

Simultane Kreissehnengraphen

Masterarbeit
von

Marianne Petersen

An der Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Erstgutachter:	Prof. Dr. Dorothea Wagner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Peter Sanders
Betreuende Mitarbeiter:	Guido Brückner, M. Sc. Dr. Ignaz Rutter

Bearbeitungszeit: 1. Dezember 2016 – 31. Mai 2017

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde.

Karlsruhe, 24. Mai 2017

Deutsche Zusammenfassung

Problemstellungen für Schnittgraphen sind ein zentrales Forschungsthema der algorithmischen Graphentheorie. Eine Klasse von Schnittgraphen sind die Kreissehnengraphen, welche jeweils durch eine Schnittrepräsentation von Sehnen in einem Kreis dargestellt werden können, ein sogenanntes Sehnendiagramm. Ein entscheidendes Werkzeug um die Struktur von Kreissehnengraphen zu analysieren ist die Splitzerlegung. Diese kann als Baum beschriftet mit den Teilen der Splitzerlegung aufgefasst werden und wird Splitbaum genannt. Die Erkennung von Kreissehnengraphen ist in quasi-linearer Zeit möglich. Jedoch sind einige Erkennungsprobleme mit zusätzlichen Einschränkungen, wie das simultane Kreissehnengraphenproblem, im Allgemeinen NP-schwer. Bis jetzt gab es nur Ansätze mit polynomieller Laufzeit um das Erweiterungsproblem zu lösen, welches ein Teilproblem des simultanen Kreissehnengraphenproblems ist.

Diese Arbeit löst für einen zusammenhängenden und ausschließlich in prime Teile zerlegbaren Schnittgraphen das simultane Kreissehnengraphenproblem für beliebig viele Eingabegraphen in Polynomialzeit. Dafür werden drei neue Werkzeuge vorgestellt. Es wird eine bijektive Abbildung zwischen den Sehnendiagrammen eines Graphen und einer bestimmten Wahl für jeden Knoten und jeder Kante des Splitbaums definiert. Damit gibt es erstmals die Möglichkeit die Menge aller Sehnendiagramme eines Kreissehnengraphen auf eine leichter verständliche und strukturierte Menge abzubilden. Zusätzlich wird die Beziehung zwischen den Splitbäumen eines Graphen und eines Teilgraphen aufgezeigt. Schlussendlich kann das simultane Kreissehnengraphenproblem unter den genannten Einschränkungen auf ein 2-SAT-Problem reduziert werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Darstellungsprobleme für Schnittgraphen	2
1.1.1	Erkennung	2
1.1.2	Alle Schnittrepräsentationen eines Schnittgraphen	3
1.1.3	Bedingte Erkennung	4
1.2	Simultanes Kreissehnengraphenproblem	5
2	Grundlagen	7
2.1	Partitionen	7
2.2	Graphen	7
2.3	Splitzerlegung	10
2.4	Algorithmen zur Splitzerlegung	12
2.5	Graph-labelled Trees und Splitbaum	14
2.6	Ein Splitbaum-Algorithmus	17
2.7	Kreissehnengraphen	19
3	Alle Kreissehendarstellungen eines Graphen	23
3.1	Sehendiagramme kombinieren	24
3.1.1	Kombination über gerichtete Splitbaumkanten	27
3.1.2	Voneinander verschiedene Konfigurationen	28
3.2	Sehendiagrammen auf Konfigurationen abbilden	34
3.3	Sehendiagramme richten	37
4	Struktur von Teilrepräsentationen	41
4.1	Blattpartitionen von Splitbäumen	41
4.2	Darstellungsrelevante innere Knoten	42
4.3	Innere Kanten abbilden	46
4.4	Stammbäume	47
5	Simultanes Kreissehnengraphenproblem	53
5.1	Vereinfachende Annahmen	54
5.2	Lösung des Erweiterungsproblems	55
5.3	Laufzeituntersuchung des Erweiterungsproblems	61
5.4	Lösung des simultanen Kreissehnengraphenproblems	65
6	Zusammenfassung und Ausblick	69
	Literaturverzeichnis	71

1. Einleitung

Die Graphentheorie beschäftigt sich mit einer Struktur, die Beziehungen zwischen Objekten abbildet. Diese Struktur wird *Graph* genannt und die Objekte *Knoten*. Gibt es eine Beziehung zwischen zwei Knoten, dann wird diese mit Hilfe einer *Kante* zwischen diesen dargestellt. Seitdem sich die theoretische Informatik und Mathematik mit Graphen dieser Form beschäftigen, ist die Darstellung dieser ein zentrales Thema. Oft wird ein Graph in Form von Punkten in der Ebene, für die Knoten, und Linien zwischen diesen Punkten, für die Kanten, dargestellt. Gibt es eine solche Darstellung, in der sich kein Kantenpaar schneidet, wird der Graph *planar* genannt [Die12]. Eine weitere Darstellungsklasse stellen die *Schnittgraphen* dar. Schnittgraphen sind Graphen für die es möglich ist jedem Knoten ein geometrisches Objekt genau so zuzuordnen, dass sich zwei dieser geometrischen Objekte genau dann schneiden, wenn es eine Kante zwischen den zwei korrespondierenden Knoten gibt. Eine sehr bekannte und gut erforschte Klasse dieser Schnittgraphen, ist die Klasse der *Intervallgraphen* (INT), für die es möglich ist jedem Knoten ein Intervall der reellen Zahlen zuzuordnen. Die Klasse der *Kreissehnengraphen* (CIRCLE) ist ebenfalls eine Schnittgraphenklasse. Ist ein Graph ein Kreissehnengraph, dann kann jedem Knoten eine Sehne in einem Kreis zugeordnet werden und es gibt genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten, wenn sich ihre Sehnen in diesem Kreis schneiden. In Abb. 1.1 ist jeweils ein Beispiel für einen Intervall- und Kreissehnengraphen gegeben mit einer Schnittdarstellung \mathcal{R}_G bzw. C_H und einer Darstellung durch Knoten und Kanten in der Ebene G bzw. H . Nach [CFK13] können Kreissehnengraphen auch als Intervallgraphen aufgefasst werden, indem der Kreis

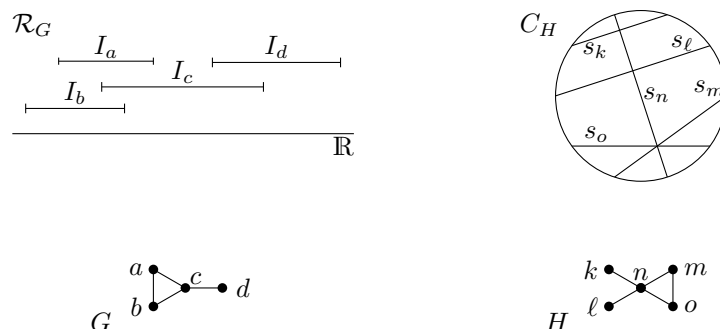


Abbildung 1.1: Links ist ein Intervallgraph dargestellt mit Schnittdarstellung \mathcal{R}_G und ebener Einbettung G , rechts ist ein Kreissehnengraph mit Schnittdarstellung C_G und der ebenen Einbettung H dargestellt.

an einem Punkt aufgeschnitten und gerade gezogen wird. Die Sehnen werden bei diesem Vorgehen zu Intervallen auf dem ausgerollten Kreisbogen. Damit dieselben Beziehungen zwischen Knoten gelten, wie zuvor in dem Kreissehnendiagramm dargestellt, darf es genau dann eine Beziehung zwischen zwei Intervallen und ihren zugehörigen Knoten geben, wenn sich ihre zwei Intervalle schneiden, jedoch keines das andere komplett enthält. Deshalb werden Kreissehnengraphen im Englischen auch manchmal als *Overlap Graphs* bezeichnet. Meist werden Kreissehnengraphen in der Literatur jedoch *Circle Graphs* genannt und ihre Schnittrepräsentation als *Sehnendiagramm* bezeichnet. Ein Sehnendiagramm kann auch als zirkuläres Wort aufgefasst werden, in dem der Name jedes Knotens genau zweimal vorkommt. Das Wort kann über die Endpunkte der Sehnen auf dem Kreis abgelesen werden. Zwei Sehnen schneiden sich genau dann, wenn ihre Endpunkte in dem zugehörigen zirkulären Wort alternieren. Deshalb werden Kreissehnengraphen manchmal auch *Alternance Graphs* genannt.

1.1 Darstellungsprobleme für Schnittgraphen

Da Schnittgraphen über ihre Darstellungsform definiert sind, ist die Frage danach, ob ein Graph eine solche Darstellungsform besitzt ein zentraler Punkt in der Betrachtung von Schnittgraphen. Für einen gegebenen Graphen möchte man also entscheiden können, ob er zu der betrachteten Klasse der Schnittgraphen gehört. In Abschnitt 1.1.1 wird die Erkennung von Kreissehnengraphen erläutert. Gehört ein Graph zu einer Schnittgraphenklasse, dann gibt es meistens mehrere Darstellungen für diesen. Ansätze die Menge aller Darstellungen greifbarer zu machen werden in Abschnitt 1.1.2 zusammengefasst. Neben der Frage, ob es überhaupt eine Schnittdarstellung gibt, kann die Frage untersucht werden, ob Schnittdarstellungen zusätzlichen Forderungen genügen. Abschnitt 1.1.3 beschreibt drei dieser Problemstellungen mit dem aktuellen Forschungsstand.

1.1.1 Erkennung

Das Problem für einen gegebenen Graphen und eine Schnittgraphenklasse zu entscheiden, ob der Graph Teil der Klasse ist, wird *Erkennungsproblem* genannt. In diesem Abschnitt werden das Erkennungsproblem für Kreissehnengraphen und die bestehenden Lösungsalgorithmen betrachtet.

Für Kreissehnengraphen wurden die ersten polynomiellen Erkennungsalgorithmen jeweils unabhängig voneinander 1985 von Bouchet [Bou85], Naji [Naj85], sowie 1989 von Gabor et al. [GSH89] veröffentlicht. Alle drei genannten Algorithmen erstellen in polynomieller Zeit ($\mathcal{O}(n^5)$, $\mathcal{O}(n^7)$ bzw. $\mathcal{O}(nm)$) ein Sehnendiagramm des Eingabegraphen, wenn dieser ein Kreissehnengraph ist. Hierbei ist n die Anzahl der Knoten und m die Anzahl der Kanten des Eingabegraphen. Seit diesen ersten polynomiellen Algorithmen, gab es nur wenige Bestrebungen, eine schnellere Laufzeit zu erreichen. Spinrad [Spi94] schaffte es 1994 auf Basis des Algorithmus von Gabor et al. einen Algorithmus mit Laufzeit in $\mathcal{O}(n^2)$ zur Erkennung von Kreissehnengraphen zu entwickeln. Die nächste Laufzeitoptimierung gelang erst Gioan, Paul, Tedder und Corneil 2013 [GPTC13], als sie einen quasi-linearen Algorithmus mit einer Laufzeit in $\mathcal{O}((n+m)\alpha(n+m))$ entwarfen. Dabei steht α für die inverse Ackermannfunktion, die langsam wächst und für alle praktischen Anwendungen durch vier beschränkt ist [GPTC13].

Allen momentan bekannten Erkennungsalgorithmen liegt das Konzept der *Splitzerlegung* zugrunde. Die Splitzerlegung wurde 1982 von Cunningham [Cun82] eigentlich als Werkzeug für Graphen mit gerichteten Kanten eingeführt. Sei G ein Graph und $P = A \dot{\cup} B$ eine Partition der Knoten von G . Zusätzlich sei $A' \subset A$ die Knotenmenge der Knoten in A , die adjazent zu einem Knoten aus B sind und analog $B' \subset B$ die Menge der Knoten in B ,

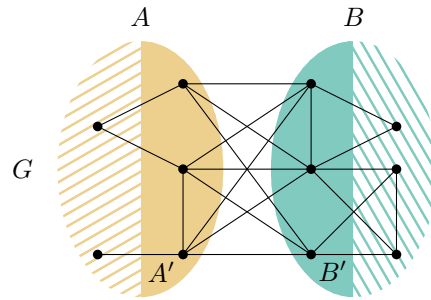


Abbildung 1.2: Ein Graph G mit einer Bipartition $\{A, B\}$ der Knoten, die ein Split ist.

die über eine Kante mit einem Knoten aus A verbunden sind. Die Partition (A, B) wird *Split* genannt, wenn es alle möglichen Kanten zwischen den Knoten A' und B' gibt. Ein Split ist im Allgemeinen nicht eindeutig und man beachte, dass es Kanten innerhalb der Knotenmengen A und B geben kann. Ein Beispiel für einen Split ist in Abb. 1.2 gegeben. Für die Splitzerlegung wird rekursiv ein solcher Split (A, B) in einem Graphen gesucht und aus diesem werden zwei neue Graphen erzeugt. Dafür wird der Graph betrachtet, induziert durch die Knoten A zusammen mit einem Knoten v_B der adjazent zu allen Knoten A' ist. Analog wird der Graph eingeschränkt auf die Knoten B mit einem zusätzlichen Knoten v_A betrachtet, welcher adjazent zu allen Knoten aus B . Dieses Verfahren wird rekursiv fortgesetzt, bis keiner der entstandenen Graphen mehr einen Split enthält. Graphen, die keinen Split enthalten werden *prim* genannt und wie Gabor et al. zeigen, besitzen sie genau dann ein, bis auf Spiegelung, eindeutiges Sehnendiagramm, wenn der Graph mindestens fünf Knoten hat. Wird die rekursive Vorgehensweise der Splitzerlegung abgebrochen, wenn alle Graphen entweder prim oder leicht als Kreissehnengraph darstellbar sind, dann ist der Eingabegraph genau dann ein Kreissehnengraph, wenn alle entstandenen Graphen der Splitzerlegung ebenfalls Kreissehnengraphen sind [GSH89, Lemma 1]. Diese Erkenntnis vereinfacht das Erkennungsproblem, da nicht der ganze Eingabegraph, sondern lediglich die Teile der Splitzerlegung betrachtet werden müssen. Bouchet, Naji, Gabor et al. und Spinrad machen sich diese Eigenschaft zunutze, um das Erkennungsproblem von Kreissehnengraphen auf prime Graphen zu reduzieren.

Der momentan schnellste Algorithmus von Gioan et al. verwendet lexikographische Breitensuche, um eine Knotenordnung auf dem Eingabegraphen zu generieren und dadurch die benötigte Konsekutivität der Sehnendiagramme zu garantieren, sowie eine neue Repräsentation der Splitzerlegung, die von Gioan und Paul 2007 [GP07] und 2012 [GP12] entwickelt wurde. Sie stellen die Splitzerlegung als Baum da, dessen innere Knoten zusätzlich mit einem Graphen beschriftet sind. Dieser Baum wird *Splitbaum* genannt.

1.1.2 Alle Schnittrepräsentationen eines Schnittgraphen

Nachdem erkannt werden konnte, ob ein Graph ein Kreissehnengraph ist oder nicht, rückte unter anderem die Frage in den Mittelpunkt, wie viele verschiedene Sehnendiagramme es für einen Kreissehnengraphen gibt und wie diese beschrieben werden können. Courcelle [Cou07] beschrieb 2007 alle Sehnendiagramme eines Kreissehnengraphen mithilfe von *Prädikatenlogik zweiter Stufe (Monadic second-order Logic)*. Als Grundlage verwendete Courcelle die Splitzerlegung von Bouchet [Bou85], Gabor et al. [GSH89] und Cunningham [Cun82] und untersuchte eine Struktur sehr ähnlich zum Splitbaum von Gioan et al. [GP07][GP12]. Sechs Jahre später beschrieben Chaplick et al. [CFK13] alle Darstellungen eines Kreissehnengraphen ebenfalls über die Splitzerlegung, jedoch definierten sie Äquivalenzklassen eines Splits um darüber mögliche Variationen zu verstehen.

1.1.3 Bedingte Erkennung

Neben der generellen Erkennung von Graphen einer Schnittgraphenklasse, rückte die Erkennung von Schnittgraphen mit zusätzlichen Einschränkungen in den Fokus der Graphentheorie. Dazu gehören unter anderem das *Problem der Erweiterung von Teildarstellungen* 1.1 und das *Problem der beschränkten Darstellung* 1.2 [KKO⁺17] für die Menge aller Schnittgraphenklassen \mathcal{C} .

Definition 1.1 (Partial Representation Extension of \mathcal{C} – REPEXT(\mathcal{C})). [KKO⁺17]

Eingabe: Ein Graph G und ein Sehnendiagramm C' für einen Teilgraphen G' von G .

Frage: Gibt es ein Sehnendiagramm C für G , sodass C eingeschränkt auf die Sehnen von G' gleich C' ist?

Definition 1.2 (Bounded Representation of \mathcal{C} – BOUNDRP(CIRCLE)). [CFK13] [KKO⁺17]

Eingabe: Ein Graph G und ein Paar von Kreisbögen für jeden Knoten des Graphen G .

Frage: Gibt es ein Sehnendiagramm C für G , sodass für jeden Knoten x des Graphen G die Sehnenendpunkte der zugehörigen Sehne s_x in den für den Knoten x vorgegebenen Kreisbögen platziert sind?

Das Problem der Erweiterung von Teildarstellungen 1.1 für Kreissehnengraphen, d.h. REPEXT(CIRCLE), wurde 2013 von Chaplick, Fulek und Klavík [CFK13] mit einem Algorithmus in polynomieller Laufzeit gelöst. Ihr Ansatz beschäftigt sich insbesondere damit, die Struktur aller möglichen Sehnendiagramme eines Graphen zu konstruieren, um die Sehnendiagramme zu finden, welche der vorgegebene Teilrepräsentation C' gerecht werden. Hierfür führen Chaplick et al. Äquivalenzklassen für jeden Split ein, um damit auf alle möglichen Platzierungen der Sehnenendpunkte auf dem Kreis schließen zu können. Damit können sie dann die Verbindung zur vorgegebenen Repräsentation ziehen und die Frage nach der Erweiterbarkeit klären. Der aktuelle Stand der Forschung zur allgemeinen Schwere von REPEXT(\mathcal{C}) und BOUNDRP(\mathcal{C}), mit speziellem Fokus auf Intervallgraphen, kann der Übersicht von Klavík et al. [KKO⁺17] entnommen werden.

Das Problem der Erweiterung von Teildarstellungen ist ein Teilproblem des simultanen Darstellungsproblems für Schnittgraphen, welches 2009 von Jampani und Lubiw eingeführt wurde [JLD09]. Seien G_1 und G_2 zwei Schnittgraphen, die sich Knoten und deren induzierte Kanten teilen, dann nennt man G_1 und G_2 *simultan darstellbar*, wenn es eine Schnittdarstellung für beide gibt, sodass diese Darstellung jedem Knoten, der in beiden Graphen liegt, dasselbe Objekt zuordnet. Das *simultane Darstellungsproblem* für die Klasse der Schnittgraphen ist genau dann lösbar, wenn die Eingabegraphen für den gemeinsamen Schnitt simultan darstellbar sind [JLD09]. Jampani und Lubiw zeigen effiziente Algorithmen zum Lösen des simultanen Darstellungsproblems für chordale Graphen, Vergleichbarkeits- und Permutationsgraphen auf. Ein Jahr später veröffentlichten Jampani und Lubiw einen Algorithmus, der für zwei Intervallgraphen G_1 und G_2 mit einer Laufzeit in $\mathcal{O}(n^2 \log(n))$ Zeit das simultane Darstellungsproblem für $n = G_1 \cup G_2$ [JL10]. Ihr Ansatz basiert vorrangig auf der Verwendung von PQ -Bäumen, wie von Booth und Luekert [BL75] eingeführt. Hierbei wird jeder der beiden betrachteten Graphen auf einen PQ -Baum übertragen und für diese beiden Bäume das simultane Darstellungsproblem für PQ -Ordnungen gelöst.

Für Kreissehnengraphen wird das simultane Darstellungsproblem wie folgt formuliert.

Definition 1.3 (Simultanes Kreissehnengraphenproblem – SIM(CIRCLE)). [CFK13]

Eingabe: Eine Menge von Graphen G_1, \dots, G_k mit einem paarweise identischen Schnitt S , d.h. $G_i \cap G_j = S$ für alle $i \neq j$.

Frage: Gibt es Kreissehnendiagramme C_1, \dots, C_k für G_1, \dots, G_k , sodass diese paarweise eingeschränkt auf die Sehnen der Knoten von S gleich sind?

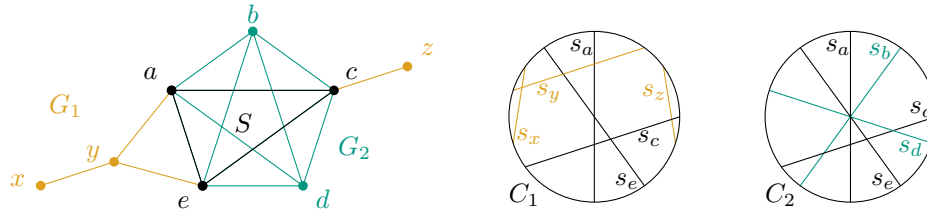


Abbildung 1.3: Links sind die Graphen G_1 und G_2 mit ihrem gemeinsamen Schnitt $S = G_1 \cap G_2$ dargestellt. Rechts sind die Sehnendiagramme C_1 und C_2 abgebildet, wobei C_1 den Graphen G_1 und C_2 den Graphen G_2 repräsentiert.

Für die Graphen $\{G_1, G_2\}$ in Abb. 1.3 als Eingabe des simultanen Kreissehnengraphenproblems, existiert eine Lösung. Beispielweise sind die Sehnendiagramme C_1 und C_2 in Abb. 1.3 eine Lösung. Für Kreissehnengraphen zeigen Chaplick, Fulek und Klavík [CFK13], dass das simultane Kreissehnengraphenproblem 1.3 im Allgemeinen NP-schwer ist. Sie reduzieren das Problem der totalen Ordnung, welches nach Opatrny [Opa79] NP-schwer ist, auf das simultane Kreissehnengraphenproblem. Zusätzlich zeigen Chaplick et al., dass das simultane Kreissehnengraphenproblem im Hinblick auf die Anzahl der Knoten des Schnittgraphen S *fixed-parameter tractable* ist. Es existieren also Funktionen f und g , wobei f nur von der Anzahl der Knoten des Schnittgraphen S abhängt, sodass die Laufzeit beschränkt ist durch $f(|S|)n^{g(1)}$ für die Anzahl n der Knoten des größten Eingabegraphen. Genauer gesagt, reicht es aus für jedes Sehnendiagramm des Schnittgraphen und jeden der k Eingabegraphen G_i das in polynomieller Zeit lösbare Erweiterungsproblem 1.1 REPEXT(CIRCLE) zu lösen. Da die Menge aller Sehnendiagramme für S nur von der Anzahl der Knoten in S abhängt, ist die Zeit zum Finden einer Lösung für das simultane Kreissehnengraphenproblem davon abhängig. Insbesondere betonen Chaplick et al. in ihrem Ausblick ihr Interesse an der Komplexität des simultanen Kreissehnengraphenproblems für eine feste Anzahl von Graphen. Besonders das Problem für die Eingabe von genau zwei Graphen, also $k = 2$, heben sie als offene Forschungsfrage hervor.

1.2 Simultanes Kreissehnengraphenproblem

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Lösung des simultanen Kreissehnengraphenproblems 1.3 unter Einschränkungen für den Schnittgraphen. Einerseits wird gefordert, dass der Schnittgraph zusammenhängend ist, es also keine Zerlegung seiner Knoten in zwei Teile gibt, sodass es keine Kante zwischen den beiden Teilen gibt. Andererseits wird die Bedingung an die Splitzerlegung des Schnittgraphens gestellt, nur aus primen Teilen zu bestehen. Die Eingabegraphen G_1, \dots, G_k des simultanen Kreissehnengraphenproblems 1.3 mit einem nichtleeren Schnitt $S = G_i \cap G_j \neq \emptyset$ für alle $i \neq j = 1, \dots, k$ wird *simultane Instanz* genannt und als $k + 1$ -Tupel (G_1, \dots, G_k, S) notiert. Genauer wird auf das Problem in Kapitel 5 eingegangen.

Unter den genannten Einschränkungen für den Schnittgraphen einer simultanen Instanz, zeigt diese Arbeit einen neuen Algorithmus auf, der eine polynomielle Laufzeit hat. Des Weiteren wird eine neue, sehr anschauliche, Darstellungsmöglichkeit für die Menge aller Sehnendiagramme eines Kreissehnengraphen über den Splitbaum präsentiert. Jedes Sehnendiagramm eines Kreissehnengraphen lässt sich nämlich speziellen Wahlen für die Knoten und Kanten des Splitbaums zuordnen.

Diese Arbeit ist in sechs Kapitel gegliedert. Der Einleitung folgt Kapitel 2, in dem die Grundlagen für das weitere Vorgehen genauer dargestellt werden. Dabei wird besonders auf einen beispielhaften Erkennungsalgorithmus für Kreissehnengraphen, die Arbeit von Gioan et al. [GPTC14] im Hinblick auf Splitbäume und Kreissehnengraphen eingegangen.

In Kapitel 3 wird gezeigt, dass es eine Bijektion zwischen den Sehnendiagrammen eines Kreissehnengraphen und bestimmten Wahlen auf dem zugehörigen Splitbaum gibt. Darauf folgend setzt sich Kapitel 4 mit der Beziehung zwischen den Splitbäumen eines Graphen und einem Teilgraphen dessen auseinander. Kapitel 5 befasst sich mit dem Lösen des simultane Kreissehnengraphenproblem und überträgt dieses dabei auf das Erweiterungsproblem $\text{REPEX}(\text{CIRCLE})$. Zusätzlich wird in diesem Kapitel die Laufzeit des erarbeiteten Lösungsalgorithmus analysiert und mit einer kubischen Schranke abgeschätzt. Zum Abschluss werden in Kapitel 6 die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche weiterführende Forschungsfragen gegeben.

2. Grundlagen

In diesem Kapitel werden die nötigen Grundlagen für diese Arbeit beschrieben. Wie schon in der Einleitung beschrieben, ist die Splitzerlegung ein wichtiges Werkzeug um mit Kreissehnengraphen zu arbeiten. Zuerst werden jedoch einige Notationen für Partitionen und Graphen eingeführt. Danach wird in Abschnitt 2.3 die Splitzerlegung behandelt und in Abschnitt 2.4 wird ein Algorithmus vorgestellt, welcher diese berechnet. Um die Struktur der Splitzerlegung anschaulicher beschreiben zu können, werden mit Graphen beschriftete Bäume in Abschnitt 2.5 eingeführt. Darauffolgend wird ein Algorithmus beschrieben, der einen solchen mit Graphen beschrifteten Baum erzeugt. Abschließend werden in Abschnitt 2.7 Kreissehnengraphen eingeführt und einige wichtige Aussagen über deren eindeutige Darstellung und Beziehung zu Splits vorgestellt.

2.1 Partitionen

Die Notation für Partitionen ist an Waldmann [Wal17] angelehnt. Sei M eine Menge und $P = \{M_i\}_{i \in I}$ eine Menge von nichtleeren Teilmengen von M . Es gelte $M_i \cap M_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ und $\bigcup_{i \in I} M_i = M$. Dann heißt P eine *Partition* von M . Sei zusätzlich $N \subset M$ eine Teilmenge von M . Dann ist die Einschränkung der Partition P von M auf N definiert durch $P|_N = \{M_i \cap N \mid \emptyset \neq M_i \in P\}$. Da eine Partition wieder eine Menge von Mengen ist, kann diese wiederum partitioniert werden.

2.2 Graphen

Ein Graph G besteht aus einer *Knotenmenge* $V(G)$ und *Kantenmenge* $E(G) \subset \{xy \mid x, y \in V(G)\}$. Wenn aus dem Kontext klar ist, welcher Graph $G = (V, E)$ gemeint ist, wird verkürzt auch V oder E geschrieben. Verbindet eine Kante $e \in E$ des Graphen G die Knoten x und y , dann wird e *inzident* zu x und y genannt und die Knoten x bzw. y werden als *adjazent* zueinander bezeichnet. Die hier betrachteten Graphen sind alle nicht gewichtet und einfach, d.h. einer Kante ist weder ein Wert zugewiesen, noch kann es mehrere Kanten zwischen einem Paar von Knoten geben oder eine Kante die ein und denselben Knoten verbindet. In einigen Fällen können die Kanten der hier betrachteten Graphen gerichtet sein. Ist eine Kante e inzident zu den Knoten x und y gerichtet, dann ist ihr eine Richtung zugewiesen, d.h. sie zeigt entweder von x auf y , notiert mit $e = xy$ oder von y auf x , notiert mit $e = yx$. Weiterhin wird die Anzahl der Knoten bzw. Kanten mit $|V| = n$ bzw. $|E| = m$ notiert. Die *Nachbarschaft* eines Knoten $x \in V$ sind alle zu x adjazenten Knoten,

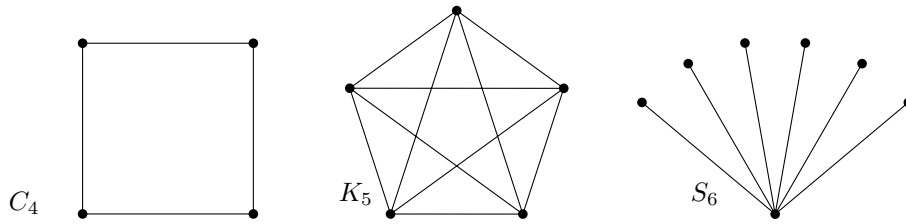


Abbildung 2.1: Von links nach rechts sind C_4 , K_5 und S_6 abgebildet.

d.h. $N(x) := \{y \in V \mid xy \in E\}$. Der *Grad* $\deg(x) := |N(x)|$ eines Knoten x ist als Größe seiner Nachbarschaft definiert. Einer der wichtigsten Zusammenhänge zwischen Knoten und Kanten eines Graphen ist das sogenannte Handshake Lemma 2.1.

Lemma 2.1 (Handshake Lemma). [Die12]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph dann gilt $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$.

Ein *Teilgraph* $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ eines Graphen $G = (V, E)$ besteht nur aus einer Teilmenge dessen Knoten und Kanten. Es gilt daher $\tilde{V} \subset V$ und $\tilde{E} \subset E$. Oft wird ein Teilgraph \tilde{G} deshalb als Untermenge des ursprünglichen Graphen notiert, d.h. $\tilde{G} \subset G$. Ein *knoteninduzierter Teilgraph* eines Graphen $G = (V, E)$ besteht aus einer nichtleeren Teilmenge $\tilde{V} \subset V$ von Knoten und allen Kanten zwischen diesen Knoten, die in G existieren, also $\tilde{E} := \{uv \in E \mid u, v \in \tilde{V}\}$. Ein knoteninduzierter Teilgraph wird daher auch als Einschränkung des ursprünglichen Graphen G auf die Knoten \tilde{V} notiert, d.h. $G|_{\tilde{V}}$. Als ein *kanteninduzierter Teilgraph* $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ von $G = (V, E)$ wird ein Teilgraph beschrieben, der aus einer Teilmenge $\tilde{E} \subset E$ der Kanten des Graphen G entstanden ist, indem alle zu den gewählten Kanten inzidente Knoten ebenfalls Teil des Teilgraphen sind, d.h. $\tilde{V} := \{x, y \mid xy \in \tilde{E}\}$.

Für einen Graphen $G = (V, E)$ und einen Knoten $x \notin V$ mit $N(x) \subset V$ ist über deren Vereinigung $G \cup \{x\}$ der Graph $(V \cup \{x\}, E \cup \{xy \mid y \in N(x)\})$ definiert.

Ein *Pfad der Länge* ℓ ist eine Abfolge von Kanten $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{\ell-2}x_{\ell-1}, x_{\ell-1}x_\ell$ in einem Graphen G mit $\ell \geq 1$. Diese Definition richtet sich nach dem Buch von Diestel [Die12, S.7]. Als *Start-* und als *Endknoten* wird x_0 bzw. x_ℓ bezeichnet. Ein solcher Pfad wird auch *x_0x_ℓ -Pfad* genannt. Ein Pfad heißt *einfach*, wenn sich alle seine Knoten paarweise unterscheiden, d.h. $x_i \neq x_j$ für $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$, $j \neq i$. Im Folgenden werden nur einfache Pfade betrachtet. Ein Pfad mit Länge Eins besteht nur aus einer Kante und wird *trivial* genannt. Für zwei Knotenmengen S und T heißt ein Pfad, dessen Startknoten in S und Endknoten in T liegt *ST-Pfad*. Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn es für jedes Knotenpaar $x, y \in V$ einen xy -Pfad gibt. Sei H ein Graph und $G \subset H$ ein Teilgraph von H . Lässt sich die Menge $V(G)$ um keinen Knoten aus $V(H \setminus G)$ erweitern, sodass der knoteninduzierte Teilgraph von H zusammenhängend ist, dann wird G eine *Zusammenhangskomponente* von H genannt.

Im Folgenden sind einige spezielle Graphen relevant, die daher eine eigene Notation erhalten. Ein *Kreis* C_n mit n Knoten hat die Knotenmenge $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ und Kantenmenge $E = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_nx_1\}$. Ein Graph G heißt *vollständig*, wenn jeder Knoten zu allen anderen Knoten benachbart ist, d.h. $E = \{xy \mid x, y \in V\}$. Ein vollständiger Graph wird *Clique* genannt und wenn n die Anzahl seiner Knoten ist mit K_n notiert. Eine weitere Graphklasse sind *Sterne*. Ein Stern besteht aus einem Knoten z , der das Zentrum darstellt, zu dem alle anderen Knoten adjazent sind. Zwischen den restlichen Knoten $V \setminus \{z\}$ gibt es keine Kanten. Formal gilt demnach, wenn ein Stern $k + 1$ Knoten hat: $V = \{z, x_1, \dots, x_k\}$ und $E = \{zx \mid x \in V \setminus \{z\}\}$. Ein Stern mit $k + 1$ Knoten, wird mit S_k notiert. In Abb. 2.1 sind als Beispiele C_4 , K_5 und S_6 abgebildet.

Eine weitere wichtige Klasse sind die bipartiten Graphen. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn es eine Partition $V = A \dot{\cup} B$ der Knoten von G gibt, sodass für alle Kanten

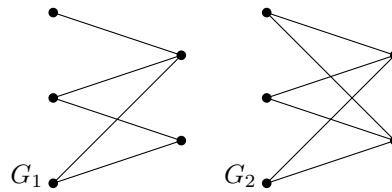


Abbildung 2.2: Links ist ein bipartiter und rechts ein vollständig bipartiter Graph dargestellt

$ab \in E$ gilt $a \in A$ und $b \in B$. Für einen vollständigen bipartiten Graphen gilt $N(a) = B$ für alle $a \in A$ und $N(b) = A$ für alle $b \in B$. Als Beispiel für einen bipartiten Graphen vergleiche Abb. 2.2.

Ein Baum T ist ein kreisfreier und zusammenhängender Graph. Die Knoten mit Grad 1 heißen *Blätter*, alle anderen Knoten werden *innere Knoten* genannt. Die Menge aller inneren Knoten wird mit $I(T)$ und die Menge aller Blätter in einem Baum mit $L(T)$ bezeichnet. Eine Kante, deren inzidente Knoten beide innere Knoten sind, wird als *innere Kante* bezeichnet. Die disjunkte Vereinigung von mindestens zwei Bäumen wird als *Wald* bezeichnet. Jeder maximale Baum eines Waldes stellt somit eine Zusammenhangskomponente der Vereinigung dar. Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger zusammenhängender Graph und $T = (V, E')$ ein Teilgraph von G , der alle Knoten von G enthält und ein Baum ist, dann wird T ein *spannender Baum* genannt.

Lemma 2.2. Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n$ und $|E| = m$. Dann gilt:

- (i) $m = n - 1$.
- (ii) $\max_{x \in V} \deg(x) \leq |L(T)|$.
- (iii) Hat jeder innere Knoten mindestens Grad drei, dann hängt die Anzahl der inneren Knoten, sowie der Kanten linear von der Anzahl der Blätter ab und es gilt

$$|L(T)| \geq \frac{n}{2} + 1.$$

Beweis. Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n$ und $|E| = m$. Die erste Behauptung folgt direkt aus der Definition eines Baums und Behauptung (ii) ist eine leichte Übung (siehe [Die12]). Für die zweite Behauptung muss das Handshake Lemma 2.1 abgeschätzt und umgeformt werden:

$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in L(T)} \deg(v) + \sum_{w \in V(T) \setminus L(T)} \deg(w) \\ &\geq |L(T)| + 3(n - |L(T)|) = 3n - 2|L(T)| \\ \Leftrightarrow 2(n - 1) &\geq 3n - 2|L(T)| \\ \Leftrightarrow 2|L(T)| &\geq 3n - 2n + 2 \\ \Leftrightarrow |L(T)| &\geq \frac{n}{2} + 1. \end{aligned}$$

□

Einige der vorgestellten Graphklassen haben weitere Eigenschaften, die sich ableiten lassen. Eine Familie $\{M_i \mid i \in I\}$ von Teilmengen einer Menge M hat die *Helly-Eigenschaft*, wenn die Implikation gilt: Die Existenz einer Indexmenge $J \subset I$ mit $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ für alle $i \neq j \in J$ impliziert, dass $\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$.

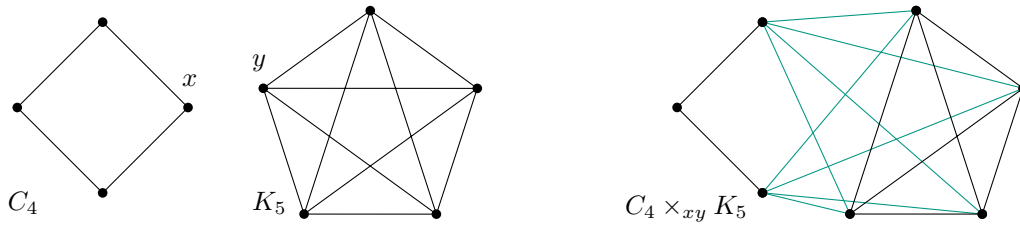


Abbildung 2.3: Der Zusammenschluss von C_4 und K_5 über die Knoten x und y ist rechts gegeben. Die hinzugefügten Kanten zwischen $N(x)$ und $N(y)$ sind farblich markiert.

Satz 2.3. [Rut14] Eine Familie von Teilbäumen erfüllt die Helly-Eigenschaft.

Eine Grapheigenschaft heißt *hereditär*, wenn die Tatsache, dass G diese Eigenschaft besitzt impliziert, dass jeder knoteninduzierte Teilgraph diese ebenfalls besitzt. Dies ist beispielsweise für jeden vollständigen Graphen der Fall.

