

# Kontaktrepräsentationen von kantengewichteten planaren Graphen

Diplomarbeit  
von

Roman Prutkin

An der Fakultät für Informatik  
Institut für Theoretische Informatik (ITI)

Erstgutachter:	Prof. Dr. Dorothea Wagner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Peter Sanders
Betreuender Mitarbeiter:	Dr. Martin Nöllenburg
Zweiter betreuender Mitarbeiter:	Dr. Ignaz Rutter

Bearbeitungszeit: 15. Februar 2012 – 14. August 2012



## **Erklärung**

Ich versichere hiermit wahrheitsgemäß, die Arbeit bis auf die dem Aufgabensteller bereits bekannte Hilfe selbstständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten Anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde.

Karlsruhe, den 13. August 2012  
Ort, Datum

.....  
(Roman Prutkin)



# Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuchen wir Kontaktdarstellungen kantengewichteter planarer Graphen, in denen Knoten durch Rechtecke oder rektilineare Polygone, die Kanten durch Kontakte der entsprechenden Polygone und die Kantengewichte durch die Längen der Kontakte dargestellt sind.

Wir zeigen, dass für einen gegebenen planar eingebetteten innentriangulierten Graph mit einer viereckigen äußeren Facette es möglich ist, in Linearzeit ein kantenproportionales rechteckiges Dual zu konstruieren, falls ein solches existiert, und ansonsten die Nichtexistenz zu melden. Für eine vorgegebene kombinatorische Struktur der Kontaktdarstellung und Kantengewichte, die als untere Schranken für die Kontaktlängen interpretiert werden, kann eine entsprechende Zeichnung, die die Größe des umgebenden Rechtecks minimiert, in Linearzeit konstruiert werden.

Ist hingegen die kombinatorische Struktur nicht festgelegt, zeigen wir die NP-Schwere der Entscheidung, ob eine Zeichnung existiert, die vorgegebene untere und obere Schranken an die Kontaktlängen bzw. untere Schranken an die Kontaktlängen und obere Schranken an die Flächeninhalte der Rechtecke einhält. Außerdem zeigen wir, dass die Minimierung der Größe einer solchen Zeichnung unter Einhaltung der Mindestkontaktlängen sowie der Gesamtabweichung der vorgegebenen Mindestlängen von den tatsächlichen Kontaktlängen über alle kombinatorischen Strukturen ebenfalls NP-schwer ist. Wir formulieren dieses Problem als ein gemischt-ganzzahliges lineares Programm und wenden die konstruierten rechteckigen Zeichnungen zur schematischen Darstellung von Personenflüssen in Gebäuden an. Ferner betrachten wir eine spezielle Art von Kontaktdarstellungen, nämlich rechteckige Duale, in denen innere Rechtecke identisch sind und Dimensionen 1 und  $p$  für ein festes natürliches  $p$  haben. Wir geben einen Linearzeit-Algorithmus an, der entscheidet, ob für einen gegebenen planar eingebetteten innentriangulierten Graph mit einer viereckigen äußeren Facette eine solche Darstellung existiert.

Abschließend geben wir eine vollständige Charakterisierung der Komplexität rektilinearere Polygone an, die für die kantenproportionale Darstellung zweifach zusammenhängender innentriangulierter Graphen erforderlich ist: Für außenplanare Graphen ist die Komplexität 8 hinreichend und im Allgemeinen notwendig, und für Graphen mit mindestens einem Paar adjazenter innerer Knoten oder beliebig vielen nichtadjazenten inneren Knoten ist die Komplexität im Allgemeinen unbeschränkt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Verwandte Arbeiten . . . . .	2
1.2	Gliederung . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Kontaktrepräsentationen von planaren Graphen . . . . .	5
2.2	Seitenkontaktdarstellungen kantengewichteter Graphen . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Rechteckige Duale mit Vorgabe der Kontaktlängen</b>	<b>9</b>
3.1	Rechteckige Duale mit festen Kontaktlängen . . . . .	10
3.2	Rechteckige Duale mit vorgegebenen Mindestlängen der Kontakte . . . . .	16
3.2.1	Tesselerungsdarstellungen von planaren $s-t$ -Graphen . . . . .	16
3.2.2	Algorithmus von He zur Konstruktion eines rechteckigen Duals . . . . .	18
3.2.3	Algorithmus zur Kompaktifizierung einer rechteckigen Zeichnung . . . . .	20
3.2.4	Konstruktion eines rechteckigen Duals mit vorgegebenen Mindestlängen der Kontakte mit dem Algorithmus von He . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Komplexitätsbetrachtungen zu einigen Problemen für rechteckige Duale</b>	<b>31</b>
4.1	Vorgegebene untere und obere Schranken für die Kontaktlängen . . . . .	32
4.1.1	Variablen und Leitungen . . . . .	32
4.1.2	Inverter . . . . .	35
4.1.3	Klauseln . . . . .	36
4.2	Minimale Kontaktlängen, maximale Flächen . . . . .	41
4.2.1	Variablen und Leitungen . . . . .	41
4.2.2	Inverter . . . . .	42
4.2.3	Klauseln . . . . .	44
4.3	Minimierung der Gesamtgröße für vorgegebene Mindestkontaktlängen . . . . .	47
4.3.1	Minimierung der Gesamtfläche . . . . .	47
4.3.2	Minimierung der Gesamtlänge aller Kanten . . . . .	51
4.3.3	Einheitliche Mindestlängen . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Optimierung der rechteckigen Duale mit MILP</b>	<b>55</b>
5.1	Formulierung eines MILP . . . . .	56
5.1.1	Beschreibung eines REL . . . . .	56
5.1.2	Beschreibung einer Zeichnung zum REL . . . . .	58
5.1.3	Zielfunktion . . . . .	59
5.2	Experimente . . . . .	60
5.2.1	Personenzählung im Forschungsprojekt „Hermes“ . . . . .	60
5.2.2	Modellierung durch einen kantengewichteten PTP-Graph . . . . .	61
5.2.3	Diagramme . . . . .	62
5.2.4	Implementierung . . . . .	64

---

<b>6</b>	<b>Einige Spezialfälle von Kontaktrepräsentationen</b>	<b>67</b>
6.1	Rechteckige Duale aus identischen Rechtecken . . . . .	67
6.1.1	Rechtecke der Größe $1 \times 2$ . . . . .	68
6.1.2	Rechtecke der Größe $1 \times p$ . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Kontaktlängenuniverselle Darstellung planarer Graphen</b>	<b>75</b>
7.1	Minimale Komplexität kantenproportionaler Darstellungen . . . . .	75
7.2	Außenplanare Graphen . . . . .	76
7.3	Graphen mit genau einem inneren Knoten . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>85</b>
8.1	Beitrag . . . . .	85
8.2	Kritik und offene Fragestellungen . . . . .	86
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>87</b>



# 1. Einleitung

Die Darstellung von Graphen mit Hilfe von Schnitten und Kontakten unterschiedlicher geometrischer Objekte wurde im Kontext der Graphentheorie und Visualisierung von Graphen gründlich untersucht. Eine Übersicht über solche Darstellungsformen findet man etwa im Buch von McKee und McMorris [MM99] und in der Arbeit von Hliněný und Kratochvíl [HK01]. Ein bekanntes Beispiel liefert das Kreispackungstheorem von Koebe aus dem Jahr 1936, laut dem jeder planare Graph eine Kontaktdarstellung bestehend aus sich berührenden Kreisen besitzt (und umgekehrt) [Koe36]. Laut einem neueren Ergebnis von Chalopin and Gonçalves [CG09] hat jeder planare Graph eine Schnittdarstellung mit geraden Strecken.

