Flüsse nicht unnötig beschränkt, zum Beispiel durch Ganzzahligkeit. Erste Versuche haben gezeigt, dass die Modellierung des Flussgleichgewichtes unter Verwendung von Gleitkommazahlen eine Beschleunigung um einen Faktor von 2 bis 4 bewirkt. Umfassende Analysen stehen allerdings noch aus.

Durch die Zuweisung mehrerer Vorgänger könnte in der Zusammenhangsmodellierung durch Spannbäume der Lösungsraum noch erweitert werden, wodurch die Vorteile dieser schnelleren Modellierung noch mehr überwiegen könnten.

Darüber hinaus sind Erweiterungen denkbar, die sich mit der Weiterentwicklung der Druckzonenermittlung beschäftigen. Möglichkeiten bestehen in der Realisierung weiterer Schranken (zum Beispiel Abhängigkeit von Behältervolumina) oder Balancierung nach anderen hydraulischen Parametern (zum Beispiel der Bedarf). Ein weiterer interessanter Punkt sind Analysen zur räumlichen Trennung der Partitionen. Es wurde festgestellt, dass zum Beispiel der Gewichtungsfaktor für die Schnittkantenanzahl bewirken kann, dass resultierende Partitionen sich klarer voneinander räumlich trennen. Eine generelle Aussage kann allerdings nicht getroffen werden.

# Anhang A

## Beispielnetze

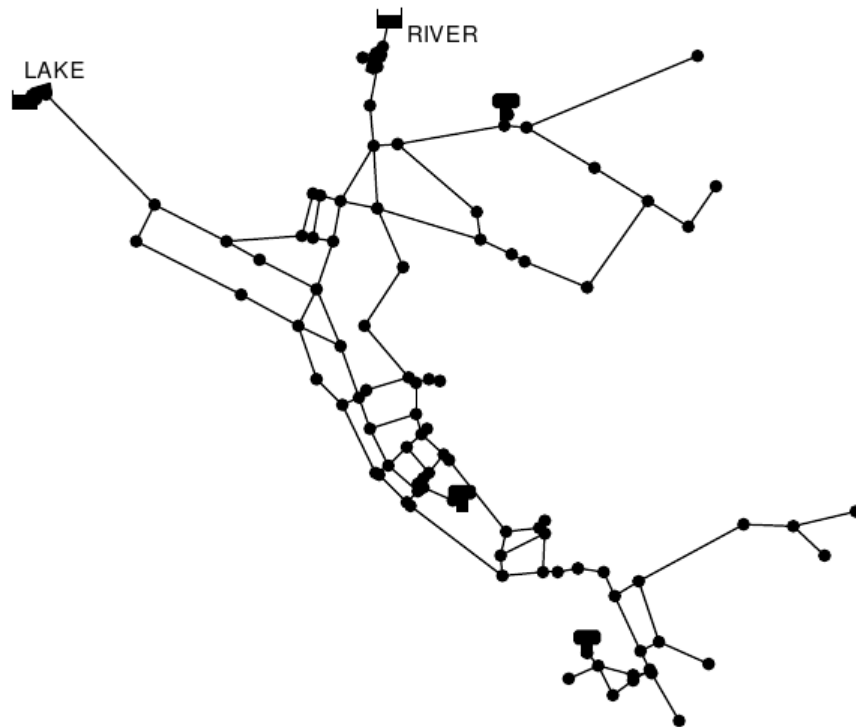


Abbildung A.1 – DB20





Abbildung A.2 – DB7



Abbildung A.3 – DB1



Abbildung A.4 – DB12

# Literaturverzeichnis

- [CLRS01] CORMEN, TH. H., CH. E. LEISERSON, R. RIVEST und C. STEIN: *Algorithmen - Eine Einführung*. Oldenburg Verlag, 2001.
- [CSGW04] CARO, F., T. SHIRABE, M. GUINARD und A. WEINTRAUB: *School restricting: embedding GIS tools with integer programming*. Journal of the Operational Research Society, Seiten 836–849, 2004.
- [Deu08] DEUERLEIN, JOCHEN W.: *Decomposition Model of a General Network Graph*. Journal of Hydraulic Engineering, 134(6):822–832, June 2008.
- [EPA07] EPA, ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY: *Epanet*. <http://www.epa.gov/nrmrl/wswrd/dw/epanet.html>, 2007.
- [HW06] HAUNERT, JAN-HENDRIK und ALEXANDER WOLFF: *Generalization of land cover maps by mixed integer programming*. In: *Proceedings of the 14th annual ACM international symposium on Advances in geographic information systems*, Seiten 75–82, 2006.
- [Hü08] HÜBNER, FLORIAN: *The dynamic graph clustering problem - ILP-based approaches Balancing optimality and the mental map*. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 2008.
- [IWG08] IWG: *Kanet*. <http://kanet.iwg.uni-karlsruhe.de>, 2008.
- [KDP07] KLINGEL, PHILIPP, JOCHEN DEUERLEIN und RITA PIETSCHMANN: *Integriertes Planungsinstrument zur Rehabilitation von Wasserversorgungssystemen – Beispiel IWRM Béni Abbès, Algerien*. GWF-Wasser/Abwasser, 148(11):779–785, 2007.
- [KK99] KARPIS, GEORGE und VIPIN KUMAR: *A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs*. SIAM Journal on Scientific Computing, 20:359–392, 1999.
- [Kli07] KLINGEL, PHILIPP: *GIS-integriertes Netzkataster als Datenbasis zur hydraulischen Modellbildung*. In: SAUERWEIN, BERND und BARBARA WAGNER (Herausgeber): *9. JuWi-Treffen, Beiträge zum Treffen junger Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler deutschsprachiger Wasserbauinstitute*, Seiten 103 – 108, Kassel, August 2007. Universität Kassel, Fachgebiet Wasserbau und Wasserwirtschaft, Universität Kassel.

- [MS07] MUTSCHMANN, JOHANN und FRITZ STIMMELMAYR: *Taschenbuch der Wasserversorgung*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 14 Auflage, Januar 2007.
- [SPV08] SEMPEWO, J., A. PATHIRINA und K. VAIRAVAMOORTHY: *Spatial Analysis tool for development of leakage control zones from the analogy of distributed computing*. Annual Water distribution systems analysis conference WDSA, 10:676–690, 2008.
- [UN08] UN: *Millenium Development Goals Report*. <http://www.un.org/millenniumgoals/>, 2008. visited 03/2009.
- [WCS01] WALSKI, THOMAS M., DONALD V. CHASE und DRAGAN A. SAVIC: *Water Distribution Modeling*. Haestad Methods Inc., Waterbury, 1 Auflage, 2001.