Für zwei Graphen G und H lassen sich Operationen definieren. Der *Zusammenschluss* von G und H bezüglich zweier Knoten $x \in V(G)$ und $y \in V(H)$ ist ein neuer Graph $G \times_{xy} H$. Er entsteht aus G und H indem die Knoten x und y gelöscht werden und alle möglichen Kanten zwischen den Nachbarn $N(x)$ und $N(y)$ von x und y eingefügt werden vgl. [Har74, S.122]. Ist aus dem Kontext klar, welche zwei Knoten für den Zusammenschluss betrachtet werden, wird vereinfacht \times geschrieben. Der Zusammenschluss von C_4 und K_5 ist in Abb. 2.3 illustriert.

Die *Kantenkontraktion* in einem Graphen G beschreibt die Operation eine Kante $e = xy \in E$ zusammenzuziehen. Der neue Graph G' entsteht aus G indem die Kante e und ihre inzidenten Knoten $\{x, y\}$ gelöscht wird. Stattdessen wird ein neuer Knoten z eingefügt, der zu allen Nachbarn der gelöschten Knoten x und y benachbart ist, also gilt $N(z) = N(x) \cup N(y) \setminus \{x, y\}$ in G' .

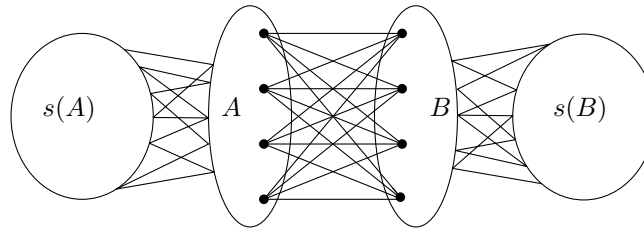
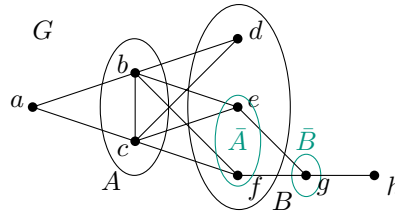
2.3 Splitzerlegung

Die Splitzerlegung ist ein Werkzeug um einen Graphen in kleinere Teile zu zerlegen, um mit diesen kleineren Teilen einfacher arbeiten zu können. Durch die Eigenschaften eines Splits werden bei der Zerlegung insbesondere einige Eigenschaften, wie beispielsweise die Eigenschaft ein Kreissehnengraph zu sein, auf die kleineren Teile übertragen; genauer wird darauf in Abschnitt 2.7 eingegangen. In der englischsprachigen Literatur tauchen zwei Begriffe für die Splitzerlegung auf: Split-Decomposition [CFK13],[GPTC14],[Bou85] und Join-Decomposition [GSH89],[HM79], [Spi03].

Den folgenden Notationen und Begrifflichkeiten liegen die Definitionen von Gioan et al. [GPTC14], sowie Spinrad [Spi94] [Spi94] zugrunde.

Definition 2.4. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $\{V_A, V_B\}$ eine Partition der Knoten des Graphen G , d.h. $V = V_A \cup V_B$. Zusätzlich sei $A \subset V_A$ die Menge aller Knoten in V_A , die zu mindestens einem Knoten in V_B benachbart sind und B die Menge aller Knoten in V_B , die zu Knoten in V_A benachbart sind. Die Partition $\{V_A, V_B\}$ heißt Split genau dann, wenn alle Kanten zwischen den Knotenmengen A und B existieren, d.h. $\{ab \mid a \in A \text{ und } b \in B\} \subset E$. Kurz wird ein Split auch mit (A, B) bezeichnet.

Für einen Split werden die Mengen A und B als *Splitgrenzen* bezeichnet. Gilt für einen Teil der Partition eines Splits $|V_A| = 1$ oder $|V_B| = 1$, dann heißt der Split *trivial*. Beachte,


 Abbildung 2.4: Ein Split mit Seiten A und B .

 Abbildung 2.5: Für den gegebenen Graphen G gibt es mehrere Splits. Zwei dieser Splits, (A, B) und (\bar{A}, \bar{B}) , sind hervorgehoben.

dass nach Definition einer Partition gilt $\emptyset \neq V_A, V_B$. Im Folgenden werden die Mengen der Knoten, welche nicht in der Splitgrenze liegen, mit $s(A) := V_A \setminus A$ und $s(B) := V_B \setminus B$ notiert.

Allgemein lässt sich ein Split nach der Definition wie in Abbildung 2.4 dargestellt auffassen. Ein trivialer Split impliziert hierbei $s(A) = \emptyset$ bzw. $s(B) = \emptyset$. Die Definition eines Splits fordert alle Kanten zwischen den Splitgrenzen, verbietet jedoch keine Kanten zwischen zwei Knoten derselben Splitgrenze. Insbesondere müssen alle $V_A V_B$ -Pfade mindestens eine Kante ab mit $a \in A$ und $b \in B$ enthalten.

In dem Beispielgraphen G aus Abb. 2.5 bildet die Partition $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f, g, h\}\}$ einen Split mit Grenzen $A = \{c, b\}$ und $B = \{d, e, f\}$. Ein Graph kann mehrere Splits enthalten, beispielsweise wäre (\bar{A}, \bar{B}) mit $\bar{A} = \{e, f\}$ und $\bar{B} = \{g\}$ ebenfalls ein Split in G .

Einige Graphklassen sind im Hinblick auf die Existenz von Splits gesondert zu betrachten und zu benennen. Cliques und Sterne werden *degeneriert* genannt, da jede Partition der Knoten ein Split ist. Graphen die keinen nichttrivialen Split besitzen, werden *prim* genannt. Nach dieser Definition sind C_2, C_3, S_1 und S_2 die einzigen Graphen die gleichzeitig prim und degeneriert sind.

Mit Hilfe von Splits kann ein Graph rekursiv zerlegt werden. Dieses Vorgehen wird *Splitzerlegung* genannt.

Definition 2.5. [Dah00]

Die Splitzerlegung eines Graphen $G = (V, E)$ ist das folgende rekursive Verfahren. Hat G einen nichttrivialen Split (A, B) , dann erstelle zwei neue Graphen $G_A := (V_A \cup \{v_b\}, E|_{V_A} \cup \{av_b \mid a \in A\})$ und $G_B := (V_B \cup \{v_a\}, E|_{V_B} \cup \{bv_a \mid b \in B\})$. Die Knoten v_b und v_a werden hierbei virtuelle Knoten genannt und sind adjazent zu allen Knoten in A bzw. in B . Diese Zerlegung wird rekursiv auf den entstandenen Graphen durchgeführt. Ist einer der entstandenen Graphen prim oder degeneriert, wird er nicht weiter zerlegt.

Beachte, dass die zwei durch die Splitzerlegung entstandenen Graphen G_A und G_B zusammengeschlossen über die virtuellen Knoten wieder den ursprünglichen Graphen G ergeben, d.h. $G_A \times_{v_b v_a} G_B = G$. Für den Graphen aus Abb. 2.5 ist der erste Schritt der Splitzerlegung mit dem Split (A, B) in Abb. 2.6 dargestellt.

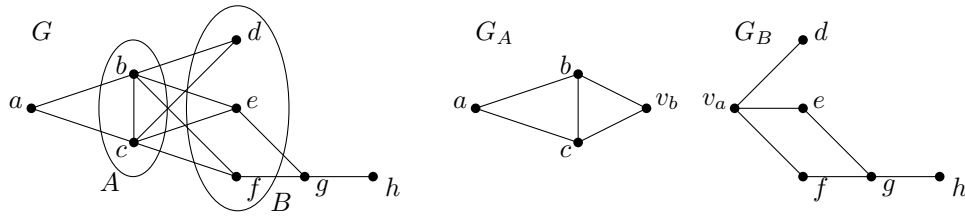


Abbildung 2.6: Ein Graph G mit einem Split (A, B) und den aus der Splitzerlegung entstandenen Graphen G_A und G_B . Es gilt $G_A \times_{v_a v_b} G_B = G$.

Cunningham [Cun82] zeigte, dass mit der Definition 2.5 jede Splitzerlegung zur selben Menge von Graphen führt. Wichtig ist dabei, dass nur das Ergebnis eindeutig ist, jedoch nicht die Abfolge der durchgeführten nichttrivialen Splits.

Satz 2.6. [Cun82]

Jeder zusammenhängende Graph hat eine eindeutige Splitzerlegung in prime Graphen, Sterne und Cliques mit einer minimalen Anzahl von Splitteilen.

Wird im Folgenden von einer Splitzerlegung gesprochen, ist das eindeutige Ergebnis des rekursiven Vorgehens gemeint.

2.4 Algorithmen zur Splitzerlegung

Um die eindeutige Splitzerlegung eines Graphen zu finden gibt es verschiedene Algorithmen [Spi03], [GSH89], [Dah00]. Exemplarisch wird hier der Algorithmus aus Spinrads Buch [Spi03, Kap. 13] vorgestellt. Der Algorithmus testet für den Eingabegraphen $G = (V, E)$ jede Kante $xy \in E$ und jeden Knoten $z \in V$, ob es einen nichttrivialen Split (A, B) mit $x, z \in A$ und $y \in B$ gibt, zwischen dem die Kante xy liegt. Hierdurch werden alle möglichen nichttrivialen Splits in G gefunden. Wird einer dieser Splits durchgeführt, kann auf die entstandenen Teile G_A, G_B wieder der Algorithmus angewendet werden um die Splitzerlegung zu finden.

Für alle Kombinationen von Kanten $xy \in E$ und einen weiteren Knoten $z \in V \setminus \{x, y\}$ wird folgender Ablauf durchgeführt, in dem die Warteschlange Q ausschließlich Knoten aus V_A enthalten soll. Zu Beginn wird nur z in Q eingefügt. Die restlichen Knoten $V \setminus \{x, z\}$ werden in zwei Mengen eingeteilt. Die zu x adjazenten Knoten, werden der Menge B^* hinzugefügt, und die Knoten, welche nicht adjazent zu x sind, der Menge V_{B^*} . Die Menge B^* enthält danach mindestens ein Element, nämlich den Knoten y . Die beiden Mengen B^* und V_{B^*} sind die vorläufige Splitgrenze bzw. der andere Teil des Splits (A, B) . Im Folgenden wird getestet, ob die Knoten in der Warteschlange Q eine Kante zu y haben oder nicht. Knoten sollen der Warteschlange Q nur hinzugefügt werden, wenn sie sicher in V_A sind. Solange die Warteschlange Q nichtleer ist, nehme v aus der Warteschlange und lösche v aus Q . Gibt es keine Kante zwischen v und y , kann v nicht in der gesuchten Splitgrenze A liegen. Da v jedoch in V_A liegt, müssen auch alle Nachbarn von v in V_A liegen. Diese können also nicht Teil von V_B sein und werden in die Warteschlange Q eingefügt werden. Aus den Mengen B^* und V_{B^*} müssen demnach alle Nachbarn $N(v)$ von v gelöscht werden. Die gelöschten Knoten müssen überprüft werden, daher werden sie der Warteschlange Q hinzugefügt.

Gibt es jedoch die Kante $vy \in E$, dann muss v in der Splitgrenze A liegen, da alle Knoten in Q aus V_A sind. Die Nachbarn von v müssen in diesem Fall in B^* oder in V_A liegen, dürfen aber auf keinen Fall in $s(B)$ sein. Zur Warteschlange Q werden daher alle Nachbarn $N(v)$ hinzugefügt, die noch in V_{B^*} liegen, und diese werden aus V_{B^*} gelöscht. Da zwischen den zwei Splitgrenzen alle Kanten existieren müssen, können Knoten, die keine Nachbarn

von v sind, nicht in B sein. Lösche daher alle Knoten aus B^* , die keine Nachbarn von v sind und füge die gelöschten Knoten der Warteschlange Q hinzu. Ist die Warteschlange leer wird getestet, ob die gefundene Splitseite $V_{B^*} = B^* \cup V_{B^*}$ für die drei betrachteten Knoten $\{x, y, z\}$ mindestens zwei Knoten enthält. Ist dies der Fall, war die Suche erfolgreich, denn die Menge V_A enthält ebenfalls mindestens die zwei Knoten x und z . Der vorgestellte Algorithmus ist in Algorithmus 2.1 als Pseudocode zu finden.

Algorithmus 2.1 : Splitzerlegungsalgorithmus nach Spinrad [Spi03, S. 214]

```

Eingabe : Graph  $G = (V, E)$ 
Ausgabe : Alle möglichen Splits in  $G$ 
1 for  $xy \in E$  do
2   for  $z \in V \setminus \{x, y\}$  do
3      $Q = \{z\}$ ;
4      $B^* = \{v \in V \mid vx \in E\} \setminus \{x, z\}$ ;
5      $V_{B^*} = \{v \in V \mid vx \notin E\} \setminus \{x, z\}$ ;
6     while  $Q \neq \emptyset$  do
7        $v \leftarrow Q$ ;
8       Lösche  $v$  aus  $Q$ ;
9        $M = V_{B^*} \cap N(v)$ ;
10      if  $vy \notin E$  then
11        // Es gilt  $v \in s(A)$ , daher darf  $v$  keine Nachbarn in  $V_B$  haben.
12         $N = B^* \cap N(v)$ ;
13         $B^* = B^* \setminus N(v)$ ;
14         $V_{B^*} = V_{B^*} \setminus M$ ;
15      else
16        // Knoten  $v$  hat demnach eine Kante zu  $V_B$  und muss somit in  $A$ 
           liegen. Die Nachbarn von  $v$  dürfen also nur in  $B$  oder  $V_A$  liegen,
           nicht aber in  $V_B$ .
17         $V_{B^*} = V_{B^*} \setminus M$ ;
18         $N = B^* \cap (V \setminus N(v))$ ;
19         $B^* = B^* \setminus N$ ;
20       $Q = Q \cup N \cup M$ ;
21    if  $|B^* \cup V_{B^*}| \geq 2$  then
22       $A, B$  ist Split;
23    else
24       $A, B$  ist kein Split;

```

Zur Veranschaulichung zeigt Tabelle 2.1 zwei Beispielabläufe für einen negativen und einen positiven Splittest beim Anwenden des Algorithmus auf den Graphen G aus Abb. 2.5 für die gegebenen Knotenkombinationen $\{a, b, c\}$ und $\{b, e, a\}$.

Insgesamt liegt der Algorithmus von Spinrad mit $|V| = n$ und $|E| = m$ in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(m^2)$, um einen einzigen nichttrivialen Split zu finden, und in $\mathcal{O}(nm^2)$, um die Splitzerlegung zu bestimmen.

In Abschnitt 2.6 wird der momentan schnellste Algorithmus eine Splitzerlegung zu finden von Gioan et al. [GPTC14] vorgestellt, der in $\mathcal{O}((n+m)\alpha(n+m))$ Zeit läuft. Dabei steht α für die inverse Ackermannfunktion, diese ist für alle in der Praxis verwendeten Graphen durch 4 beschränkt.

getestete Kante	B^*	V_{b^*}	Q
initial	$\{b\}$	$\{d, e, f, g, h\}$	c
$cb \in E$	$\{b\}$	$\{g, h\}$	def
$db \in E$	$\{b\}$	$\{g, h\}$	ef
$eb \in E$	$\{b\}$	$\{h\}$	fg
$fb \in E$	$\{b\}$	$\{h\}$	g
$gb \notin E$	$\{b\}$	\emptyset	h
$hb \notin E$	$\{b\}$	\emptyset	\emptyset
initial	$\{c, d, e, f\}$	$\{g, h\}$	a
$ae \notin E$	$\{d, e, f\}$	$\{g, h\}$	c
$ce \in E$	$\{d, e, f\}$	$\{g, h\}$	\emptyset

Tabelle 2.1: Für den Graphen aus Abb. 2.5 wurde die Kante ab mit dem Knoten c mit Hilfe des Algorithmus aus [Spi03] darauf getestet, ob es einen nichttrivialen Split mit a und c auf einer Seite, b auf der anderen und der Kante ab über den Split gibt. Da am Ende $|B^* \cup V_{B^*}| < 2$ gilt, ist dies jedoch nicht der Fall. Für die Eingabe be als Kante und a als dritten Knoten, ist das Ergebnis des Algorithmus hingegen positiv. Der gefundene nichttriviale Split (A, B) ist in Abb. 2.5 schwarz markiert.

2.5 Graph-labelled Trees und Splitbaum

Um die Struktur der eindeutigen Splitzerlegung in prime und degenerierte Teile zu verstehen, gibt es in der Literatur unterschiedliche Ansätze. Schon Cunningham [Cun82] schrieb 1982 von einem Splitzerlegungsbaum, der die Struktur der Splitzerlegung widerspiegelte, wandte diese jedoch auf gerichtete Graphen an. Courcelle [Cou07] nannte ein ähnliches Konstrukt Splitzerlegungsgraph in seiner Veröffentlichung von 2008. Parallel verknüpften Gioan und Paul [GP07][GP12] diese Struktur der Splitzerlegung mit durch Graphen beschriftete Bäume (GLTs). GLTs sind dabei ein übergeordnetes Konzept für die einzelnen gefundenen nichttrivialen Splits jeder Splitzerlegung eines Graphen.

Definition 2.7. [GP07, GP12]

Ein mit Graphen beschrifteter Baum, kurz GLT für graph-labelled tree, ist ein Tupel (T, F) . Hierbei ist T ein Baum und F eine Familie von Graphen, sodass jeder Knoten ν aus T mit genau einem Graphen $G(\nu) \in F$ beschriftet ist. Zusätzlich existiert eine Bijektion ρ_ν zwischen zu ν inzidenten Kanten und den Knoten von $G(\nu)$.

Zur leichteren Beschreibung von GLTs wird hier die Notation von Gioan et al. [GPTC13] übernommen. Sei (T, F) ein GLT. Der Graph $G(\nu) \in F$ für den inneren Knoten $\nu \in V(T)$ wird *Beschriftungsgraph* genannt. Die Knoten eines Beschriftungsgraphen werden mit $V(\nu) = V(G(\nu))$ beschrieben und *Markierer* genannt. Die Kanten $E(G(\nu))$ heißen *Beschriftungskanten*. Für eine Kante $e = \nu\lambda \in E(T)$ des Baums werden die Markierer $\rho_\nu(e) \in V(\nu)$ und $\rho_\lambda(e) \in V(\lambda)$ als ihre *Extremitäten* bezeichnet. Vereinfacht spricht man dann davon, dass e inzident zu $\rho_\nu(e)$ und $\rho_\lambda(e)$ ist. Zwei Extremitäten einer Kante werden als *gegenüberliegend* bezeichnet. Die *Blattmenge* $L(q)$ für einen Markierer $q = \rho_\nu(e)$ ist die Menge aller Blätter des Teilbaums von $T - e$, der nicht q enthält. Beachte, dass die Blattmenge nichtleer sein kann. Ein Beispiel für einen GLT ist in Abb. 2.7 gegeben. Die Blattmenge für x ist in dem genannten Beispiel gleich $L(x) = \{a, c, d, f\}$.

Definition 2.8. [GPTC13, Def.2.2]

Sei (T, F) ein GLT. Ein Markierer q' ist von einem Markierer q aus erreichbar, wenn es eine Folge Π von Markierern q, \dots, q' gibt, sodass

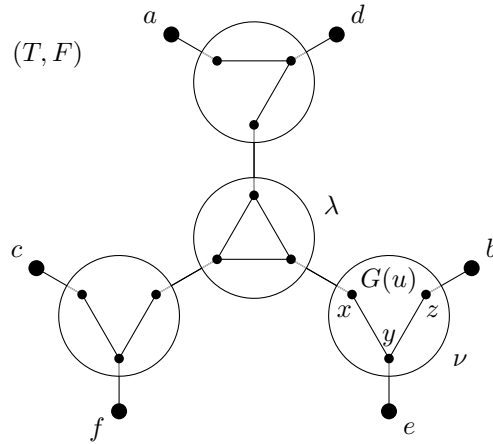


Abbildung 2.7: Der GLT (T, F) hat vier innere Knoten und die Blattmenge $\{a, b, c, d, e, f\}$. Die inneren Knoten sind mit Graphen aus F beschriftet. Für den Knoten ν und seinen Beschriftungsgraphen $G(\nu) \in F$ sieht die Bijektion ρ_ν zwischen den zu ν inzidenten Baumkanten und den Markierern $V(\nu)$ wie folgt aus: $\rho_\nu(x) = \lambda, \rho_\nu(y) = e$ und $\rho_\nu(z) = b$. Für den Markierer x ist die Blattmenge $L(x) = \{a, c, d, f\}$.

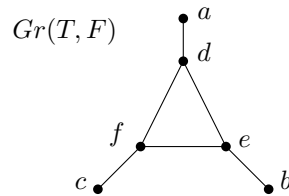


Abbildung 2.8: Der Erreichbarkeitsgraph $\text{Gr}(T, F)$ zum GLT (T, F) aus Abb. 2.7.

1. jedes aufeinander folgende Paar durch eine Baum- oder Beschriftungskante verbunden ist,
2. die so definierten Kanten alternieren.

Wieder in dem Beispiel aus Abb. 2.7 sind die Blätter d und e voneinander aus erreichbar, jedoch ist weder a von e aus erreichbar, noch x von z aus.

Insbesondere folgt aus der Definition 2.8 die Eindeutigkeit der Folge II und dass diese einen Pfad in T definiert. Für alle Markierer q , sei $A(q)$ die *Erreichbarkeitsmenge*, welche alle Knoten der Blattmenge $L(q)$ enthält, die von q aus erreichbar sind.

Definition 2.9. [GPTC13, Def.2.3]

Sei (T, F) ein GLT. Der Erreichbarkeitsgraph $\text{Gr}(T, F)$ von (T, F) ist der Graph, dessen Knoten die Blätter von T sind. Es existiert genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten in $\text{Gr}(T, F)$, wenn die korrespondierenden Blätter in T erreichbar voneinander aus sind. Umgekehrt wird (T, F) ein GLT für $\text{Gr}(T, F)$ genannt.

Der Erreichbarkeitsgraph zu (T, F) aus Abb. 2.7 ist in Abb. 2.8 dargestellt. Aus der Definition 2.9 des Erreichbarkeitsgraphen ergibt sich, dass jeder GLT genau einen Erreichbarkeitsgraphen hat. Umgekehrt können einem beliebigen Graphen mehrere GLTs zugeordnet werden. Zusätzlich folgen aus Definition 2.9 einige wichtige Bemerkungen:

Bemerkung 2.10. [GPTC13, Rem. 2.4–2.7]

(i) Ein Graph G ist genau dann zusammenhängend, wenn alle Beschriftungsgraphen eines beliebigen GLT von G zusammenhängend sind.

Sei (T, F) ein GLT mit einem zusammenhängenden Erreichbarkeitsgraph $\text{Gr}(T, F) = G$.

(ii) Dann ist für jeden Markierer q in (T, F) die Erreichbarkeitsmenge $A(q)$ nichtleer.

(iii) Für eine innere Baumkante $e = pq$ von T ist die Partition $(L(p), L(q))$ ein nichttrivialer Split in G . Insbesondere sind $A(p)$ und $A(q)$ die Splitgrenzen.

(iv) Für jeden Beschriftungsgraphen $G(\nu) \in F$ existiert eine Teilmenge von Blättern $L \subset L(T)$, sodass $G(\nu)$ isomorph zu $G|_L$ ist. Die Menge L erhält man, wenn für jeden Markierer $q \in V(\nu)$ genau ein Blatt aus $A(q)$ gewählt wird.

Im Hinblick auf die Beziehung zwischen GLTs und nichttrivialen Splits definieren Gioan et al. [GPTC13] die *Knotenteilung* und den *Knotenzusammenschluss*. Sei $e = \nu\nu'$ eine innere Baumkante eines GLT (T, F) und $q \in V(\nu)$ und $q' \in V(\nu')$ ihre Extremitäten. Dann werden die Markierer q und q' auch *virtuelle Knoten* genannt. Der Knotenzusammenschluss von ν und ν' kontrahiert die Kante e und erstellt einen neuen Knoten v , der mit dem Zusammenschluss $G(\lambda) = G(\nu) \times_{qq'} G(\nu')$ bezüglich q und q' beschriftet wird. Der Rest des Baums bleibt unverändert. Die *Knotenteilung* ist die inverse Operation zum Knotenzusammenschluss. Dabei existiert ein innerer Knoten ν in T , sodass $G(\nu)$ einen Split (A, B) enthält. Die Knotenteilung bezüglich (A, B) ersetzt den Knoten ν durch zwei neue Knoten λ und λ' , die mit $G_{V_A} \cup \{q\}$ und $G_{V_B} \cup \{q'\}$ beschriftet sind, wobei $N(q) = A$ und $N(q') = B$ gilt. Hierbei sind q und q' die Extremitäten der neu eingeführten Kante $\lambda\lambda'$. Alle anderen Baumkanten, die zuvor adjazent zu u waren, bleiben unverändert. Eine wichtige Beobachtung von Gioan et al. [GPTC13] für den Erreichbarkeitsgraphen ist Bemerkung 2.11.

Bemerkung 2.11. *Der Erreichbarkeitsgraph bleibt durch die Knotenoperationen, Knotenteilung oder -zusammenschluss unverändert.*

Betrachtet man eine innere Baumkante in einem GLT, die adjazent zu zwei mit Cliques beschrifteten Knoten ist, dann ergibt der Knotenzusammenschluss der beiden Knoten wieder eine Clique. Gibt es zwei benachbarte innere Knoten beschriftet mit zwei Sternen, dann ergibt der Kantenzusammenschluss ihrer inzidenten Kante genau dann wieder einen Stern, wenn die Extremitäten der Kante ein Blatt des Sterns im einen Beschriftungsgraphen und das Zentrum des Sterns im anderen Beschriftungsgraphen ist. In allen anderen Fällen, wenn nicht genau eine Extremität das Zentrum ist, ergeben sich keine Sterne als neuer Beschriftungsgraph, siehe hierzu auch Abb. 2.9. Andersherum betrachtet, hat man einen Knoten in einem GLT beschriftet mit einer Clique oder einem Stern, die mindestens vier Knoten haben, dann entstehen durch eine beliebige Knotenteilung wieder zwei Cliques beziehungsweise zwei Sterne.

Ein GLT, in dem kein Knotenzusammenschluss zweier benachbarter Sterne oder zweier Cliques mehr möglich ist, dessen Beschriftungsgraph wiederum degeneriert wäre, heißt *reduzierter GLT*.

Satz 2.12. [GPTC13, Thm 2.8]

Für jeden zusammenhängenden Graphen G existiert ein eindeutiger reduzierter GLT (T, F) , dessen Beschriftungsgraphen entweder prim oder degeneriert sind, sodass $\text{Gr}(T, F) = G$.

Der eindeutige GLT, den es nach Satz 2.12 gibt, wird *Splitbaum* von G genannt und mit $ST(G)$ bezeichnet. Ein innerer Baumknoten ν von einem Splitbaum wird kurz auch *prim* oder *degeneriert* genannt, wenn sein Beschriftungsgraph $G(\nu)$ die genannte Eigenschaft

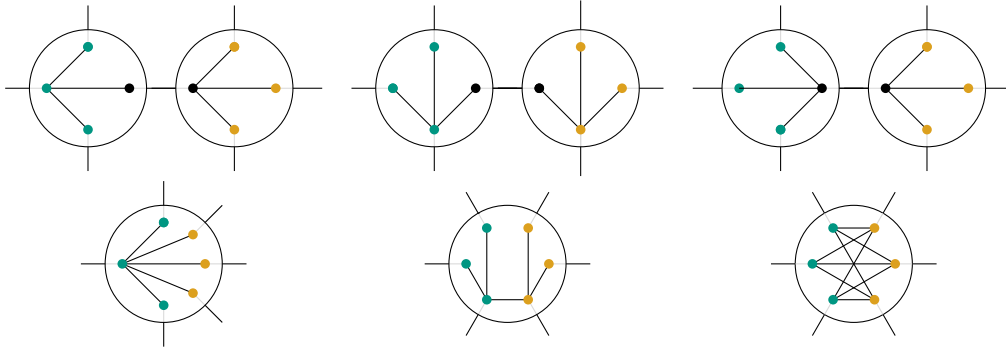


Abbildung 2.9: Hier sind alle Möglichkeiten eines Stern-Stern-Zusammenschlusses dargestellt. Der einzige Zusammenschluss, bei dem wieder ein Stern entsteht, ist der, bei dem ein Blatt und das Zentrum die Schnittstelle sind, siehe links. Die beiden anderen Varianten in der Mitte und rechts ergeben keine Sterne.

hat. Da alle Beschriftungsgraphen des GLT (T, F) in Abb. 2.7 degeneriert sind, kein Knotenzusammenschluss von zwei Cliques oder Sternen möglich ist und G aus Abb. 2.8 den Erreichbarkeitsgraph von (T, F) darstellt, ist der GLT (T, F) der eindeutige Splitzerlegungsbaum $ST(G)$ von G .

Satz 2.13. [GPTC14, Thm. 2.18, Cor. 2.19]

Sei G ein Graph und $ST(G) = (T, F)$ sein Splitbaum. Eine Partition $\{V_A, V_B\}$ der Knoten von G mit Grenzen A, B ist genau dann ein nichttrivialer Split (A, B) von G , wenn es eine Kante $e \in E(T)$ mit Extremitäten p und q in T gibt mit $A = A(q)$, $V_A = L(q)$, $B = A(p)$ und $V_B = L(p)$ oder einen degenerierten Knoten ν in $ST(G)$ und einen Split (A_ν, B_ν) in $G(\nu)$ mit $A = \bigcup_{q \in A_\nu} L(q)$ und $B = \bigcup_{p \in B_\nu} L(p)$.

Aus Satz 2.13 folgt die Eigenschaft des Splitbaums, dass dieser alle Splits, entweder durch eine Baumkante oder einen Split in einem degenerierten Beschriftungsgraphen repräsentiert. Außerdem ist die Graphenfamilie der Beschriftungsgraphen genau die Splitzerlegung des Erreichbarkeitsgraphen. Aufgrund dieser Eigenschaften eines Splitbaums lässt sich an ihm gut untersuchen, welche Abfolgen von Splits es gibt um den Erreichbarkeitsgraphen zu zerlegen und damit seine eindeutige Splitzerlegung zu erhalten.

2.6 Ein Splitbaum-Algorithmus

In diesem Abschnitt wird der Splitbaum-Algorithmus von Gioan et al. [GPTC14] beschrieben. Die Idee besteht darin, den Splitbaum eines Graphen G Schritt für Schritt durch Hinzufügen der Blätter zu finden. Dabei ist es entscheidend, dass durch das Hinzufügen immer ein zusammenhängender Erreichbarkeitsgraph entsteht. Um zu entscheiden, welche Knoten des vorherigen Baums angepasst werden müssen, wird mit Hilfe der Nachbarschaft des hinzuzufügenden Knoten der bis dahin erstellte GLT markiert.

Sei (T, F) ein GLT und sei q ein Blatt oder Markierer. Für eine Teilmenge S der Blattmenge von T wird der *Status* von q bezüglich S definiert.

- (i) q ist *perfekt* (kurz: P), wenn $S \cap L(q) = A(q)$.
- (ii) q ist *leer* (kurz: E), wenn $S \cap L(q) = \emptyset$.
- (iii) q ist *gemischt* (kurz: M), wenn weder (i). noch (ii). gelten.

Für einen Knoten ν des GLT (T, F) werden die Mengen $P(\nu) := \{q \in V(\nu) \mid q \text{ ist perfekt}\}$, $M(\nu) := \{q \in V(\nu) \mid q \text{ ist gemischt}\}$ und $NE(\nu) := P(\nu) \cup M(\nu)$ definiert. Eine Kante

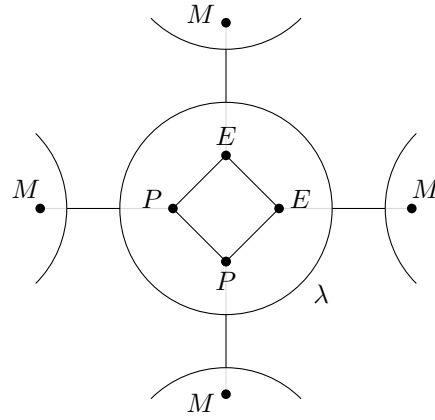


Abbildung 2.10: Hier ist ein Ausschnitt eines GLT $ST(G)$ zu sehen, der einen hybriden Knoten λ hat. Perfekte Markierer sind mit P , leere mit E und gemischte mit M beschriftet.

von T erhält ihren Status, durch ihre beiden Extremitäten, sind beispielsweise beide Extremitäten perfekt heißt die Kante ebenfalls *perfekt* oder *PP-Kante*. Die Mengen P^* und E^* sind definiert für jeden Knoten $\nu \in V(T)$ durch

$$P^* = \{q \in V(\nu) \mid q \text{ ist perfekt und nicht das Zentrum eines Sterns}\}$$

$$E^* = \{q \in V(\nu) \mid q \text{ ist leer oder perfekt und Zentrum eines Sterns}\}$$

Ein innerer Baumknoten ν von T wird als *hybrid* bezeichnet, wenn jeder seiner Markierer perfekt oder leer ist und die in T jeweils gegenüberliegenden Extremitäten gemischt sind. Ein Beispiel für einen hybriden Knoten ist der Knoten λ in Abb. 2.10.

Mit Hilfe dieser Definition des Status, identifizieren Gioan et al. sieben Fälle. Diese werden später beim Hinzufügen eines neuen Knotens entscheidend sein.

Satz 2.14. [GPTC14, Thm. 4.14]

Sei $ST(G) = (T, F)$ der eindeutige Splitbaum zum Graphen G , dessen Knoten bezüglich der Teilmenge S der Blätter markiert ist. Dann gilt genau einer der folgenden Fälle:

1. $ST(G)$ enthält einen inneren Knoten ν , der mit einer Clique beschriftet ist, deren Markierer alle perfekt sind. Der Knoten ν ist eindeutig.
2. $ST(G)$ enthält einen inneren Knoten ν , der mit einem Stern beschriftet ist, dessen Markierer alle leer sind, außer das Zentrum, welches perfekt ist. Der Knoten ν ist eindeutig.
3. $ST(G)$ enthält einen eindeutigen primen hybriden Knoten.
4. $ST(G)$ enthält einen eindeutigen degenerierten hybriden Knoten.
5. $ST(G)$ enthält eine *PP-Kante*. Diese Kante ist eindeutig.
6. $ST(G)$ enthält eine *PE-Kante*. Diese Kante ist eindeutig.
7. $ST(G)$ enthält einen eindeutigen Teilbaum, der vollständig aus gemischten, also *MM-Kanten*, besteht.

Der Kern des Algorithmus besteht daraus, wie das neue Blatt x in jedem der Fälle eingefügt wird. Sei der GLT von G markiert bezüglich der Nachbarschaft $N(x)$ und seien G , sowie $G \cup \{x\}$ zusammenhängend, dann kann das Blatt x mit Hilfe der identifizierten Fällen aus Satz 2.14 zum Splitbaum von G hinzugefügt werden.

Für Fall 1-3 wird ein neuer Markierer q_x adjazent zu allen perfekt markierten Knoten in $G(\nu)$ eingefügt und x zu seinem gegenüberliegenden Blatt gemacht.

In Fall 4 wird der eindeutige degenerierte hybride Knoten ν einmal mit dem durch die Knotenmengen P^* und E^* definiertem Split geteilt. Dabei kann entweder eine PP - oder eine PE -Kante entstehen. Auf einer PP -Kante wird ein neuer innerer Knoten ν_x eingefügt, der mit einem K_3 beschriftet ist, an dessen freien Markierer das Blatt x angehängt wird. Im Fall einer PE -Kante $e = pq$, wobei p perfekt und q leer ist, ist der neue Beschriftungsgraph von ν_x ein S_2 . Das Zentrum von $G(\nu_x)$ ist die gegenüberliegende Extremität zum perfekten Markierer p . Das eine Blatt von $G(\nu_x)$ liegt dem Markierer p gegenüber und das andere wird als x gegenüberliegend definiert.

In Fall 5 und 6 wird analog zu den zwei Schemata aus Fall 4 für eine PP - oder PE -Kante vorgegangen und entweder ein neuer innerer Baumknoten beschriftet mit einer Clique oder einem Stern auf dieser eingefügt.

Die aufwändigste Vorgehensweise um x zu $ST(G)$ hinzuzufügen, muss in Fall 7, eines Teilbaums mit gemischten Kanten, angewendet werden.

Satz 2.15 (Knotenaddition in Fall 7). [GPTC14, Prop. 4.20]

Sei $ST(G) = (T, F)$ markiert bezüglich einer Teilmenge $N(x)$ von Blättern. Falls $ST(G)$ eine gemischte Baumkante e enthält, wird $ST(G + x)$ wie folgt konstruiert:

1. Aufteilen: *Spalte alle Sterne und Cliquen mit Hilfe der Mengen P^* und E^* auf.*
2. Zusammenziehen: *Schließe alle Knoten des MM-Baums in einen Knoten ν_x zusammen.*
3. Hinzufügen: *Erstelle einen neuen Markierer p_x der zu $P(\nu_x)$ adjazent ist und mache x zu seinem Blatt.*

Die Vorgehensweise für einen Teilbaum mit komplett gemischten Kanten ist anschaulich so zu verstehen: Zuerst werden alle relevanten Teile der degenerierten Knoten des Splitbaums $ST(G)$ identifiziert, dann werden diese in einen Knoten kontrahiert, um an diesen das neue Blatt x anzuhängen.

Sei G ein zusammenhängender Graph, dann können Gioan et al. [GPTC14] mit der vorgestellten Vorgehensweise und einer beliebigen Knotenordnung Knoten für Knoten den Splitbaum von G erzeugen. Ist die Reihenfolge der Knoten zum Hinzufügen durch eine lexikographische Breitensuche (siehe bspw. [Cor05]) ermittelt worden, zeigen Gioan et al., dass die Laufzeit ihres Algorithmus in $\mathcal{O}((n+m)\alpha(n+m))$ liegt. Hierbei steht n für die Anzahl der Knoten, m für die Anzahl der Kanten des betrachteten Gesamtgraphen G und α für die inverse Ackermannfunktion.

2.7 Kreissehnengraphen

Wie schon in der Einleitung dargelegt sind Kreissehnengraphen Schnittgraphen. Für Schnittgraphen kann jeder Knoten des Graphen durch ein geometrisches Objekt repräsentiert werden, sodass es genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten gibt, wenn die geometrischen Objekte sich schneiden. Schnittgraphen und somit Kreissehnengraphen sind insbesondere *hereditär*, daher hat jeder knoteninduzierter Teilgraph eines Kreissehnengraphen ebenfalls die Eigenschaft ein Kreissehnengraph zu sein.