In dieser Arbeit untersuchen wir einen Spezialfall der Kontaktdarstellung von planaren Graphen, nämlich löcherfreie Seitenkontaktdarstellungen mit Rechtecken und rektilinearen Polygonen. Für einen planaren Graph  $G = (V, E)$  soll dabei jeder Knoten  $v \in V$  durch ein einfaches Polygon  $P(v)$  des jeweiligen Typs dargestellt werden, sodass zwei Polygone  $P(u)$  und  $P(v)$  genau dann einen gemeinsamen Randabschnitt  $s(uv)$  haben, wenn es eine Kante  $e = uv \in E$  gibt. Ferner fordern wir, dass die Vereinigung der Polygone  $\bigcup_{v \in V} P(v)$  selbst ein einfaches Polygon ist, d.h. die Kontaktdarstellung enthält keine Löcher. Wir schließen den degenerierten Fall aus, dass zwei Polygone genau einen gemeinsamen Punkt haben, und werden im Folgenden annehmen, dass  $G$  ein innentriangulierter planarer Graph ist.

Einen interessanten Spezialfall von Seitenkontaktdarstellungen stellen *rechteckige Duale* dar: Ein *rechteckiges Dual* [KK88] von  $G$  ist eine Seitenkontaktdarstellung von  $G$  mit Rechtecken, wobei ein großes äußeres Rechteck in kleinere unterteilt wird. Rechteckige Duale sowie andere Seitenkontaktdarstellungen mit einer geringen Anzahl Knicke pro Polygon finden praktische Anwendung in Bereichen wie VLSI-Entwurf, Kartographie, Floorplanning und Raumüberwachung in Gebäuden [NR12]. In diesen Anwendungen spielen oft die Flächen der Polygone, die den Knoten von  $V$  entsprechen, sowie die Länge des gemeinsamen Randabschnittes zweier benachbarter Polygone eine wichtige Rolle. Dies führt unmittelbar zum Problem, gewichtete Graphen, deren Gewichtsfunktionen diese Eigenschaften bestimmen, geeignet als Seitenkontaktdarstellungen zu repräsentieren.

Bisher wurden die rechteckigen und rektilinearen Kontaktdarstellungen nur für ungewichtete Graphen [KK88, LLY03] und knotengewichtete Graphen untersucht [ABF<sup>+</sup>12, BG05, EMSV09], wobei in letzterem Fall die Polygonflächen proportional zu den Knotengewichten sein sollen. In dieser Arbeit behandeln wir die Seitenkontaktrepräsentationen unter dem noch offen verbleibenden Gesichtspunkt der Darstellung kantengewichteter Graphen.

Eine intuitive Möglichkeit, die Kantengewichte in einer Kontaktdarstellung zu kodieren, ist es, zu fordern, dass die Längen der gemeinsamen Randabschnitte der Polygone zu den Gewichten der entsprechenden Kanten proportional sind.

## 1.1 Verwandte Arbeiten

Es ist bekannt, dass ungewichtete triangulierte planare Graphen immer eine rektile Kontaktarstellung mit Rechtecken, L- und T-förmigen Polygonen besitzen, d.h. höchstens mit rektilearen Achtecken, und dass für manche Graphen die Komplexität 8 der Polygone notwendig ist [YS93, LLY03]. Die Klasse der ungewichteten Graphen, die eine Darstellung in Form eines rechteckigen Duals besitzen, wurde vollständig charakterisiert als Klasse der innenangulierten planaren Graphen ohne separierende Dreiecke [KK88, LL84]. Rechteckige Duale mit Vorgaben der Orientierungen der einzelnen Segmente wurden ebenfalls betrachtet [EM09].

Das Ziel bei der Darstellung knotengewichteter Graphen ist es, eine flächenproportionale rektile Kontaktarstellung des Graphen zu bestimmen, in der der Flächeninhalt eines Polygons  $P(v)$  proportional zum Knotengewicht  $\omega(v)$  ist. In einer Folge von Arbeiten wurde die Polygonkomplexität, die zur Realisierung eines beliebigen knotengewichteten innenangulierten planaren Graphen hinreichend ist, schrittweise von 40 Ecken [dBMS09] auf 34 [KN07], 12 [BV11], 10 [ABF<sup>+</sup>11] und schließlich auf die für manche Graphen notwendige und somit bestmögliche Komplexität von 8 Ecken [ABF<sup>+</sup>12, YS93] herabgesetzt. Flächenproportionale rechteckige Duale wurden ebenfalls bereits untersucht, zum Beispiel präsentierten van Kreveld und Speckmann [vKS07] mehrere Algorithmen zur Konstruktion rechteckiger Duale mit geringer Abweichung der Flächeninhalte der Rechtecke von den vorgegebenen Gewichten. Eppstein et al. [EMSV09] gaben für ein rechteckiges Dual die notwendige und hinreichende Bedingung für die *Flächenuniversalität* an, d.h. eine Bedingung, wann ein Layout beliebige Flächen der Rechtecke realisieren kann, ohne dass seine kombinatorische Struktur verändert werden muss. Außerdem präsentierten sie einen effizienten Algorithmus, um zu entscheiden, ob es möglich ist, ein rechteckiges Dual mit vorgegebenen Knotengewichten und fester kombinatorischer Struktur so zu zeichnen, dass die Umfänge der Rechtecke proportional zu den Knotengewichten sind. Biedl und Genc [BG05] zeigten, dass die Entscheidung, ob eine Kontaktarstellung aus Rechtecken mit vorgegebenen Flächen und unbeschränkter Komplexität des äußeren Polygons existiert, NP-schwer ist. Ferner ist es ein NP-schweres Problem, zu entscheiden, ob ein kantengewichteter planarer Graph als ein herkömmliches Node-Link-Diagramm gezeichnet werden kann, wenn die Kanten als gerade Segmente der Länge proportional zum entsprechenden Kantengewicht gezeichnet werden sollen [EW90]. Für dreifach zusammenhängende Triangulierungen kann diese Entscheidung auf einem Real-RAM-Rechner in Linearzeit getroffen werden [CDR07].

## 1.2 Gliederung

In Kapitel 2 geben wir einen Überblick über die Kontaktrepräsentationen planarer Graphen und führen den Begriff der kantenproportionalen Kontaktrepräsentation ein. In Kapitel 3 betrachten wir rechteckige Duale. Wir stellen einen Linearzeit-Algorithmus vor, der entscheidet, ob es für einen gegebenen planar eingebetteten Graph  $G$  ein *kantenproportionales rechteckiges Dual* (*edge-proportional rectangular dual* oder *EPRD*) mit vier äußeren Rechtecken existiert und es im positiven Fall konstruiert (Abschnitt 3.1). Für die festgelegte kombinatorische Struktur eines Duals geben wir außerdem einen Linearzeit-Algorithmus an, der ein rechteckiges Layout konstruiert, dessen Kontakte  $s(e)$  die durch die Kantengewichte vorgegebenen Mindestlängen  $\omega(e)$  einhalten (es gilt also  $|s(e)| \geq \omega(e) \forall e \in E$ ), sodass die Gesamtgröße aller inneren Rechtecke im Layout minimal ist. Dieser basiert auf

dem Algorithmus von He zur Konstruktion eines rechteckigen Duals für einen ungewichteten PTP-Graphen [He93]. Alternativ kann dieses Problem auch mit dem Algorithmus zur Kompaktifizierung rechteckiger Zeichnungen [DBETT99, Kapitel 5.4] gelöst werden. Wir werden die beiden Methoden miteinander vergleichen und Parallelen zwischen ihnen ziehen.