Definition 2.16 (Kreissehnengraph). *Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann ein Kreissehnengraph, wenn jeder Knoten $v \in V$ durch eine Kreissehne s_v darstellbar ist, sodass zwei Sehnen s_v, s_w sich genau dann schneiden, wenn es die Kante $vw \in E$ gibt.*

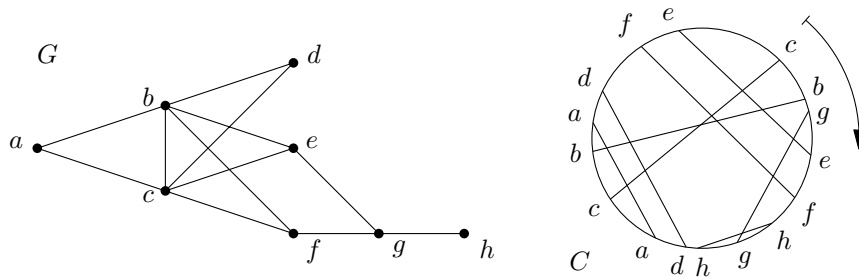


Abbildung 2.11: Der Graph G ist ein Kreissehnengraph. Ein mögliches Sehnendiagramm um diesen darzustellen, ist das Sehnendiagramm C . Das im Uhrzeigersinn abgelesene Wort von C ist $cbgefghgdacbadfe$.

Die Darstellung eines Kreissehnengraphen durch Sehnen in einem Kreis wird *Sehnendiagramm* genannt. Ein Beispiel für einen Kreissehnengraphen und einem möglichem Sehnendiagramm, das ihn darstellt, ist in Abbildung 2.11 gegeben.

Die Schnittrepräsentation eines Kreissehnengraphen als Sehnendiagramm kann auch als *zirkuläres Wort* aufgefasst werden, wobei jeder Buchstabe des Alphabetes $\Sigma = V$ genau zweimal auftritt. Das zirkuläre Wort wird vom Sehnendiagramm abgelesen, indem an die Endpunkte der Sehnen die Bezeichnung des jeweiligen Knotens geschrieben wird und dann im mathematisch negativen Sinn, d.h. im Uhrzeigersinn, die Endpunkte abgelesen werden. Für das Beispiel in Abb. 2.11 ergibt sich beispielsweise das Wort $\pi = cbgefghgdacbadfe$, aber auch das Wort $\tilde{\pi} = badfecbgefghgdac$ kann abgelesen werden. Da das Sehnendiagramm jedoch als zirkuläres Wort interpretiert wird, gilt $\pi = \tilde{\pi}$. Für manche Betrachtungen ist es sinnvoller das Sehnendiagramm selbst zu betrachten und in anderen das zugehörige zirkuläre Wort. Das zu einem Sehnendiagramm C gehörige zirkuläre Wort wird mit $\pi(C)$ notiert. Wird andersherum vom Sehnendiagramm eines zirkulären Wortes gesprochen, notiert man $C(\pi)$.

Die Endpunkte einer Sehne s_a alternieren genau dann mit den Endpunkten einer Sehne s_b im zirkulären Wort π von G , wenn die Kante $ab \in E$ existiert.

Sei G ein Graph und $G' \subset G$ ein knoteninduzierter Teilgraph von G , der durch das Sehnendiagramm C' dargestellt wird. Das Sehnendiagramm C' von G' heißt *erweiterbar*, wenn es ein Sehnendiagramm von G gibt, das C' enthält, d.h. es existiert ein zirkuläres Wort π_G , welches den Graphen G repräsentiert, das eingeschränkt auf die Endpunkte der Knoten $V(G')$ gleich dem zirkulären Wort $\pi(C')$ ist. Betrachte den Graph G des Beispiels aus Abb. 2.11 und das zusätzlich gegebene Sehnendiagramm C' mit $\pi(C') = cbedcbde$ für den Teilgraphen $G' = G|_{\{c,b,d,e\}}$. Dann ist das Sehnendiagramm C' erweiterbar, da gilt

$$\pi(C)|_{V(G')} = (cbgefghgdacbadfe)|_{\{c,b,d,e\}} = cbedcbde = \pi(C').$$

Jedoch ist nicht jedes Sehnendiagramm eines Teilgraphen erweiterbar, ein Beispiel hierfür ist in Abb. 2.12 gegeben.

Wenn ein Graph G ein Kreissehnengraph ist, stellt sich die Frage, wie viele Sehnendiagramme diesen darstellen. Hierbei muss geklärt sein, was der Begriff eindeutig für Kreissehnengraphen bedeutet und wann es so eine eindeutige Darstellung gibt.

Sei C die Sehnenrepräsentation für einen Kreissehnengraphen G , dann wird die *Spiegelung* dieser, an einer Achse, C^r genannt. Für ein zirkuläres Wort π beschreibt π^r das genau umgekehrt gelesene zirkuläre Wort von π . Beispielsweise gilt für $\pi = abcd$, dass $\pi^r = dcba$. Für das Wort $\pi(C)$ der Sehnenrepräsentation C folgt $\pi(C^r) = \pi(C)^r$. Wenn die Spiegelung eines Kreissehnendiagramms nicht als eine weitere Repräsentation betrachtet wird, lässt sich

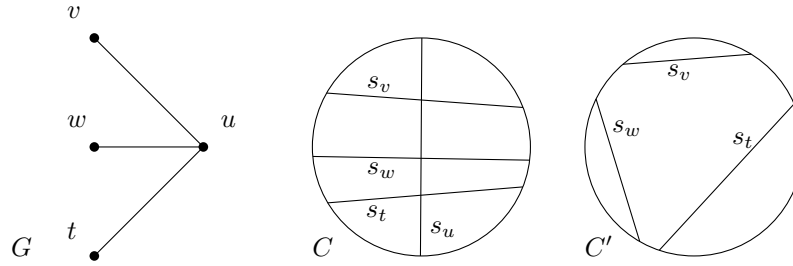


Abbildung 2.12: Für den Graphen G ist eines seiner Sehendiagramme C gegeben. Das rechte Sehendiagramm C' für den Teilgraphen $G|_{\{v,w,t\}}$ ist nicht erweiterbar zu einem Sehendiagramm von G , da es unmöglich ist die fehlende Sehne s_u einzufügen, sodass sie alle anderen drei Sehnen schneidet.

eine Aussage über die Eindeutigkeit eines Sehendiagramms für einen Kreissehnengraphen machen.

Satz 2.17. [GSH89, S. 472] *Ein Kreissehnengraph mit mindestens fünf Knoten hat genau dann eine bis auf Spiegelung eindeutige Darstellung, wenn der Graph prim ist.*

Für manche Graphen ist es sehr leicht alle Sehendiagramme zu finden. Dazu gehören Cliques und Sterne. Für eine Clique ist jedes Sehendiagramm C , das diese repräsentiert, durch ein zirkuläres Wort π der Form $\pi = AA$ darstellbar, d.h. $C = C(\pi)$, wobei A eine Permutation der n Endknoten ist. Für Sterne mit Zentrum z sind alle Sehendiagramme die durch $\pi = zAzA^r$ beschrieben werden, gegeben. Hierbei ist A wieder eine beliebige Permutation der $n - 1$ Endpunkte der Sehnen, die nicht das Zentrum repräsentieren, und A^r steht für die Umkehrung von A .

Im Hinblick auf Kreissehnengraphen ist ein Split eigenschaftserhaltend. Dies zeigten Gabor et al. [GSH89], sowie Bouchet [Bou85] unabhängig voneinander.

Lemma 2.18. [GSH89, Lem. 1]

Sei (A, B) ein Split in einem Graphen G . Dann ist G genau dann ein Kreissehnengraph, wenn G_A und G_B Kreissehnengraphen sind.

Wenn die zwei Sehendiagramme für die Graphen C_{G_A} und C_{G_B} aus Lemma 2.18 gegeben sind, lässt sich ein Sehendiagramm C für G in linearer Zeit konstruieren. Denn nach Lemma 2.18 kann unabhängig voneinander eine Kreissehendarstellung $\pi(C_{G_A}) = \pi_A v_b \tilde{\pi}_A v_b$, $\pi(C_{G_B}) = \pi_B v_a \tilde{\pi}_B v_a$ für die beiden Graphen G_A und G_B gefunden werden. Hierbei sind π_A und $\tilde{\pi}_A$ Folgen von Sehnenendpunkten der Knoten aus V_A und v_a bzw. v_b die virtuellen Knoten. Für die Endpunkte der Sehnen korrespondierend zu den Knoten aus der Grenze A gilt, dass jeweils ein Endpunkt in π_A und der andere in $\tilde{\pi}_A$ sein muss. Analog gilt dies auch für π_B und $\tilde{\pi}_B$, sowie die Knoten aus der Grenze B . Durch den virtuellen Knoten v_b , der in G_A zu allen Knoten aus A benachbart ist, ist in einem Sehendiagramm von G_A die Position der Endpunkte der Sehnen aus B reserviert. Umgekehrt reserviert die Sehne s_{v_a} in einem Sehendiagramm für G_B zwei Positionen für die Endpunkte der Sehnen korrespondierend zu den Knoten aus V_A . Daraus ergibt sich beim Zusammensetzen der Beiden ein Sehendiagramm C für G , d.h. $\pi(C) = \pi_A \pi_B \tilde{\pi}_A \tilde{\pi}_B$. Ein Beispiel ist in Abbildung 2.13 für den Split (A, B) des Graphen G gegeben. Im Allgemeinen sind die Folgen von Endpunkten π_A und $\tilde{\pi}_A$ nicht eindeutig. Nur im Fall, wenn der Graph G_A prim ist, sind π_A und $\tilde{\pi}_A$ eindeutig und es gibt genau zwei Sehendiagramme $C_{G_A} = \pi_A v_b \tilde{\pi}_A v_b$ und $C^r(G_A) = v_b \tilde{\pi}_A^r v_b \pi_A^r$, die G_A darstellen.

Insgesamt lässt sich also für die Splitzerlegung eines Graphen Folgendes zeigen.

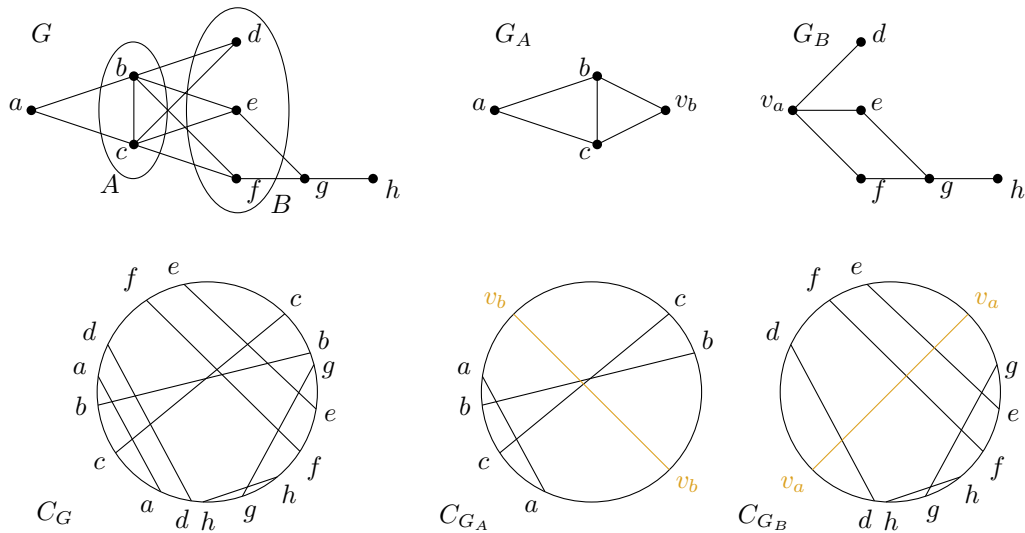


Abbildung 2.13: Für den Graphen G ist das Sehnendiagramm C_G zu sehen, entstanden aus den zwei fest gewählten Sehnendiagrammen C_{G_A} und C_{G_B} eines Splits (A, B) von G . In C_{G_A} und C_{G_B} ist die Sehne des virtuellen Knoten v_a bzw. v_b der Platzhalter für die Sehnen der jeweils anderen Splitseite.

Satz 2.19. [GSH89][Bou85]

Ein Graph G ist genau dann ein Kreissehnengraph, wenn jeder entstandene Graph der Splitzerlegung von G ein Kreissehnengraph ist.

Für einen Kreissehnengraphen G lässt sich nach Satz 2.19 und der obigen Argumentation aus den Graphen der Splitzerlegung von G zusammen mit Sehnendiagrammen dieser ein Sehnendiagramm für den Graphen G erzeugen. In der Sichtweise auf die Splitzerlegung mit einem Splitbaum formulieren Gabor et. al folgenden Satz aus Satz 2.19.

Satz 2.20. Sei (T, F) ein GLT. Dann ist der Erreichbarkeitsgraph $\text{Gr}(T, F)$ genau dann ein Kreissehnengraph, wenn jeder Beschriftungsgraph $G(\nu) \in F$ ein Kreissehnengraph ist.

3. Alle Kreissehndarstellungen eines Graphen

Für Kreissehnengraphen, wie sie in Kapitel 2 eingeführt wurden, ist es bei der Betrachtung einer möglichen Darstellung hilfreich alle Sehndiagramme zu kennen, die eine Repräsentation des Graphen darstellen. In diesem Kapitel soll nun eine Bijektion zwischen Wahlen eines Sehndiagramms für jeden Beschriftungsgraphen des Splitbaums, sowie Richtungen der inneren Baumkanten und allen Sehndiagrammen des Erreichbarkeitsgraphen dieses Splitbaums konstruiert werden.

Wie schon in Abschnitt 2.3 vorgestellt, hat nach Satz 2.6 jeder zusammenhängende Graph eine eindeutige Splitzerlegung in prime und degenerierte Graphen mit einer minimalen Anzahl von Splitteilen. Die Splitzerlegung lässt sich auch in Form eines mit Graphen beschrifteten Baums, kurz GLT, darstellen. In Abschnitt 2.5 wurden diese GLTs genauer vorgestellt und in Satz 2.12 gezeigt, dass es zu jedem zusammenhängenden Graphen genau einen reduzierten GLT gibt, dessen Beschriftungsgraphen entweder prim oder degeneriert sind. Dieser eindeutige GLT wird Splitbaum genannt. Zudem besagt Satz 2.19 aus Abschnitt 2.7 bezüglich Kreissehnengraphen, dass der Erreichbarkeitsgraph eines GLTs genau dann ein Kreissehnengraph ist, wenn jeder Beschriftungsgraph ein Kreissehnengraph ist. Somit ist ein Graph genau dann ein Kreissehnengraph, wenn für jeden Beschriftungsgraphen seines Splitbaums mindestens ein Sehndiagramm existiert, das diesen darstellt. Für degenerierte Graphen, also Sterne und Cliques ist dies trivial. Für prime Graphen gibt es einen Algorithmus, wie in Abschnitt 1.1 vorgestellt, der mit einer Laufzeit in $\mathcal{O}((|V| + |E|)^\alpha(|V| + |E|))$ ein Sehndiagramm erzeugt, falls es existiert. Hierbei steht α für die inverse Ackermannfunktion.

Um mit den Darstellungen eines Kreissehnengraphen, also seinen Sehndiagrammen, besser arbeiten zu können, wird ein Sehndiagramm auch als ein zirkuläres Wort aufgefasst. Im Folgenden wird ein Sehndiagramm C als gleich zu einem zweiten Sehndiagramm C' angesehen, wenn sie durch dasselbe zirkuläre Wort dargestellt werden können. Geometrisch betrachtet sind zwei Sehndiagramme C und C' genau dann gleich, wenn sich die Sehnenendpunkte auf dem Kreis von C so verschieben lassen, dass jeweils benachbarte Endpunkte nicht vertauscht werden und daraus C' entsteht.

Vorerst wird im Allgemeinen untersucht, wie sich Sehndiagramme zusammensetzen lassen und sich diese Operation definieren lässt. Dazu werden den Sehnen teilweise Richtungen zugewiesen, um die zwei Endpunkte einer Sehne unterscheiden zu können. Das Richten

einer Sehnen soll dabei die zwei Teilwörter, die zwischen dem ersten und zweiten bzw. dem zweiten und ersten Endpunkt platziert sind, unterscheidbar machen. Im Hinblick auf einen Splitbaum, sollen die Sehnendiagramme der Beschriftungsgraphen zweier benachbarter innerer Knoten zusammengesetzt werden. Um die Reihenfolge für diese Operation des Zusammensetzens zu definieren, werden teilweise die inneren Kanten des Splitbaums gerichtet.

3.1 Sehnendiagramme kombinieren

Da die inneren Knoten eines Splitbaums mit jeweils einem primen oder degenerierten Graphen beschriftet sind, werden in diesem Abschnitt insbesondere die Sehnendiagramme dieser Art von Graphen und im Allgemeinen die Zusammensetzung mehrerer Sehnendiagramme beschrieben und untersucht.

Die Beschriftungsgraphen eines Splitbaums sind nach Satz 2.6 entweder prim, ein Stern oder eine Clique. Ihre möglichen Sehnendiagramme wurden schon in Abschnitt 2.7 angerissen. Ist ein Beschriftungsgraph prim und ein Kreissehnengraph, dann besagt Satz 2.17, dass er genau zwei Sehnendiagramme hat, die ihn repräsentieren und dass diese durch Spiegelung ineinander überführt werden können. Ist der Graph eine Clique K_n , sind alle Sehnendiagramme der Form $C(AA)$, wobei A eine Permutation aller n Knoten der Clique ist. Für einen Stern S_k mit k Blättern und Zentrum z sind die Sehnendiagramme $C(zAzA^r)$, für A eine Permutation der k Blätter des Sterns, alle möglichen Sehnendiagramme. Hierbei steht A^r für die Umkehrung von A . Die Menge aller paarweise verschiedener Sehnendiagramme die denselben Graphen G darstellen, werden in $\mathcal{D}(G)$ zusammengefasst und die *Menge der Darstellungen für G* genannt. Für einen primen Graphen hat die Menge der Darstellungen beispielsweise genau zwei Elemente. Außerdem muss für ein Sehnendiagramm C immer auch seine Spiegelung C^r in $\mathcal{D}(G)$ enthalten sein. Beachte, dass für einen Stern S_k ein beliebiges Sehnendiagramm $C = C(zAzA^r)$ gespiegelt wieder sich selbst ergibt:

$$C^r = (C(zAzA^r))^r = C((zAzA^r)^r) = C(AzA^rz) = C(zAzA^r) = C.$$

Die Menge der Darstellungen $\mathcal{D}(S_k)$ eines Sterns S_k enthält $\frac{k!}{2}$ Sehnendiagramme und die Menge der Darstellungen $\mathcal{D}(K_n)$ einer Clique K_n enthält $(n-1)!$ Sehnendiagramme, wobei diese sich in $\frac{(n-1)!}{2}$ Paare einteilen lässt, die jeweils durch Spiegelung ineinander überführbar sind.

Seien G und H zusammenhängende Graphen. Über zwei ihrer Knoten $x \in V(G)$ und $y \in V(H)$ ist der Zusammenschluss $G \times_{xy} H$ definiert. Seien zusätzlich zwei Sehnendiagramme $C_G = C(x_1\pi_G x_2\pi'_G)$ und $C_H = C(y_1\pi_H y_2\pi'_H)$ für G bzw. H mit Richtungen der Sehnen s_x und s_y gegeben. Dann ist über die Richtungen der Sehnen die Operation \otimes_{xy} definiert mit

$$C_G \otimes_{xy} C_H := C(\pi_G \pi_H \pi'_G \pi'_H).$$

Über \otimes_{xy} ist demnach ein Sehnendiagramm des Zusammenschlusses $G \times_{xy} H$ von G und H definiert. Die Definition der Operation \otimes ist an die Definition 2.7 von Gioan et al. [GPTC13] angelehnt.

Im Hinblick darauf, dass $(N(x), N(y))$ ein Split in $G \times_{xy} H$ ist, werden die Knoten x und y , sowie ihre korrespondierenden Sehnen s_x und s_y *virtuell* genannt. Die Operation \otimes_{xy} ist nicht kommutativ, da im Allgemeinen gilt $\pi(C_H \otimes_{yx} C_G) = \pi_H \pi_G \pi'_H \pi'_G = \pi_G \pi'_H \pi'_G \pi_H \neq \pi_G \pi_H \pi'_G \pi'_H = \pi(C_G \otimes_{xy} C_H)$. Ist aus dem Kontext klar, welche zwei Knoten für den Zusammenschluss verwendet werden, wird auch \otimes geschrieben. Entscheidend beim Zusammensetzen der Sehnendiagramme ist die Nummerierung der Endpunkte mit $x_1 x_2$ bzw. $y_1 y_2$ der Sehnen s_x in C_G bzw. s_y in C_H .

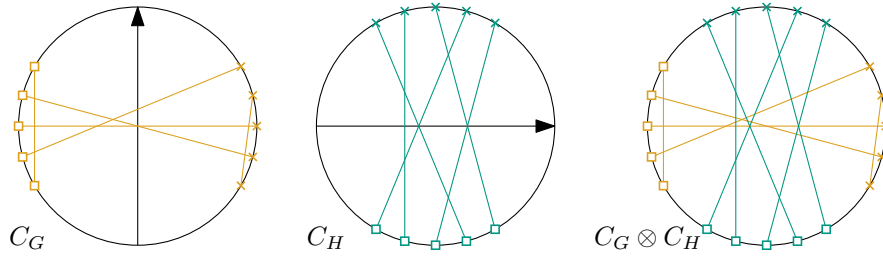


Abbildung 3.1: Die Operation \otimes wurde auf den zwei Sehnendiagrammen C_G und C_H mit den gerichteten Sehnen durchgeführt. Rechts ist das Ergebnis $C_G \otimes C_H$ zu sehen.

Geometrisch betrachtet haben die Sehnen s_x und s_y demnach eine Richtung, da $s_x = x_1x_2$ und $s_y = y_1y_2$. Anschaulich beschrieben, richtet die Operation \otimes für zwei Sehnendiagramme C_G und C_H das Sehnendiagramm C_G , sodass die Sehne s_x von unten nach oben zeigt, und C_H , sodass s_y von links nach rechts zeigt. Dann wird der Endpunkt x_2 , auf den die Sehne s_x in C_G zeigt, durch die Sehneneendpunkte in C_H , die oberhalb der gerichteten Sehne s_y liegen, ersetzt und der untere Endpunkt x_2 , der gerichteten Sehne s_x in C_G , durch die Endpunkte unterhalb der gerichteten Sehne s_y in C_H . Ein Beispiel für diese geometrische Betrachtung der Operation \otimes ist in Abb. 3.1 gegeben.

Lemma 3.1. *Seien G und H zusammenhängende Graphen und $x \in V(G)$, $y \in V(H)$. Zusätzlich seien zwei Sehnendiagramme $C_G = C(x_1\pi_Gx_2\pi'_G)$, $C_H = C(y_1\pi_Hy_2\pi'_H)$ für G und H gegeben, wobei die Sehnen s_x und s_y in C_G bzw. C_H gerichtet sind. Dann gibt es maximal acht unterschiedliche Sehnendiagramme, die aus einer beliebigen Kombination von C_G , C_G^r , C_H und C_H^r entstehen. Die Menge dieser paarweise verschiedenen Darstellungen für $G \times H$ ist $\mathcal{R}(C_G, C_H) :=$*

$$\begin{aligned} \{\pi_1 := \pi(C_G \otimes C_H) &= \pi_G\pi_H\pi'_G\pi'_H, & \pi_1^r := \pi(C_H^r \otimes C_G^r) &= \pi_H^r\pi_G^r\pi'_H\pi'_G, \\ \pi_2 := \pi(C_G^r \otimes C_H) &= \pi_G^r\pi_H\pi'_G\pi'_H, & \pi_2^r := \pi(C_H^r \otimes C_G) &= \pi_H^r\pi_G\pi'_H\pi'_G, \\ \pi_3 := \pi(C_H \otimes C_G) &= \pi_H\pi_G\pi'_H\pi'_G, & \pi_3^r := \pi(C_G^r \otimes C_H^r) &= \pi_G^r\pi_H^r\pi'_G\pi'_H, \\ \pi_4 := \pi(C_H \otimes C_G^r) &= \pi_H\pi_G^r\pi'_H\pi'_G, & \pi_4^r := \pi(C_G \otimes C_H^r) &= \pi_G\pi_H^r\pi'_G\pi'_H\}. \end{aligned}$$

Der Beweis von Lemma 3.1 ergibt sich durch Nachrechnen der Kombinationen der insgesamt vier Sehnendiagramme über \otimes . Im Folgenden wird sich auf die Elemente der Menge $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ je nach Bedarf als zirkuläre Wörter oder Sehnendiagramme bezogen.

Lemma 3.2. *Seien G und H zwei Graphen mit Sehnendiagrammen $C_G = C(x_1\pi_Gx_2\pi'_G)$ und $C_H = C(y_1\pi_Hy_2\pi'_H)$.*

- (i) *Dann gilt $C_G \otimes C(y_2\pi_Hy_1\pi'_H) = C_H \otimes C_G$. Somit ist das Vertauschen der Richtung genau einer der virtuellen Sehnen, die für die Operation \otimes verwendet wird, äquivalent zum Umkehren der Operationsreihenfolge.*
- (ii) *Dann gilt $\mathcal{R}(C_G, C_H) = \mathcal{R}(C_G, C(y_2\pi_Hy_1\pi'_H))$.*

Beweis. Seien G und H Graphen mit Sehnendiagrammen $C_G = x_1\pi_Gx_2\pi'_G$ bzw. $C_H = y_1\pi_Hy_2\pi'_H$. Verknüpft man C_G und das Sehnendiagramm $\vec{C}_H := C(y_2\pi_Hy_1\pi'_H)$, dann ergibt sich $C_G \otimes \vec{C}_H = \pi_G\pi'_H\pi'_G\pi_H = C_H \otimes C_G$. Daher ist das Vertauschen der Richtung einer verknüpfungsrelevanten Sehne äquivalent zum Umkehren der Reihenfolge der Operationsreihenfolgen von \otimes . Somit entstehen in dem Fall, dass C_G, \vec{C}_H und ihre jeweiligen Spiegelungen verknüpft werden, dieselben acht Sehnendiagramme für $G \times H$, wie wenn C_G, C_H und ihre Spiegelungen verknüpft werden, d.h. $\mathcal{R}(C_G, C(y_2\pi_Hy_1\pi'_H)) = \mathcal{R}(C_G, C(y_1\pi_Hy_2\pi'_H))$. Ein

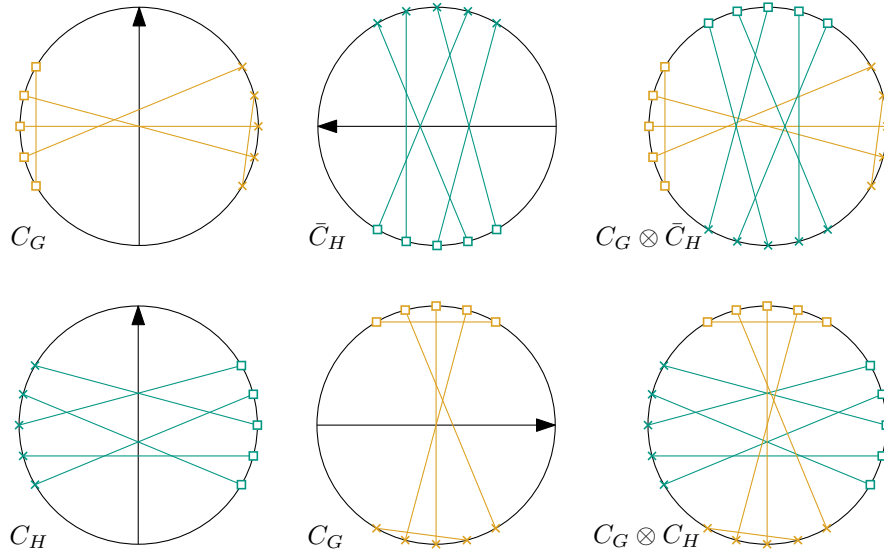


Abbildung 3.2: In Abb. 3.1 wurden die Sehnendiagramme C_G und C_H über \otimes verknüpft. Hier werden die Ergebnisse für das Verknüpfen von C_G und dem Sehnendiagramm C_H mit umgekehrter Sehnenrichtung, benannt mit \bar{C}_H , dargestellt. Darunter ist die Verknüpfung von C_H und C_G zu sehen. Beide erzeugen dasselbe Ergebnis.

anschauliches Beispiel hierfür ist in Abb. 3.2 für die Sehnendiagramme aus Abb. 3.1 geben. \square

Für die Operation \otimes gelten noch einige weitere Eigenschaften.

Bemerkung 3.3. Seien C_1, C_2 und C_3 drei Sehnendiagramme unterschiedlicher Graphen.

(i) Es gilt

$$(C_1 \otimes C_2)^r = C_2^r \otimes C_1^r.$$

Es wird also jedes Sehnendiagramm gespiegelt und die Operationsreihenfolge vertauscht.

(ii) Die Operation \otimes ist assoziativ, d.h.

$$(C_1 \otimes C_2) \otimes C_3 = C_1 \otimes (C_2 \otimes C_3).$$

Beweis. Seien $C_1 = C(x_1\pi_1x_2\pi'_1)$ und $C_2 = C(y_1\pi_2y_2\pi'_2)$, dann gilt

$$\begin{aligned} (C_1 \otimes_{xy} C_2)^r &= (C(\pi_1\pi_2\pi'_1\pi'_2))^r = C(\pi_2^r\pi_1^r\pi_2^r\pi_1^r) \\ C_2^r \otimes_{yx} C_1^r &= C(\pi_2^r y_2 \pi_2^r y_1) \otimes_{yx} C(\pi_1^r x_2 \pi_1^r x_1) = C(\pi_2^r \pi_1^r \pi_2^r \pi_1^r). \end{aligned}$$

Somit ist die Aussage (i) gezeigt, dass $(C_1 \otimes_{xy} C_2)^r = C_2^r \otimes_{yx} C_1^r$ gilt.

Sei nun $C_2 = C(x_1\pi_2y_1\pi'_2x_2\pi''_2y_2\pi'''_2)$ und $C_3 = C(y_1\pi_3y_2\pi'_3)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (C_1 \otimes_x C_2) \otimes_y C_3 &= C(\pi_1\pi_2y_1\pi'_2\pi'_1\pi''_2y_2\pi'''_2) \otimes_y C_3 = C(\pi'_2\pi'_1\pi''_2\pi_3\pi'''_2\pi_1\pi_2\pi'_3) \\ C_1 \otimes_x (C_2 \otimes_y C_3) &= C_1 \otimes_x C(\pi'_2x_2\pi''_2\pi_3\pi'''_2x_1\pi_2\pi'_3) = C(\pi_1\pi_2\pi'_3\pi'_2\pi'_1\pi''_2\pi_3\pi'''_2). \end{aligned}$$

Für $C_2 = C(x_1\pi_2x_2\pi'_2y_1\pi''_2y_2\pi'''_2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (C_1 \otimes_x C_2) \otimes_y C_3 &= C(\pi_1\pi_2\pi'_1\pi'_2y_1\pi''_2y_2\pi'''_2) \otimes_y C_3 = C(\pi''_2\pi_3\pi'''_2\pi_1\pi_2\pi'_1\pi'_2\pi'_3) \\ C_1 \otimes_x (C_2 \otimes_y C_3) &= C_1 \otimes_x C(\pi''_2\pi_3\pi'''_2x_1\pi_2x_2\pi'_2\pi'_3) = C(\pi_1\pi_2\pi'_1\pi'_2\pi'_3\pi''_2\pi_3\pi'''_2). \end{aligned}$$

Daher ist die Operation \otimes assoziativ und es gilt $(C_1 \otimes C_2) \otimes C_3 = C_1 \otimes (C_2 \otimes C_3)$. \square

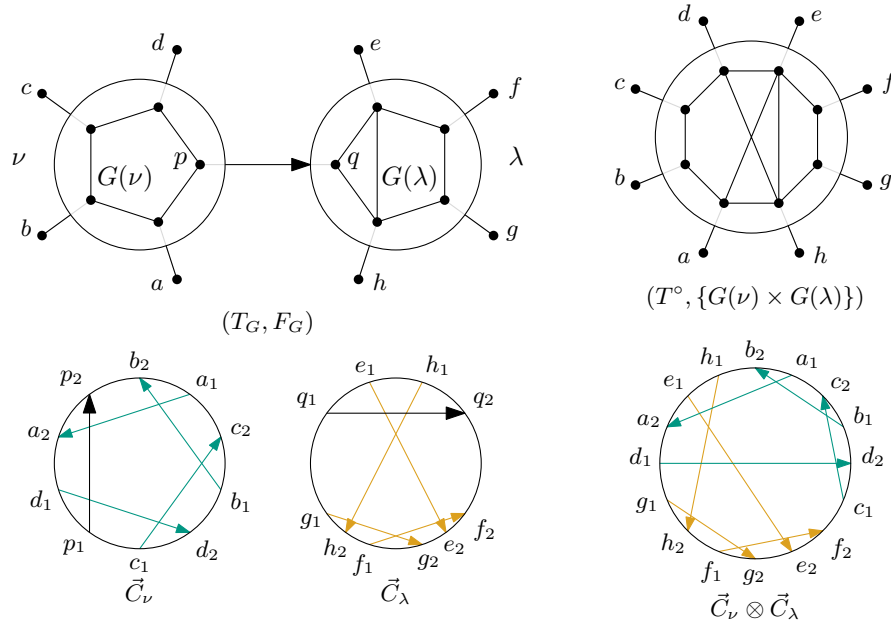


Abbildung 3.3: Links ist ein Splitbaum (T_G, F_G) für den Kreissehnengraphen G und die Konfiguration $(\{\vec{C}_\nu, \vec{C}_\lambda\}, \{\nu\lambda\})$ zu sehen. Rechts ist der durch den Knotenzusammenschluss von ν und λ entstandene GLT $(T^\circ, \{G(\nu) \times G(\lambda)\})$ und das zu ihm assoziierte Sehnendiagramm $\vec{C}_\nu \otimes \vec{C}_\lambda$ dargestellt. Die Reihenfolge, in der die Operation \otimes auf die zwei Sehnendiagramme \vec{C}_ν und \vec{C}_λ angewandt wird, wird durch die Kante $\nu\lambda$ festgelegt.

3.1.1 Kombination über gerichtete Splitbaumkanten

Nachdem klar ist, wie zwei Sehnendiagramme zusammengesetzt werden können, soll diese Operation auf die Kantenzusammenschlüsse einer inneren Kante in einem Splitbaum und die zugehörigen Beschriftungsgraphen mit gewählten Sehnendiagrammen übertragen werden. Um die Operationsreihenfolge festzulegen, wird der entsprechenden Kante eine Richtung zugewiesen. Schlussendlich soll für jeden Beschriftungsgraphen ein Sehnendiagramm fest gewählt werden und damit auf ein Sehnendiagramm für den Erreichbarkeitsgraphen des Splitbaums geschlossen werden. Hierbei werden Sehnendiagramme mit gerichteten Sehnen verwendet. Wie genau diese Richtungen konstruiert werden können, wird in Abschnitt 3.3 erläutert.

Sei G ein Kreissehnengraph mit Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$, einer gerichteten Kante $e = \nu\lambda \in E(T_G)$ mit Extremitäten $x \in V(\nu)$ und $y \in V(\lambda)$, sowie zwei fest gewählten Sehnendiagrammen C_ν und C_λ für die zwei Beschriftungsgraphen der Knoten ν und λ . Zusätzlich seien die zwei Sehnen $s_x \in C_\nu$ und $s_y \in C_\lambda$ gerichtet. Wird der Knotenzusammenschluss der Knoten ν und λ zu einem neuen Knoten τ ausgeführt, definiert die Richtung der Kante e , dass der neue Knoten τ mit dem Graph $G(\tau) = G(\nu) \times_{xy} G(\lambda)$ beschriftet und mit dem Sehnendiagramm $C_\tau := C_\nu \otimes_{pq} C_\lambda$ assoziiert wird. Die Richtung von e gibt also vor, in welcher Reihenfolge die beiden Sehnendiagramme über die Operation \otimes verknüpft werden. Ein Beispiel für das Vorgehen ist in Abb. 3.3 zu sehen.

Sei zusätzlich eine Abbildung K gegeben, die jedem inneren Knoten $\nu \in I(T_G)$ ein Sehnendiagramm aus $\mathcal{D}(G(\nu))$ zuordnet, welches zusätzlich fest gerichtete Sehnen hat. Für ein Sehnendiagramm $C \in \mathcal{D}(G(\nu))$ wird das fest gerichtete Sehnendiagramm mit \vec{C} notiert. Dann ist K eine Abbildung mit $K: I(T_G) \rightarrow \bigcup_{\nu \in V(T_G)} \vec{C}(G(\nu))$. Außerdem sei jede innere Kante $e \in E(T_G)$ gerichtet und \vec{E} die Menge dieser gerichteten inneren Baumkanten. Das Tupel (K, \vec{E}) wird *Konfiguration* des Splitbaums $ST(G)$ genannt. Das zu einem Beschrif-

tungsgraphen $G(\nu)$ gehörige gerichtete Sehnendiagramm $K(\nu)$ wird auch zu $G(\nu)$ assoziiert genannt. In Abb. 3.3 links ist ein Splitbaum bestehend aus zwei inneren Knoten ν und λ und einer Konfiguration $(C, \{\nu\lambda\})$ zu sehen mit $C(\tau) := \vec{C}_\tau$ für $\tau \in \{\nu, \lambda\}$.

Nach Satz 2.20 sind alle Beschriftungsgraphen eines Splitbaums prim oder degeneriert und mit den Beobachtungen für diese Art von Graphen aus Abschnitt 3.1 ist die Menge der Darstellungen \mathcal{D} weder für einen primen noch einen degenerierten Graphen leer. Somit kann für jeden Beschriftungsgraphen mindestens ein Sehnendiagramm gewählt werden, um eine Konfiguration für $ST(G)$ zu bilden und damit existiert für jeden Graphen G und seinen Splitbaum mindestens eine Konfiguration.

Sei G ein Kreissehnengraph mit einer Konfiguration (C, \vec{E}) für den Splitbaum $ST(G) = (T, G)$. Führt man auf $ST(G)$ in einer beliebigen Reihenfolge alle möglichen Knotenzusammenschlüsse durch, erhält man den GLT (T°, F°) mit genau einem inneren Knoten. Beachte hierbei, dass das Durchführen von \otimes nach Bemerkung 3.3 (ii) assoziativ ist, d.h. dieser hat wie der Splitbaum $ST(G)$ den Graphen G als Erreichbarkeitsgraphen, da laut Bemerkung 2.11 die Operation des Knotenzusammenschlusses den Erreichbarkeitsgraphen nicht verändert. Somit muss der einzige innere Knoten des GLT (T°, F°) mit dem Graphen G beschriftet sein. Für jeden dabei durchgeführten Knotenzusammenschluss werden parallel die Sehnendiagramme der Beschriftungsgraphen definiert durch die Abbildung C kombiniert über die Operation \otimes . Die Operationsreihenfolge ist hierbei definiert über die Richtung der jeweiligen Kante aus \vec{E} . Das neu entstandene Sehnendiagramm wird mit dem neu entstandenen Knoten assoziiert. Rekursiv ergibt sich somit ein Sehnendiagramm für den einzigen inneren Knoten von T° , welches somit ein Sehnendiagramm für den Graphen G ist.

Bemerkung 3.4. *Sei G ein Kreissehnengraph und $ST(G)$ sein Splitbaum mit einer Konfiguration (C, \vec{E}) . Dann definiert diese Konfiguration genau ein Sehnendiagramm C_G für den Graphen G .*

Das nach Bemerkung 3.4 eindeutige Sehnendiagramm, welches sich einer Konfiguration (K, \vec{E}) eines Splitbaums für den Erreichbarkeitsgraphen zuordnen lässt, wird auch mit $C(K, \vec{E})$ notiert.

3.1.2 Voneinander verschiedene Konfigurationen

Nachdem von einem Splitbaum mit einer Konfiguration auf ein eindeutiges Sehnendiagramm geschlossen werden kann, soll die Frage untersucht werden, ob zwei unterschiedliche Konfigurationen eines Splitbaums auch auf unterschiedliche Sehnendiagramme abgebildet werden. Hierzu muss betrachtet werden, welche tatsächlich unterschiedlichen Möglichkeiten bei der Kombination von zwei Sehnendiagrammen entstehen. In Lemma 3.1 wurde gezeigt, dass es bis zu acht verschiedene Ergebnisse bei Verknüpfung zweier Sehnendiagramme und ihrer jeweiligen Spiegelung geben kann. Es ergeben sich nur acht verschiedene Sehnendiagramme, wie Lemma 3.5 zeigt, wenn die beiden kombinierten Sehnendiagramme keinen degenerierten Graphen repräsentieren. Darauffolgend wird untersucht, welche der acht Möglichkeiten bei der Kombination mit mindestens einem degenerierten Sehnendiagramm zusammenfallen.

Lemma 3.5. *Seien G und H nicht degenerierte zusammenhängende Graphen und $C_G = C(x_1\pi_G x_2\pi'_G)$, $C_H = C(y_1\pi_H y_2\pi'_H)$ die bis auf Spiegelung eindeutigen Sehnendiagramme, die sie darstellen. Dann enthält die Menge $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ aus Lemma 3.1 genau acht paarweise verschiedene Wörter.*

Beweis. Seien G und H zusammenhängende und nicht degenerierte Graphen mit $C_G = C(x_1\pi_G x_2\pi'_G)$ bzw. $C_H = C(y_1\pi_H y_2\pi'_H)$. Nehme an es gibt keine acht unterschiedlichen

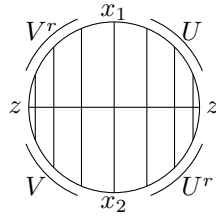


Abbildung 3.4: Beweisskizze zu Fall (iii) in Lemma 3.5.

zirkulären Wörter in $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ (vgl. dazu Lemma 3.1) für $\{C_G, C_G^r\} \otimes \{C_H, C_H^r\}$, dann müssen mindestens zwei der zirkulären Wörter aus $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ gleich sein. Vergleicht man alle möglichen Wortpaare (π_i, π_j) mit $\pi_i, \pi_j \in \mathcal{R}(C_G, C_H)$ ergeben sich drei Fälle für π_G und π'_G , die analog auch für π_H und π'_H gelten müssen, wenn ein Wortpaar gleich ist.

$$(i) \quad \pi'_G \stackrel{!}{=} \pi_G \quad (ii) \quad \pi_G \stackrel{!}{=} \pi'_G \quad (iii) \quad \pi_G \stackrel{!}{=} \pi_G^r \text{ und } \pi'_G \stackrel{!}{=} (\pi'_G)^r$$

Gilt einer der drei Fälle (i), (ii) oder (iii), dann sind mindestens zwei Wörter aus $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ gleich und es gibt nicht acht verschiedene Ergebnisse bei der Kombination von C_G, C_H und deren Spiegelungen über die Operation \otimes .

Sei $A := \pi_G$. Betrachtet man Fall (i), dann folgt $C_G = C(x_1 A x_2 A^r)$, was genau die Darstellung eines Sterns ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass G nicht degeneriert ist. In Fall (ii) ist das Sehnendiagramm $C_G = C(x_1 A x_2 A)$ eine Clique mit einer gerichteten Sehne. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass G nicht degeneriert ist. In Fall (iii) müssen π_G und π'_G gespiegelt wieder sich selbst ergeben, daher müssen sie die Form $\pi_G = U z U^r$ und $\pi'_G = V z' V^r$ haben mit U, V Permutationen der Endpunkte der Sehnen, wobei $U \cap V = \emptyset$ gilt. Für C_G folgt, $C_G = x_1 (U z U^r) x_2 (V z' V^r)$, also gilt $z = z'$ und somit ist G ein Stern (siehe auch Abb. 3.4). Dies ist jedoch ein Widerspruch dazu, dass G nicht degeneriert ist. Daher unterscheiden sich alle acht Kombinationsergebnisse der Sehnendiagramme von $\{C_G, C_G^r\} \otimes \{C_H, C_H^r\}$ in $\mathcal{R}(C_G, C_H)$, wenn G und H nicht degenerierte Graphen sind. \square

Aus dem Beweis von Lemma 3.5 folgt, dass im Hinblick auf die Kombination zweier Sehnendiagramme nur dann weniger als acht unterschiedliche Ergebnisse entstehen können, wenn eines oder beide der Sehnendiagramme eine Clique oder einen Stern repräsentieren. Betrachtet man zwei Graphen G und H mit gegebenen Sehnendiagrammen $C_G = C(x_1 \pi_G x_2 \pi'_G)$ und $C_H = C(y_1 \pi_H y_2 \pi'_H)$, sowie ihre Spiegelungen C_G^r und C_H^r , die über \otimes verknüpft wurden, dann ergibt sich nach Lemma 3.1 die Menge $\mathcal{R}(C_G, C_H) =$

$$\begin{aligned} \{\pi_1 := \pi(C_G \otimes C_H) &= \pi_G \pi_H \pi'_G \pi'_H, & \pi_1^r &:= \pi(C_H^r \otimes C_G^r) = \pi_H^r \pi_G^r \pi_H^r \pi_G^r, \\ \pi_2 &:= \pi(C_G^r \otimes C_H) = \pi_G^r \pi_H \pi_G^r \pi'_H, & \pi_2^r &:= \pi(C_H^r \otimes C_G) = \pi_H^r \pi_G \pi_H^r \pi'_G, \\ \pi_3 &:= \pi(C_H \otimes C_G) = \pi_H \pi_G \pi'_H \pi'_G, & \pi_3^r &:= \pi(C_G^r \otimes C_H^r) = \pi_G^r \pi_H^r \pi_G^r \pi_H^r, \\ \pi_4 &:= \pi(C_H \otimes C_G^r) = \pi_H \pi_G^r \pi'_H \pi'_G, & \pi_4^r &:= \pi(C_G \otimes C_H^r) = \pi_G \pi_H^r \pi'_G \pi'_H \}. \end{aligned}$$

für alle möglichen verschiedenen Ergebnisse. Sind zwei Wörter aus $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ gleich, die durch unterschiedliche Verknüpfungen entstanden sind, dann muss dies auch für ihre Spiegelung gelten, d.h. gilt beispielsweise $\pi_1 = \pi_3 \Leftrightarrow C_G \otimes C_H = C_H \otimes C_G$, dann gilt

$$\pi_1^r = \pi(C_H^r \otimes C_G^r) = \pi((C_G \otimes C_H)^r) = \pi((C_H \otimes C_G)^r) = \pi(C_G^r \otimes C_H^r) = \pi_3^r.$$

Als Vorbereitung um später einen Splitbaum, in ihm benachbarte innere Knoten und deren Beschriftungsgraphen zu untersuchen, wird im Folgenden betrachtet, welche Wörter aus $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ gleich sind, wenn G oder H degenerierte Graphen sind.

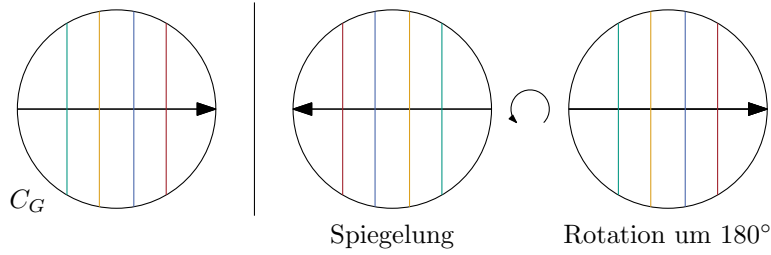


Abbildung 3.5: Das Sehnendiagramm C_G für den Stern S_4 , links dargestellt, wurde gespiegelt. Die Spiegelung ist jedoch nichts anderes, als eine Rotation um 180 Grad.

Sei der Graph G ein Stern, wobei s_x die Sehne des Zentrums ist. Dann gilt $\pi_G^r = \pi_G$ und damit

$$C_G = C(x_1\pi_G x_2\pi_G') = C(x_1\pi_G^r x_2\pi_G^r) = C_G^r.$$

Ein Stern ist also seine eigene Spiegelung wie in Abschnitt 3.1 aufgezeigt. Dazu ist ein Beispiel in Abb. 3.5 gegeben. Für das Verknüpfen mit den weiteren Seheindiagrammen C_H und C_H^r erhält man

$$\begin{aligned} C_G \otimes C_H &= C_G^r \otimes C_H & C_H \otimes C_G &= C_H \otimes C_G^r \\ C_H^r \otimes C_G^r &= C_H^r \otimes C_G & C_G^r \otimes C_H^r &= C_G \otimes C_H^r. \end{aligned}$$

Für die Wörter aus $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ bedeutet dies $\pi_1 = \pi_2$, $\pi_3 = \pi_4$, $\pi_1^r = \pi_2^r$ und $\pi_3^r = \pi_4^r$. Wieder übertragen auf den Fall, dass H ein Stern ist und s_y die Sehne des Zentrums, gilt $\pi_3 = \pi_2^r$, $\pi_1 = \pi_4^r$, $\pi_3^r = \pi_2$ und $\pi_1^r = \pi_4$ für die Wörter von $\mathcal{R}(C_G, C_H)$.

Sei G ein Stern und die Sehne s_x korrespondiere zu einem Blatt, dann gilt $\pi_G = \pi_G^r$ und $\pi_G' = \pi_G^r$. Mit Lemma 3.2 gilt für ein beliebiges weiteres Sehnendiagramm C' :

$$C' \otimes C(x_2\pi_G x_1\pi_G') = C_G \otimes C'.$$

Da C_G einen Stern repräsentiert gilt insbesondere $C_G = C_G^r$, wobei $C_G^r = C(\pi_G^r x_2 \pi_G^r x_1) = C(x_2 \pi_G^r x_1 \pi_G^r)$. Insgesamt ergibt sich also

$$C' \otimes C_G = C' \otimes C(x_2\pi_G x_2\pi_G') = C' \otimes C(x_2\pi_G^r x_1\pi_G^r) = C' \otimes C_G^r = C_G \otimes C'$$

und damit $C_G^r \otimes C'^r = C'^r \otimes C_G^r$. Somit ist beim Verknüpfen über \otimes mit C_G oder C_G^r die Operation kommutativ. Es gilt jedoch weiterhin $C_G \neq C_G^r$. Daher gilt

$$\begin{aligned} C_G \otimes C_H &= C_H \otimes C_G^r & C_G^r \otimes C_H &= C_H \otimes C_G \\ C_H^r \otimes C_G^r &= C_G \otimes C_H^r & C_H^r \otimes C_G &= C_G^r \otimes C_H^r. \end{aligned}$$

Für die Wörter aus $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ ergibt sich $\pi_1 = \pi_4$, $\pi_2 = \pi_3$, $\pi_1^r = \pi_4^r$ und $\pi_2^r = \pi_3^r$. Übertragen auf den Fall, dass H ein Stern ist und die Sehne s_y ebenfalls zu einem Blatt korrespondiert, ergibt sich somit $\pi_3 = \pi_4^r$, $\pi_2^r = \pi_1$, $\pi_3^r = \pi_4$ und $\pi_2 = \pi_1^r$ für die Wörter aus $\mathcal{R}(C_G, C_H)$.

Sei der Graph G eine Clique, dann gilt $\pi_G = \pi_G'$. Damit ist es egal, in welcher Reihenfolge das Sehnendiagramm C_G beziehungsweise C_G^r mit einem weiteren Sehnendiagramm verknüpft wird, da immer dasselbe Ergebnis entsteht. Ein Beispiel ist in Abb. 3.6 gegeben. Es gilt also

$$\begin{aligned} C_G \otimes C_H &= C_H \otimes C_G & C_G^r \otimes C_H &= C_H \otimes C_G^r \\ C_H^r \otimes C_G^r &= C_G^r \otimes C_H^r & C_H^r \otimes C_G &= C_G \otimes C_H^r. \end{aligned}$$

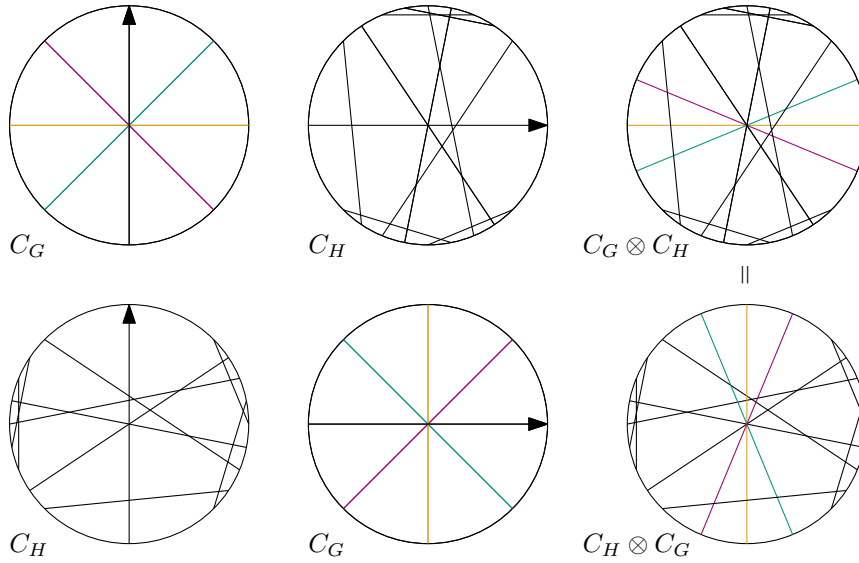


Abbildung 3.6: Das Sehnendiagramm C_G stellt eine Clique dar und C_H ein weiteres Sehnendiagramm, welches keine Clique ist. Rechts sind jeweils die Sehnendiagramme die sich aus $C_G \otimes C_H$ und $C_H \otimes C_G$ ergeben dargestellt. Es gilt $C_G \otimes C_H = C_H \otimes C_G$.

Da außerdem gilt $C_G \neq C_G^r$ ergibt sich demnach übertragen auf die Wörter aus $\mathcal{R}(C_G, C_H)$: $\pi_1 = \pi_3$, $\pi_2 = \pi_4$, $\pi_1^r = \pi_3^r$, $\pi_2^r = \pi_4^r$. Ist H eine Clique, gilt ebenfalls $\pi_1 = \pi_3$, $\pi_2 = \pi_4$, $\pi_1^r = \pi_3^r$, $\pi_2^r = \pi_4^r$ für die Wörter aus $\mathcal{R}(C_G, C_H)$.

Betrachtet man wieder einen Splitbaum, dann können innere Knoten auch mit Cliquen und Sternen beschriftet sein. Insbesondere ist ein Splitbaum ein reduzierter GLT. Daher dürfen zwei benachbarte innere Knoten weder mit zwei Cliquen beschriftet sein noch mit zwei Sternen, für die die Extremitäten im einen ein Blatt und im anderen das Zentrum sind. Im Folgenden werden die sieben möglichen Fälle i.-vii. betrachtet, die für einen Kantenzusammenschluss in einem Splitbaum auftreten können, bei denen einer der Beschriftungsgraphen degeneriert ist, und das daraus resultierende Sehnendiagramm. Siehe hierzu auch Abb. 3.7 in der alle möglichen in einem Splitbaum auftretenden Fälle für Beschriftungsgraphen benachbarter innere Knoten dargestellt sind.

Seien G und H Kreissehnengraphen mit mindestens drei Knoten und gegebenen Sehnendiagrammen C_G und C_H . In den nachfolgenden Fällen wird der Zusammenschluss von G und H über $x \in V(G)$ und $y \in V(H)$, sowie die möglichen zueinander verschiedenen Ergebnisse für das Sehnendiagramm der zirkulären Wörter aus $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ betrachtet. Die Ergebnisse stützen sich insbesondere auf die Vorbetrachtungen.

- i. G und H sind Sterne und x, y seien jeweils ein Blatt.

Dann gilt $\pi_1 = \pi_4$, $\pi_2 = \pi_3$, $\pi_1^r = \pi_4^r$ und $\pi_2^r = \pi_3^r$, mit den Eigenschaften von G und $\pi_3 = \pi_4^r$, $\pi_2^r = \pi_1$, $\pi_3^r = \pi_4$ und $\pi_2 = \pi_1^r$, mit den Eigenschaften von H . Insgesamt ergibt sich daraus $\pi_4 = \pi_1 = \pi_2^r = \pi_3^r$ und $\pi_4^r = \pi_1^r = \pi_2 = \pi_3$. Ausgedrückt in Kombinationen der Sehnendiagramme C_G und C_H gilt also

$$\begin{aligned} C_H \otimes C_G^r &= C_G \otimes C_H = C_H^r \otimes C_G = C_G^r \otimes C_H^r \\ C_G \otimes C_H^r &= C_H^r \otimes C_G^r = C_G^r \otimes C_H = C_H \otimes C_G. \end{aligned}$$

Da $C_G \neq C_G^r$ und $C_H \neq C_H^r$ gilt, enthält $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ genau zwei verschiedene Wörter.

- ii. G und H sind Sterne und x, y sind jeweils das Zentrum.

Durch die Eigenschaften von G gilt wieder $\pi_1 = \pi_2$, $\pi_3 = \pi_4$, $\pi_1^r = \pi_2^r$, sowie

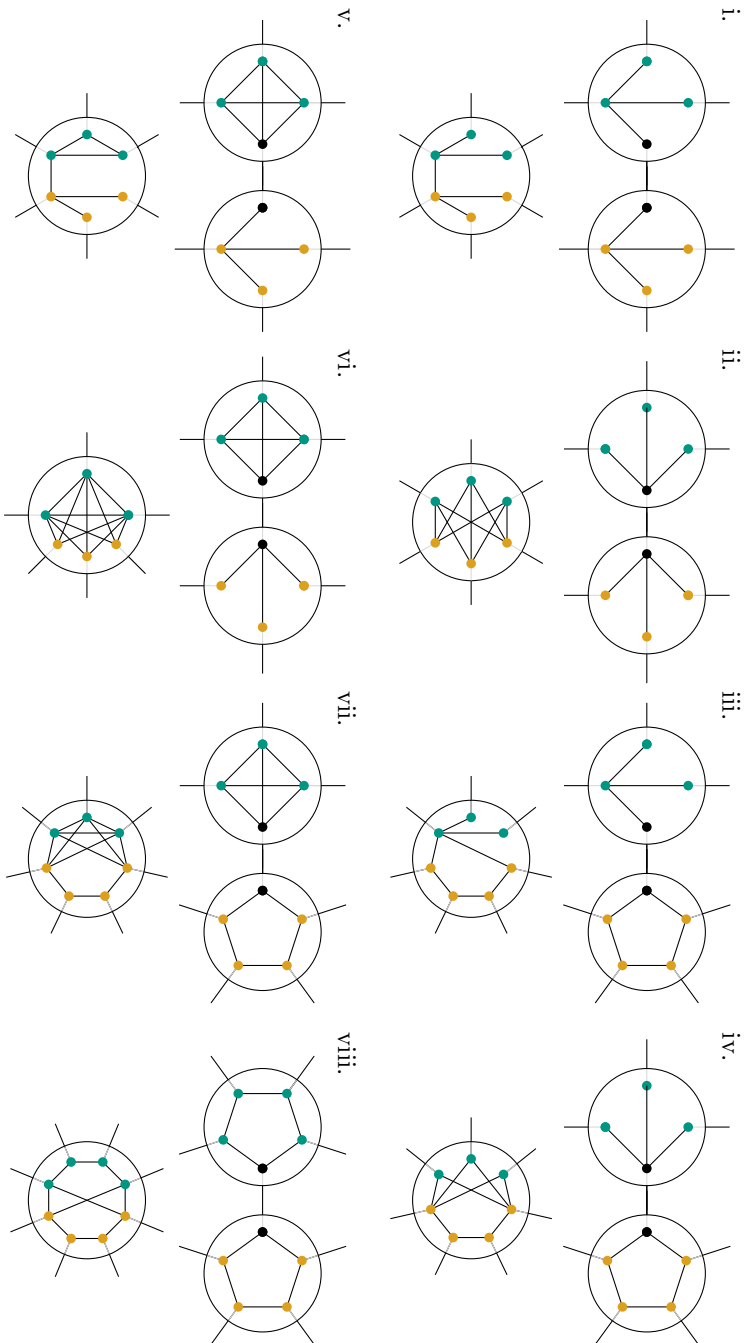


Abbildung 3.7: Es sind alle in einem Splitbaum möglichen Paarungen zweier benachbarter innerer Knoten und deren Beschriftungsgraphen dargestellt. i. zwei Sterne verknüpft über jeweils ein Blatt, ii. zwei Sterne verknüpft über jeweils ihr Zentrum, iii. ein Stern verknüpft über ein Blatt zu einem primen Graphen, iv. ein Stern verknüpft über sein Zentrum zu einem primen Graphen, v. eine Clique verknüpft zu einem Stern über ein Blatt, vi. eine Clique verknüpft zu einem Stern über sein Zentrum, vii. eine Clique verknüpft mit einem primen Graphen, viii. zwei prime Graphen

$\pi_3^r = \pi_4^r$ und $\pi_3 = \pi_2^r$, $\pi_1 = \pi_4^r$, $\pi_3^r = \pi_2$ und $\pi_1^r = \pi_4$ aus den Eigenschaften von H . Daraus ergibt sich $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3^r = \pi_4^r$, $\pi_1^r = \pi_2^r = \pi_3 = \pi_4$ und formuliert für die Kombinationen der Sehnendiagramme

$$\begin{aligned} C_G \otimes C_H &= C_G^r \otimes C_H = C_G^r \otimes C_H^r = C_G \otimes C_H^r \\ C_H^r \otimes C_G^r &= C_H^r \otimes C_G = C_H \otimes C_G = C_H \otimes C_G^r. \end{aligned}$$

Angenommen es gilt $C_G \otimes C_H = C_H \otimes C_G$ mit $C_G = C(x_1 A x_2 A^r)$ und $C_H = C(y_1 B y_2 B^r)$ wobei A und B Permutationen der Sehneneendpunkte der Blätter des Sterns G bzw. H sind. Dann folgt $BAB^r A^r = ABA^r B^r$ und daraus $A = A^r$ oder $B = B^r$. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da A und B nach Voraussetzung mindestens zwei Sehneneendpunkte enthalten müssen. Somit enthält $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ wieder nur zwei verschiedene Wörter.

iii. G ist ein Stern, x ist ein Blatt und H ist nicht degeneriert.

Aus den Eigenschaften von G sind die Wörter $\pi_1 = \pi_4$, $\pi_2 = \pi_3$, $\pi_1^r = \pi_4^r$ und $\pi_2^r = \pi_3^r$ gleich. Da H nicht degeneriert ist, gibt es dadurch keine weiteren Einschränkungen, dass Kombinationen der Sehnendiagramme C_G, C_G^r und C_H, C_H^r zusammenfallen. Daher gilt

$$\begin{aligned} C_G \otimes C_H &= C_H \otimes C_G^r & C_G^r \otimes C_H &= C_H \otimes C_G \\ C_G \otimes C_H^r &= C_H^r \otimes C_G^r & C_G^r \otimes C_H^r &= C_H^r \otimes C_G \end{aligned}$$

und es gibt vier verschiedene Ergebnisse in $\mathcal{R}(C_G, C_H)$, da gilt $C_H \neq C_H^r$.

iv. G ist ein Stern, x ist das Zentrum und H ist nicht degeneriert.

Mit einer analogen Argumentation zu Fall iii. gilt

$$\begin{aligned} C_G \otimes C_H &= C_G^r \otimes C_H & C_H \otimes C_G &= C_H \otimes C_G^r \\ C_H^r \otimes C_G^r &= C_H^r \otimes C_G & C_G^r \otimes C_H^r &= C_G \otimes C_H^r \end{aligned}$$

und $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ enthält wieder vier verschiedene Ergebnisse.

v. G ist eine Clique, H ein Stern und y ein Blatt von H .

Aus den Eigenschaften für G und H ergibt sich $\pi_1 = \pi_3$, $\pi_2 = \pi_4$, $\pi_1^r = \pi_3^r$, $\pi_2^r = \pi_4^r$, $\pi_3 = \pi_4^r$, $\pi_2^r = \pi_1$, $\pi_3^r = \pi_4$ und $\pi_2 = \pi_1^r$. Insgesamt folgt daraus $\pi_1 = \pi_3 = \pi_4^r = \pi_2^r$ und $\pi_1^r = \pi_3^r = \pi_4 = \pi_2$. Formuliert für die Kombination der Sehnendiagramme gilt

$$\begin{aligned} C_G \otimes C_H &= C_H \otimes C_G = C_G \otimes C_H^r = C_H^r \otimes C_G \\ C_H^r \otimes C_G &= C_G^r \otimes C_H^r = C_H \otimes C_G^r = C_G^r \otimes C_H. \end{aligned}$$

Da H ein Stern ist gilt $C_H \neq C_H^r$ und daher enthält $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ genau zwei verschiedene Wörter.

vi. G ist eine Clique, H ein Stern und y das Zentrum von H .

Aus den beiden Eigenschaften von G und H ergibt sich $\pi_1 = \pi_3 = \pi_2^r = \pi_4^r$ und $\pi_1^r = \pi_3^r = \pi_2 = \pi_4$ für die Wörter aus $\mathcal{R}(C_G, C_H)$. Übertragen auf die Ergebnisse der Kombination der Sehnendiagramme ergibt sich

$$\begin{aligned} C_G \otimes C_H &= C_H \otimes C_G = C_H^r \otimes C_G = C_G \otimes C_H^r \\ C_H^r \otimes C_G^r &= C_G^r \otimes C_H^r = C_G^r \otimes C_H = C_H \otimes C_G^r. \end{aligned}$$

Analog zu Fall v. enthält $\mathcal{R}(C_G, C_H)$ genau zwei verschiedene Wörter.

vii. G ist eine Clique und H ist nicht degeneriert.

Analog zur Argumentation aus Fall iii. ergeben sich vier verschiedene Ergebnisse,

$$\begin{aligned} C_G \otimes C_H &= C_H \otimes C_G & C_G^r \otimes C_H &= C_H \otimes C_G^r \\ C_H^r \otimes C_G &= C_G^r \otimes C_H & C_H^r \otimes C_G &= C_G \otimes C_H^r. \end{aligned}$$

Somit gibt es vier Wörter in der Menge $\mathcal{R}(C_G, C_H)$.

Nach der Betrachtung aller möglichen Fälle, welche zwei Sehndiagramme durch einen Kantenzusammenschluss in einem Splitbaum kombiniert werden können und welche verschiedenen Ergebnisse dabei entstehen können, wird definiert, wann zwei Konfigurationen als verschieden betrachtet werden.

Seien \vec{C} und \vec{C}' gerichtete Sehndiagramme. Beide werden als *gleich* aufgefasst genau dann, wenn sie ungerichtet durch dasselbe zirkuläre Wort dargestellt werden, d.h. $\pi(C) = \pi(C')$. Beispielsweise sind $\vec{C} = C(e_2a_1e_1c_2d_1b_1a_2c_1b_2d_2)$ und $\vec{C}' = C(e_1a_1e_2c_1d_1b_1a_2c_2b_2d_2)$ gleich, da $\pi(C) = eaecdbacbd = \pi(C')$. Ist dies nicht der Fall, sind die beiden Sehndiagramme *verschieden* voneinander.

Sei G ein Graph mit Splitbaum $ST(G) = (T, F)$. Zusätzlich seien zwei Konfigurationen (K_1, \vec{E}_1) und (K_2, \vec{E}_2) gegeben. Die beiden Konfigurationen werden genau dann als *verschieden* voneinander bezeichnet, wenn mindestens ein Kantenzusammenschluss einer inneren Kante von T existiert, sodass die beiden Sehndiagramme, definiert über beide Konfigurationen, nicht gleich sind. Beachte, dass zum Vergleichen einer inneren Baumkante die jeweils gewählten Sehndiagramme der Beschriftungsgraphen der inzidenten inneren Knoten und die Richtung der inneren Baumkante herangezogen werden müssen. In Fall i. bis vii. wurde diskutiert, wann zwei Kombinationen von Sehndiagrammen über \otimes verschieden voneinander sind. Ein Beispiel für zwei verschiedene Konfigurationen ist in Abb. 3.8 gegeben. Zwei Konfigurationen, die nicht verschieden sind, werden als *äquivalent* betrachtet.

Lemma 3.6. *Sei G ein Graph und (K_1, \vec{E}_1) und (K_2, \vec{E}_2) zwei verschiedene Konfigurationen für den Splitbaum von G . Dann definieren die zwei Konfigurationen verschiedene Sehndiagramme für G , d.h. $C(K_1, \vec{E}_1) \neq C(K_2, \vec{E}_2)$.*

Beweis. Sei G ein Graph mit Splitbaum $ST(G) = (T, F)$, sowie (K_1, \vec{E}_1) und (K_2, \vec{E}_2) zwei verschiedene Konfigurationen für den Splitbaum von G . Führt man für eine Kante e aus T inzident zu ν und λ die zwei Kantenzusammenschlüsse definiert über die Richtung von e in \vec{E}_1 und \vec{E}_2 aus, dann entstehen zwei verschiedene Sehndiagramme C bzw. C' für den Graphen $G(\nu) \times G(\lambda)$, d.h. $\pi(C) \neq \pi(C')$. Da ein Splitbaum reduziert ist, kann aus keinem der möglichen Kantenzusammenschlüsse als Beschriftungsgraph eine Clique oder ein Stern entstehen. Führt man parallel in einer beliebigen festen Reihenfolge alle Kantenzusammenschlüsse auf T aus, definiert über (K_1, \vec{E}_1) bzw. (K_2, \vec{E}_2) , dann ist keines der Zwischenergebnisse gleich, da keiner der Fälle i.-vii. auftreten kann. Somit ergeben sich aus allen hintereinander ausgeführten Kantenzusammenschlüssen einmal definiert über (K_1, \vec{E}_1) und dann über (K_2, \vec{E}_2) nach Bemerkung 3.4 zwei verschiedene Sehndiagramme für G . \square

3.2 Sehndiagrammen auf Konfigurationen abbilden

Bis jetzt kann von einer Konfiguration eines Splitbaums auf ein Sehndiagramm des Erreichbarkeitsgraphen geschlossen werden. Andersherum betrachtet stellt sich die Frage, ob es möglich ist von einem Sehndiagramm eines Graphen G auf die Sehndiagramme der Beschriftungsgraphen des Splitbaums $ST(G)$ und deren Zusammensetzung über \otimes zu schließen. Courcelle [Cou07] beschäftigte sich schon 2007 mit dieser Fragestellung und darauffolgend auch Gioan et al. [GPTC13]. Zentral war dabei folgender Satz 3.7.

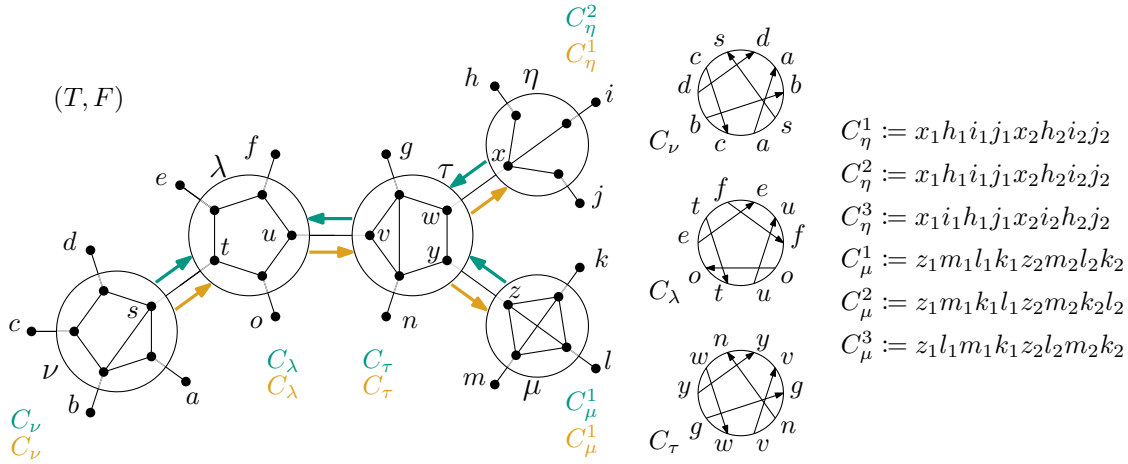


Abbildung 3.8: Links ist der Splitbaum (T, F) gegeben und rechts ein gerichtetes Sehnendiagramm für jeden Beschriftungsgraphen. Seien zusätzlich die Konfigurationen $(C_1, \vec{E}_1) := (\{C_\nu, C_\lambda, C_\tau, C_\eta^1, C_\mu^1\}, \{\nu\lambda, \lambda\tau, \tau\eta, \tau\mu\})$ und $(C_2, \vec{E}_2) := (\{C_\nu, C_\lambda, C_\tau, C_\eta^2, C_\mu^1\}, \{\nu\lambda, \tau\lambda, \eta\tau, \mu\tau\})$ definiert, die gegebenen Richtungen der inneren Baumkanten und Sehnendiagramme sind jeweils farblich markiert. Die beiden Konfigurationen (C_1, \vec{E}_1) und (C_2, \vec{E}_2) sind verschieden. Führt man die Kantenzusammenschlüsse für die Kanten $\lambda\tau$ oder $\tau\eta$ durch, ergeben sich über die definierten Sehnendiagramme und deren Zusammenschlüsse zueinander verschiedene Sehnendiagramme.

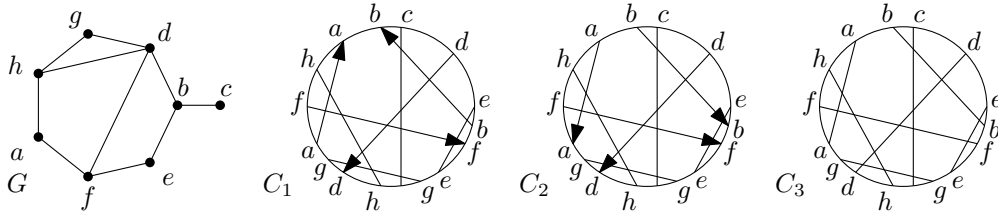


Abbildung 3.9: Alle dargestellten Sehnendiagramme für den Graphen G sind äquivalent, da sie sich nur durch die Richtungen ihrer Sehnen unterscheiden.

Satz 3.7. [Cou07, Prop. 9][GPTC13, Prop. 3.4]

Sei G ein zusammenhängender Kreissehnengraph mit fest gegebenem Sehnendiagramm $C_G = C(\pi)$ und Splitbaum $ST(G) = (T, F)$. Sei e eine innere Kante von T mit Extremitäten p und q . Dann kann das zirkuläre Wort π in vier konsekutive Teilfolgen $\pi_A \pi_B \pi'_A \pi'_B = \pi$ zerlegt werden, wobei π_A und π'_A alle Sehnenendpunkte der Sehnen korrespondierend zu Blättern aus $L(p)$ enthalten und analog π_B und π'_B die Sehnenendpunkte der Sehnen der Knoten aus $L(q)$.

Mit dem Ergebnis von Courcelle und Gioan et al. wird nun zuerst auf die einzelnen Sehnendiagramme der Beschriftungsgraphen des Splitbaums und dann auf deren Zusammensetzung geschlossen. Diese Schlussfolgerung wird unter dem Aspekt gezogen, dass daraus genau das vorgegebene Sehnendiagramm des Erreichbarkeitsgraphen entstehen soll.

Ein Sehnendiagramm für einen Graphen G , welches sich zu einem anderen Sehnendiagramm für G nur durch die Richtungen der Sehnen unterscheidet, wird im Folgenden als äquivalent angesehen. Die Sehnendiagramme in Abb. 3.9 sind alle äquivalent zueinander.

Lemma 3.8. Sei $G = (V, E)$ ein Kreissehnengraph mit Splitbaum $ST(G) = (T, F)$ und für jeden Beschriftungsgraphen $H \in F$ seien die Sehnen für jedes Sehnendiagramm aus der Menge seiner Darstellungen $\mathcal{D}(H)$ fest gerichtet. Sei C_G ein ebenfalls fest gewähltes

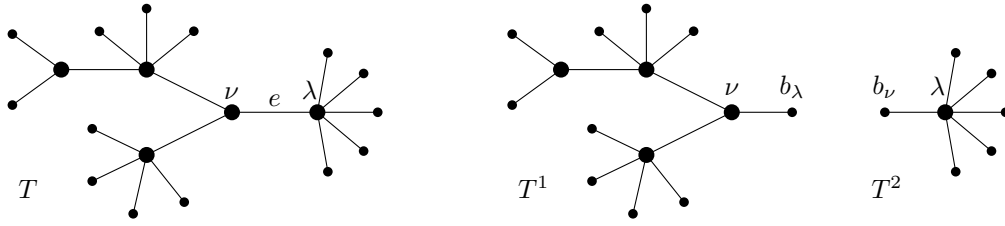


Abbildung 3.10: Beweissskizze zur Teilung des Splitbaums T an der Kante $e = \nu\lambda$ in zwei Splitbäume T^1 und T^2 in Lemma 3.8.

Sehnenendiagramm für G . Dann gibt es, bis auf Äquivalenz, genau eine Konfiguration (K, \vec{E}) für den Splitbaum (T, F) , sodass $C(K, \vec{E}) = C_G$.

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein KSG mit Splitbaum $ST(G) = (T, F)$ und für jeden Beschriftungsgraphen $H \in F$ seien die Sehnen für jedes Sehnenendiagramm aus der Menge seiner Darstellungen fest gerichtet, sowie C_G ein Sehnenendiagramm für G . Die Behauptung wird durch eine Induktion über die Anzahl der inneren Splitbaumknoten bewiesen. Sei $n = |I(T)|$. $\mathbf{n} = 1$: Dann besteht der Splitbaum aus einem inneren Knoten ν und für den Beschriftungsgraphen von ν gilt $G(\nu) = G$. Sei \mathcal{C} die Menge der Darstellungen für G und $K_{\mathcal{C}}(\nu) := \mathcal{C}$ die Abbildung, welche dem Knoten ν das Sehnenendiagramm \mathcal{C} zuordnet für alle $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Dann hat jede Konfiguration von $ST(G)$ die Form $(K_{\mathcal{C}}, \emptyset)$ mit $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ und ist genau dem Sehnenendiagramm $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ zugeordnet. Somit ist jedem Sehnenendiagramm von G genau eine Konfiguration von $ST(G)$ zugeordnet.