Ist andererseits die kombinatorische Struktur nicht fixiert, so ist es im Allgemeinen eine komplexe Aufgabe, eine Zeichnung mit gewünschten Eigenschaften zu konstruieren. In Kapitel 4 zeigen wir die NP-Schwere der Entscheidung, ob eine Zeichnung existiert, die vorgegebene untere und obere Schranken an die Kontaktlängen bzw. untere Schranken an die Kontaktlängen und obere Schranken an die Flächeninhalte der Rechtecke einhält. Außerdem zeigen wir, dass die Minimierung der Größe einer Zeichnung sowie der Gesamtabweichung der vorgegebenen Mindestlängen der Kontakte von den tatsächlichen Kontaktlängen über alle kombinatorischen Strukturen ebenfalls NP-schwer ist.

In Kapitel 5 formulieren wir einige NP-schweren Minimierungsprobleme aus Kapitel 4 als gemischt-ganzzahlige lineare Programme und wenden die konstruierten rechteckigen Zeichnungen zur schematischen Darstellung von Personenflüssen in Gebäuden an. In Kapitel 6 betrachten wir eine spezielle Art von Kontaktdarstellungen, nämlich rechteckige Duale, in denen innere Rechtecke identisch sind und Dimensionen 1 und  $p$  für ein festes natürliches  $p$  haben. Wir geben einen Linearzeit-Algorithmus an, der entscheidet, ob für einen planar eingebetteten Graph mit einer viereckigen äußeren Facette eine solche Darstellung existiert.

In Kapitel 7 geben wir eine vollständige Charakterisierung an für die Komplexität rektilinearere Polygone, die für die kantenproportionale Darstellung zweifach zusammenhängender innentriangulierter Graphen erforderlich ist: Für außenplanare Graphen ist die Komplexität 8 hinreichend und im Allgemeinen notwendig, und für Graphen mit mindestens einem Paar adjazenter innerer Knoten oder beliebig vielen nichtadjazenten inneren Knoten ist die Komplexität im Allgemeinen unbeschränkt. Abschließend fassen wir die Ergebnisse in Kapitel 8 zusammen.



## 2. Grundlagen

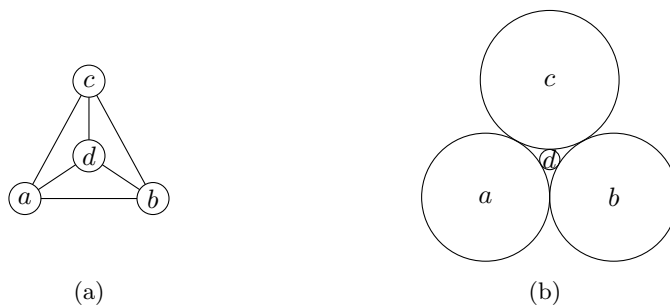
In diesem Kapitel wiederholen wir den Begriff der Kontaktrepräsentation von Graphen und geben eine Definition der kantenproportionalen Kontaktrepräsentationen kantengewichteter Graphen an.

### 2.1 Kontaktrepräsentationen von planaren Graphen

Ein *einfacher ungerichteter Graph*  $G = (V, E)$  besteht aus einer Knotenmenge  $V$  und einer Kantenmenge  $E$ . Im Folgenden seien sie endlich, sei also  $|V| = n$  und  $|E| = m$ . Jede Kante aus  $E$  ist ein Paar  $e = \{u, v\}$ , wobei  $u, v \in V$  und  $u \neq v$ . Wir werden dafür die verkürzte Schreibweise  $e = uv = vu$  verwenden. Die Knoten  $u$  und  $v$  heißen *adjazent* bzw. *benachbart*, und  $e$  ist *inzident* zu seinen Endpunkten  $u$  und  $v$  sowie zu allen anderen Kanten, die zu  $u$  oder  $v$  inzident sind. Sei  $\text{Adj}(v)$  die Menge der zu  $v$  adjazenten Knoten. Der Grad  $\text{deg}(v)$  eines Knotens  $v \in V$  ist die Anzahl der zu  $v$  inzidenten Kanten. In einem *einfachen gerichteten Graph*  $G = (V, E)$  enthält  $E \subseteq V \times V$  gerichtete Kanten  $e = (u, v)$ , wobei  $u, v \in V$  und  $u \neq v$ . Wir schreiben  $(u, v)$  auch als  $u \rightarrow v$ . In einigen wenigen Fällen werden wir auch *Multigraphen* verwenden. In diesen kann es für zwei Knoten  $u$  und  $v$  mehrere Kanten von  $u$  nach  $v$  geben.

Ein Graph heißt *planar*, wenn er kreuzungsfrei in die Ebene eingebettet werden kann. Eine Einführung in die Theorie der planaren Graphen findet man beispielsweise im Skript zur Vorlesung „Algorithmen für planare Graphen“ am KIT [Wag09].

Für einen einfachen ungerichteten Graph  $G = (V, E)$  ist eine *Kontaktrepräsentation* von  $G$  durch eine Menge geometrischer Objekte  $\mathcal{M}$ , beispielsweise Kreise oder Polygone, und



**Abbildung 2.1:** (a) Ein planarer Graph; (b) seine Kontaktrepräsentation mit Kreisen.

eine Bijektion  $\Psi : V \rightarrow \mathcal{M}$  gegeben, wobei für  $u, v \in V$  die Objekte  $\Psi(u)$  und  $\Psi(v)$  im Inneren disjunkt sind und sich genau dann berühren, wenn es eine Kante  $uv$  in  $E$  gibt. In Abbildung 2.1 ist ein planarer Graph und seine Kontaktrepräsentation mit Kreisen dargestellt. Nach dem Kreispackungstheorem von Koebe [Koe36] hat jeder planare Graph eine solche Kontaktrepräsentation. Offensichtlich können durch Kontaktrepräsentationen mit zusammenhängenden Objekten nur planare Graphen dargestellt werden, da eine solche Darstellung eine planare Einbettung des Graphen induziert.

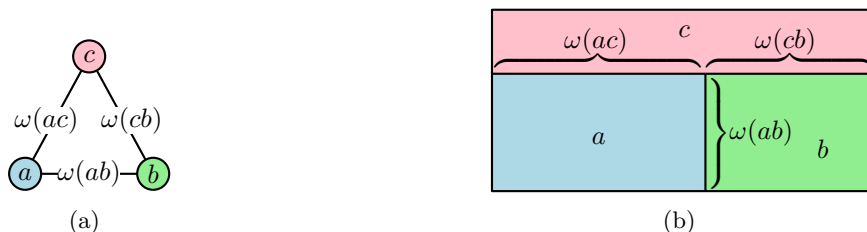
## 2.2 Seitenkontaktdarstellungen kantengewichteter Graphen

In dieser Arbeit betrachten wir Kontakt Darstellungen aus Rechtecken und rektilinearen Polygonen. Ein Polygon heißt rektilinear, wenn seine Seiten entweder horizontal oder vertikal orientiert sind. Gegeben sei ein einfacher planarer ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ . Eine Kontakt Darstellung von  $G$  beschreiben wir im Folgenden durch eine Menge von Polygonen  $\mathcal{P} = \{P(v) \mid v \in V\}$ . Dabei ist  $P(v)$  das Polygon, das in der betrachteten Kontaktrepräsentation dem Knoten  $v$  entspricht. Zu einem Polygon gehöre sowohl sein Rand als auch sein Inneres immer dazu. Für Kontaktrepräsentationen aus Rechtecken schreiben wir auch  $\mathcal{R}$  statt  $\mathcal{P}$  und  $R(v)$  statt  $P(v)$ .