$\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n} + 1$: Sei T ein Splitbaum mit $n + 1$ inneren Knoten und $e = \nu\lambda$ eine innere Kante. Seien $p \in V(\nu)$ und $q \in V(\lambda)$ die zwei Extremitäten von e . Dann gilt mit Satz 3.7, dass sich das zirkuläre Wort π mit $C_G = C(\pi)$ in vier Teilfolgen zerlegen lässt mit $\pi = \pi_\nu \pi_\lambda \pi'_\nu \pi'_\lambda$, wobei π_ν und π'_ν alle Endpunkte der Sehnen für Knoten aus $L(q)$ enthalten und analog π_λ und π'_λ alle Sehnenendpunkte für Sehnen zu $L(p)$. Betrachte die zwei Hilfssplitbäume $T^1 := T \setminus \{\lambda \cup L(p)\} \cup b_\lambda$ und $T^2 := T|_{\lambda \cup L(p)} \cup b_\nu$, wobei b_λ und b_ν jeweils Platzhalter in Form eines Blattes, in dem jeweiligen Baum, für den anderen sind. Die Zerlegungsplitbaums ist in Abb. 3.10 veranschaulicht. Es sind $C^1 = C(b_\lambda \pi_\nu b_\lambda \pi'_\nu)$ und $C^2 = C(b_\nu \pi_\lambda b_\nu \pi'_\lambda)$ Sehnenendiagramme der Erreichbarkeitsgraphen der Hilfssplitbäume T^1 bzw. T^2 . Nach der Induktionsvoraussetzung existiert für $i = 1, 2$ genau eine Konfiguration (K_i, \vec{E}_i) für den Splitbaum T^i bis auf Äquivalenz, die C^i ergibt. Über die beiden Konfigurationen lässt sich durch eine beliebige Reihenfolge aller Kantenzusammenschlüsse in T^1 bzw. T^2 ein Sehnenendiagramm für die jeweiligen Erreichbarkeitsgraphen $\text{Gr}(T^1, F^1)$ und $\text{Gr}(T^2, F^2)$ erzeugen, welche gleich zu C^1 bzw. C^2 sind. Diese Sehnenendiagramme enthalten eine Richtung für die Sehne s_{b_λ} bzw. s_{b_ν} . Zusammen mit dem Sehnenendiagramm C_G definieren die Richtungen der Sehnen genau eine Richtung \vec{e} der inneren Kante $e = \nu\lambda$, bis auf Äquivalenz. Somit ist die Konfiguration (K, \vec{E}) mit

$$K(\nu) = \begin{cases} K_1(\nu), & \nu \in T^1 \\ K_2(\nu), & \nu \in T^2 \end{cases}$$

und $\vec{E} = E_1 \cup E_2 \cup \{\vec{e}\}$ die eindeutige Konfiguration, die C_G zugeordnet werden kann. \square

Es gibt also eine Abbildung von jedem Sehnenendiagramm eines Kreissehnengraphen G auf eine eindeutige Konfiguration bis auf Äquivalenz. Damit lässt sich nun die Hauptaussage dieses Kapitels zeigen.

Satz 3.9. Sei G ein zusammenhängender Kreissehnengraph mit Splitbaum $ST(G)$. Dann gibt es eine Bijektion zwischen allen Sehnenendiagrammen von G und den Äquivalenzklassen gleicher Konfigurationen des Splitbaums $ST(G)$.

Beweis. Sei G ein zusammenhängender Kreissehnengraph mit Splitbaum $ST(G) = (T, F)$. Betrachte die Abbildung Φ , die ein Sehnendiagramm auf genau eine Äquivalenzklasse gleicher Konfigurationen des Splitbaums $ST(G)$ abbildet. Nach Lemma 3.8 ist diese Abbildung wohldefiniert. Nach Bemerkung 3.4 wird eine Konfiguration auf genau ein Sehnendiagramm abgebildet. Insbesondere werden zwei voneinander verschiedene Konfigurationen nach Lemma 3.6 auf verschiedene Sehnendiagramme abgebildet. Somit ist diese Abbildung eine Inverse zur Abbildung Φ und damit ist Φ eine Bijektion. \square

Es gibt also eine Bijektion zwischen allen Sehnendiagrammen eines Graphen und den Veretern der Konfigurationsäquivalenzklassen seines Splitbaums. Im Folgenden wird jeweils ein fester Vertreter für eine Äquivalenzklasse von Konfigurationen betrachtet.

3.3 Sehnendiagramme richten

Wie in Abschnitt 3.1 dargestellt, können zwei Sehnendiagramme mit Hilfe gerichteter Sehnen über \otimes verknüpft werden. Für einen Graphen G enthält die Menge der Darstellungen $\mathcal{D}(G)$ alle möglichen ungerichteten Darstellungen von G als Sehnendiagramm. Die Wahl der Richtung der Sehnen des Sehnendiagramms C hat nach Lemma 3.1 und Lemma 3.2 keinen Einfluss darauf wie viele verschiedene Ergebnisse es bei der Verknüpfung über die Operation \otimes mit einem zweiten Sehnendiagramm C' und den jeweiligen Spiegelungen C^r, C'^r gibt. Daher ist es ausreichend jeder verknüpfungsrelevanten Sehne eines Sehnendiagramm aus $\mathcal{D}(G)$ eine Richtung zu zuweisen um beim späteren Verknüpfen alle Möglichkeiten abzudecken. Deshalb soll in diesem Abschnitt ein konsistentes Vorgehen zum Richten der Sehnen eines Sehnendiagramms vorgestellt werden.

Sei G ein KSG mit Splitbaum $ST(G) = (T, F)$ und σ eine lineare Ordnung der Knoten $V(G) = L(T)$. Sei ν ein innerer Knoten von T mit Beschriftungsgraph $G(\nu)$. Für einen Markierer $p \in V(\nu)$ ist das Minimum bezüglich σ der Blätter aus seiner Blattmenge $L(p)$ definiert als $b_p := \min \{\sigma(b) \in L(p)\}$. Sei $M \subset V(\nu)$. Ein Markierer $p \in M$ heißt *minimal bezüglich σ in M* , wenn er das kleinste Element in seiner Blattmenge $L(p)$ im Vergleich zu allen anderen $q \in M$ mit $q \neq p$ enthält, d.h. $b_p < b_q$ für alle $q \in M \setminus \{p\}$.

Die Knotenordnung σ wird nun genutzt um alle Sehnen der Sehnendiagramme des Knotens ν zu richten. Dieses Vorgehen lässt sich dann auf alle anderen inneren Knoten des Splitbaums übertragen.

Ist der Beschriftungsgraph $G(\nu)$ eine Clique, dann sei $p \in V(\nu)$ der bezüglich σ minimale Markierer in $V(\nu)$. Nehme einen der Endpunkte der Sehne s_p in C und richte die Sehne zu diesem hin. Von diesem Endpunkt werden alle $|V(\nu)| - 1$ weiteren Endpunkte im Uhrzeigersinn gelesen und ihre zugehörigen Sehnen zu dem zuerst gelesenen Endpunkt hin gerichtet. Siehe hierzu auch Abb. 3.11 links. Beachte, dass es hierbei egal ist, welcher Endpunkt der Sehne s_p gewählt wird, da beide Ergebnisse dasselbe gerichtete Sehnendiagramm ergeben. Für die Clique K_4 mit dem ungerichteten Sehnendiagramm $C = C(abcdabcd)$ und dem minimalen Knoten c bezüglich σ , ergeben sich die gerichteten Sehnendiagramme $C' = C(a_2b_2c_1d_1a_1b_1c_2d_2)$ und $C'' = C(a_1b_1c_2d_2a_2b_2c_1d_1)$. Hierbei sieht man ebenfalls $C' = C''$.

Ist der Graph $G(\nu)$ prim oder ein Stern, dann sei $M := \{p \in V(\nu) \mid N(p) \neq V(\nu) \setminus \{p\}\}$ die Menge aller Knoten in $G(\nu)$, die nicht zu allen anderen Knoten benachbart sind. Sei p minimal bezüglich σ in M . Zusätzlich sei q minimal bezüglich σ in $V(\nu) \setminus N(p)$. Sei weiter C eines der möglichen Sehnendiagramme für $G(\nu)$, dann wird es so rotiert, sodass die Sehne s_p senkrecht steht und die Sehne s_q rechts von ihr liegt. Dann wird die Sehne s_p nach oben gerichtet. Ab dem oberen Endpunkt von s_p wird der Kreis von C im Uhrzeigersinn abgelaufen und jede Sehne wird zu ihrem zuerst gelesenen Endpunkt hin gerichtet. Ein Beispiel für dieses Vorgehens findet sich in Abb. 3.11.

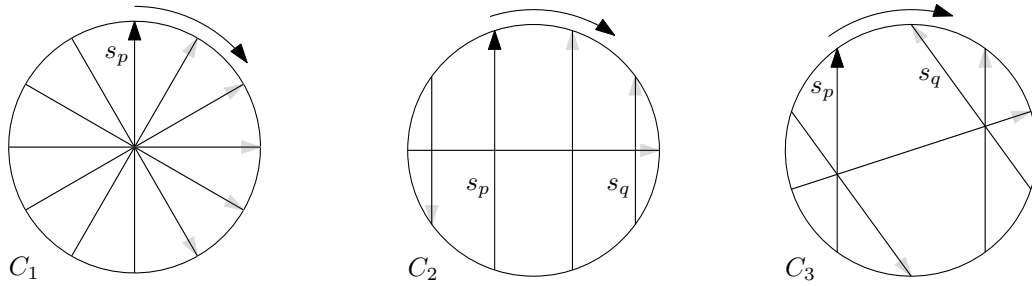


Abbildung 3.11: Alle drei Sehnenendiagramme C_1 , C_2 und C_3 von links nach rechts für eine Clique, einen Stern und einen primen Graphen wurden mit Hilfe einer zuvor gewählten Knotenordnung σ gerichtet. Der äußere Pfeil gibt die Leserichtung im Uhrzeigersinn an. Beachte, dass es für das Sehnenendiagramm der Clique keinen Unterschied macht, ob die Pfeilspitze nach oben oder unten zeigt, da beide Diagramme durch Rotation ineinander überführbar sind.

Beachte, dass im Fall eines Sterns oder eines primen Graphen immer ein Knoten existieren muss, der nicht zu allen anderen Knoten des Graphen benachbart ist, da es sich ansonsten um eine Clique handeln würde. Daher schneiden sich die Sehnen s_p und s_q nicht und somit ist das Richten der Sehnen für jedes Sehnenendiagramm eines Beschriftungsgraphen $G(\nu)$ des Splitbaums T von G wohldefiniert. Ein Sehnenendiagramm C für einen Beschriftungsgraphen $G(\nu)$ wird durch eine Knotenordnung σ gerichteten Sehnen *gerichtet* genannt und mit \vec{C} notiert. Die Menge der durch σ gerichteten Sehnenendiagramme von $G(\nu)$ ist definiert als $\vec{\mathcal{D}}_\sigma(G(\nu)) := \{\vec{C} \mid C \in \mathcal{D}(G(\nu))\}$, wobei $\mathcal{D}(G(\nu))$ die Menge der Darstellungen des Beschriftungsgraphen $G(\nu)$ ist.

Zu beachten ist, dass für ein Sehnenendiagramm $C \in \mathcal{D}(G(\nu))$ eines Beschriftungsgraphen $G(\nu)$, der keine Clique ist, welches durch eine Knotenordnung σ gerichtet wird, gilt

$$(\vec{C})^r \neq \vec{C}^r.$$

Ein anschauliches Beispiel hierfür ist in Abb. 3.12 gegeben. Diese Tatsache ist jedoch kein Problem beim Verknüpfen der Sehnenendiagramme $\vec{C} \in \vec{\mathcal{D}}_\sigma(G(\nu))$ und $\vec{C}^r \in \vec{\mathcal{D}}_\sigma(G(\nu))$ mit einem weiteren Sehnenendiagramm, da nach Lemma 3.1 und Lemma 3.2 gelten muss

$$\mathcal{R}(\vec{C}, \vec{C}') = \mathcal{R}(\vec{C}^r, \vec{C}'^r)$$

für ein ebenfalls gerichtetes Sehnenendiagramm \vec{C}' des Beschriftungsgraphen $G(\lambda)$, wobei λ und ν benachbart sind.

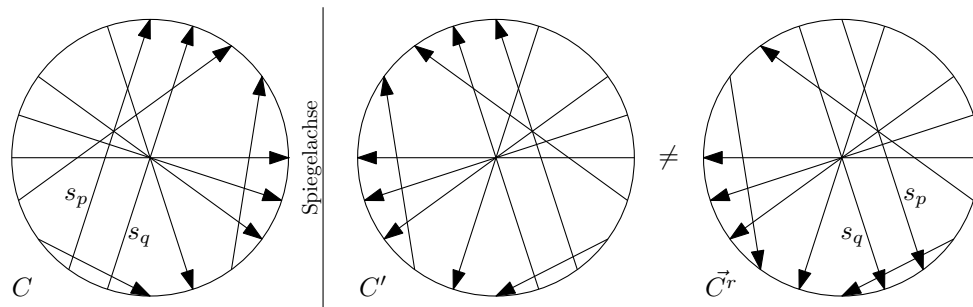


Abbildung 3.12: Für das mit Hilfe von s_p und s_q gerichtete Sehnendiagramm $C = C(\pi) \in \vec{\mathcal{D}}_\sigma(G)$ ist die Spiegelung $C' = C(\pi^r)$ in der Mitte dargestellt, diese ist jedoch nicht in $\vec{\mathcal{D}}_\sigma(G)$ enthalten. Stattdessen ist \vec{C}^r enthalten, welches die Spiegelung des ungerichteten Sehnendiagramms von C ist, gerichtet durch die Sehnen s_p und s_q .

4. Struktur von Teilrepräsentationen

Wie schon in Kapitel 2 eingeführt, kann die Splitzerlegung eines Graphen durch den Splitbaum dargestellt werden. Insbesondere besteht nach Kapitel 3 eine Bijektion zwischen den Sehnendiagrammen eines Graphen und den Konfigurationen seines Splitbaums. Im Hinblick auf das simultane Kreissehnengraphenproblem ist es wichtig zu wissen, welche Knoten der Splitbäume $ST(G_i)$, $i = 1, \dots, k$ der Eingabegraphen G_1, \dots, G_k , Knoten des Splitbaums $ST(S)$ des Schnitts S beeinflussen. Ziel dieses Kapitels ist es deshalb vorerst für einen Graphen G und einen knoteninduzierten Teilgraphen S von G eine Abbildung zwischen den Kanten des Splitbaums $ST(G)$ und dem Splitbaum $ST(S)$ zu finden. Die Abbildung soll dabei berücksichtigen, welche Teile von $ST(S)$ von inneren Knoten und Kanten von $ST(G)$ beeinflusst werden.

4.1 Blattpartitionen von Splitbäumen

Zu Beginn wird ein Alleinstellungsmerkmal für jeden inneren Knoten eines Splitbaums benötigt. Dafür wird eine durch jeden inneren Knoten induzierte Partition der Blätter eines GLT definiert. Die Partition $P(\nu) = \{L(p) \mid p \in V(\nu)\}$ wird *Knotenpartition bezüglich ν* genannt. Da für einen inneren Knoten ν eines GLTs die Knotenpartition $P(\nu)$ über die Markierer $V(\nu)$ definiert ist, kann jede Menge der Partition $P(\nu)$ ebenso einer Kante inzident zu ν zugeordnet werden. Die Knotenpartitionen $P(\nu)$ und $P(\lambda)$ der inneren Knoten ν und λ eines GLT (T, F) unterscheiden sich genau dann, wenn es zwei Blätter $b \neq a \in L(T)$ gibt, die im selben Partitionsteil $M \in P(\nu)$, aber in verschiedenen Teilen von $P(\lambda)$ liegen.

Definition 4.1. *Ein Baum T , für den jeder innere Knoten mindestens Grad 3 hat, heißt verästelt.*

Lemma 4.2. *Sei G ein Graph mit mindestens drei Knoten und $ST(G) = (T, F)$ der eindeutige Splitbaum von G . Dann ist $ST(G)$ verästelt.*

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $ST(G) = (T, F)$ sein eindeutiger Splitbaum. Die Definition eines GLT besagt, dass ein Knoten $\nu \in T$ genau so viele Nachbarn hat, wie der Beschriftungsgraph $G(\nu)$ Knoten. Weiter gilt für einen nichttrivialen Split (A, B) der Splitzerlegung von G , dass $|V_A|, |V_B| > 1$ und $V_A \cap V_B = \emptyset$ sein muss. Bei der Erstellung des Splitbaums wird nach Definition 2.5 ein virtueller Knoten zu G_A hinzugefügt und der neue Graph weiter zerlegt. Der neu entstandene Graph $G_A = G|_{V_A} \cup \{v_b\} := (V \cup \{v_b\}, E \cup \{av_b \mid a \in A\})$ hat mindestens drei Knoten. Hat er genau drei Knoten,

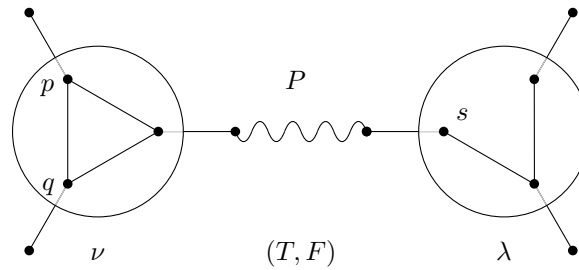


Abbildung 4.1: Beweisskizze zu Lemma 4.3 für einen verästelten GLT (T, F) und zwei innere Knoten ν und λ , die durch einen Pfad P verbunden sind.

kann es keinen nichttrivialen Split mehr geben, da eine der Seiten Größe Eins haben muss. Daher hat jeder Beschriftungsgraph in F von $ST(G)$ mindestens drei Knoten und somit jeder innere Knoten $\nu \in I(T)$ mindestens Grad drei. Somit ist der Splitbaum $ST(G)$ verästelt. \square

Lemma 4.3. *Sei (T, F) ein verästelter GLT. Dann gilt für zwei innere Knoten ν und λ mit $\nu \neq \lambda$, dass ihre Partitionen $P(\nu)$ und $P(\lambda)$ nicht gleich sind. Somit ist jedem inneren Knoten aus der Menge der knoteninduzierten Partitionen genau eine Partition zuzuordnen.*

Beweis. Sei (T, F) ein verästelter GLT und seien ν und λ innere Knoten in T . Da T ein Baum ist, existiert ein eindeutiger $\nu\lambda$ -Pfad P . Aufgrund der Verästelung von T haben ν und λ mindestens zwei Nachbarn, die nicht auf P liegen. Für die zwei Markierer $p, q \in V(\nu)$, die diesen zwei Nachbarn von ν gegenüberliegen, sind die zwei Mengen $L(p)$ und $L(q)$ Teile der Knotenpartition $P(\nu)$. Für den Markierer $s \in V(\lambda)$, der inzident zum Pfad P ist, gilt jedoch $L(p) \cup L(q) \subset L(s)$. Daher sind die zwei Mengen $L(p)$ und $L(q)$ in einem Teil der Partition $P(\lambda)$ enthalten. Also können $P(\nu)$ und $P(\lambda)$ nicht gleich sein. Zur Veranschaulichung siehe Abb. 4.1. \square

Mit Lemma 4.2 und Lemma 4.3 lässt sich nun die Folgerung 4.4 für Splitbäume ziehen.

Folgerung 4.4. *Für einen Graphen G und seinen Splitbaum $ST(G) = (T, F)$ gilt, dass sich die Knotenpartitionen aller inneren Knoten paarweise unterscheiden, d.h. es gilt $P(\nu) \neq P(\lambda)$ für alle inneren Knoten $\nu \neq \lambda$.*

Somit kann in einem Splitbaum jeder innere Knoten eindeutig mit Hilfe seiner Knotenpartition identifiziert werden. Im Folgenden werden Knotenpartitionen als eindeutiges Kriterium für die inneren Knoten eines Splitbaums verwendet.

4.2 Darstellungsrelevante innere Knoten

Ein Sehnendiagramm eines Graphen kann durch das Wählen eines Sehnendiagramms für jeden Beschriftungsgraphen seines Splitbaums und rekursives Ausführen jedes möglichen Kantenzusammenschlusses erzeugt werden, wie in Abschnitt 3.1 gezeigt. Betrachtet man die Situation eines Graphen G und eines knoteninduzierten zusammenhängenden Teilgraphen S von G , dann soll nun untersucht werden, welche Knotenzusammenschlüsse einer inneren Kante des Splitbaum $ST(G)$ die Platzierung der Sehnendendpunkten einer Sehne korrespondierend zu einem Knoten aus S festlegen.

Betrachtet man einen zusammenhängenden Graphen H mit einem oder zwei Knoten, dann ist H isomorph zu einem der Graphen $(\{x\}, \emptyset)$ oder $(\{x, y\}, \{xy\})$. Für die Kreissehnen-diagramme gilt, dass sie eindeutig sind, da beide Graphen prim sind und Spiegeln ist eine

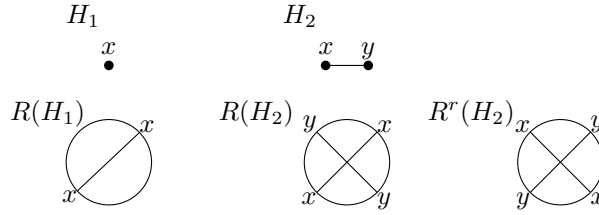


Abbildung 4.2: Alle zusammenhängenden Graphen mit zwei oder weniger Knoten und ihre eindeutigen Sehnendiagramme. Für H_2 ist die Spiegelung äquivalent zu einer Rotation, d.h. $R(H_2) = R^r(H_2)$. Daher gibt es jeweils nur ein Sehnendiagramm, das die beiden Graphen H_1 und H_2 repräsentiert.

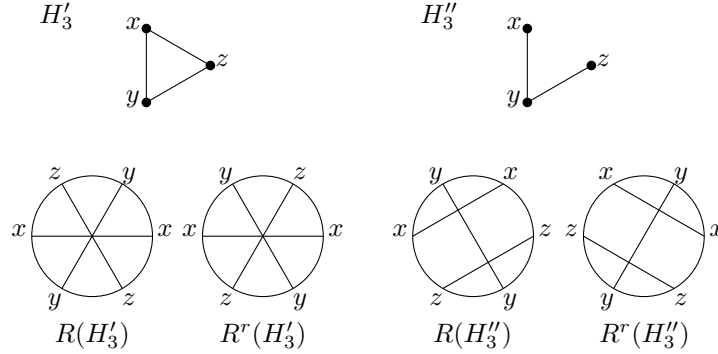


Abbildung 4.3: Alle zusammenhängenden Graphen mit drei Knoten, wobei H''_3 isomorph ist zu allen Graphen mit drei Knoten und zwei Kanten. Darunter sind die jeweiligen Sehnendiagramme dargestellt. Für H'_3 und H''_3 lassen sich die Spiegelungen ihrer beiden dargestellten Sehnendiagramme nicht ineinander überführen und sind somit verschieden.

Identitätsabbildung. Daher enthält die Menge der Darstellungen \mathcal{C} für jeden dieser Graphen genau ein Sehnendiagramm. Die beiden Fälle sind in Abb. 4.2 zu sehen. Erst wenn ein Graph drei Knoten hat, gibt es mindestens zwei unterschiedliche Sehnendiagramme, die diesen darstellen. Für alle Graphen mit drei Knoten werden diese voneinander unterschiedlichen Sehnendiagramme in Abb. 4.3 gezeigt.

Sei G ein Kreissehnengraph mit Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$ und S ein zusammenhängender knoteninduzierter Teilgraph von G . Betrachtet man einen Beschriftungsgraphen $G(\nu) \in F_G$ eines inneren Knotens ν von T_G , dann korrespondiert jeder Knoten $p \in V(\nu)$ genau zu der Menge $L(p)$ in der Knotenpartition $P(\nu)$. Seien $V(\nu)|_S$ die Knoten $p \in V(\nu)$, deren Blattmenge $L(p)|_{V(S)}$ eingeschränkt auf die Blätter $V(S)$ nichtleer ist. Dann ist der auf $V(\nu)|_S$ eingeschränkte Beschriftungsgraph $G(\nu)|_{V(\nu)|_S}$ zusammenhängend, da S zusammenhängend ist. Ansonsten würde es zwei Blätter b_1, b_2 aus $V(S) \subset L(T)$ geben, zwischen denen es keinen alternierenden $b_1 b_2$ -Pfad aus Baum- und Beschriftungskanten gibt, was ein Widerspruch zur Voraussetzung darstellt, dass S zusammenhängend ist.

In dem Splitbaum $ST(G)$ hat jeder Beschriftungsgraph mindestens drei Knoten, jedoch kann ein Beschriftungsgraph $G(\nu)$ eingeschränkt auf die Knoten $V(\nu)|_S$ weniger als drei Knoten haben. Sei $|V(\nu)|_S| < 3$ für einen inneren Knoten ν aus $ST(G)$. Dann gilt für alle Sehnendiagramme $C \in \mathcal{D}(G(\nu))$ von $G(\nu)$, dass sie eingeschränkt auf die Sehnen von $V(\nu)|_S$ isomorph zu H_1 oder H_2 sind. Ist $V(\nu)|_S = \{x\}$, dann steht die Sehne s_x in jedem Sehnendiagramm $C \in \mathcal{D}(G(\nu))$ als Platzhalter für ein Sehnendiagramm das alle Sehnen des Teilgraphen S enthält. Sei (K, \vec{E}) eine Konfiguration von $ST(S)$, die den inneren Knoten ν auf C abbildet, d.h. $K(\nu) = C$. Dann wird durch das Sehnendiagramm C festgelegt, wie Sehnen korrespondieren zu Knoten $V(G \setminus S)$ zueinander in dem Sehnendiagramm $C(K, \vec{E})$

stehen müssen. Über das Sehnendiagramm C wird jedoch nicht festgelegt wie zwei Sehnen korrespondierend zu je einem Knoten aus $V(S)$ zueinander in dem Sehnendiagramm $C(K, \vec{E})$ platziert sein müssen. Gilt $V(\nu)|_S = \{x, y\}$, dann schneiden sich die beiden Sehnen s_x und s_y in jedem Sehnendiagramm $C \in \mathcal{D}(G(\nu))$. Jedes dieser Sehnendiagramme ist ebenfalls nicht entscheidend für die Positionen der Sehnen der Knoten $V(S)$ im Sehnendiagramm $C(K, \vec{E})$ für G , da die zwei Sehnen s_x und s_y nur besagen, dass jede Bipartition der Knoten von S durch mindestens eine Kante verbunden sein muss. Dies ist jedoch trivialerweise in jedem Sehnendiagramm der Fall, da S ein zusammenhängender Teilgraph von G ist. Beim Erstellen des Sehnendiagramms $C(K, \vec{E})$ ist demnach erst ein Sehnendiagramm C_ν eines Beschriftungsgraphen $G(\nu)$ entscheidend für das Teilsehnendiagramm des Graphen S , wenn durch C_ν mindestens die Endpunkte von drei Sehnen korrespondierend zu Knoten von S festgelegt werden. Für den inneren Knoten ν gilt in diesem Fall $V(\nu)|_S > 2$ und für $V(\nu)|_S = 3$ ist C_ν eingeschränkt auf die Sehnen zu $V(\nu)|_S$ isomorph zu einem der Sehnendiagramme aus Abb. 4.3.

Sei G ein Graph mit Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$ und S ein knoteninduzierter Teilgraph von G mit Splitbaum $ST(S) = (T_S, F_S)$. Ein innerer Knoten ν des Splitbaums $ST(G)$ wird S -relevant genannt, wenn seine Knotenpartition eingeschränkt auf die Blätter $V(S)$ mindestens drei Teile enthält, d.h. $|P(\nu)|_{V(S)}| \geq 3$. Aus der vorherigen Argumentation sind in einer Konfiguration nur die Sehnendiagramme S -relevanter Knoten ausschlaggebend für die Position von Sehnen korrespondierend zu einem Knoten aus $V(S)$ im zur Konfiguration gehörigen Sehnendiagramm von G . Die Menge der Kanten in T_G , die inzident zu ν und einem Markierer in $V(\nu)$ sind, welcher zu einem Teil aus $P(\nu)|_{V(S)}$ korrespondiert, wird ebenfalls S -relevant genannt. Die Teilmenge der Nachbarschaft von ν , die zu ν über eine S -relevante Kante benachbart ist, wird mit $N_S(\nu) \subset N(\nu)$ bezeichnet. Insbesondere sind alle Blätter, die inzident zu ν sind und in $V(S)$ liegen, Elemente in $N_S(\nu)$. Mit dieser Definition hat jeder S -relevante innere Knoten mindestens drei zu ihm inzidente S -relevante Kanten.

Betrachtet man einen zusammenhängenden Graphen G und einen zusammenhängenden knoteninduzierten Teilgraphen $S \subset G$, dann reicht es für das weitere Vorgehen, nur die S -relevanten Knoten von $ST(G) = (T_G, F_G)$ zu betrachten. Hierfür wird der zu $ST(G)$ S -relevante Splitbaum $\text{Rel}(ST(G), S) := (T', F')$ definiert. Der Baum T' wird dabei aus T_G gebildet, indem zwei Reduktionsschritte auf T_G ausgeführt werden.

- (i) Seien ν und λ innere Knoten von T_G , deren $\nu\lambda$ -Pfad P nichttrivial ist, d.h. $P = \nu\tau_1 \dots \tau_k\lambda$ für $k > 0$, und dessen Knoten τ_i für $i = 1, \dots, k$ nicht S -relevant sind. Dann wird P bei der Konstruktion von T' aus T_G durch die direkte Kante $\nu\lambda$ ersetzt.
- (ii) Sei $\nu \in I(T_G)$ ein S -relevanter Knoten, $q \in V(\nu)$ mit $L(p) \subset V(G)$ und $e \in E(T_G)$ die zu p inzidente Kante. Dann ersetze den Teilbaum von $T_G - e$, der nicht ν enthält, durch ein Blatt aus $A(q)$.

Die Menge aller Beschriftungsgraphen F' ergibt sich aus der Einschränkung von F auf alle nach den Schritten (i) und (ii) noch vorhandenen inneren Knoten, d.h. $F' := \{G(\nu) \mid \nu \in T'\}$. Beachte, dass damit T' wohldefiniert ist, da nach Bemerkung 2.10 (ii) für jeden Markierer p eines Beschriftungsgraphen die Menge $A(q)$ nichtleer ist, wenn G zusammenhängend ist.

Lemma 4.5. *Sei G ein zusammenhängender Kreissehnengraph und S ein zusammenhängender knoteninduzierter Teilgraph von G . Dann gilt:*

1. *Es existiert eine Bijektion zwischen allen inneren Knoten von $\text{Rel}(ST(G), S)$ und den S -relevanten Knoten von $ST(G)$. Insbesondere sind alle inneren Knoten in $\text{Rel}(ST(G), S)$ S -relevant.*
2. *Der Graph $G' := \text{Gr}(\text{Rel}(ST(G), S))$ ist ein knoteninduzierter Teilgraph von G .*

3. Der Graph G' ist ein Kreissehnengraph und jedes Sehnendiagramm C' von G' ist zu einem Sehnendiagramm C von G erweiterbar. Die Menge aller möglichen Erweiterungen für alle Sehnendiagramme von G' zu einem Sehnendiagramm von G ergibt die Menge der Darstellungen $\mathcal{D}(G)$ von G .

Beweis. Sei G ein zusammenhängender Kreissehnengraph und S ein zusammenhängender knoteninduzierter Teilgraph von G .

Zu 1.: Aus der Konstruktion des S -relevanten Splitbaums $\text{Rel}(ST(G), S) = (T', F')$ von $ST(G) = (T_G, F_G)$ über die Schritte (i) und (ii) folgt direkt, dass jeder innere Knoten von $\text{Rel}(ST(G), S)$ S -relevant ist, da jeder nicht S -relevante innere Knoten aus T_G entweder durch eine Kante oder ein Blatt ersetzt wurde um T' aus T_G zu erzeugen. Insbesondere wurde bei diesem Vorgehen keiner der S -relevanten inneren Knoten von T_G ersetzt und damit existiert eine Bijektion zwischen allen inneren Knoten von $\text{Rel}(ST(G), S)$ und den S -relevanten Knoten von $ST(G)$.

Zu 2.: Seien b_1 und b_2 Blätter des Baums T' . Dann sind b_1 und b_2 nach Konstruktion ebenfalls Blätter des Baums T_G . Die Kante b_1b_2 existiert genau dann in $E(G)$, wenn es einen alternierenden Pfad $P = b_1q_1 \dots q_\ell b_2$ von Baum- und Beschriftungskanten zwischen b_1 und b_2 in T_G gibt. Existiert dieser alternierende Pfad P , dann wird dieser durch die Schritte (i) und (ii) nur verkürzt, da dabei Teile des Pfades P durch kürzere alternierende Pfade ersetzt werden. Im Fall, dass Schritt (i) den Pfad P bei der Konstruktion von $\text{Rel}(ST(G), S)$ beeinflusst, wird ein Teilpfad, der mit einer Baumkante beginnt und endet, in P durch eine einzelne Baumkante ersetzt. Betrifft Schritt (ii) den Pfad P , wird einer oder beide der Teilpfade $b_1 \dots q_i$ oder $q_j \dots b_2$ für $1 \leq i < j \leq \ell$ durch die Kante b_1q_i beziehungsweise q_jb_2 ersetzt. Somit gibt es zwischen b_1 und b_2 wieder einen aus Baum- und Beschriftungskanten alternierenden Pfad in T' und daher gilt $b_1b_2 \in E(\text{Gr}(T', F'))$.

Existiert umgekehrt die Kante $b_1b_2 \in E(\text{Gr}(T', F'))$, dann gibt es einen mit Baum- und Beschriftungskanten alternierenden b_1b_2 -Pfad in T' . Dieser Pfad lässt sich durch das Ersetzen einzelner Kanten des Pfades mit den passenden alternierende Teilpfaden, die durch Schritt (i) und (ii) gelöscht wurden, wieder in einen alternierenden b_1b_2 -Pfad in T_G überführen. Also gilt, dass eine Kante b_1b_2 genau dann in $\text{Gr}(T', F')$ existiert, wenn sie in G existiert. Somit ist $\text{Gr}(T', F') = \text{Rel}(ST(G), S)$ ein knoteninduzierter Teilgraph von G .

Zu 3.: Da G ein Kreissehnengraph ist und Kreissehnengraphen hereditär sind, ist G' ebenfalls ein Kreissehnengraph. Nach Bemerkung 3.4 ist über eine Konfiguration (K, \vec{E}) von $\text{Rel}(ST(G), S)$ ein Sehnendiagramm $C' = C(K, \vec{E})$ für $\text{Gr}(\text{Rel}(ST(G), S))$ definiert. Beachtet man, dass beim Erstellen von T' in Schritt (i) und (ii) jeweils Teilbäume von T_G durch eine Kante ersetzt wurden, dann lassen sich für diese Teilbäume ebenfalls Sehnendiagramme über eine auf ihnen gewählte Konfiguration erzeugen. Die Sehnen die zu den ersetzten Teilbäumen aus $ST(G)$ in $C(K, \vec{E})$ korrespondieren, lassen sich jeweils durch das erzeugte Sehnendiagramm des Teilbaums ersetzen. Also lässt sich ein Sehnendiagramm C' für den Graphen $\text{Gr}(\text{Rel}(ST(G), S))$ zu einem Sehnendiagramm C von G erweitern. Zusätzlich ist die Menge aller Erweiterungen von Sehnendiagrammen von $\text{Gr}(\text{Rel}(ST(G), S))$ zu Sehnendiagrammen von G gleich der Menge aller Darstellungen von G . \square

Sei G ein Graph mit Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$, S ein knoteninduzierter, zusammenhängender Teilgraph von G und $\text{Rel}(ST(G), S) = (T', F')$ der S -relevante Splitbaum. Bei der Reduktion von $ST(G)$ zu $\text{Rel}(ST(G), S)$ kann es passieren, dass in Schritt (i) ein Pfad in T_G zwischen zwei degenerierten inneren Knoten ν und λ durch eine Kante ersetzt wird, sodass in T' der Knotenzusammenschluss der Kante $\nu\lambda$ wiederum einen degenerierten Knoten erzeugt. In diesem Fall ist der GLT $\text{Rel}(ST(G), S)$ nicht reduziert. Führt man auf $\text{Rel}(ST(G), S)$ jedoch alle möglichen Stern- und Cliquenzusammenschlüsse durch, erhält man einen reduzierten GLT, der nach Bemerkung 2.11 den Erreichbarkeitsgraphen $\text{Gr}(\text{Rel}(ST(G), S))$ unverändert lässt und nach Satz 2.12 der eindeutige Splitbaum von

$\text{Gr}(\text{Rel}(ST(G), S))$ ist. Daher kann für die restliche Arbeit ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass der S -relevante Splitbaum $\text{Rel}(ST(G), S)$ tatsächlich der eindeutige Splitbaum von $\text{Gr}(\text{Rel}(ST(G), S))$ ist.

Betrachtet man eine simultane Instanz (G_1, G_2, S) , dann ergibt sich mit Lemma 4.5, dass es äquivalent ist die simultane Instanz $(\text{Gr}(\text{Rel}(ST(G_1), S)), \text{Gr}(\text{Rel}(ST(G_2), S)), S)$ zu betrachten, da diese genau dann lösbar ist, wenn die simultane Instanz (G_1, G_2, S) lösbar ist. Da ein S -relevanter Splitbaum nur aus S -relevanten inneren Knoten besteht, ist dieser insbesondere verästelt, da S -relevante Knoten per Definition mindestens Grad 3 haben müssen. Zusätzlich ist jede Kante in einem S -relevanten Splitbaum ebenfalls S -relevant, da jede Kante inzident zu zwei S -relevanten Knoten ist.

4.3 Innere Kanten abbilden

Für den Rest dieses Kapitels sei G ein Graph, S ein knoteninduzierter zusammenhängender Teilgraphen von G mit Splitbaum $ST(S) = (T_S, F_S)$ und $\text{Rel}(ST(G), S) = (T_G, F_G)$ der S -relevante Splitbaum von G .