Für eine Kante  $e = uv \in E$  und eine gegebene Kontakt Darstellung  $\mathcal{P}$  von  $G$  setzen wir  $s(e) = P(u) \cap P(v)$ . Nach der Definition einer Kontakt Darstellung ist also  $s(e) \neq \emptyset$  für jede Kante  $e \in E$ , und für  $q, r \in V$  gilt  $P(q) \cap P(r) = \emptyset$ , falls  $qr \notin E$ . Im Folgenden werden wir uns auf *Seitenkontakt-Darstellungen* einschränken: Bei diesen darf für jede Kante  $e = uv \in E$  der entsprechende Kontakt  $s(e)$  keine isolierten Punkte enthalten. In Abbildung 2.1(b) ist es beispielsweise nicht der Fall. In einer Seitenkontakt-Darstellung besteht also der Kontakt  $s(e)$  aus einem oder mehreren Geradensegmenten positiver Länge. Die Summe ihrer Längen bezeichnen wir mit  $|s(e)|$ . In einer Zeichnung zu einer Seitenkontakt-Darstellung sind also keine sich im Inneren kreuzenden Geradensegmente (X-Kreuzungen) erlaubt, da dabei Kontakte  $s(e)$  mit  $|s(e)| = 0$  auftreten müssen.

In unseren Kontakt Darstellungen möchten wir keine Löcher zulassen, das Polygon  $P_{\text{außen}} = \bigcup_{v \in V} P(v)$  soll also ein einfaches Polygon sein. Da die X-Kreuzungen nicht erlaubt sind, treffen sich im Inneren von  $P_{\text{außen}}$  jeweils immer genau drei benachbarte Polygone in einem einzigen Punkt und bilden eine T-Kreuzung, die in der durch  $\mathcal{P}$  induzierten planaren Einbettung von  $G$  einer dreieckigen Facette entspricht. Somit können mit löcherfreien Seitenkontakt-Repräsentationen nur *innentriangulierte* planare Graphen dargestellt werden. Dies sind planare Graphen, die so eingebettet werden können, dass alle inneren Facetten Dreiecke sind.

Wie in Kapitel 1 erwähnt, möchten wir kantengewichtete Graphen  $(G, \omega)$  darstellen, wobei  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine positive Kantengewichtsfunktion ist. Dabei soll das Gewicht  $\omega(e)$  einer Kante  $e \in E$  durch die Länge  $|s(e)|$  des entsprechenden Kontakts  $s(e)$  repräsentiert werden.



**Abbildung 2.2:** (a) Ein planarer kantengewichteter Graph  $G = (V, E)$ ; (b) seine kantenproportionale Kontaktrepräsentation mit Rechtecken. Für jede Kante  $e \in E$  gilt  $|s(e)| = \omega(e)$ .



**Abbildung 2.3:** Durch Hinzufügen hinreichend vieler Knicke zu den Kontakten kann man jede positive Kantengewichtsfunktion  $\omega$  repräsentieren.

Wir nennen eine KontaktDarstellung *kantenproportional*, wenn für jede Kante  $e \in E$  die Gleichheit  $|s(e)| = \omega(e)$  gilt. Ein planarer kantengewichteter Graph und eine dazugehörige kantenproportionale KontaktDarstellung ist in Abbildung 2.2 zu sehen.

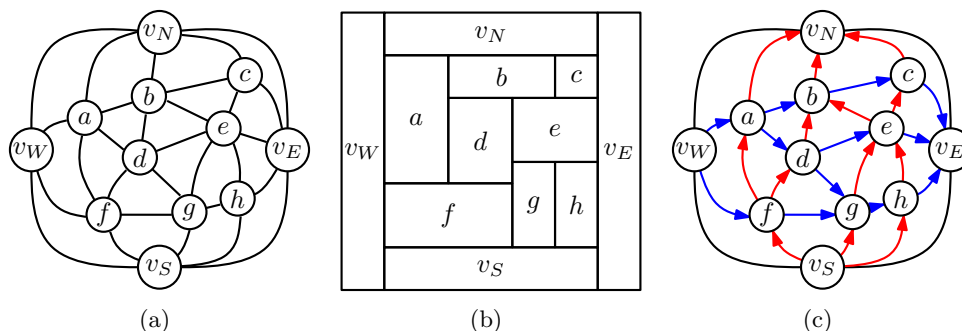
Es ist bekannt, dass jeder triangulierte Graph  $G = (V, E)$  eine löcherfreie KontaktDarstellung aus rektilinearen Achtecken hat [LLY03]. Gegeben sei nun eine positive Kantengewichtsfunktion  $\omega$  von  $G$ . Skaliert man eine solche Zeichnung, sodass alle Kontakte  $s(e)$  die Längen höchstens  $\omega(e)$  haben, kann man anschließend durch Hinzufügen hinreichend vieler Knicke zu den Kontakten immer erreichen, dass für jede Kante  $e \in E$   $|s(e)| = \omega(e)$  gilt; siehe Abbildung 2.3. Diese offensichtliche Lösung möchten wir vermeiden, da durch die hohe Komplexität der Polygone die Zeichnung schwer zu lesen ist. In den nachfolgenden Kapiteln beschränken wir die Komplexität der Polygone durch eine Konstante und untersuchen Seitenkontakt-Darstellungen kantengewichteter Graphen mit Rechtecken oder rektilinearen Polygonen mit wenigen Seiten.





### 3. Rechteckige Duale mit Vorgabe der Kontaktlängen

In diesem Kapitel untersuchen wir eine Form der Kontaktdarstellung eines kantengewichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit einer positiven Kantengewichtsfunktion  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  als ein *rechteckiges Dual*. Ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}$  von  $G$  ist eine Unterteilung eines Rechtecks in kleinere Rechtecke mit paarweise disjunktem Inneren, sodass die Knoten von  $G$  in einer Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu den Rechtecken des Layouts stehen. Für einen Knoten  $v \in V$  bezeichnen wir das entsprechende Rechteck mit  $R(v)$ . Ferner haben zwei Rechtecke  $R(u)$  und  $R(v)$  in  $\mathcal{R}$  genau dann einen nichttrivialen gemeinsamen Randabschnitt  $s(uv)$  der Länge  $|s(uv)| > 0$ , wenn es die Kante  $uv$  in  $G$  gibt. Das gesamte Layout bzw. die Vereinigung  $\bigcup_{v \in V} R(v)$  der den Knoten entsprechenden Rechtecke soll ein Rechteck bilden. Wie in der Einleitung erwähnt, wollen wir keine degenerierten Fälle betrachten und verlangen, dass sich kein Paar von Rechtecken in genau einem Punkt trifft. Ein Graph mit einem zugehörigen rechteckigen Dual ist in Abbildung 3.1 zu sehen.



**Abbildung 3.1:** (a) ein PTP-Graph  $G$ ; (b) ein rechteckiges Dual von  $G$ ; (c) ein REL  $(T_1, T_2)$  von  $G$ , das von dem Dual in (b) induziert wird: Die Kanten in  $T_1$  sind rot, die Kanten in  $T_2$  blau gezeichnet.

He [He93] formulierte eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung, wann ein planarer Graph  $G$  mit einer fest gewählten planaren Einbettung ein rechteckiges Dual mit vier Rechtecken auf seinem äußeren Rand besitzt (Theorem 2.1 in [He93]):

**Theorem 3.1.** *Ein planarer Graph  $G$  mit einer fest gewählten planaren Einbettung besitzt genau dann ein rechteckiges Dual mit vier Rechtecken auf seinem äußeren Rand, wenn Folgendes gilt:*

- (1) Jede innere Facette von  $G$  ist ein Dreieck und die äußere Facette ein Viereck, und
- (2)  $G$  enthält keine separierenden Dreiecke.

Einen Graphen, der diese Bedingungen erfüllt, nennen wir *properly triangular planar* (PTP). Ferner bezeichnen wir die vier Knoten am Rand der äußeren Facette von  $G$  mit  $v_N, v_W, v_S$  und  $v_E$  im Gegenuhrzeigersinn. He hat beschrieben, wie man für einen innentriangulierten Graph  $G$  mit mehr als vier Knoten auf der äußeren Facette und ausgezeichneten äußeren Knoten  $v_0, v_1, v_2, v_3$  mit der obigen Bedingung die Existenz eines rechteckigen Duals prüfen kann, in dem  $R(v_0), R(v_1), R(v_2)$  und  $R(v_3)$  jeweils in einer Ecke des begrenzenden Rechtecks liegen. Die PTP-Graphen spielen also im Zusammenhang mit rechteckigen Dualen eine besondere Rolle. In diesem Kapitel schränken wir unsere Betrachtungen auf PTP-Graphen ein.

### 3.1 Rechteckige Duale mit festen Kontaktlängen

Gegeben sei ein planarer Graph  $G$ . Es ist leicht zu sehen, dass  $G$  höchstens eine Einbettung als PTP-Graph hat, wenn man die vier äußeren Knoten  $v_N, v_W, v_S$  und  $v_E$  fest vorgibt:

**Bemerkung 3.2.** *Gegeben sei ein Graph  $G = (V, E)$  mit vier ausgezeichneten Knoten  $v_N, v_W, v_S$  und  $v_E$  aus  $V$ . Der Graph  $G$  hat höchstens eine planare Einbettung als innentriangulierter Graph, sodass seine äußere Facette ein einfaches Viereck mit Ecken  $v_N, v_W, v_S$  und  $v_E$  im Gegenuhrzeigersinn ist. Eine solche Einbettung kann in  $O(|V|)$  Zeit konstruiert werden, falls sie existiert.*

*Beweis.* Betrachte eine solche Einbettung  $\Gamma$  von  $G$ . Setze  $e = v_S v_N$ , falls  $v_S v_N \notin E$ , und  $e = v_W v_E$  sonst (Da die äußere Facette von  $\Gamma$  ein Viereck ist, können die beiden Kanten aus Planaritätsgründen nicht gleichzeitig in  $E$  enthalten sein). Erweitere  $G$  zu  $G' = (V, E \cup \{e\})$ . Man erhält eine planare Einbettung  $\Gamma'$  von  $G'$ , indem man die zusätzliche Kante  $e$  in die äußere Facette von  $\Gamma$  einbettet. Da  $G'$  vollständig trianguliert ist, ist nach dem Theorem von Whitney [Whi32]  $\Gamma'$  bis auf die Wahl der äußeren Facette seine eindeutige Einbettung. Hätte nun  $G$  eine weitere planare Einbettung  $\Gamma_2 \neq \Gamma$  mit der gleichen äußeren Facette, würde man durch das Einfügen von  $e$  in die äußere Facette von  $\Gamma_2$  wie oben eine weitere Einbettung von  $G'$  erhalten. Dies wäre ein Widerspruch zur Eindeutigkeit von  $\Gamma'$ . Die Einbettung  $\Gamma'$  kann in Linearzeit konstruiert werden, etwa mit dem Algorithmus von Boyer und Myrvold [BM04]. Durch die Wegnahme von  $e$  erhält man  $\Gamma$ .  $\square$

Im Weiteren sei  $G = (V, E)$  ein PTP-Graph mit fest gewählten äußeren Knoten  $v_N, v_W, v_S$  und  $v_E$  und der entsprechenden eindeutigen Einbettung. Ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}$  von  $G$  gibt eine Orientierung und Partitionierung der inneren Kanten von  $G$  in zwei Mengen  $T_1$  und  $T_2$  vor. Die Menge  $T_1$  enthalte diejenigen inneren Kanten  $e$ , für die der entsprechende Kontakt  $s(e)$  horizontal ist, und  $T_2$  enthalte die restlichen inneren Kanten von  $G$ , d.h. die Kanten, denen die vertikalen Kontakte entsprechen. Die Orientierung der Kanten erhält man wie folgt: Befindet sich das Rechteck  $R(u)$  unterhalb von  $R(v)$ , ist die Kante  $uv$  in  $T_1$  von  $u$  nach  $v$  gerichtet. Analog dazu ist  $uv$  in  $T_2$  von  $u$  nach  $v$  gerichtet, wenn das Rechteck  $R(u)$  links von  $R(v)$  im Dual liegt. Für einen Knoten  $v \in V$  und eine der Partitionen  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ , bezeichnen wir mit  $T_i^{\leftarrow}(v)$  und  $T_i^{\rightarrow}(v)$  die in  $v$  eingehenden bzw. aus  $v$  ausgehenden Kanten, die in  $T_i$  enthalten sind. Die auf diese Weise definierte Partitionierung und Orientierung erfüllt folgende Eigenschaften (vergleiche zur Illustration Abbildung 3.1(c)):

1. Für jeden inneren Knoten  $v$  durchläuft eine Aufzählung der zu  $v$  inzidenten Kanten gegen den Uhrzeigersinn, die mit der rechtesten Kante in  $T_1^{\rightarrow}(v)$  anfängt, zuerst alle Kanten in  $T_1^{\rightarrow}(v)$ , dann alle Kanten in  $T_2^{\leftarrow}(v)$ , dann alle Kanten in  $T_1^{\leftarrow}(v)$  und schließlich alle Kanten in  $T_2^{\rightarrow}(v)$ , und
2. alle inneren Kanten inzident zu  $v_N, v_W, v_S$  bzw.  $v_E$  sind jeweils in  $T_1^{\leftarrow}(v_N), T_2^{\rightarrow}(v_W), T_1^{\rightarrow}(v_S)$  und  $T_2^{\leftarrow}(v_E)$ .

Wir nennen jede Partition und Orientierung  $(T_1, T_2)$ , die die obigen Bedingungen erfüllt, eine *reguläre Kantenbeschriftung* bzw. *Regular Edge Labeling (REL)*. Seien die Kanten in  $T_1$  rot gefärbt, und die in  $T_2$  blau. He hat in seiner Arbeit [He93] gezeigt, dass jeder PTP-Graph ein REL besitzt, und dass bei einer gegebenen REL ein entsprechendes Dual in Linearzeit konstruiert werden kann. Ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}$  von  $G$  induziert auf die oben beschriebene Weise ein REL  $(T_1, T_2)$ . Wir nennen es das zu  $\mathcal{R}$  *zugehörige* REL. Nach He definiert diese Zuordnung eine Bijektion zwischen RELs und rechteckigen Dualen (bis auf die Orientierungen der Kontakte  $s(e)$  zu den vier äußeren Kanten).