Nachdem aus Abschnitt 4.2 klar ist, welche inneren Knoten von $ST(G)$ die Position einer Sehne zu einem Knoten aus $V(S)$ beeinflussen und es reicht den S -reduzierten Splitbaum $\text{Rel}(ST(G), S)$ zu betrachten, stellt sich die Frage, welche inneren Knoten in T_S dies ebenfalls tun. Hierzu werden vorerst innere Kanten des S -reduzierten Splitbaums $\text{Rel}(ST(G), S)$ in Zusammenhang mit Teilen des Baums T_S gebracht. Dabei muss ein Split in G in Bezug zum Splitbaum T_G und zu einem Split in S gesetzt werden. Nach Satz 2.13 von Gioan et al. in [GPTC14] sind alle Splits eines Graphen in dessen Splitbaum als Kante oder möglicher Split in einem Beschriftungsgraphen wiederzufinden.

In einem zusammenhängenden Graphen H mit Splitbaum $ST(H) = (T_H, F_H)$ ist die Bipartition $\{V_A, V_B\}$ genau dann ein nichttrivialer Split, wenn entweder eine Kante $e \in E(T_H)$ mit Extremitäten p und q existiert, für die gilt $A = A(q)$, $V_A = L(q)$, $B = A(p)$ und $V_B = L(p)$, oder ein degenerierter Knoten u in $ST(H)$ mit einem Split (A_u, B_u) in $G(u)$ existiert, sodass $A = \bigcup_{q \in A_u} L(q)$ und $B = \bigcup_{p \in B_u} L(p)$ gilt.

Bemerkung 4.6. Für einen Graphen H mit Splitbaum $ST(H) = (T_H, F_H)$, $a \in V(H)$ und die Bipartition mit $\{\{a\}, V(H) \setminus \{a\}\}$ gilt analog zu Satz 2.13, dass der triviale Split genau auf die zum Blatt a inzidente Kante in T_H abgebildet wird.

Bemerkung 4.6 ist korrekt, da Splitbäume nach Lemma 4.2 verästelt sind und somit jedes Paar von Kanten eine jeweils andere Bipartition der Blätter erzeugt, wie sich aus Lemma 4.3 ableiten lässt.

Folgerung 4.7. Jeder Split in G lässt sich eindeutig einer Kante seines Splitbaums $ST(G)$ oder einem inneren Knoten und einem Split in dessen Beschriftungsgraph zuordnen.

Betrachtet man eine S -relevante Kante e des Splitbaums $ST(G)$ und den eindeutigen, der Kante e zugeordneten Split (A, B) , dann muss $A|_{V(S)} \neq \emptyset$ und $B|_{V(S)} \neq \emptyset$ laut Definition einer S -relevanten Kante gelten. Somit ist jeder Split (A, B) induziert durch eine S -relevante Kante eines Splitbaums wieder ein Split in S . Dieser Split $(A_{V(S)}, B_{V(S)})$ ist wiederum genau einer Kante oder einem inneren Knoten, also einem Split dessen Beschriftungsgraphen, im Splitbaum $ST(S)$ zugeordnet.

Folgerung 4.8. Alle Kanten des S -relevanten Splitbaums $\text{Rel}(ST(G), S)$ lassen sich eindeutig auf eine innere Kante oder einen inneren Knoten des Splitbaums $ST(S)$ von S abbilden, da alle seine Kanten S -relevant sind.

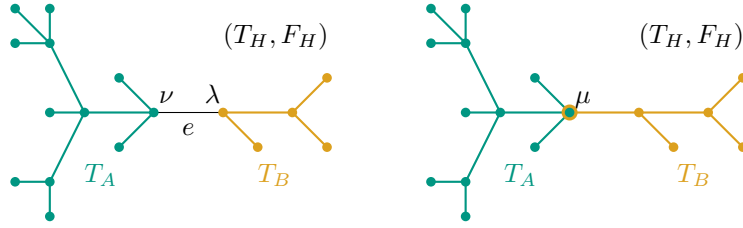


Abbildung 4.4: In dem Splitbaum (T_H, F_H) des Graphen H sind die zwei Möglichkeiten der Abbildung eines Splits (A, B) entweder auf eine Kante e (links) oder einen inneren Knoten μ (rechts) dargestellt. Zusätzlich sind die dadurch induzierten Teilbäume T_A und T_B zu sehen, definiert durch die Blattmengen V_A bzw. V_B . Links ist die Wurzel von T_A der Knoten ν und für den Teilbaum T_B der Knoten λ . Im Fall rechts ist die Wurzel für beide Teilbäume μ .

4.4 Stammbäume

Nachdem in Abschnitt 4.2 die S -relevanten Knoten gefunden wurden und das Problem auf den S -relevanten Splitbaum reduziert wurde, ist die Frage noch offen, welche Knoten in $ST(S)$ ebenfalls Platzierungsforderungen an dieselben Blattmengen wie ein einzelner innerer Knoten in $\text{Rel}(ST(G), S)$ stellen. Dazu werden die inzidenten Kanten eines inneren Knoten in T_G zurate gezogen.

Sei (A, B) ein Split im Graphen H mit Splitbaum $ST(H) = (T_H, F_H)$. Aus Satz 2.13 und Bemerkung 4.6 lässt sich ableiten, dass es jeweils einen Teilbaum T_A und T_B von T_H mit Blattmengen V_A bzw. V_B gibt. Es ergeben sich zwei verschiedene Situationen, je nachdem, ob der Split (A, B) auf eine Kante oder einen Knoten abgebildet wird.

1. Der Split (A, B) wird auf eine Kante $e = \nu\lambda$ in T_H mit $\nu \in T_A$ und $\lambda \in T_B$ abgebildet. Dann gilt, dass T_A und T_B disjunkt sind und T_H bis auf die Kante e überdecken, d.h. $T_A \cap T_B = \emptyset$ und $T_H \setminus (T_A \cup T_B) = \{e\}$.
2. Der Split (A, B) wird auf einen inneren Knoten μ in T_H abgebildet. Dann gilt, dass T_A und T_B den Splitbaum T_H überdecken und sich genau im Knoten μ schneiden, d.h. $T_H = T_A \cup T_B$ und $T_A \cap T_B = \{\mu\}$.

Die beiden Bäume T_A und T_B sind also in beiden Fällen kantendisjunkt. Im Fall 1 werden die zur Kante e inzidenten Knoten ν bzw. λ *Wurzel von T_A bzw. T_B* genannt. Im Fall 2 wird der Knoten in dem sich beide Teilbäume schneiden, als *Wurzel von T_A und T_B* bezeichnet. In Abbildung 4.4 sind die zwei Varianten schematisch dargestellt, wie die Teilbäume T_A und T_B für einen Split (A, B) in G im Splitbaum T_H aussehen können.

Definition 4.9. Sei ν ein innerer Knoten in T_G und $e = \nu\lambda$ eine zu ν inzidente Kante. Zusätzlich sei $(A_{\nu\lambda}, B_{\nu\lambda}) := (L(\rho_\lambda(e))|_{V(S)}, L(\rho_\nu(e))|_{V(S)})$ der zur Kante e gehörige Split eingeschränkt auf die Knoten $V(S)$. Seien $T_{A_{\nu\lambda}}$ und $T_{B_{\nu\lambda}}$ die Teilbäume von T_S , die durch den Split $(A_{\nu\lambda}, B_{\nu\lambda})$ induziert werden. Der Schnitt $T_\nu := \bigcap_{\lambda \in N(\nu)} T_{A_{\nu\lambda}}$ über alle Nachbarn $N(\nu)$ von ν wird *Stammbaum von ν in T_S* genannt.

Ein Stammbaum ist wohldefiniert, da nach Folgerung 4.8 jede Kante des S -relevanten Splitbaums ein eindeutiges Bild in T_S hat. Somit lassen sich alle Teilbäume $T_{A_{\nu\lambda}}$ für alle Nachbarn $\lambda \in N(\nu)$ der Definition bestimmen. Da der Schnitt von Bäumen wieder zusammenhängend und azyklisch ist, ist ein Stammbaum tatsächlich ein Baum.

Bemerkung 4.10. Sei $e = \nu\lambda$ eine innere Kante von T_G und e korrespondiere zu einer Kante $e_{\nu\lambda}$ in T_S . Dann liegt $\tilde{e} = w_\nu w_\lambda \in E(T_S)$ weder in T_ν noch in T_λ , wobei w_ν und w_λ Wurzeln von $T_{A_{\nu\lambda}}$ bzw. $T_{A_{\lambda\nu}}$ sind.

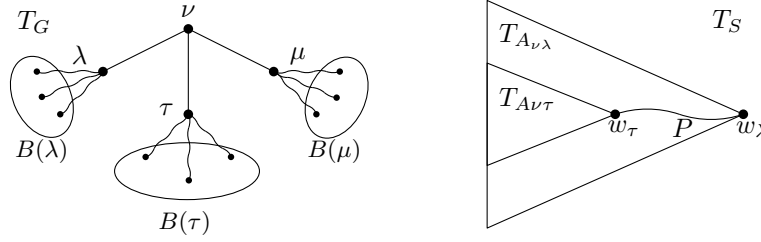


Abbildung 4.5: Links ist der Splitbaum T_G von G dargestellt mit einem S -relevanten Knoten ν und paarweise verschiedenen Knoten λ , τ und μ in $N(\nu)$. Rechts ist der Splitbaum T_S und der $w_\lambda w_\tau$ -Pfad P dargestellt. P liegt komplett in $T_{A_{\nu\lambda}}$ und schneidet sich nur in w_τ mit $T_{A_{\nu\tau}}$.

Lemma 4.11. *Sei ν ein innerer Knoten in T_G . Dann ist der Stammbaum $T_\nu \subset T_S$ von ν nichtleer und enthält alle Wurzeln der Bäume $T_{A_{\nu\lambda}} \subset T_S$ für alle Nachbarn $\lambda \in N(\nu) \subset V(T_G)$.*

Beweis. Sei ν ein innerer Knoten von T_G . Dann hat ν laut Voraussetzung mindestens Grad drei und jede zu ν inzidente Kante ist S -relevant.

Seien $\lambda \neq \tau \in N(\nu)$, $e' := \nu\lambda$ und $e'' := \nu\tau$. Werden e' und e'' auf denselben Knoten $\tilde{\nu} \in V(T_S)$ abgebildet, dann gilt dies für jedes Paar verschiedener Nachbarn von ν und damit haben alle Bäume $T_{A_{\nu\mu}}$ die Wurzel $\tilde{\nu}$ für alle $\mu \in N(\nu)$. Somit ist die Behauptung trivial erfüllt, da $(\{\tilde{\nu}\}, \emptyset) = T_{\tilde{\nu}}$ gilt.

Seien daher für mindestens ein Paar $\lambda \neq \tau \in N(\nu)$ die Wurzeln w_λ und w_τ der Bäume $T_{A_{\nu\lambda}}$ und $T_{A_{\nu\tau}}$ verschieden. Zusätzlich sei $\mu \in N(\nu) \setminus \{\lambda, \tau\}$. Seien $B(\lambda), B(\tau), B(\mu) \in P(\nu)|_{V(S)}$ die nichtleeren paarweise disjunkten Blattmengen der auf $V(S)$ eingeschränkten Knotenpartition von ν , die zu den Kanten $e' := \nu\lambda$, $e'' := \nu\tau$ und $e''' := \nu\mu$ korrespondieren. Der beschriebene Knoten ν und seine drei Nachbarn sind in Abb. 4.5 links veranschaulicht. Für die zwei Blattmengen der Teilbäume $T_{A_{\nu\lambda}}$ und $T_{A_{\nu\tau}}$ gilt

$$L(T_{A_{\nu\lambda}}) \cap L(T_{A_{\nu\tau}}) = B(\mu), \quad L(T_{A_{\nu\lambda}}) \setminus L(T_{A_{\nu\tau}}) = B(\tau), \quad L(T_{A_{\nu\tau}}) \setminus L(T_{A_{\nu\lambda}}) = B(\lambda).$$

Sei P der eindeutige $w_\lambda w_\tau$ -Pfad in T_S . Ziel ist es zu zeigen, dass P komplett im Schnitt von $T_{A_{\nu\lambda}}$ und $T_{A_{\nu\tau}}$ liegt.

Angenommen P liegt komplett in $T_{A_{\nu\lambda}}$ und schneidet $T_{A_{\nu\tau}}$ nur in w_τ , wie in Abb. 4.5 rechts dargestellt. Dann muss für die Blätter der Bäume $T_{A_{\nu\lambda}}$ und $T_{A_{\nu\tau}}$ gelten, dass $L(T_{A_{\nu\tau}}) \subset L(T_{A_{\nu\lambda}})$ gilt. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $L(T_{A_{\nu\lambda}}) \setminus L(T_{A_{\nu\lambda}}) = B(\lambda) \neq \emptyset$ und $L(T_{A_{\nu\tau}}) \setminus L(T_{A_{\nu\lambda}}) = B(\tau) \neq \emptyset$ gilt. Da beide Bäume $T_{A_{\nu\lambda}}$ und $T_{A_{\nu\tau}}$ ein gemeinsames Blatt b aus $B(\mu)$ enthalten, muss P in $T_{A_{\nu\lambda}} \cap T_{A_{\nu\tau}}$ liegen.

Da für jedes $\eta \in N(\nu)$ und die Wurzel w_η von $T_{A_{\nu\eta}}$ die Wurzel w_η im Schnitt von $T_{A_{\nu\eta}}$ und $T_{A_{\nu\mu}}$ liegt für alle $\mu \in N(\nu) \setminus \{\eta\}$, folgt insbesondere, dass w_η in T_ν liegt. Also liegt die Wurzel jedes Baums $T_{A_{\nu\lambda}}$ für alle Nachbarn λ von ν in T_ν . \square

Nach Lemma 4.11, ist die Abbildung der S -relevanten Knoten aus T_G auf die Knotenmenge ihrer Stammbäume in T_S wohldefiniert, da kein Stammbaum leer ist. Sie wird auch *Verwandtschaftsfunktion* Φ genannt. Die Verwandtschaftsfunktion Φ bildet also von $I(T_G)$ nach $\{T \mid T \subset T_S\}$ ab.

Folgerung 4.12. *Seien ν und λ zwei verschiedene S -relevante Knoten aus T_G . Dann sind ihre Stammbäume T_ν und T_λ in T_S kantendisjunkt. Wird zusätzlich die Kante $e = \nu\lambda \in E(T_G)$ auf die Kante $\tilde{e} = w_\nu w_\lambda \in E(T_S)$ abgebildet, dann enthält jeder $V(T_\nu)V(T_\lambda)$ -Pfad in T_S die Kante \tilde{e} .*

Die Behauptung folgt aus der Definition von Stammbäumen, Bemerkung 4.10 und Lemma 4.11.

Um das Bild der Verwandtschaftsfunktion Φ besser charakterisieren zu können, werden in den folgenden beiden Lemmata, die Bilder zweier verschiedener S -relevanter innerer Knoten aus $ST(G)$ von Φ und deren Schnitt betrachtet, sowie der Fall, dass einem Knoten ein trivialer Stammbaum zugeordnet wird. Im Fokus steht dabei insbesondere die Art der Beschriftungsgraphen des jeweiligen Stammbaums.

Lemma 4.13. *Für zwei S -relevante innere Knoten $\nu, \lambda \in V(T_G)$ gilt, dass*

- (i) *der Schnitt ihrer Stammbäume maximal einen inneren Knoten des Baums T_S enthält, d.h. $|T_\nu \cap T_\lambda| \leq 1$, und*
- (ii) *der Beschriftungsgraph $G(\mu) \in F_S$ des Schnitts $T_\nu \cap T_\lambda = \{\mu\}$ degeneriert ist.*

Beweis. Sei G ein Graph mit Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$ und S ein knoteninduzierter zusammenhängender Teilgraph von G mit Splitbaum $ST(S) = (T_S, F_S)$. Seien ν und λ zwei S -relevante innere Knoten des Splitbaums T_G . Nach Folgerung 4.12 sind die Stammbäume T_ν und T_λ kantendisjunkt. Angenommen die beiden Bäume schneiden sich in mindestens zwei inneren Knoten $\mu, \tau \in V(T_S)$. Da T_ν ein Baum ist, gibt es einen eindeutigen $\mu\tau$ -Pfad P_1 in T_ν und ebenso einen eindeutigen $\mu\tau$ -Pfad P_2 in T_λ . Weil T_ν und T_λ kantendisjunkt sind, überträgt sich dies auf P_1 und P_2 . Somit ist P_1P_2 ein Kreis in T_S . Dies ist ein Widerspruch dazu, dass T_S ein Baum ist. Damit folgt $|T_\nu \cap T_\lambda| \leq 1$ und es gilt Behauptung (i).

Sei $T_\nu \cap T_\lambda = \{\mu\}$, dann muss jeder Baum $T_{A_{\nu\tau}}$ und $T_{A_{\lambda\eta}}$ für alle Nachbarn $\tau \in N(\nu) \subset V(T_G), \eta \in N(\lambda) \subset V(T_G)$ induziert durch den Schnitt $(A_{\nu\tau}, B_{\nu\tau})$ bzw. $(A_{\lambda\eta}, B_{\lambda\eta})$ ebenso den Knoten $\mu \in V(T_S)$ enthalten, da ein Stammbaum genau der Schnitt dieser Bäume ist. Da T_G ein Baum ist, existiert ein eindeutiger $\nu\lambda$ -Pfad P mit $P = \nu\tau_1 \dots \tau_k\lambda$, welcher auch trivial sein kann. Da beide Knoten ν und λ S -relevant sind, müssen die Kanten $\nu\tau_1$ und $\tau_k\lambda$ ebenfalls S -relevant sein, d.h. $\tau_1 \in N(\nu)$ und $\tau_k \in N(\lambda)$. Insbesondere gilt dann $A_{\lambda\tau_k} \subset B_{\nu\tau_1}$. Der Pfad P , sowie die Blattmengen der Splits induziert durch die Kanten $\nu\tau_1$ und $\tau_k\lambda$ sind links in Abb. 4.6 schematisch dargestellt.

Angenommen die Kante $\nu\tau_1 \in E(T_G)$ wird auf eine innere Kante in T_S abgebildet, dann muss die Kante inzident zu $\mu \in V(T_S)$ sein und $\mu \in T_{A_{\nu\tau_1}}$ gelten, da ansonsten μ nicht in T_ν läge. Da zusätzlich $A_{\lambda\tau_k} \subset B_{\nu\tau_1}$ gilt, folgt für die Teilbäume in T_S , dass $T_{A_{\lambda\tau_k}} \subset T_{B_{\nu\tau_1}}$ gilt, wie in Abb. 4.6 rechts gezeigt. Dann gilt jedoch $\mu \notin T_{A_{\lambda\tau_k}}$. Laut Definition eines Splitbaums ist T_λ ein Teilbaum von $T_{A_{\lambda\tau_k}}$, dies ist ein Widerspruch dazu, dass $\mu \in T_\lambda$ ist. Demnach muss die Kante $\nu\tau_1$ auf den Knoten ν in T_S abgebildet werden. Analog lässt sich dies für alle S -relevanten Kanten des Pfades P zeigen. Somit enthält der Beschriftungsgraph $G(\nu)$ einen Split und ist damit degeneriert, wie in (ii) behauptet. \square

Bemerkung 4.14. *Seien $\{T_{\nu_1}, \dots, T_{\nu_k}\}$ alle Stammbäume S -relevanter Knoten $\nu \in V(T_G)$, die sich in $\mu \in V(T_S)$ schneiden.*

- (i) *Dann definieren die Stammbäume eine Partition P_μ der Markierer $V(\mu)$ in k Teile, wobei jeder Teil genau einem der Stammbäume zugeordnet werden kann. Sei T_{ν_i} der Stammbaum, der zum Partitionsteil $P_i \in P_\mu$ korrespondiert, dann ist für jeden Markierer $p \in P_i$, der einem Blatt $b \in V(S)$ gegenüberliegt, dieses Blatt auch ein direkt zu μ_i inzidentes Blatt in T_G .*
- (ii) *Enthält der Splitbaum $ST(G)$ nur S -relevante Knoten, dann ist der durch $\{T_{\nu_1}, \dots, T_{\nu_k}\}$ induzierte Teilgraph von T_G ein Teilbaum.*

Lemma 4.15. *Sei ν ein S -relevanter Knoten in T_G mit einem trivialen Stammbaum $T_\nu = \{\mu\}$ in T_S . Wenn $G(\nu)$ eine Clique ist, dann ist $G(\mu)$ auch eine Clique. Ist $G(\nu)$ ein Stern, dann ist $G(\mu)$ ebenfalls ein Stern.*

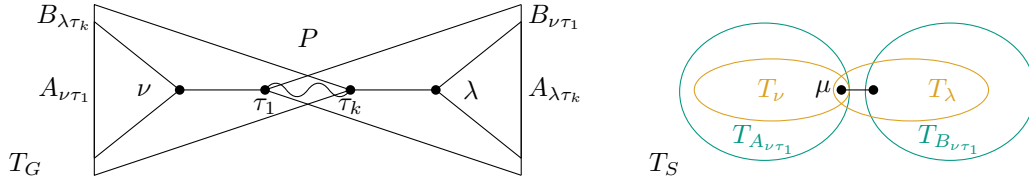


Abbildung 4.6: Beweisskizze zu Lemma 4.13. Links ist die Situation im Splitbaum T_G von G zu sehen. Die inneren Knoten ν und λ , sowie die Kanten $\nu\tau_1$ und $\tau_k\lambda$ des $\nu\lambda$ -Pfads P sind S -relevant. Für die durch die Kanten $\nu\tau_1$ und $\tau_k\lambda$ induzierten Splits $(A_{\nu\tau_1}, B_{\nu\tau_1})$ und $(A_{\lambda\tau_k}, B_{\lambda\tau_k})$ in G gilt insbesondere $A_{\lambda\tau_k} \subset B_{\nu\tau_1}$. Wird die Kante $\nu\tau_1 \in E(T_G)$ auf eine Kante in T_S abgebildet, ergibt sich die Situation, welche rechts dargestellt ist. Hierbei muss gelten $T_\lambda \subset T_{A_{\lambda\tau_k}} \subset T_{B_{\nu\tau_1}}$.

Beweis. Sei ν ein S -relevanter Knoten in T_G mit einem trivialen Splitbaum $T_\nu = \{\mu\}$. Dann werden alle S -relevanten zu ν inzidenten Kanten entweder direkt auf den Knoten μ oder eine zu μ inzidente Kante in T_S abgebildet. Daher gilt $P(\mu) = P(\nu)|_{V(S)}$. Nach dem Beweis von Folgerung 4.8 gibt es insbesondere für jede Extremität q einer S -relevanten Kante inzident zu ν in T_G ein Blatt $b \in A(q) \cap V(S)$. Sei G_ν ein zum Beschriftungsgraphen $G(\nu)$ isomorpher Teilgraph von G , den es nach Bemerkung 2.10 (iv) gibt, mit der maximalen Anzahl an Knoten aus $V(S)$, also $|N(\nu)|$ Stück. Dann ist $G_\nu|_{V(S)}$ isomorph zum Beschriftungsgraph $G(\mu)$ von μ .

Ist der Beschriftungsgraph $G(\nu)$ von ν eine Clique, gilt dies auch für den isomorphen Teilgraph G_ν in G und jede beliebige Einschränkung von G_ν . Daher ist $G(\mu)$ isomorph zu $G_\nu|_{V(S)}$ und ebenfalls eine Clique.

Ist der Beschriftungsgraph $G(\nu)$ von ν hingegen ein Stern, dann gilt die Argumentation über $G_\nu|_{V(S)}$ nur, wenn das Zentrum des Sterns G_ν ein Knoten in $V(S)$ ist. Angenommen das Zentrum von G_ν ist nicht in $V(S)$, dann ist der Beschriftungsgraph $G(\mu)$ isomorph zu einem nicht zusammenhängenden Teilgraphen $G_\nu|_{V(S)}$ von S . Dies ist ein Widerspruch dazu, dass jeder Beschriftungsgraph eines zusammenhängenden Graphen wieder zusammenhängend sein muss. \square

Um über die Verwandtschaftsfunktion Φ , die innere Knoten von T_G auf ihren Stammbaum abbildet, eine Knotenüberdeckung der inneren Knoten des Splitbaums T_S zu definieren, fehlt noch ihre Surjektivität eingeschränkt auf das Bild $\Phi(I(T_G))|_{I(T_S)}$. Diese Eigenschaft der Verwandtschaftsfunktion liefert Lemma 4.16.

Lemma 4.16. *Für jeden inneren Knoten $\mu \in T_S$ gibt es mindestens einen S -relevanten Knoten $\nu \in T_G$, sodass μ im Bild der Verwandtschaftsfunktion Φ von ν liegt, d.h. $\mu \in \Phi(\nu)$.*

Beweis. Laut Folgerung 4.8 kann jede innere Kante von T_G nach T_S abgebildet werden. Durch diese Abbildung der Kanten von T_G wird eine Partition der Kanten von T_S vorgenommen. Alle Kanten, die das Bild einer Kante aus T_G sind, bilden eine Menge der Kantenpartition. Die jeweils anderen maximal zusammenhängenden Teile des Baums T_S , die weder Kanten noch Knoten aus dem Bild einer Kante aus T_G enthalten, bilden die restlichen Teile der Kantenpartition. Eine schematische Darstellung findet sich in Abb. 4.7. Jeder Knoten ist somit Teil mindestens eines durch die Partitionsteile induzierten Teilbaums. Da alle Knoten, die in mindestens zwei dieser kanteninduzierten Teilbäume vorkommen, Wurzeln des Baums T_{A_e} der Urbildkante aus T_G sind, folgt zusammen mit Lemma 4.11, dass jeder Knoten von T_S in einem Stammbaum eines S -relevanten Knoten von T_G enthalten ist. Somit existiert für jeden inneren Knoten μ in T_S ein S -relevanter Knoten ν in T_G mit $\mu \in \Phi(\nu)$. \square

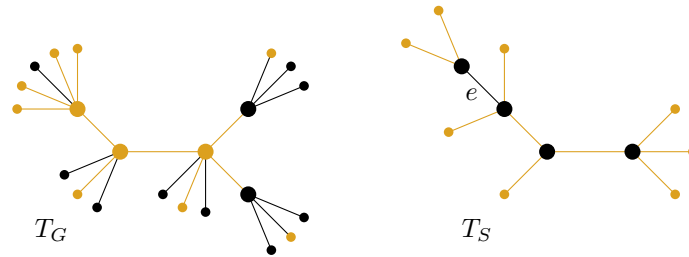


Abbildung 4.7: In dem Splitbaum T_G von G links sind alle Blätter aus $V(S)$ farblich markiert, sowie alle S -relevanten Kanten und inneren Knoten. Rechts ist der Splitbaum T_S von S dargestellt und alle Bildkanten der S -relevanten Kanten von T_G sind ebenfalls farblich markiert. Die farblich markierten Kanten in T_S ergeben einen Partitionsteil der durch sie induzierten Kantenpartition. Zusätzlich ist laut Definition $\{e\}$ der zweite Partitionsteil.

Über die Verwandtschaftsfunktion $\Phi: I(T_G) \rightarrow \{T \mid T \subset T_S\}$ lässt sich mit Lemma 4.16 und Folgerung 4.12 also sagen, dass die Bildmenge $\Phi(I(T_G))$ eine kantendisjunkte Überdeckung von Teilbäumen der inneren Knoten des Splitbaums $ST(S)$ darstellt. Zusätzlich lässt sich folgern, dass jeder Pfad nicht überdeckter Kanten trivial ist. Mit Lemma 4.13 und wiederum Folgerung 4.12 ergibt sich insbesondere, dass das Bild aller auf T_S abgebildeten S -relevanten Kanten aus T_G , vereinigt mit dem Bild $\Phi(I(T_G))$, eine Überdeckung des kompletten Splitbaums $ST(S)$ bis auf seine Blätter ergibt. In dieser Überdeckung werden maximal degenerierte innere Knoten von T_S mehrfach überdeckt.

5. Simultanes Kreissehnengraphenproblem

Ziel dieses Kapitels ist es das simultane Kreissehnengraphenproblem für einen zusammenhängenden und in ausschließlich nicht degenerierte Teile zerlegbaren Schnittgraphen zu lösen. Dabei wird das Verständnis aller Sehnendiagramme eines Kreissehnengraphen benötigt, welches in Kapitel 3 über eine Bijektion zwischen den Konfigurationen des Splitbaums und den Sehnendiagramme eines Graphen beschrieben wurde. Zusätzlich werden die Verwandtschaftsfunktion, definiert in Kapitel 4, die Stammbäume, sowie deren Eigenschaften auf dem Splitbaum eines Teilgraphen verwendet.

Definition 5.1 (Simultanes Kreissehnengraphenproblem – SIM(CIRCLE)). [CFK13]

Eingabe: Eine Menge von Graphen G_1, \dots, G_k mit einem paarweise identischen Schnitt S , d.h. $G_i \cap G_j = S$ für alle $i \neq j$.

Frage: Gibt es Kreissehnendiagramme C_1, \dots, C_k für G_1, \dots, G_k , sodass diese, paarweise eingeschränkt auf die Sehnen der Knoten von S , gleich sind, d.h. $C_i|_S = C_j|_S$ für alle $i \neq j$?

Die Frage des simultanen Kreissehnengraphenproblems SIM(CIRCLE) lässt sich auch umformulieren zu: Existiert ein Sehnendiagramm C_S von S , sodass C_S erweiterbar ist für jeden Graphen G_1, \dots, G_2 ?

Wie schon in Abschnitt 2.7 eingeführt, ist für einen Graphen G und einen knoteninduzierten Teilgraphen $G' \subset G$ mit einem Sehnendiagramm C' , das Sehnendiagramm C' genau dann erweiterbar, wenn ein Sehnendiagramm C_G von G existiert mit $C|_{G'} = C'$. Aus dieser Definition für Erweiterbarkeit folgt direkt für einen Kreissehnengraph G , dass

$$\{C|_{G'} \mid C \text{ ist ein Sehnendiagramm für } G, G' \subset G \text{ knoteninduzierter Teilgraph}\}$$

die Menge aller Sehnendiagramme ist, die erweiterbar ist zu einem Sehnendiagramm für G . Deshalb ist es das Ziel des Abschnitts 5.2, für jedes Sehnendiagramm C eines Graphen und einen knoteninduzierten Teilgraphen S , das eingeschränkte Sehnendiagramm $C|_S$ als Konfiguration auf den Splitbaum $ST(S)$ zu übertragen. Diese Konfigurationen sollen dann als Lösungsmenge einer aussagenlogischen Formel interpretiert werden. Die Lösungsmenge dieser aussagenlogischen Formel sind demnach äquivalent zu den Eingaben des Erweiterungsproblems REPEXT(CIRCLE), für die eine Lösung existiert. Die Laufzeit des betrachteten Erweiterungsproblems wird in Abschnitt 5.3 untersucht. Mit Hilfe der entwickelten aussagenlogischen Formel für jeden der Eingabegraphen des simultanen Kreissehnengraphenproblems

kann dann in Abschnitt 5.4 das simultane Kreissehnengraphenproblem für einen, in ausschließlich nicht degenerierte Teile zerlegbaren, Schnittgraphen gelöst werden. Dabei wird für eine Eingabe von k Graphen G_1, \dots, G_k eine Laufzeit in $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^k |V(G_i)|^3)$ erreicht.

Vorerst werden jedoch einige vereinfachende Annahmen in Abschnitt 5.1 gemacht, einerseits um triviale Fälle auszuschließen und andererseits um ein leichteres Problem zu betrachten, in dem zusätzliche Forderung an den Schnittgraphen gestellt werden.

5.1 Vereinfachende Annahmen

Betrachtet man das simultane Kreissehnengraphenproblem näher, ergeben sich direkt einige Fälle, in denen die Lösung sehr einfach ist oder das Problem keine Lösung besitzt.

Lemma 5.2. *Sei G ein Kreissehnengraph und S ein nicht knoteninduzierter Teilgraph von G . Dann existiert kein Sehnendiagramm für S , das zu einem von G erweiterbar ist.*

Beweis. Sei G ein Kreissehnengraphen mit einem nicht knoteninduzierten Teilgraph S . Da S nicht knoteninduziert ist für G , muss es eine Kante $xy \in E(G)$ mit $x, y \in V(S)$ geben, die nicht in S ist, daher $xy \notin E(S)$. Sei C ein beliebiges Sehnendiagramm für G , dann müssen sich die Sehnen s_x und s_y die zu x und y korrespondieren in C schneiden, da $xy \in E(G)$. In einem Sehnendiagramm für S dürfen sich diese beiden Sehnen jedoch nicht schneiden. Bei der Erweiterung eines Sehnendiagramms dürfen nur neue Sehnen hinzugefügt werden und die Endpunkte der Sehnen im zu erweiternden Sehnendiagramm nicht vertauscht werden. Daher kann kein Sehnendiagramm von S zu einem von G erweitert werden. \square

Für den restlichen Teil dieser Arbeit werden drei Annahmen getroffen um einige einfache Fälle des simultanen Kreissehnengraphenproblems auszuschließen, in denen die Lösung trivial ist.

1. Der Schnittgraph S sei nichtleer.
2. Der Schnittgraph S sei ein knoteninduzierter Teilgraph von G_i für alle $i = 1, \dots, k$.
3. Die Eingabegraphen G_1, \dots, G_k seien Kreissehnengraphen.

Die Annahme 1 wird getroffen, da für einen leeren Schnittgraphen S die Lösbarkeit des simultanen Kreissehnengraphenproblem nur dadurch bestimmt ist, ob die Eingabegraphen Kreissehnengraphen sind oder nicht. Ist einer der Eingabegraphen kein KSG, dann gibt es keine Lösung und ansonsten gibt es eine, nämlich einen leeren Kreis für S , da $S = \emptyset$, und jeweils ein Sehnendiagramm für G_1, \dots, G_k . Nach Lemma 5.2 ist das simultane Kreissehnengraphenproblem nicht lösbar, wenn S kein knoteninduzierter Teilgraph aller Eingabegraphen ist. Daher schließt Annahme 2 wiederum einen trivial nicht lösbaren Fall aus. Annahme 3 beruht darauf, dass die Eingabegraphen G_1, \dots, G_k alle KSGen sein müssen, damit es eine Lösung gibt. Da KSGen hereditär sind, folgt im Fall, dass alle Eingabegraphen KSGen sind direkt diese Eigenschaft auch für den Teilgraphen S . Annahmen 1-3 sind demnach keine Einschränkungen des simultanen Kreissehnengraphenproblems, sondern schließen nur trivial lösbare beziehungsweise nicht lösbare Fälle des Problems aus.

Sei H ein Graph. Dann heißt H *prim-zerlegbar*, wenn alle inneren Knoten seines Splitbaums $ST(H)$ mit nicht degenerierten Graphen beschriftet sind.

Als einzige vereinfachende Einschränkung wird in dieser Arbeit angenommen, dass der Schnittgraph des simultanen Kreissehnengraphenproblems zusammenhängend und prim-zerlegbar ist. Ist der Schnittgraph S der Eingabegraphen G_1, \dots, G_k zusammenhängend, dann ist es ausreichend, die Zusammenhangskomponente von G_i zu betrachten, die S enthält, für alle $i = 1, \dots, k$.

Seien G_1, \dots, G_k zusammenhängende Kreissehnengraphen mit einem paarweise nichtleeren Schnitt $S := G_i \cap G_j$ für alle $i \neq j$ und $i, j = 1, \dots, k$, sowie S ein knoteninduzierter, prim-zerlegbarer und zusammenhängender Teilgraph jedes Eingabegraphen. Dann wird das $(k + 1)$ -Tupel (G_1, \dots, G_k, S) eine *simultane Kreissehnengrapheninstanz* (kurz: *SKI*) genannt. Eine SKI berücksichtigt damit genau die Annahmen 1-3, sowie die Vereinfachung, dass S als zusammenhängend und prim-zerlegbar angenommen wird.

Wie schon in Abschnitt 4.2 in Kapitel 4 untersucht, ist es für eine simultane Instanz (G_1, G_2, S) äquivalent die simultane Instanz $(\text{Gr}(\text{Rel}(ST(G_1, S))), \text{Gr}(\text{Rel}(ST(G_2, S))), S)$ auf eine Lösung zu untersuchen. Dies gilt natürlich auch für eine SKI. Deshalb wird in diesem Kapitel für alle betrachteten simultanen Kreissehnengrapheninstanzen (G_1, \dots, G_k, S) zusätzlich angenommen, dass die Splitbäume $ST(G_i)$ für alle $i = 1, \dots, k$ nur aus S -relevanten inneren Knoten bestehen, d.h. $ST(G_i) = \text{Rel}(ST(G_i), S)$ für alle $i = 1, \dots, k$.

5.2 Lösung des Erweiterungsproblems

In diesem Abschnitt sollen für einen Kreissehnengraphen und einen knoteninduzierten, prim-zerlegbaren und zusammenhängenden Teilgraphen alle Sehnendiagramme des Teilgraphen gefunden werden, die erweiterbar sind. Hierzu werden vorerst noch einige Zusammenhänge zwischen den Splitbäumen beider Graphen benötigt, sowie zwischen deren Konfigurationen. Laut Kapitel 3 ist es äquivalent alle Konfigurationen eines Splitbaums zu betrachten anstatt alle Sehnendiagramme eines Graphen. Die Menge aller erweiterbaren Sehnendiagramme des Teilgraphen wird dann als Lösungsmenge eines Erfüllbarkeitsproblems mit binären Entscheidungsvariablen formuliert.

Bemerkung 5.3. *Sei G ein Graph und S ein knoteninduzierter, prim-zerlegbarer und zusammenhängender Teilgraph von G . Dann ist über die Menge aller Stammbäume definiert über die inneren Knoten von $ST(G)$ eine eindeutige Partition der inneren Knoten von $ST(S)$ definiert.*

Bemerkung 5.3 resultiert daraus, dass sich zwei Stammbäume nur in degenerierten Knoten schneiden können, wie in Lemma 4.13 gezeigt, und nach Lemma 4.16 jeder innere Knoten von $ST(S)$ in mindestens einem Stammbaum enthalten ist.

Sei H ein Graph mit Splitbaum $ST(H) = (T_H, F_H)$ und T ein über innere Knoten von T_H definierter knoteninduzierter Teilbaum von T_H . Dann ist der *Teil-GLT induziert durch T in $ST(H)$* der GLT, der aus dem Teilbaum T und der Vereinigung aller Kanten $e = \nu\lambda \in E(T_H \setminus T)$ entsteht mit $\nu \in V(T)$, die zu einem beliebigen Blatt b aus $A(\rho_\nu(e))$ adjazent gemacht werden. Die Menge der Beschriftungsgraphen des Teil-GLTs ist durch die Einschränkung von F_H auf die Beschriftungsgraphen der Knoten aus T definiert. Beachte, dass durch die Definition ein Teil-GLT im Allgemeinen nicht eindeutig ist. Hingegen ist für jeden möglichen Teil-GLT induziert durch T sein Erreichbarkeitsgraph ein knoteninduzierter Teilgraph von H , da sich durch die Definition des Teil-GLTs genau dieselben Erreichbarkeiten seiner Blätter, wie in $ST(H)$ ergeben. Außerdem ist jeder Teil-GLT genau der Splitbaum seines Erreichbarkeitsgraphen, da wie in $ST(H)$ keine Stern- bzw. Cliques-zusammenschlüsse möglich sind. Ein Beispiel ist in Abb. 5.1 gegeben.