Eine naheliegende Möglichkeit, die Kantengewichte im rechteckigen Dual darzustellen, ist, zu fordern, dass die Kontaktlängen proportional zu den Gewichten entsprechender Kanten sind. Wir definieren diese Art der rechteckigen Duale wie folgt:

**Definition 3.1.** *Ein rechteckiges Dual eines kantengewichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit einer positiven Kantengewichtsfunktion  $\omega$  nennen wir kantenproportionales Rechteckiges Dual bzw. Edge-Proportional Rectangular Dual (EPRD), falls für jede Kante  $uv \in E$  für die Länge  $|s(uv)|$  des gemeinsamen Randabschnittes  $s(uv)$  der Rechtecke  $R(u)$  und  $R(v)$  gilt:  $|s(uv)| = \omega(uv)$ .*

Es ist leicht zu sehen, dass das zu einem EPRD zugehörige REL zusätzliche Eigenschaften erfüllt, die aus der Tatsache folgen, dass in jedem Rechteck die Gesamtlängen der Kontakte auf der linken und rechten Seite gleich sind. Das Gleiche gilt für die Gesamtlängen der Kontakte auf der unteren und oberen Seite:

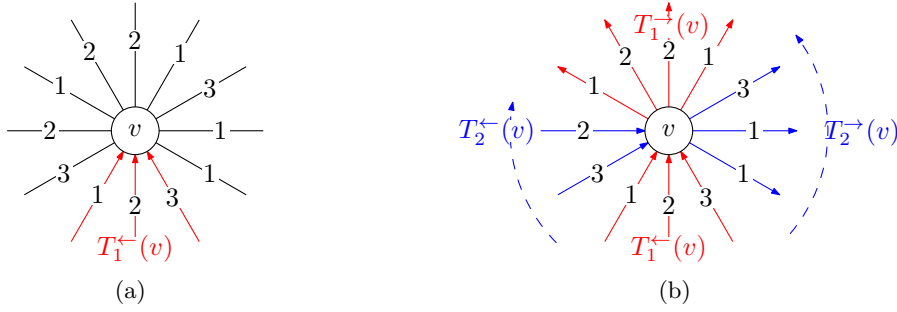
**Bemerkung 3.3.** *Hat ein kantengewichteter PTP-Graph eine Darstellung als EPRD, so gilt für das zugehörige REL  $(T_1, T_2)$ :*

$$\sum_{e \in T_1^{\leftarrow}(v)} \omega(e) = \sum_{e \in T_1^{\rightarrow}(v)} \omega(e), \quad \sum_{e \in T_2^{\leftarrow}(v)} \omega(e) = \sum_{e \in T_2^{\rightarrow}(v)} \omega(e). \quad (*)$$

Wir nennen jedes REL, das die obigen Bedingungen erfüllt, ein *kantenproportionales REL* (*edge proportional REL* oder *EPREL*). Im Folgenden werden wir zeigen, dass ein kantengewichteter PTP-Graph  $G = (V, E)$  höchstens ein zugehöriges EPREL besitzt. Außerdem zeigen wir, wie man die Existenz eines solchen EPREL in Linearzeit entscheidet und das entsprechende EPRD konstruiert.

**Lemma 3.4.** *Ist für einen inneren Knoten  $v \in V$  eine der Mengen  $T_1^{\leftarrow}(v), T_1^{\rightarrow}(v), T_2^{\leftarrow}(v)$  oder  $T_2^{\rightarrow}(v)$  komplett festgelegt, so existiert höchstens eine Möglichkeit, die restlichen drei Mengen so festzulegen, dass für  $v$  einerseits die REL-Eigenschaften gelten und andererseits die Bedingungen (\*) erfüllt sind. Die Existenz kann in  $O(\deg(v))$  Zeit entschieden werden. Im positiven Fall kann die zugehörige Aufteilung und Orientierung der zu  $v$  inzidenten Kanten in  $O(\deg(v))$  bestimmt werden.*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $T_1^{\leftarrow}(v)$  festgelegt ist, der Beweis für die restlichen Fälle ist symmetrisch. Sei  $\omega_1 = \sum_{e \in T_1^{\leftarrow}(v)} \omega(e)$  und sei ferner  $\omega_2 = (\sum_{uv \in E} \omega(uv) - 2\omega_1)/2$ . Soll für  $v$  die Bedingung (\*) gelten, ist notwendigerweise  $\sum_{e \in T_2^{\leftarrow}(v)} \omega(e) = \sum_{e \in T_2^{\rightarrow}(v)} \omega(e) = \omega_2$ .



**Abbildung 3.2:** Iterative Bestimmung eines EPREL mit Lemma 3.4 an einem Beispiel. Die Kanten sind mit den zugehörigen Kantengewichten beschriftet. (a) Für einen inneren Knoten  $v$  sei  $T_1^{\leftarrow}(v)$  festgelegt. Hier ist  $\omega_1 = 6$  und  $\omega_2 = 5$ . (b) Es existiert höchstens eine Färbung und Orientierung der restlichen zu  $v$  inzidenten Kanten, die die EPREL-Bedingung (\*) erfüllt. Diese kann durch die Traversierung der Inzidenzliste von  $v$  ausgehend von den Rändern von  $T_1^{\leftarrow}(v)$  nach außen bestimmt werden.

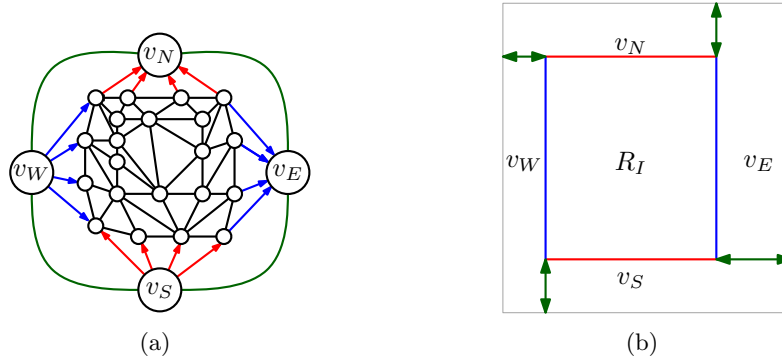
Wenn für  $v$  die REL-Eigenschaft erfüllt sein soll, erhält man  $T_2^{\rightarrow}(v)$  durch das Traversieren der zu  $v$  inzidenten Kanten gegen den Uhrzeigersinn beginnend mit der Kante rechts von der rechten Kante in  $T_1^{\leftarrow}(v)$ . Dabei legt  $\omega_2$  fest, wie viele Kanten der Menge  $T_2^{\rightarrow}(v)$  zugewiesen werden müssen. Man setzt die Traversierung analog fort und bestimmt dadurch auf eine eindeutige Weise die Mengen  $T_1^{\rightarrow}(v)$  und  $T_2^{\leftarrow}(v)$ , die die geforderten Bedingungen erfüllen, falls möglich. Die Gesamtlaufzeit beträgt  $O(\deg(v))$ . Das Vorgehen wird in Abbildung 3.2 veranschaulicht.  $\square$

Es ist zu bemerken, dass wenn die Färbung und Orientierung der zu einem Knoten  $v$  inzidenten Kanten in einem REL, das zu einem EPRD  $\mathcal{R}$  gehören soll, festgelegt sind (wobei möglicherweise weder das REL noch  $\mathcal{R}$  bereits vollständig konstruiert wurden), so ist die Form des Rechtecks  $R(v)$ , das  $v$  in  $\mathcal{R}$  repräsentiert, vollständig fest: Die zu den roten Kanten gehörenden Kontakte werden horizontal und die zu den blauen vertikal gezeichnet, ihre Längen legt die Kantengewichtsfunktion  $\omega$  fest. Ferner legen die Anforderungen an die Färbung und Orientierung der zu  $v_N, v_W, v_S$  und  $v_E$  inzidenten Kanten vollständig das von  $R(v_S), R(v_N), R(v_W)$  und  $R(v_E)$  umschlossene Rechteck  $R_I$  fest, in das alle inneren Rechtecke eingefügt werden müssen, siehe Abbildung 3.3. Soll ein EPRD von  $G$  existieren, muss  $R_I$  eine rechteckige Form haben. Dadurch muss für die inneren Kanten, die zu den vier äußeren Knoten inzident sind, notwendigerweise gelten:

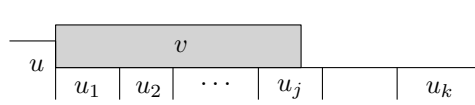
$$\sum_{e \in T_1^{\leftarrow}(v_N)} \omega(e) = \sum_{e \in T_1^{\rightarrow}(v_S)} \omega(e), \quad \sum_{e \in T_2^{\leftarrow}(v_E)} \omega(e) = \sum_{e \in T_2^{\rightarrow}(v_W)} \omega(e). \quad (**)$$

Wir nummerieren die inneren Knoten  $v_1, \dots, v_{n-4}$  auf eine Weise durch, die uns erlaubt, Lemma 3.4 iterativ anzuwenden, um sowohl die Form der den Knoten  $v_i$  entsprechenden Rechtecke als auch ihre Position in  $R_I$ , an der sie eingefügt werden müssen, eindeutig zu bestimmen. Da unser Vorgehen vollständig durch die Anwendung der notwendigen Bedingungen geleitet wird, konstruiert es entweder ein gültiges EPRD, oder bricht wegen einem Fehler ab, und in diesem Fall kann kein EPRD von  $G$  existieren.

**Bemerkung 3.5.** Die äußeren Rechtecke  $R(v_S), R(v_W), R(v_N)$  und  $R(v_E)$  werden an den entsprechenden Seiten von  $R_I$  platziert und können unabhängig von den anderen Rechtecken immer so angepasst werden, dass die Kontakte, die den vier äußeren Kanten von  $G$  entsprechen, korrekte Längen haben: Seien dafür etwa  $s(v_S v_W)$  und  $s(v_N v_E)$  vertikal und  $s(v_W v_N)$  und  $s(v_S v_E)$  horizontal, siehe Abbildung 3.3.



**Abbildung 3.3:** (a) Die Orientierung und Färbung der zu  $v_S, v_W, v_N, v_E$  inzidenten inneren Kanten ist durch die Definition eines REL festgelegt; (b) dadurch hat das von  $R(v_S), R(v_W), R(v_N)$  und  $R(v_E)$  umschlossene Rechteck  $R_I$  eindeutig festgelegte Höhe und Breite (vorausgesetzt, dass (\*\*)) gilt). Die Kontakte zu den vier äußeren Kanten (grün) können durch eine Windmühlen-Konstruktion immer mit korrekten Längen realisiert werden.



**Abbildung 3.4:** Vor dem Einfügen des nächsten inneren Rechtecks gibt es immer eine U-Lücke und einen inneren Knoten  $v \in V$ , sodass das entsprechende Rechteck  $R(v)$  in die linke untere Ecke der U-Lücke auf eine eindeutige Weise eingefügt werden muss.

Die Anfangskonfiguration besteht aus den drei Rechtecken  $R(v_W), R(v_S)$  und  $R(v_E)$ , die jeweils den linken, den unteren und den rechten Rand von  $R_I$  und somit eine U-Lücke bilden. In jedem Schritt  $i$  erhalten wir die folgenden Invarianten:

1. Die Positionen und Dimensionen der Rechtecke  $R(v_1), \dots, R(v_i)$  sind eindeutig festgelegt.
2. Alle Kontakte zwischen bereits eingefügten Rechtecken oder zum zu füllenden Rechteck  $R_I$  entsprechen gültigen Kanten in  $G$  und haben korrekte Längen, die durch die Kantengewichtsfunktion  $\omega$  vorgegeben sind.
3. Der obere Rand des Polygons  $\bigcup_{j=1}^i R(v_j) \cup R(v_S) \cup R(v_W) \cup R(v_E)$  bildet einen  $x$ -monotonen Polygonzug.

Vor dem Einfügen sei  $i = 0$ , und alle Eigenschaften sind erfüllt. Betrachte den Schritt  $i \geq 1$ . Davor gibt es nach der dritten Eigenschaft im oberen Rand des Polygons  $\bigcup_{j=1}^{i-1} R(v_j) \cup R(v_S) \cup R(v_W) \cup R(v_E)$  eine U-Lücke, deren untere Seite horizontal ist. Sei  $R(u)$  das unterste Rechteck, das diese U-Lücke von links begrenzt, und seien  $u_1, \dots, u_k$  die Knoten, deren Rechtecke die Unterseite der U-Lücke bilden; siehe Abbildung 3.4. Der Knick, der durch den rechten Rand von  $R(u)$  und den oberen Rand von  $R(u_1)$  gebildet wird, impliziert, dass falls für  $G$  ein zugehöriges EPRD existieren soll, es einen eindeutigen noch nicht eingefügten Knoten  $v$  geben muss, der sowohl zu  $u$  als auch zu  $u_1$  inzident ist. Wir wählen ihn als den nächsten Knoten  $v_i$ . Seine Adjazenzen zu den Knoten  $u_1, \dots, u_j$  für ein  $j \leq k$  legen alle Kontakte auf der unteren Seite des Rechtecks  $R(v)$ , und somit  $T_1^{\leftarrow}(v)$ , vollständig fest. Nach Lemma 3.4 sind seine Dimensionen eindeutig festgelegt. Seine Position ist durch die Ecke, die durch  $R(u)$  und  $R(u_1)$  gebildet ist, ebenfalls fest. Damit gilt Invariante 1. Ferner ist entweder Invariante 2 erfüllt, oder kein EPRD von  $G$  existiert, da wir bei dem Einfügen lediglich den notwendigen Bedingungen gefolgt sind. Invariante 3 gilt offensichtlich weiterhin nach dem Einfügen von  $R(v)$  in die U-Lücke. Der gesamte Algorithmus kann in Linearzeit implementiert werden.

**Theorem 3.6.** *Für einen kantengewichteten PTP-Graphen  $G$  existiert höchstens ein EPRD. Es kann in Linearzeit entschieden werden, ob dieses existiert, und im positiven Fall kann es ebenfalls in Linearzeit konstruiert werden.*

*Beweis.* Die Korrektheit und die Eindeutigkeit wurden oben bereits gezeigt. Wir müssen nur noch die Laufzeit untersuchen. Die wichtigsten Punkte sind dabei die folgenden: a) Eine geeignete U-Lücke muss schnell gefunden werden; b) Der entsprechende einzufügende Knoten  $v$  muss bestimmt werden; c) Es muss überprüft werden, ob durch das Einfügen des Rechtecks  $R(v)$  nur gültige Kontakte entstehen.