Sei (K, \vec{E}) eine Konfiguration des Splitbaums $ST(H)$ und \tilde{T} ein beliebiger Teilgraph von T_H . Die Einschränkung der Konfiguration (K, \vec{E}) auf die Sehnendiagramme der Beschriftungsgraphen der inneren Knoten aus \tilde{T} und Kanten von \tilde{T} wird *Teilkonfiguration von $ST(H)$* genannt und mit $(K|_{I(\tilde{T})}, \vec{E}|_{E(\tilde{T})})$ notiert. Beachte, dass \tilde{T} weder knoteninduziert noch zusammenhängend sein muss. Sei (K', \vec{E}') eine Konfiguration eines Teil-GLTs (T', F') induziert durch den Teilbaum T , dann ist diese ebenfalls eine Teilkonfiguration von $ST(H)$.

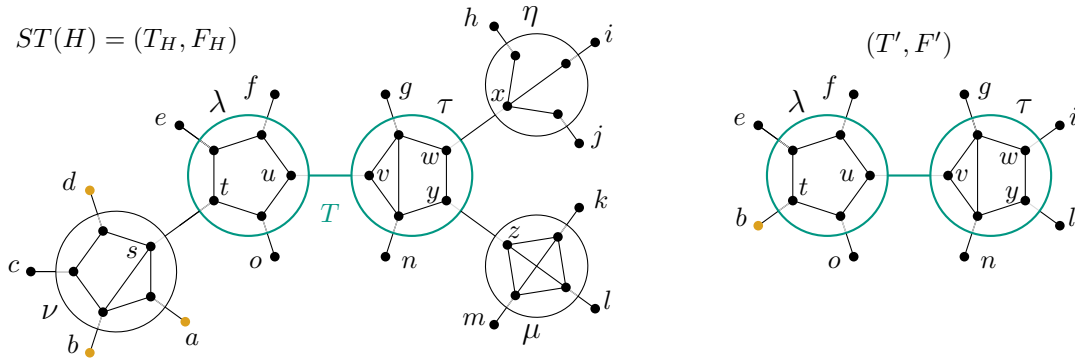


Abbildung 5.1: Links ist der Splitbaum $ST(H) = (T_H, F_H)$ des Graphen H und der durch die Knoten λ und τ induzierte Teilbaum T gegeben. Für den Markierer $t \in V(\lambda)$ ist die Erreichbarkeitsmenge $A(t) = \{a, b, d\}$. Rechts ist ein möglicher erweiterter Teil-GLT (T', F') induziert von T in $ST(H)$ gegeben. Ersetzt man das Blatt b in T' durch eines der Blätter a oder d erhält man einen weiteren gültigen Teil-GLT induziert von T in $ST(H)$.

Lemma 5.4. *Sei G ein Graph mit Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$ und S sei ein knoteninduzierter, zusammenhängender und prim-zerlegbarer Teilgraph von G mit Splitbaum $ST(S)$. Weiter sei $\nu \in V(T_G)$ ein S -relevanter innerer Knoten. Dann gilt:*

- (i) *Die Wahl eines Sehnendiagramms C_ν für den Beschriftungsgraphen $G(\nu)$ definiert eine eindeutige Teilkonfiguration für $ST(S)$.*
- (ii) *Der Beschriftungsgraph $G(\nu) \in F_G$ ist nicht degeneriert.*

Beweis. Sei G ein Graph mit Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$ und S sei ein knoteninduzierter, zusammenhängender und prim-zerlegbarer Teilgraph von G mit Splitbaum $ST(S) = (T_S, F_S)$. Sei $\nu \in V(T_G)$ ein S -relevanter innerer Knoten. Zuerst wird gezeigt welche Beziehung zwischen dem Beschriftungsgraphen $G(\nu)$ und einem Teil-GLT induziert durch den Stammbaum T_ν in T_S besteht. Nach Bemerkung 2.10 (iv) existiert für den Beschriftungsgraphen $G(\nu) \in F_G$ eine Teilmenge von Blättern $L \subset L(T_G)$, sodass $G(\nu)$ isomorph zu $G|_L$ ist. Die Menge L erhält man, wenn für jeden Markierer $q \in V(\nu)$ genau ein Blatt aus $A(q)$ gewählt wird. Da ν laut Voraussetzung S -relevant ist, gilt $A(p)|_{V(S)} \neq \emptyset$ für mindestens drei Markierer $p \in V(\nu)$. Sei nun L eine Menge von Blättern, die einen zu $G(\nu)$ isomorphen Teilgraphen von G mit einer maximalen Anzahl von Blättern aus $V(S)$ definiert. Dann wurde für jeden Markierer $q \in V(\nu)$, dessen Erreichbarkeitsmenge $A(q)$ eingeschränkt auf $V(S)$ nichtleer ist, ein Blatt aus $A(q)|_{V(S)}$ gewählt. Sei $\tilde{L} := L|_{V(S)}$, dann ist $G|_{\tilde{L}}$ ein knoteninduzierter Teilgraph von $G|_L$. Sei T_ν der Stammbaum von ν in T_S . Da S prim-zerlegbar ist, schneiden sich keine zwei Stammbäume, weil sie sich nach Lemma 4.13 nur in einem degenerierten Knoten schneiden können. Insbesondere gibt es also keinen Stammbaum, der sich mit T_ν schneidet. Mit Bemerkung 4.14 folgt daher, dass alle direkt zu T_ν inzidenten Blätter ebenfalls inzident zu ν in T_G sind. Außerdem lässt sich, wegen der Definition eines Stammbaums, für jeden Markierer p mit $|L(p)| > 1$ eines inneren Knotens $\mu \in T_\nu$, genau ein Blatt b wählen mit $b \in A(p) \cap \tilde{L}$. Also existiert ein Teil-GLT (\bar{T}_ν, F_ν) induziert durch T_ν in T_S mit $L(\bar{T}_\nu) = \tilde{L}$ und es gilt $\text{Gr}(\bar{T}_\nu, F_\nu) = G|_{\tilde{L}}$.

Zu (i): Wählt man nun ein Sehnendiagramm C_ν für den Beschriftungsgraphen $G(\nu)$, dann ist die Einschränkung $C_\nu|_{V(S)}$ ein Sehnendiagramm für $G|_{\tilde{L}}$ und somit für den Erreichbarkeitsgraphen des Teil-GLT (\bar{T}_ν, F_ν) . Nach Bemerkung 3.4 ist eine eindeutige Konfiguration für den Teil-GLT (\bar{T}_ν, F_ν) durch $C_\nu|_{V(S)}$ definiert. Damit ergibt sich eine Teilkonfiguration für den Splitbaum $ST(S)$ und Behauptung (i) gilt.

Zu (ii): Da S prim-zerlegbar ist, sind auch alle Beschriftungsgraphen in dem Teil-GLT

(\vec{T}_ν, F_ν) von $ST(S)$ nicht degeneriert. Insbesondere ist damit der Erreichbarkeitsgraph $\text{Gr}(\vec{T}_\nu, F_\nu)$ nicht degeneriert. Da jeder knoteninduzierte Teilgraph einer Clique oder eines Sterns wieder eine Clique bzw. ein Stern ist und $\text{Gr}(\vec{T}_\nu, F_\nu) = G|_{\vec{L}}$ ein nicht degenerierter Teilgraph eines zu $G(\nu)$ isomorphen Graphen ist, ist der Beschriftungsgraph $G(\nu)$ ebenfalls nicht degeneriert. Es gilt daher Behauptung (ii). \square

Lemma 5.5. *Sei G ein Graph mit Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$ und S sei ein knoteninduzierter, zusammenhängender und prim-zerlegbarer Teilgraph von G . Sei zusätzlich ν ein innerer Knoten in T_G , C_ν ein Sehnendiagramm für $G(\nu)$ und (K, \vec{E}) die implizierte Teilkonfiguration durch den Stammbaum T_ν auf $ST(S)$. Dann impliziert C_ν^r die Teilkonfiguration (K', \vec{E}') mit $K'(\mu) := K(\mu)^r$ für alle $\mu \in I(T_S)$ und $\vec{E}' := \{\tau\mu \mid \mu\tau \in \vec{E}\}$.*

Beweis. Nach Bemerkung 3.3 (i) gilt für zwei Sehnendiagramme C_1 und C_2 die über \otimes und die Sehnen $s_x \in C_1$ bzw. $s_y \in C_2$ verknüpft werden:

$$(C_1 \otimes_{xy} C_2)^r = C_2^r \otimes_{yx} C_1^r.$$

Zusammen mit Lemma 5.4 folgt direkt die Behauptung. \square

Sei für den Rest dieses Abschnitts G ein Kreissehnengraph und $S \subset G$ ein knoteninduzierter, prim-zerlegbarer und zusammenhängender Teilgraph. Weiter sei jeder innere Knoten des Splitbaums $ST(G) = (T_G, F_G)$ ein S -relevanter Knoten und $ST(S) = (T_S, F_S)$ der Splitbaum von S .

Für ein gegebenes Sehnendiagramm C des Graphen G und seine Konfiguration soll die Einschränkung $C|_S$ und die zugehörige Konfiguration von $ST(S)$ betrachtet werden. Sei (K_G, \vec{E}_G) die Konfiguration von $ST(G)$ mit $C(K_G, \vec{E}_G) = C$. Da über die Funktion K_G für jeden inneren Knoten ν in T_G ein Sehnendiagramm gewählt wird, wird nach Lemma 5.4 (i) jedes dieser auf eine Teilkonfiguration des Splitbaums $ST(G)$, genauer gesagt den Stammbaum T_ν , abgebildet. Sei (K_ν, \vec{E}_ν) die Teilkonfiguration impliziert durch das Sehnendiagramm $K_G(\nu)$ für jeden inneren Knoten $\nu \in V(T_G)$. Da S prim-zerlegbar ist, ist jeder Beschriftungsgraph in F_S nicht degeneriert. Nach Lemma 4.13 können sich zwei Stammbäume nur in einem degenerierten Knoten von $ST(S)$ schneiden, daher gilt $T_\nu \cap T_\lambda = \emptyset$ für alle $\nu \neq \lambda \in I(T_G)$. Mit Lemma 4.16 folgt, dass die Funktion $K_S(\mu) := K_\nu(\mu)$ für alle $\mu \in (T_S)$ wohldefiniert ist, da jeder innere Knoten $\mu \in I(T_S)$ genau in einem Stammbaum enthalten ist. Wieder aufgrund der Tatsache, dass jeder Beschriftungsgraph von $ST(S)$ nicht degeneriert ist, muss jede innere Kante e des Splitbaums $ST(G)$ auf eine innere Kante in $ST(S)$ abgebildet werden. Sei $E' \subset E(T_S)$ die Menge der inneren Kanten von $ST(S)$, auf die die inneren Kanten $E(T_G)$ abgebildet werden. Aus der Definition von Stammbäumen folgt direkt, dass $E' \cap T_\nu = \emptyset$ für alle $\nu \in I(T_G)$ gilt. Mit Bemerkung 5.3 folgt also $V(T_S) = \dot{\bigcup}_{\nu \in I(T_G)} V(T_\nu)$ und $E(T_S) = E' \dot{\cup} \left(\dot{\bigcup}_{\nu \in I(T_G)} E(T_\nu) \right)$. Damit definiert die Konfiguration (K_G, \vec{E}_G) über die zu jeder Kante $e \in E'$ inzidenten Knoten, deren Sehnendiagramme festgelegt sind, ebenfalls eine Richtung und somit die Teilkonfiguration (\emptyset, \vec{E}') . Insgesamt ergibt sich also eine Konfiguration für den ganzen Splitbaum $ST(S)$, diese wird mit (K_{C_G}, \vec{E}_{C_G}) notiert und als die von C_G auf $ST(S)$ implizierte Konfiguration bezeichnet. Aus der obigen Argumentation ergibt sich demnach die Folgerung 5.6.

Folgerung 5.6. *Ein Sehnendiagramm $C_S = C(K_S, \vec{E}_S)$ von S ist genau dann erweiterbar, wenn die Erweiterungsbedingung gilt mit*

$$\exists C \in \mathcal{D}(G(\nu)) \forall \nu \in I(T_G): (K_C, \vec{E}_C) = (K_S, \vec{E}_S)|_{T_\nu}.$$

Da der Splitbaum $ST(G)$ des betrachteten Graphen G nur aus S -relevanten Knoten besteht und S prim-zerlegbar ist, folgt aus Lemma 5.4 (ii), dass alle Beschriftungsgraphen von G nicht degeneriert und prim sind. Nach Satz 2.17 gibt es somit genau zwei Sehnendiagramme für jeden Beschriftungsgraphen $G(\nu) \in F_G$, die diesen darstellen. Für jeden inneren Knoten $\nu \in V(T_G)$ enthält die Menge der Darstellungen seines Beschriftungsgraphen $\mathcal{D}(G(\nu))$ demnach nur zwei Sehnendiagramme für die gilt: $C \in \mathcal{D}(G(\nu))$ impliziert $C^r \in \mathcal{D}(G(\nu))$.

Ziel ist es nun, mit dieser Vereinfachung für die Erweiterungsbedingung ein Erfüllbarkeitsproblem zu definieren. Als Grundlage, für welches Sehnendiagramm beziehungsweise welche Kantenrichtung einer inneren Kante eine Variable in dem Erfüllbarkeitsproblem steht, wird vorerst eine Referenz benötigt.

Sei H ein Graph und $ST(H) = (T_H, F_H)$ sein Splitbaum. Sei für jeden inneren Knoten ν des Splitbaums $ST(H)$ jedes Sehnendiagramm C aus der Menge der Darstellungen $\mathcal{D}(G(\nu))$ von $G(\nu)$ zusätzlich mit Richtungen für die einzelnen Sehnen ausgestattet. Diese Mengen gerichteter Sehnendiagramme seien in der Menge $\vec{\mathcal{D}}(\nu) := \{\vec{C} \mid C \in \mathcal{D}(\nu)\}$ zusammengefasst. Dann wird das Produkt aller dieser Mengen mit $\mathcal{D} := \times_{\nu \in I(T_H)} \vec{\mathcal{D}}(\nu)$ bezeichnet und *Sehnendiagrammbasis* für $ST(H)$ genannt. Für einen $|I(T_H)|$ -Vektor $t = (C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_{|I(T_H)|}}) \in \mathcal{D}$ ist die bijektive Abbildung $K_t: I(T_H) \rightarrow t$ definiert mit $K_t(\nu) = K_\nu$ für alle $\nu \in I(T_H)$. Diese Abbildung K_t wird *Sehnendiagrammreferenz* genannt. Ist für den Stammbaum $ST(H)$ eine Sehnendiagrammbasis \mathcal{D} gegeben, dann werden alle Konfigurationen (K, \vec{E}) von $ST(H)$ über einen $|I(T_H)|$ -Vektor $t \in \mathcal{D}$ definiert. Sei zusätzlich \mathcal{E} die Menge der Kanten von T_H , in der jeder Kante eine feste Richtung zugewiesen ist. Diese Menge wird eine *Kantenreferenz* genannt. Für eine Sehnendiagrammbasis \mathcal{D} wird ein Tupel $\mathcal{R} := (K_t, \mathcal{E})$ aus einer Sehnendiagramm- und Kantenreferenz K_t mit $t \in \mathcal{D}$ bzw. \mathcal{E} als eine *Referenz für $ST(H)$* bezeichnet.

Lemma 5.7. *Sei ein prim-zerlegbarer Graph H gegeben, mit einer Sehnendiagrammbasis \mathcal{D} und einer Referenz $\mathcal{R} = (K_t, \mathcal{E})$ für $ST(H)$ mit einem festen $t \in \mathcal{D}$. Sei zusätzlich (K_s, \vec{E}) eine Konfiguration von $ST(H)$ eines fest gewählten Vektors $s \in \mathcal{D}$. Dann gilt für einen inneren Knoten $\nu \in V(T_H)$*

$$K_s(\nu) = K_t(\nu) \quad \vee \quad K_s(\nu) = (K_t(\nu))^r \quad (5.1)$$

und für eine innere Kante $e \in E(T_H)$

$$e \in \mathcal{E} \cap \vec{E} \quad \vee \quad e \notin \mathcal{E} \cap \vec{E}. \quad (5.2)$$

Beweis. Sei H ein prim-zerlegbarer Graph. Sei $ST(H) = (T_H, F_H)$ der Splitbaum von H und $G(\nu)$ der Beschriftungsgraph des inneren Knotens $\nu \in V(T_H)$. Dann ist $G(\nu)$ nicht degeneriert und besitzt nach Satz 2.17 genau zwei verschiedene Sehnendiagramme, die ihn darstellen und sich durch Spiegelung ineinander überführen lassen. Seien C und C^r die beiden ungerichteten Sehnendiagramme, die $G(\nu)$ darstellen. Für eine Sehnendiagrammbasis \mathcal{D} , kann jeder Eintrag für ν eines $|T_H|$ -Vektors $t \in \mathcal{D}$ nur ein Sehnendiagramm enthalten, welches entweder gleich zu C oder C^r ist. Sei $\mathcal{R} = (K_t, \mathcal{E})$ eine Referenz für $ST(H)$ mit $t \in \mathcal{D}$. Dann gilt (5.1) für jede Konfiguration (K_s, \vec{E}) mit $s \in \mathcal{D}$. Da eine innere Kante $e \in E(T_H)$ zwischen Knoten ν und λ nur die Richtung $\nu\lambda$ oder $\lambda\nu$ haben kann, gilt (5.2). \square

Seien die Voraussetzungen wie in Lemma 5.7, dann lässt sich für jeden inneren Knoten $\nu \in V(T_H)$ und jede innere Kante $e \in E(T_H)$ eine aussagenlogische Variable x_ν bzw. y_e definieren über

$$\begin{aligned} x_\nu = 1 &: \Leftrightarrow K_s(\nu) = C_t(\nu) & x_\nu = 0 &: \Leftrightarrow K_s(\nu) = (K_t(\nu))^r \\ y_e = 1 &: \Leftrightarrow e \in \mathcal{E} \cap \vec{E} & y_e = 0 &: \Leftrightarrow e \notin \mathcal{E} \cap \vec{E}. \end{aligned}$$

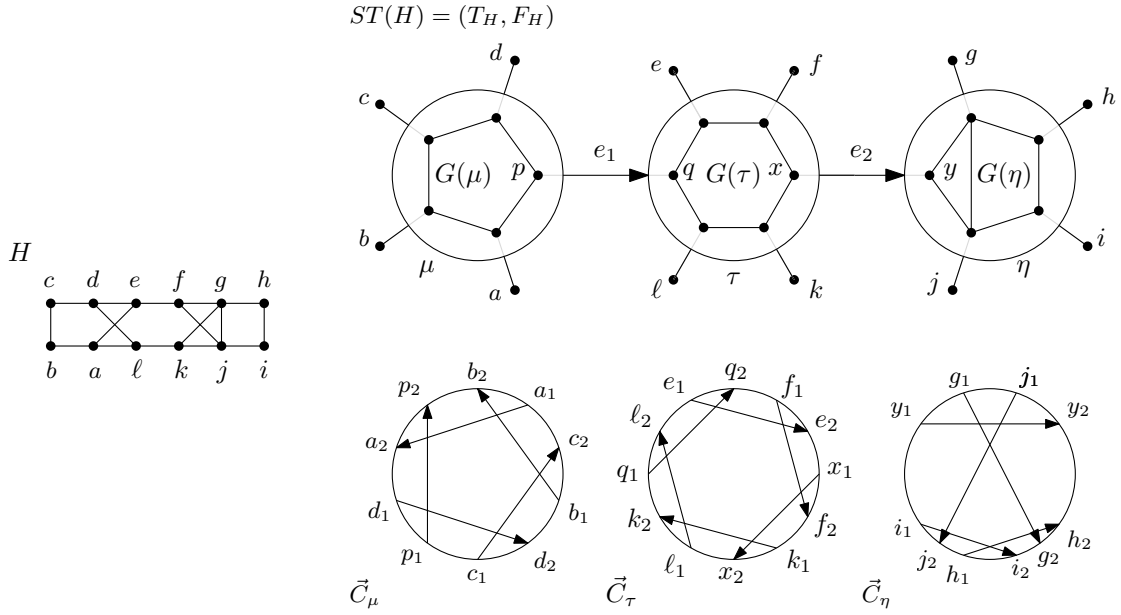


Abbildung 5.2: Für den prim-zerlegbaren und zusammenhängenden Graphen H ist sein Splitbaum $ST(H)$ gegeben. Zusätzlich ist $ST(H)$ mit der Referenz $t = (\vec{C}_\mu, \vec{C}_\tau, \vec{C}_\eta)$, der Kantenbasis $\mathcal{E} = \{\mu\tau, \tau\eta\}$ und den Entscheidungsvariablen $\{x_\mu, x_\tau, x_\eta, e_1, e_2\}$ ausgestattet.

Diese Variablen x_ν für alle inneren Knoten $\nu \in V(T_H)$ und y_e für alle inneren Kanten $e \in E(T_H)$ werden *Entscheidungsvariablen* genannt. Beachte, dass der Wert der Entscheidungsvariablen von der Wahl der Sehnendiagrammbasis und der jeweiligen Referenz abhängen. Nach Lemma 5.7 lässt sich jede Konfiguration (K_s, \vec{E}) mit $s \in \mathcal{D}$ durch genau einen Vektor $v = (x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_{|I(T_H)|}}, y_{e_1}, \dots, y_{e_{|\vec{E}|}}) \in \{0, 1\}^{|I(T_H)| + |\vec{E}|}$ ausdrücken. Da Bemerkung 3.4 besagt, dass jede Konfiguration eines Splitbaums genau einem Sehnendiagramm des Erreichbarkeitsgraphen zugeordnet ist, lässt sich ebenfalls jedem Sehnendiagramm C von H ein eindeutiger Vektor $v \in \{0, 1\}^{|I(T_H)| + |\vec{E}|}$ zuordnen.

Sei H ein prim-zerlegbarer Graph. Der Splitbaum $ST(H)$ zusammen mit einer Referenz, einer Kantenbasis und zugehörigen Entscheidungsvariablen *ausgestatteter Splitbaum* genannt. Ein Beispiel für einen ausgestatteten Splitbaum ist in Abbildung 5.2 gegeben.

Sei H ein prim-zerlegbarer Graph mit einem ausgestatteten Splitbaum $ST(H)$. Sei dazu \mathcal{D} die Sehnendiagrammbasis, $t \in \mathcal{D}$ die Referenz und \mathcal{E} die Kantenbasis und (K_r, \vec{E}) eine Konfiguration des Splitbaums $ST(H)$ mit $r \in \mathcal{D}$. Das *Erfüllbarkeitsproblem von (K, \vec{E})* ist definiert über die konjunktionale Verkettung einer Klausel für jede innere Kante $e = \mu\tau$ von $ST(H)$, welche durch die Art des Knotenzusammenschlusses auf dieser Kante definiert ist. Die Klausel wird wie folgt impliziert:

$$K_r(\mu) = K_t(\mu) \quad \wedge \quad e \in \mathcal{E} \quad \wedge \quad K_r(\tau) = K_t(\tau) \quad \Rightarrow \quad (x_\mu \wedge y_e \wedge x_\tau) \quad (5.3)$$

$$K_r(\mu) = K_t^r(\mu) \quad \wedge \quad e \notin \mathcal{E} \quad \wedge \quad K_r(\tau) = K_t^r(\tau) \quad \Rightarrow \quad (\neg x_\mu \wedge \neg y_e \wedge \neg x_\tau) \quad (5.4)$$

$$K_r(\mu) = K_t^r(\mu) \quad \wedge \quad e \in \mathcal{E} \quad \wedge \quad K_r(\tau) = K_t(\tau) \quad \Rightarrow \quad (\neg x_\mu \wedge y_e \wedge x_\tau) \quad (5.5)$$

$$K_r(\mu) = K_t(\mu) \quad \wedge \quad e \notin \mathcal{E} \quad \wedge \quad K_r(\tau) = K_t^r(\tau) \quad \Rightarrow \quad (x_\mu \wedge \neg y_e \wedge \neg x_\tau) \quad (5.6)$$

$$K_r(\mu) = K_t(\mu) \quad \wedge \quad e \notin \mathcal{E} \quad \wedge \quad K_r(\tau) = K_t(\tau) \quad \Rightarrow \quad (x_\mu \wedge \neg y_e \wedge x_\tau) \quad (5.7)$$

$$K_r(\mu) = K_t^r(\mu) \quad \wedge \quad e \in \mathcal{E} \quad \wedge \quad K_r(\tau) = K_t^r(\tau) \quad \Rightarrow \quad (\neg x_\mu \wedge y_e \wedge \neg x_\tau) \quad (5.8)$$

$$K_r(\mu) = K_t^r(\mu) \quad \wedge \quad e \notin \mathcal{E} \quad \wedge \quad K_r(\tau) = K_t(\tau) \quad \Rightarrow \quad (\neg x_\mu \wedge \neg y_e \wedge x_\tau) \quad (5.9)$$

$$K_r(\mu) = K_t(\mu) \quad \wedge \quad e \in \mathcal{E} \quad \wedge \quad K_r(\tau) = K_t^r(\tau) \quad \Rightarrow \quad (x_\mu \wedge y_e \wedge \neg x_\tau) \quad (5.10)$$

Für den Graphen H aus Abb. 5.2 ergibt sich für die Konfiguration (K_r, \vec{E}) mit $r = (\vec{C}_\nu, \vec{C}_t a u, \vec{C}_\eta)$ und $\vec{E} = \{\nu\tau, \eta\tau\}$ das Erfüllbarkeitsproblem:

$$(x_\nu \wedge y_{e_1} \wedge \neg x_\tau) \wedge (\neg x_\tau \wedge \neg y_{e_2} \wedge x_\eta) = x_\nu \wedge y_{e_1} \wedge \neg x_\tau \wedge \neg y_{e_2} \wedge x_\eta.$$

Das Erfüllbarkeitsproblem einer Konfiguration hat also genau eine Lösung, welche gleich dem Vektor $v = (x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_{|I(T_H)|}}, y_{e_1}, \dots, y_{e_{|\vec{E}|}}) \in \{0, 1\}^{|I(T_H)| + |\vec{E}|}$ ist, der zu der betrachteten Konfiguration gehört. Mit Lemma 3.1 folgt, dass durch die Klauseln (5.3)-(5.10) alle voneinander verschiedenen Möglichkeiten zwei Sehnendiagramme und ihre Spiegelungen zu kombinieren, abgedeckt sind. Da alle Beschriftungsgraphen eines prim-zerlegbaren Graphen nicht degeneriert sind, ergibt jede der Kombinationen laut Lemma 3.5 ein anderes Sehnendiagramm.

Mit Hilfe eines ausgestatteten Splitbaums für den Teilgraphen S und den Klauseln des Erfüllbarkeitsproblems einer Konfiguration, soll nun entschieden werden, welche Sehnendiagramme des Teilgraphen zu einem Sehnendiagramm des gesamten Graphen G erweiterbar sind. Hierfür soll eine aussagenlogische Formel hergeleitet werden über die Entscheidungsvariablen des ausgestatteten Splitbaums und die Erweiterbarkeitsbedingung definiert über die Stammbäume. Die Lösungsmenge dieser Formel soll zu allen Konfigurationen beziehungsweise der Menge der Sehnendiagramme des Teilgraphen korrespondieren, die zu einem Sehnendiagramm des gesamten Graphen erweiterbar sind.

Betrachte also den Graphen G zusammen mit seinem knoteninduzierten, prim-zerlegbaren und zusammenhängenden Teilgraphen S . Zusätzlich sei der Splitbaum $ST(S) = (T_S, F_S)$ von S ausgestattet mit einer Sehnendiagrammbasis \mathcal{D}_S , einer Referenz (K_{t_S}, \mathcal{E}_S) , $t_S \in \mathcal{D}_S$, sowie zugehörigen Entscheidungsvariablen x_μ für alle $\mu \in I(T_S)$ und y_e für alle inneren Kanten $e \in E(T_S)$. Sei \mathcal{D}_G eine Sehnendiagrammbasis für den Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$, sowie $t_G \in \mathcal{D}_G$ ein fest gewählter Vektor.

Da alle inneren Knoten von $ST(G)$ S -relevant sind und S prim-zerlegbar ist, folgt zusammen mit Lemma 5.4 (ii), dass alle Beschriftungsgraphen F_G nicht degeneriert sind. Nach Satz 2.17 gibt es jeweils genau zwei Sehnendiagramme, die einen der Beschriftungsgraphen aus F_G darstellen. Sei ν ein innerer Knoten von T_G mit Stammbaum T_ν , dann sind $K_{t_G}(\nu)$ und $K_{t_G}(\nu)^r$ genau die beiden Sehnendiagramme, die $G(\nu)$ darstellen. Sei (K_t, \vec{E}) eine Konfiguration von $ST(S)$ mit Sehnendiagramm $C_S := C(K_t, \vec{E})$ und $t \in \mathcal{D}_S$. Nach Folgerung 5.6 ist ein Sehnendiagramm genau dann erweiterbar, wenn die Erweiterungsbedingung gilt. Das Sehnendiagramm C_S ist demnach genau dann erweiterbar, wenn für alle $\nu \in I(T_G)$ gilt

$$(K_t, \vec{E})|_{T_\nu} = (K_{K_{t_G}(\nu)}, \vec{E}_{K_{t_G}(\nu)}) \quad \vee \quad (K_t, \vec{E})|_{T_\nu} = (K_{K_{t_G}(\nu)^r}, \vec{E}_{K_{t_G}(\nu)^r}).$$

Sei ν ein innerer Knoten von T_G . Dann folgt mit Lemma 5.5 für die auf T_S induzierten Teilkonfigurationen, dass $K_{K_{t_G}(\nu)}(\mu) = (K_{K_{t_G}(\nu)}(\mu))^r$ für alle $\mu \in T_\nu$ gilt und aus $\mu\tau \in \vec{E}_{K_{t_G}(\nu)}$ folgt $\tau\mu \in \vec{E}_{K_{t_G}(\nu)^r}$. Auf jeder Kante eines Stammbaums gilt demnach entweder eine der Klauseln $(a \wedge b \wedge c)$ von (5.3)-(5.10) oder die Klausel $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$. Somit muss auf jeder Kante $e = \mu\tau$ in $T_\nu \subset T_S$ eine der Klauseln (5.11)-(5.14) gelten, welche durch die Teilkonfigurationen $(K_{K_{t_G}(\nu)}, \vec{E}_{K_{t_G}(\nu)})$ und $(K_{K_{t_G}(\nu)^r}, \vec{E}_{K_{t_G}(\nu)^r})$ impliziert werden.

$$(x_\mu \wedge y_e \wedge x_\tau) \vee (\neg x_\mu \wedge \neg y_e \wedge \neg x_\tau) \tag{5.11}$$

$$(\neg x_\mu \wedge y_e \wedge x_\tau) \vee (x_\mu \wedge \neg y_e \wedge \neg x_\tau) \tag{5.12}$$

$$(x_\mu \wedge \neg y_e \wedge x_\tau) \vee (\neg x_\mu \wedge y_e \wedge \neg x_\tau) \tag{5.13}$$

$$(\neg x_\mu \wedge \neg y_e \wedge x_\tau) \vee (x_\mu \wedge y_e \wedge \neg x_\tau) \tag{5.14}$$

Für eine innere Kante e von T_S , die in keinem Stammbaum T_ν für $\nu \in I(T_G)$ liegt, ist die Wahl ihrer Richtung unabhängig von allen anderen Wahlen in einer erweiterbaren Konfiguration von $ST(S)$. Somit ist jede Richtung für diese Kante wählbar. Als Klausel ausgedrückt gilt also

$$(y_e \vee \neg y_e) \quad \forall e: e \notin T_\nu \quad \forall \nu \in I(T_G) \quad (5.15)$$

Verknüpft man für jede innere Kante ihre Formeln, die von der Form wie (5.11)-(5.14) oder (5.15) sind, über Konjunktionen zu einer großen aussagenlogischen Formeln, erhält man ein größeres Erfüllbarkeitsproblem, welches alle der Entscheidungsvariablen enthält. Das entstandene Erfüllbarkeitsproblem wird *äquivalentes Erweiterungsproblem* genannt. Beachte, dass Klauseln der Form (5.15) auch weggelassen werden können, ohne die Lösungsmenge zu verändern. Eine Lösung des äquivalenten Erweiterungsproblem definiert nach der Definition der Entscheidungsvariablen genau eine Konfiguration des Splitbaums $ST(S)$.

Satz 5.8. *Die Lösungsmenge des äquivalente Erweiterungsproblem von S ist äquivalent zu allen erweiterbaren Sehnendiagrammen von S beziehungsweise deren Konfigurationen.*

Der Beweis von Satz 5.8 ergibt sich direkt aus der obigen Argumentation und Definition des äquivalenten Erweiterungsproblems.

5.3 Laufzeituntersuchung des Erweiterungsproblems

Dieser Abschnitt untersucht in welcher Laufzeit ein äquivalentes Erweiterungsproblem gelöst werden kann. Vorerst wird dafür analysiert, in welcher Zeit die zugrundeliegenden Strukturen, wie die Splitbäume und Referenzen berechnet werden können. Basierend darauf wird dann die Zeit analysiert, die maximal zum Lösen des äquivalenten Erweiterungsproblem benötigt wird.

Bemerkung 5.9. *Sei $H = (V, E)$ ein Graph.*

- (i) *Dann ist die Anzahl der inneren Kanten und Knoten seines Splitbaums $ST(H)$ beschränkt durch die Anzahl der Knoten von H .*
- (ii) *Sei $ST(H) = (T, F)$, dann lässt sich $\sum_{G \in F} |V(G)|$ in $\mathcal{O}(|V(H)|)$ Zeit berechnen.*

Beweis. Sei H ein Graph und $ST(H) = (T, F)$ sein Splitbaum. Zu (i): Ein Splitbaum ist nach Lemma 4.2 verästelt und somit hat jeder innere Knoten mindestens Grad Drei, also auch T . Nach Lemma 2.2 (iii) gilt daher für T : $|L(T)| \geq \frac{1}{2}|V(T)| + 1$. Da die Blätter des Splitbaums $ST(H)$ genau die Knoten des Graphen H sind, folgt $|V(H)| \geq \frac{1}{2}|V(T)| + 1$. Für einen Baum gilt nach Lemma 2.2 (i) ebenfalls $|E(T)| = |V(T)| - 1$. Insgesamt ist also die Anzahl der inneren Knoten und Kanten des Splitbaums $ST(H)$ beschränkt durch die Anzahl der Knoten von H .

Zu (ii): Aus dem Handshake Lemma 2.1 folgt für T , dass $\sum_{\nu \in T} \deg(\nu) = 2|E(T)|$ gilt. Außerdem gilt für Bäume $|E(T)| = |V(T)| - 1$ nach Lemma 2.2 (i). Aus der Definition von Splitbäumen folgt für jeden Beschriftungsgraphen $G(\nu) \in F$, dass $|V(G(\nu))| = \deg(\nu)$ gilt. Insgesamt folgt also $\sum_{G \in F} |V(G)| = 2(|V(T)| - 1)$. Zusammen mit Behauptung (i) ergibt sich direkt Behauptung (ii). \square

Im Folgenden sei $n_H := |V(H)|$ die Anzahl der Knoten eines Graphen H und $m_H := |E(H)|$ die Anzahl seiner Kanten. Ist $H' \subset H$ ein Teilgraph von H , dann gilt $n_{H'} \leq n_H$ und $m_{H'} \leq m_H$.

Lemma 5.10. *Sei G ein Graph und S ein knoteninduzierter, prim-zerlegbarer und zusammenhängender Teilgraph von G . Ein ausgestatteter Splitbaum $ST(S)$ für S , der Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$ und ein Sehnendiagramm für jeden Beschriftungsgraphen $G(\nu) \in F_G$ eines S -relevanten inneren Knotens $\nu \in V(T_G)$ lässt sich in $\mathcal{O}((n_G + m_G)\alpha(n_G + m_G))$ Zeit berechnen.*

Beweis. Sei G ein Graph und S ein knoteninduzierter, prim-zerlegbarer und zusammenhängender Teilgraph von G . Dann lässt sich der Splitbaum $ST(S) = (T_S, F_S)$ von S sowie ein Sehnendiagramm für jeden Beschriftungsgraphen und ein Sehnendiagramm für den Graphen S mit dem Algorithmus von Gioan et al. [GPTC14] berechnen in $\mathcal{O}((n_S + m_S)\alpha(n_S + m_S))$ Zeit, wobei α für die inverse Ackermannfunktion steht. Da im Algorithmus von Gioan et al. für jeden primen Beschriftungsgraphen ein Sehnendiagramm vorgehalten wird, können diese als Teil der Ausgabe des Algorithmus gefordert werden. Seien $\vec{C}_{\mu_1}, \dots, \vec{C}_{\mu_k}$ diese Sehnendiagramme aller Beschriftungsgraphen für die inneren Knoten $\{\mu_1, \dots, \mu_k\} = I(T_S)$. Dann gibt es eine Sehnendiagrammbasis \mathcal{D}_S von $ST(S)$, die den Vektor $t_s := (\vec{C}_{\mu_1}, \dots, \vec{C}_{\mu_k})$ enthält und somit ist t_s eine Referenz für den Splitbaum $ST(S)$. Damit der Splitbaum $ST(S)$ ausgestattet ist, fehlt noch eine Kantenbasis \mathcal{E} . Da für eine Kante $e = \mu\tau \in E(T_S)$ entweder die Richtung $\mu\tau$ oder $\tau\mu$ gewählt werden kann, ist es ausreichend für jede Kante die Entscheidung für eine der Richtungen zu treffen. Laut Bemerkung 5.9 ist die Anzahl der inneren Kanten und somit die Entscheidung für ihre jeweilige Richtung durch n_S beschränkt. Also kann eine Kantenbasis in $\mathcal{O}(n_S)$ Zeit gefunden werden. Analog lässt sich der Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$ für den Graphen G und ein Sehnendiagramm für jeden nicht degenerierten Beschriftungsgraphen in F_G in $\mathcal{O}((n_G + m_G)\alpha(n_G + m_G))$ Zeit finden. Also lässt sich in dieser Zeit ein Sehnendiagramm für jeden S -relevanten inneren Knoten von $ST(G)$ finden, da nach Lemma 5.4 (ii) jeder Beschriftungsgraph eines S -relevanten Knotens nicht degeneriert ist, wenn S knoteninduziert, prim-zerlegbar und zusammenhängend ist. Zusammengefasst lässt sich der ausgestattete Splitbaum $ST(S)$ und ein Sehnendiagramm für jeden Beschriftungsgraphen eines S -relevanten inneren Knoten in T_G in $\mathcal{O}((n_G + m_G)\alpha(n_G + m_G))$ Zeit berechnen. \square

Lemma 5.11. *Sei G ein Graph und S ein knoteninduzierter, prim-zerlegbarer und zusammenhängender Teilgraph von G . Zusätzlich seien die Splitbäume $ST(G) = (T_G, F_G)$ und $ST(S) = (T_S, F_S)$ gegeben. Die Menge aller Stammbäume $\mathcal{T} := \{T_\nu \mid \nu \in I(T_G)\}$, eine Beschriftung jeder Splitbaumkante mit ihrem zugehörigen eindeutigen Split und die Bijektion zwischen allen S -relevanten Kanten in T_G und den Kanten in T_S , die nicht in \mathcal{T} liegen, lässt sich in $\mathcal{O}(n_G)$ Zeit berechnen.*

Beweis. Sei G ein Graph mit Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$ und $S \subset G$ ein knoteninduzierter, prim-zerlegbarer und zusammenhängender Teilgraph mit Splitbaum $ST(S) = (T_S, F_S)$. Nach Lemma 4.5 enthält $\text{Rel}(ST(G), S)$ alle S -relevanten Knoten von $ST(G)$ und es ist äquivalent diesen Splitbaum zu betrachten. Aus der Definition eines Stammbaums folgt direkt, dass es ausreichend ist alle Kanten von $\text{Rel}(ST(G), S)$ auf $ST(S)$ abzubilden, um die Menge der Stammbäume auf $ST(S)$ zu bestimmen. Entferne daher alle Blätter $V(G) \setminus V(S)$ von $ST(G)$. Entferne danach rekursiv jeden inneren Knoten der Grad Eins hat und ersetze jeden inneren Knoten mit Grad Zwei durch eine Kante. Dann erhält man $\text{Rel}(ST(G), S)$ in $\mathcal{O}(|E(T_G)|)$ Schritten.

Um die Kanten von $\text{Rel}(ST(G), S)$ auf die in $ST(S)$ abbilden zu können, muss jede Kante mit ihrem zugehörigen Split beschriftet werden. Sei $ST(H) = (T_H, F_H)$ ein Splitbaum. Wurzele den Splitbaum $ST(H)$ für einen beliebigen inneren Knoten $w \in V(T_H)$, dann hat w Niveau 0 und jede Kante erbt das größere Niveau ihrer inzidenten Knoten. Ziel ist es durch eine Rekursion jeder Kante die Menge M aller Blätter zu zuweisen, die in dem Teilbaum unter ihr liegen, sowie die Menge $V(H) \setminus M$ und somit ihren induzierten Split.

Beachte, dass ein Split eindeutig durch einen Teil definiert ist, da für eine Split $\{V_A, V_B\}$ in H gilt $V(H) \setminus V_A = V_B$. Initialisiert wird die Rekursion durch ein leeres Tupel (A_e, B_e) an jeder Kante e . Im ersten Schritt wird für alle Kanten inzident zu einem Blatt dieses Tupel wie folgt aktualisiert. Sei $b \in V(H)$ ein Blatt mit Kante $e = b\nu$, dann wird der Kante e der Split $(\{b\}, V(H) \setminus \{b\})$ zugewiesen. Nun wird rekursiv für alle Kanten des Niveaus i , ausgehend vom größten Niveau, der folgende Schritt durchgeführt: Für die Kante $e = \nu\lambda$ mit Niveau i wird dem Split der Kante $e_\nu = \lambda\mu$ mit Niveau $i + 1$ die Menge A_e zu A_{e_ν} hinzugefügt. Die Rekursion wird abgebrochen, wenn der Knoten λ die Wurzel ist. Da jede Kante genau einmal abgearbeitet werden muss für die Rekursion, hat diese eine Laufzeit in $\mathcal{O}(|E(T_H)|)$. Somit können die Kanten von $\text{Rel}(ST(G), S)$ bzw. $ST(S)$ in $\mathcal{O}(|E(T_G)|)$ bzw. $\mathcal{O}(|E(T_S)|)$ Zeit mit ihrem zugehörigen Split beschriftet werden.

Nach der Definition 4.9 eines Stammbaums und Bemerkung 5.3 ist es ausreichend alle Kanten von $\text{Rel}(ST(G), S)$ auf die Kanten von $ST(S)$ abzubilden, um alle Stammbäume identifizieren zu können. Beachte, dass der Splitbaum $\text{Rel}(ST(G), S)$ durch Kantenkontraktionen aus $ST(S)$ erzeugt werden kann.

Sei $b \in V(S)$ fest gewählt. Wurzele $\text{Rel}(ST(G), S)$ und $ST(S)$ mit dem inneren Knoten, welcher in seiner Nachbarschaft das Blatt b hat. Initial werden alle Kanten in $\text{Rel}(ST(G), S)$ inzident zu einem Blatt $a \in V(S)$ der Kante in $ST(G)$ zugeordnet, die ebenfalls inzident zu dem Blatt a ist. Die Initialisierung erfolgt also in n_S Schritten.

Nun sollen rekursiv in jedem Schritt alle Kanten eines Niveaus in $\text{Rel}(ST(G), S)$ der Kante in $ST(S)$ mit demselben Split zugeordnet werden. Sei $e = \nu\lambda$ eine Kante mit Niveau i in $\text{Rel}(ST(G), S)$. Der Split der e zugeordnet ist, enthält alle Blätter unterhalb von e in dem gewurzelten Baum und ist insbesondere die Vereinigung der Splitteile der Kanten mit Niveau $i + 1$ in $\text{Rel}(ST(G), S)$, die inzident zu ν sind. Diesen Kanten mit Niveau $i + 1$ in $\text{Rel}(ST(G), S)$ wurden durch die Rekursion schon Bildkanten in $ST(S)$ zugeordnet, welche ebenfalls denselben Split in S darstellen. Sei \mathcal{E} die Menge aller dieser Bildkanten in $ST(S)$. Betrachte die Bildkante $e' \in \mathcal{E}$ mit dem größten Niveau. Starte von e' aus eine Tiefensuche, bis alle Kanten aus \mathcal{E} besucht wurden. Der Knoten mit dem niedrigsten Niveau j in dem Suchbaum muss dann inzident zu der Kante mit dem Split (A_e, B_e) und Niveau j sein. Da $\text{Rel}(ST(G), S)$ durch Kantenkontraktionen aus $ST(S)$ entstanden ist, kann keine noch nicht abgebildeten Kanten von $\text{Rel}(ST(G), S)$ in den Suchbaum abgebildet werden. Lösche daher den Suchbaum für den nächsten Abarbeitungsschritt. Nach Cormen [Cor13] hat die Tiefensuche eine lineare Laufzeit in der Anzahl der Kanten und Knoten des betrachteten Graphen. Damit ergibt sich für die gesamte Rekursion eine lineare Laufzeit, die nach Bemerkung 5.9 in $\mathcal{O}(n_G + n_S)$ liegt.

Insgesamt ergibt sich also eine lineare Laufzeit in $\mathcal{O}(n_G)$. \square

Lemma 5.12. *Sei G ein Graph und $S \subset G$ ein knoteninduzierter, prim-zerlegbarer und zusammenhängender Teilgraph. Dann lässt sich das äquivalente Erweiterungsproblem in $\mathcal{O}(n_G^3)$ Zeit aufstellen.*

Beweis. Sei G ein Graph und $S \subset G$ ein knoteninduzierter, prim-zerlegbarer und zusammenhängender Teilgraph. Nach Lemma 5.10 lässt sich ein ausgestatteter Splitbaum $ST(S) = (T_S, F_S)$, der Splitbaum $ST(G) = (T_G, F_G)$, sowie ein Sehnendiagramm für jeden S -relevanten inneren Knoten von T_G in $\mathcal{O}((n_G + m_G)\alpha(n_G + m_G))$ Zeit berechnen. Mit dem Laufzeitbeweis aus Lemma 5.11 kann die Menge aller Stammbäume $\mathcal{T} := \{T_\nu \mid \nu \in I(T_G)\}$, eine Beschriftung jeder Splitbaumkante mit ihrem zugehörigen eindeutigen Split und die Bijektion zwischen allen S -relevanten Kanten in T_G und den Kanten in T_S , die nicht in \mathcal{T} liegen, in $\mathcal{O}(n_G)$ Zeit berechnet werden.

Sei C_ν das berechnete Sehnendiagramm für den Beschriftungsgraphen $G(\nu) \in F_G$ von $\nu \in V(T_G)$. Dann lässt sich in $\mathcal{O}(|G(\nu)|)$ Zeit die Einschränkung $C_\nu|_{V(S)}$ auf die Sehnen korrespondierend zu Markierern, die inzident zu S -relevanten Kanten sind, berechnen.

Nach Bemerkung 5.9 (i) also in $\mathcal{O}(n_G)$ Zeit. Nach dem Beweis von Lemma 5.4 ist das Sehnendiagramm $C_\nu|_{V(S)}$ isomorph zu einem Sehnendiagramm für einen Teil-GLT (T', F') von $ST(S)$ induziert durch T_ν und induziert eine Teilkonfiguration auf T_ν . Jeder (A, B) Split in $\text{Gr}(T', F')$ ist durch eine Kante in T' repräsentiert und zerlegt nach Abschnitt 2.7 das zu $C_\nu|_{V(S)}$ korrespondierende Wort in vier Teilwörter, d.h. $\pi(C_\nu|_{V(S)}) = \pi_A \pi_B \pi'_A \pi'_B$. Sei $\mu \in V(T_S)$ ein innerer Knoten, T_ν der Stammbaum mit $\nu \in V(T_\nu)$, sowie C_ν sein zugehöriges berechnetes Sehnendiagramm für den Beschriftungsgraphen $G(\nu) \in F_G$. Zusätzlich sei $e = \mu\tau \in E(T_S)$ eine zu μ inzidente Kante. Dann lässt sich in $\mathcal{O}(1)$ Zeit auf den Split (A_μ, B_τ) zugreifen mit dem e beschriftet ist. In $\mathcal{O}(m_{T_S})$ Zeit lässt sich $\pi(C_\nu|_{V(S)})$ in vier Teilfolgen $\pi_{A_\mu} \pi_{B_\tau} \pi'_{A_\mu} \pi'_{B_\tau}$ zerlegen. Weiter lassen sich in $\mathcal{O}(1)$ Zeit die Wörter π_{B_τ} und π'_{B_τ} durch die Sehnenendpunkte der Sehne s_p für den Markierer $p := \rho_\mu(e)$ ersetzen. Verfährt man so rekursiv mit jeder zu μ inzidenten Kante in $E(T_S)$, dann erhält man in $\mathcal{O}(\deg(\mu)m_{T_S}) \in \mathcal{O}(n_S^2)$ Zeit ein Sehnendiagramm für den Beschriftungsgraphen $G(\mu) \in F_S$. In $\mathcal{O}(n_S)$ Zeit lässt sich überprüfen, ob dieses gleich zu dem Sehnendiagramm gegeben in der Referenz für $ST(S)$ ist. Da für jeden Beschriftungsgraphen in F_S überprüft werden muss, ob das Sehnendiagramm der Teilkonfiguration gleich der Referenz ist, lässt sich diese Entscheidung in $\mathcal{O}(n_S^3)$ Zeit lösen.

Nun fehlt für eine vollständige Teilkonfiguration des Teilbaums $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ eine korrekt gerichtete Kantenmenge \vec{E} . Sei $e = \mu\tau \in E(T_S)$, sowie $p := \rho_\mu(e)$ und $q := \rho_\tau(e)$ die Markierer in $G(\mu)$ bzw. $G(\tau)$. Zusätzlich seien \vec{C}_μ und \vec{C}_τ die beiden gerichteten Sehnendiagramme, die je nachdem welche Entscheidung zuvor berechnet wurde in der Referenz vorliegen oder die Spiegelung des Sehnendiagramms der Referenz sind. Betrachtet man die Richtungen der beiden Sehnen s_p in \vec{C}_μ und s_q in \vec{C}_τ , dann lässt sich in $\mathcal{O}(m_{T_S})$ Zeit die benötigte Richtung von e entscheiden. Insgesamt lässt sich demnach in $\mathcal{O}(n_S^2)$ Zeit die Richtung aller Kanten in $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ entscheiden.

Iteriert man über jede innere Kante von $ST(S)$ mit Information über ihre Richtung und den festgelegten Sehnendiagrammen ihrer inzidenten Knoten, dann lässt sich in $\mathcal{O}(m_{T_S})$ Zeit das äquivalente Erweiterungsproblem über eine der Formeln (5.11)-(5.15) erzeugen. Zusammengefasst lässt sich in einer Zeit von $\mathcal{O}(n_G^3)$ das Erweiterungsproblem für die Eingabe des Graphen G und $S \subset G$ erzeugen. \square

Satz 5.13. *Sei G ein Graph und S ein knoteninduzierter, prim-zerlegbarer und zusammenhängender Teilgraph von G . Dann lässt sich das äquivalente Erweiterungsproblem in $\mathcal{O}(n_G^3)$ Zeit lösen.*

Beweis. Sei G ein Graph und S ein knoteninduzierter, prim-zerlegbarer und zusammenhängender Teilgraph von G . Nach Lemma 5.12 lässt sich das äquivalente Erweiterungsproblem für G und S in $\mathcal{O}(n_G^3)$ Zeit aufstellen. Betrachtet man das äquivalente Erweiterungsproblem, dann ist jede der konjunktiv verknüpften Klauseln von der Form

$$\begin{aligned} & (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \\ = & (a \vee \neg a) \wedge (b \vee \neg a) \wedge (c \vee \neg a) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg b) \wedge (c \vee \neg b) \wedge \\ & (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (c \vee \neg c) \\ = & (b \vee \neg a) \wedge (c \vee \neg a) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c). \end{aligned}$$

Somit ist jede der Klauseln (5.3)-(5.10) ein 2-SAT Problem, also ein Erfüllbarkeitsproblem, in dem je zwei Entscheidungsvariablen einer Klausel über eine Disjunktion verknüpft sind. Nach [APT79] kann jedes 2-SAT Problem in linearer Zeit bezüglich der Anzahl der Entscheidungsvariablen gelöst werden. Das äquivalente Entscheidungsproblem kann also in $\mathcal{O}(n_G^3 + n_S + m_S) = \mathcal{O}(n_G^3)$ Zeit gelöst werden. \square

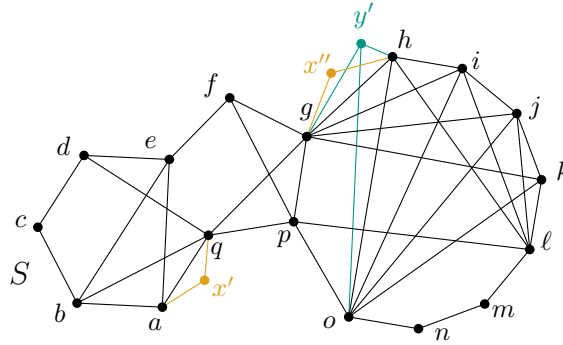


Abbildung 5.3: Für die simultane Instanz $(G_1, G_2, S) = (S \cup \{x', x''\}, S \cup \{y'\}, S)$ ist die Vereinigung $G_1 \cup G_2$ dargestellt. Der Schnittgraph S ist prim-zerlegbar vergleiche hierzu auch den Splitbaum $ST(S)$ in Abb. 5.4.

Für einen Graphen G und einen prim-zerlegbaren zusammenhängenden Teilgraphen S kann also in polynomieller Zeit die Menge der Sehnendiagramme von S berechnet werden, welche zu einem Sehnendiagramm von G erweiterbar sind.

Bemerkung 5.14. *Es kann in polynomieller Zeit von einer Lösung des äquivalenten Erweiterungsproblems mit Eingabegraphen G und $S \subset G$ prim-zerlegbar und zusammenhängend auf das zugehörige Sehnendiagramm von S geschlossen werden, welches zu einem Sehnendiagramm von G erweiterbar ist.*

5.4 Lösung des simultanen Kreissehnengraphenproblems

Bis jetzt wurde nur das Erweiterungsproblem mit einem prim-zerlegbaren Schnittgraphen betrachtet. Nun soll betrachtet werden, wie sich das Erweiterungsproblem mit einem prim-zerlegbaren und zusammenhängenden Schnittgraphen auf das simultane Kreissehnengraphenproblem mit denselben Anforderungen für den Schnittgraphen übertragen lässt. Beachte, dass in diesem Kapitel nach Abschnitt 5.1 jeder Schnittgraph einer simultanen Kreissehnengrapheninstanz knoteninduziert, prim-zerlegbar und zusammenhängend ist.

Wie schon zu Beginn dieses Kapitels beschrieben, ist es zum Lösen des simultanen Kreissehnengraphenproblems 5.1 äquivalent für eine SKI (G_1, \dots, G_k, S) die Fragestellung zu beantworten, ob es ein Sehnendiagramm von S gibt, welches erweiterbar zu jeweils einem Sehnendiagramm von G_i für alle $i = 1, \dots, k$ ist. In Abschnitt 5.2 wurde beschrieben, wie sich jedes dieser Erweiterungsprobleme als eine aussagenlogische Formel mit derselben Lösungsmenge formulieren lässt, das äquivalente Erweiterungsproblem. Verknüpft man über Konjunktionen für eine SKI (G_1, \dots, G_k, S) jedes der k äquivalenten Erweiterungsprobleme für die Eingabe (G_i, S) , dann erhält man wieder ein Entscheidungsproblem, welches *äquivalentes simultanes Kreissehnengraphenproblem* genannt wird.

Ein Beispiel für eine simultane Kreissehnengrapheninstanz (G_1, G_2, S) mit $k = 2$ ist in Abb. 5.3 gegeben. Die zugehörigen Splitbäume $ST(S) = (T_S, F_S)$, $ST(G_1) = (T_1, F_1)$, $ST(G_2) = (T_2, F_2)$ und eine fest gewählte Ausstattung $\mathcal{R} = (K_r, \mathcal{E})$ für $ST(S)$ sind in Abb. 5.4 dargestellt. Zusätzlich sind die Stammbäume der inneren Knoten von $ST(G_1)$ und $ST(G_2)$ in Abb. 5.5 auf $ST(S)$ veranschaulicht. Sei eine Sehnendiagrammbasis \mathcal{D}_1 für $ST(G_1)$, sowie \mathcal{D}_2 für $ST(G_2)$ gewählt und $t_1 \in \mathcal{D}_1$ bzw. $t_2 \in \mathcal{D}_2$. Weiter seien x_ν die Entscheidungsvariablen für alle $\nu \in I(T_S)$ und y_e die Entscheidungsvariablen für alle inneren Kanten $e \in E(T_S)$. Dann ergeben sich die äquivalenten Erweiterungsprobleme E_1 für die Eingabe (G_1, S) und E_2 für die Eingabe (G_2, S) :

$$E_1: ((\neg x_\lambda \wedge \neg y_{e_1} \wedge x_\nu) \vee (x_\lambda \wedge y_{e_1} \wedge \neg x_\nu)) \wedge ((x_\tau \wedge y_{e_3} \wedge x_\mu) \vee (\neg x_\tau \wedge \neg y_{e_3} \wedge \neg x_\mu))$$

$$E_2: ((x_\tau \wedge y_{e_3} \wedge x_\mu) \vee (\neg x_\tau \wedge \neg y_{e_3} \wedge \neg x_\mu)) \wedge ((x_\tau \wedge \neg y_{e_4} \wedge x_\eta) \vee (\neg x_\tau \wedge y_{e_4} \wedge \neg x_\eta)).$$

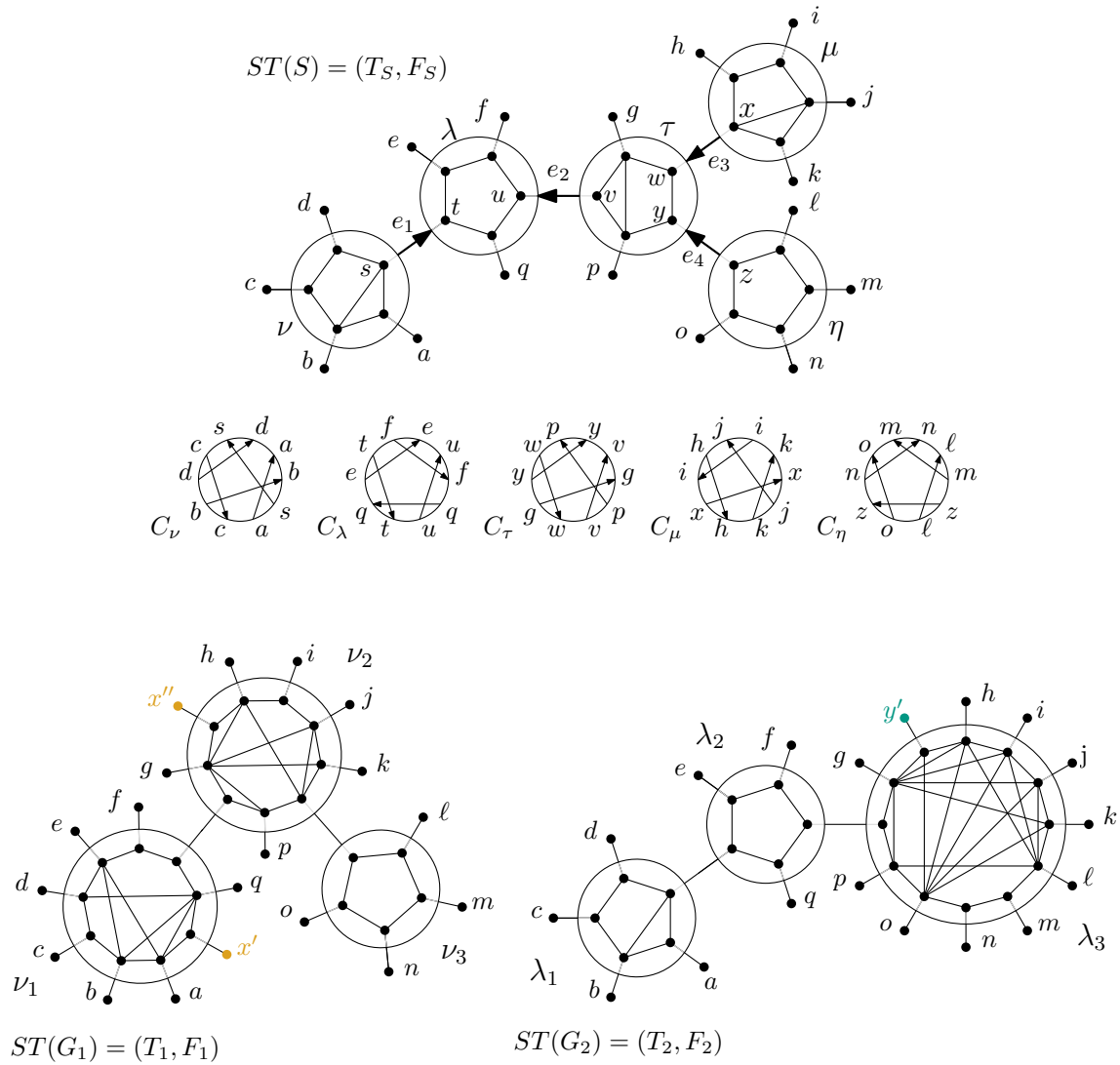


Abbildung 5.4: Es sind die Splitbäume $ST(S)$, $ST(G_1)$ und $ST(G_2)$ abgebildet. Die Erreichbarkeitsgraphen ergeben zusammen die simultane Instanz (G_1, G_2, S) , welche in Abb. 5.3 dargestellt ist. Der Splitbaum $ST(S)$ ist mit einer Referenz $\mathcal{R} = (K_r, \mathcal{E})$ definiert über $r = (C_\nu, C_\lambda, C_\tau, C_\mu, C_\eta) \in \mathcal{D}$ und $\mathcal{E} = \{\nu\lambda, \tau\lambda, \eta\tau, \mu\tau\}$ versehen. Die Sehnendiagramme aus r sind unter dem Splitbaum $ST(S)$ dargestellt und die Richtungen aus \mathcal{E} auf den Kanten von T_S eingezeichnet.

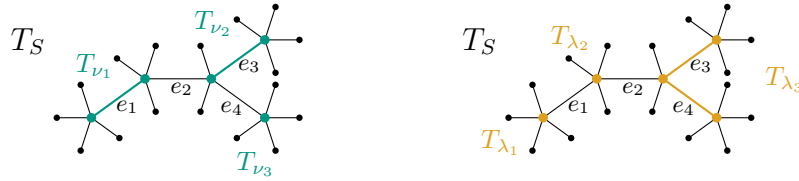


Abbildung 5.5: Für die simultane Instanz (G_1, G_2, S) aus Abb. 5.4 ist zweimal der Splitbaum $ST(S) = (T_S, F_S)$ von S dargestellt. Links sind die Stammbäume T_{ν_1}, T_{ν_2} und T_{ν_3} der inneren Knoten von $ST(G_1)$ und rechts die Stammbäume $T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}$ und T_{λ_3} der inneren Knoten von $ST(G_2)$ abgebildet.

Insgesamt ergibt sich für die SKI (G_1, G_2, S) das äquivalente simultane Kreissehnengraphenproblem

$$\begin{aligned}
 & ((\neg x_\lambda \wedge \neg y_{e_1} \wedge x_\nu) \vee (x_\lambda \wedge y_{e_1} \wedge \neg x_\nu)) \wedge \\
 & ((x_\tau \wedge y_{e_3} \wedge x_\mu) \vee (\neg x_\tau \wedge \neg y_{e_3} \wedge \neg x_\mu)) \wedge \\
 & ((x_\tau \wedge \neg y_{e_4} \wedge x_\eta) \vee (\neg x_\tau \wedge y_{e_4} \wedge \neg x_\eta)) \wedge (y_{e_2} \vee \neg y_{e_2}).
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Untersucht man die Lösungen des Erfüllbarkeitsproblems ergibt sich, dass jede Lösung $(x_\nu, x_\lambda, x_\tau, x_\mu, x_\eta, y_{e_1}, y_{e_2}, y_{e_3}, y_{e_4})$ in \mathcal{L} liegt mit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = \{ & (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1), \\
 & (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1), \\
 & (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0), \\
 & (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \}.
 \end{aligned}$$

Für die Lösung $\ell = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0) \in \mathcal{L}$ ergibt sich die Konfiguration (K_t, \vec{E}) mit $t = (C_\nu, C_\lambda^r, C_\tau, C_\mu, C_\eta)$ und $\vec{E} = \{\lambda\nu, \lambda\tau, \nu\tau, \tau\eta\}$.

Folgerung 5.15. Sei (G_1, \dots, G_k, S) eine SKI.

Dann ist die Lösungsmenge des zu (G_1, \dots, G_k, S) gehörigen äquivalenten simultanen Kreissehnengraphenproblems, äquivalent zur Lösungsmenge des simultanen Kreissehnengraphenproblems.

Die Aussage von Folgerung 5.15 folgt daraus, dass das Verknüpfen von Erfüllbarkeitsproblem über Konjunktionen genau das Schneiden ihrer Lösungsmengen bedeutet. Da die Lösungsmenge jedes äquivalenten Erweiterungsproblems genau die Menge der erweiterbaren Sehnendiagramme des Schnittgraphen repräsentiert, werden alle diese Mengen geschnitten.

Satz 5.16. Sei (G_1, \dots, G_k, S) eine SKI mit einem knoteninduzierten, prim-zerlegbaren und zusammenhängenden Schnittgraphen S , dann ist das äquivalente simultane Kreissehnengraphenproblem in $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^k |V(G_i)|^3)$ Zeit lösbar.

Beweis. Sei (G_1, \dots, G_k, S) eine SKI mit einem knoteninduzierten, prim-zerlegbaren und zusammenhängendem Schnittgraphen S . Dann lässt sich nach Lemma 5.12 für jedes Tupel (G_i, S) das äquivalente Erweiterungsproblem E_i in $\mathcal{O}(|V(G_i)|^3)$ Zeit für alle $i = 1, \dots, k$ erstellen. Nach Satz 5.13 ist jedes dieser Erfüllbarkeitsprobleme ein 2-SAT Problem und in $\mathcal{O}(|V(G_i)|)$ Zeit lösbar. Verknüpft man alle äquivalenten Erweiterungsprobleme E_i über Konjunktionen, hat das entstandene Erfüllbarkeitsproblem genau die Lösungsmenge, welche aus dem Schnitt der Lösungsmengen $\mathcal{L}(E_i)$ jedes Erweiterungsproblems E_i entsteht. Da $E := \bigwedge_{i=1}^k E_i$ ebenfalls ein 2-SAT Problem ist, ist es nach [APT79] in $\mathcal{O}(|V(S)| + |E(S)|)$ Zeit lösbar. Insgesamt lässt sich das äquivalente simultane Kreissehnengraphenproblem für die Eingabe (G_1, \dots, G_k, S) in $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^k |V(G_i)|^3)$ Zeit lösen. \square

6. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde für das simultane Kreissehnengraphenproblem unter der Bedingung, dass der Schnittgraph der Eingabegraphen prim-zerlegbar und zusammenhängend ist, ein Polynomialzeitalgorithmus angegeben. Dabei wurden in Kapitel 3 und Kapitel 4 zwei neuartige Hilfsmittel für Kreissehnengraphen und ihre Splitbäume entwickelt.

Besonders prägnant ist die Definition einer Bijektion zwischen allen Sehnendiagrammen eines Graphen G und einer Konfiguration seines Splitbaums $ST(G)$ in Kapitel 3. Zuvor war es nicht möglich einem Sehnendiagramm eine eindeutige Darstellung auf dem Splitbaum zuzuordnen. Dabei wurden zuerst die möglichen voneinander verschiedenen Kombination zweier Sehnendiagramme untersucht. Eine Kombination zweier Sehnendiagramme erzeugt ein neues Sehnendiagramm. Das aus der Kombination zweier Sehnendiagramme entstandene Sehnendiagramm ist eine Repräsentation des Graphen, der aus dem Zusammenschluss der beiden Graphen entstanden ist. Bei der Kombination nicht degenerierter Graphen ergeben sich genau acht verschiedene Sehnendiagramme. In allen anderen Fällen sind es weniger. Entscheidend ist beim Kombinieren eine feste Richtung der virtuellen Sehnen, die für die virtuellen Knoten des Zusammenschlusses der beiden repräsentierten Graphen steht.

Für einen Graphen G und einen knoteninduzierten Teilgraphen S analysiert Kapitel 4 den Zusammenhang zwischen ihren beiden Splitbäumen $ST(G)$ und $ST(S)$. Dabei wurden die inneren Knoten von $ST(G)$ identifiziert, die für ein beliebiges Sehnendiagramm von G über ihr zugeordnetes Sehnendiagramm in der zugehörigen Konfiguration, Positionen von Sehnen eines Knotens aus $V(S)$ festlegen. Für jeden dieser S -relevanten inneren Knoten von $ST(G)$ wurde ein eindeutiger nichtleerer Teilbaum in $ST(S)$ lokalisiert, der ebenfalls in einem Sehnendiagramm von S dieselben Sehnen und ihre Positionen im Vergleich zu anderen Sehnen festlegt. Jeder dieser Teilbäume in $ST(S)$ wird Stammbaum genannt. Die Menge aller Stammbäume erzeugt eine Kantenpartition der inneren Kanten von $ST(S)$ und zwei Stammbäume schneiden sich maximal in einem degenerierten inneren Knoten. Ist der Graph S zusätzlich prim-zerlegbar, dann definieren die Stammbäume nicht nur eine Kantenpartition, sondern auch eine Knotenpartition der inneren Knoten von $ST(S)$, wie in Kapitel 5 gezeigt.

Genauer wurde in Kapitel 5 das simultane Kreissehnengraphenproblem für einen prim-zerlegbaren und zusammenhängenden Schnittgraphen betrachtet. Der Lösungsansatz besteht daraus, für jeden der Eingabegraphen einer simultanen Kreissehnengrapheninstanz (G_1, \dots, G_k, S) die Menge aller erweiterbaren Sehnendiagramme von S zu einem Sehnendiagramm von G_i zu finden. Die Menge von erweiterbaren Sehnendiagrammen des

Schnittgraphen wurde als äquivalente Lösungsmenge eines Erfüllbarkeitsproblems formuliert. Es wurde gezeigt, dass dieses in polynomieller Zeit lösbar ist, da es in einer solchen Zeit aufgestellt und auf ein 2-SAT Problem zurückgeführt werden kann. Da 2-SAT Probleme in linearer Zeit lösbar sind, kann die Menge erweiterbarer Sehnendiagramme des Schnittgraphen in polynomieller Zeit berechnet werden. Für jeden der Eingabegraphen lässt sich ein solches Erfüllbarkeitsproblem aufstellen. Das Schneiden von Lösungsmengen von Erfüllbarkeitsproblemen ist äquivalent zum Verknüpfen jedes der Probleme über eine Konjunktion. Somit konnte gezeigt werden, dass auch das simultane Kreissehnengraphenproblem in polynomieller Zeit lösbar ist.

Um eine schärfere Laufzeitabschätzung für die vorgestellte Lösung des simultanen Kreissehnengraphenproblems unter Einschränkungen aus Kapitel 5 zu finden, sollte das Berechnen einer Konfiguration aus einem gegebenen Sehnendiagramm betrachtet werden. Alle anderen Berechnungen können mit einer linearen Laufzeit abgeschätzt werden, bis auf diese, die mit einer polynomiellen Laufzeit abgeschätzt wurde. Hierfür könnte die Baumstruktur der Splitbäume ausgenutzt werden, indem eine modifizierte Tiefensuche definiert über das gegebene Sehnendiagramm untersucht wird. Der nächste Schritt für die weitere Untersuchung des simultanen Kreissehnengraphenproblems könnte sein, die Einschränkungen an den Schnittgraphen der Eingabegraphen zu minimieren. In Kapitel 4 werden einige Ergebnisse im Bezug auf degenerierte Beschriftungsgraphen präsentiert, daher könnte eine Betrachtung eines zusammenhängenden Schnittgraphen sinnvoll sein. In diesem Fall können die inneren Knoten des Splitbaums des Schnittgraphen auch mit degenerierten Graphen beschriftet sein. Eventuell muss hierbei das Richten der Sehnen in Sehnendiagrammen, was in Abschnitt 3.3 vorgestellt wurde noch einmal überdacht werden. Die Einschränkung, dass der Schnittgraph S zusammenhängend ist, scheint bis jetzt die schwerwiegendste zu sein, da es im Fall, dass S nicht zusammenhängend ist nicht mehr möglich ist den Graphen durch einen Splitbaum darzustellen. Ein Ansatz könnte sein stattdessen mehrerer Splitbäume für den Schnittgraphen zu betrachten und diese durch einen zusätzlichen Knoten beschriftet mit einer unabhängigen Menge zu verknüpfen.

Literaturverzeichnis

- [APT79] Bengt Aspvall, Michael F. Plass und Robert E. Tarjan: *A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas*. Information Processing Letters, Seiten 121–123, 1979.
- [BL75] Kellogg S. Booth und George S. Lueker: *Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms*. Journal of computer and system sciences, 1975.
- [Bou85] André Bouchet: *Reducing prime graphs and recognizing circle graphs*. Combinatorica, Seiten 243–254, 1985.
- [CFK13] Steven Chaplick, Radoslav Fulek und Pavel Klavík: *Extending partial representations of circle graphs*. In: *Graph Drawing*, Seiten 131–142, 2013.
- [Cor05] Derek G. Corneil: *Lexicographic breadth first search – A survey*, Seiten 1–19. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [Cor13] Thomas H. Cormen (Herausgeber): *Algorithmen - eine Einführung*. Oldenbourg, München, 4. Auflage, 2013.
- [Cou07] Bruno Courcelle: *Circle graphs and monadic second-order logic*. Journal of applied logic, 2007.
- [Cun82] William H. Cunningham: *Decomposition of directed graphs*. SIAM Journal on algebraic discrete methods, Seiten 214–228, 1982.
- [Dah00] Elias Dahlhaus: *Parallel algorithms for hierarchical clustering and applications to split decomposition and parity graph recognition*. Journal of algorithms, Seiten 205–240, 2000.
- [Die12] Reinhard Diestel: *Graphentheorie*. Springer, 2012.
- [GP07] Emeric Gioan und Christophe Paul: *Dynamic distance hereditary graphs using split decomposition*. In: *International symposium on algorithms and computation*, Seiten 41–51. Springer, 2007.
- [GP12] Emeric Gioan und Christophe Paul: *Split decomposition and graph-labelled trees: characterizations and fully-dynamic algorithms for totally decomposable graphs*. Discrete applied mathematics, Seiten 708–733, 2012.
- [GPTC13] Emeric Gioan, Christophe Paul, Marc Tedder und Derek G. Corneil: *Practical and efficient circle graph recognition*. Algorithmica, Seiten 759–788, 2013.
- [GPTC14] Emeric Gioan, Christophe Paul, Marc Tedder und Derek G. Corneil: *Practical and efficient split decomposition via graph-labelled trees*. Algorithmica, Seiten 789–843, 2014.
- [GSH89] Csaba P. Gabor, Kenneth J. Supowit und Wen-Lian Hsu: *Recognizing circle graphs in polynomial time*. ACM, Seiten 435–473, 1989.

- [Har74] Frank Harary: *Graphentheorie*. Oldenbourg, München, 1974.
- [HM79] Michael Habib und Marie-Catherine Maurer: *On the X-join decomposition for undirected graphs*. Discrete applied mathematics, Seiten 201 – 207, 1979.
- [JL10] Krishnam R. Jampani und Anna Lubiw: *Simultaneous interval graphs*, Seiten 206–217. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [JLD09] Krishnam R. Jampani, Anna Lubiw und Frank Dehne: *The simultaneous representation problem for chordal, comparability and permutation graphs*, Seiten 387–398. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [KKO⁺17] Pavel Klavík, Jan Kratochvíl, Yota Otachi, Ignaz Rutter, Toshiki Saitoh, Maria Saumell und Tomáš Vyskočil: *Extending partial representations of proper and unit interval graphs*. Algorithmica, Seiten 1071–1104, 2017.
- [Naj85] Walid Naji: *Reconnaissance des graphes de cordes*. Discrete Mathematics, Seiten 329–337, 1985.
- [Opa79] Jaroslav Opatrny: *Total ordering problem*. Journal on computing, Seiten 111–114, 1979.
- [Rut14] Ignaz Rutter: *Vorlesungsskript der algorithmische Graphentheorie und perfekte Graphen*, 2014.
- [Spi94] Jeremy P. Spinrad: *Recognition of circle graphs*. Journal of algorithms, Seiten 264–282, 1994.
- [Spi03] Jeremy P. Spinrad: *Efficient graph representations*, Band 19. Fields institute monographs, 2003.
- [Wal17] Stefan Waldmann: *Lineare Algebra 1: Die Grundlagen für Studierende der Mathematik und Physik*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2017.