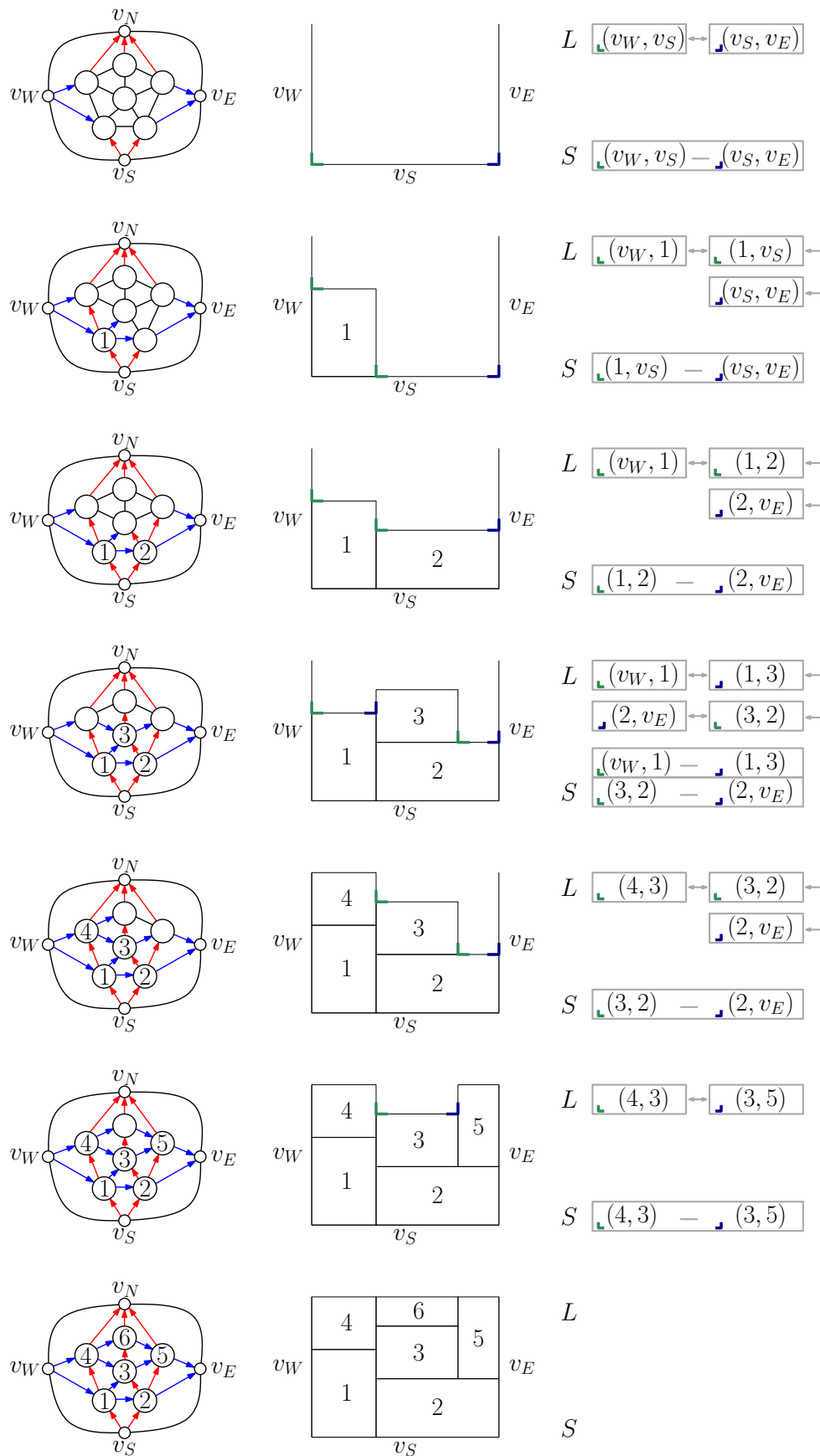
Für b) ist zu beachten, dass bei den gegebenen adjazenten Knoten  $u$  und  $u_1$  aus einer U-Lücke wie in Abbildung 3.4 der Knoten  $v$  zur eindeutigen dreieckigen Facette von  $G$  gehört, die die Kante  $uu_1$  und einen noch nicht eingefügten Knoten enthält. Hat man also  $u$  und  $u_1$  gegeben, kann  $v$  in Zeit  $O(1)$  gefunden werden.

Die Bestimmung der Form des Rechtecks  $R(v)$  mit Lemma 3.4 erfordert den Aufwand  $O(\deg(v))$ . Schlägt der Test in Lemma 3.4 fehl, terminiert der Algorithmus und gibt aus, dass kein EPRD von  $G$  existiert. Für c) können wir mit dem Aufwand proportional zu der Anzahl der Kontakte von  $R(v)$  zu bereits eingefügten Rechtecken testen, ob sie alle Kanten aus  $G$  entsprechen. Falls erfolgreich, benötigt dieser Test  $O(\deg(v))$  Schritte. Sonst ist der benötigte Aufwand höchstens  $O(|V|)$ , dann terminiert aber der Algorithmus mit dem negativen Ergebnis.

Für a) speichern wir die bereits eingefügten, aber noch nicht komplett verdeckten Rechtecke in einer doppelt verketteten Liste, die von links nach rechts sortiert ist. Jeder konkave Knick ( $\lrcorner$  oder  $\llcorner$ ) in der oberen Kontur des Polygons  $\bigcup_{j=1}^i R(v_j) \cup R(v_S) \cup R(v_W) \cup R(v_E)$  ist ein Kandidat für die linke bzw. rechte Grenze einer U-Lücke wie in Abbildung 3.4. Diese Kandidaten werden als Tupel  $\lrcorner(u, v)$  bzw.  $\llcorner(u, v)$  für ein Paar der Rechtecke  $R(u)$  und  $R(v)$  gespeichert, wobei  $R(u)$  von links an  $R(v)$  anliegt, und ihre oberen Grenzen nicht kollinear sind. Jeder Kandidat speichert Zeiger auf die beiden beteiligten Rechtecke.

Wir speichern die Kandidaten in einer doppelt verketteten Liste  $L$ , sortiert nach den  $x$ -Koordinaten der gemeinsamen vertikalen Randabschnitte der zugehörigen Rechtecke. Jede U-Lücke, die während des Einfügens auftritt, ist charakterisiert durch ein nachfolgendes  $\lrcorner$  -  $\llcorner$ -Paar von Kandidaten. Nachdem ein Rechteck eingefügt wurde, entstehen höchstens zwei neue Kandidaten, höchstens zwei verschwinden, und die Liste  $L$  kann in  $O(1)$  aktualisiert werden. Alle neu entstehenden nachfolgenden  $\lrcorner$  -  $\llcorner$ -Paare können ebenfalls in  $O(1)$  gefunden werden und werden auf einen Stapel  $S$  geschoben. Dieser wird verwendet um die nächste U-Lücke auszuwählen. Da dieser Stapel vor dem letzten Schritt nie leer wird, kann eine für das Einfügen eines neuen Rechtecks geeignete U-Lücke in jedem Schritt mit Aufwand  $O(1)$  gefunden werden.

Es folgt, dass jedes Einfügen eines neuen Rechtecks  $R(v_i)$  den Aufwand  $O(\deg(v))$  erfordert. Der Gesamtaufwand ist deshalb in  $O(|E|) = O(|V|)$ . Eine Beispielausführung des beschriebenen Entscheidungsalgorithmus ist in Abbildung 3.5 zu sehen.  $\square$



**Abbildung 3.5:** Ausführung des Tests aus Theorem 3.6 an einem Beispiel. In jedem Schritt wird die Färbung und Orientierung der Kanten, die eingefügten Rechtecke und die Inhalte der Liste  $L$  und des Stacks  $S$  dargestellt.

## 3.2 Rechteckige Duale mit vorgegebenen Mindestlängen der Kontakte

Wir betrachten nun eine leicht abgeschwächte Variante des Problems: Als Eingabe fordern wir ein REL, das die kombinatorische Struktur des rechteckigen Duals beschreibt, und eine Kantengewichtsfunktion, die die Mindestlängen der den Kanten entsprechenden Kontakte angibt. Die Aufgabe besteht nun darin, ein rechteckiges Dual zum gegebenen REL zu finden, sodass die Größe der Zeichnung minimal wird. Es ist anzumerken, dass dieses Problem immer eine gültige Lösung hat, denn jedes rechteckige Dual kann immer hinreichend vergrößert werden, sodass alle Anforderungen an die Mindestkontaktlängen erfüllt sind.

Mit der Methode von He [He93] können wir in Linearzeit ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}$  eines PTP-Graphen  $G$  konstruieren, das das gegebene REL realisiert, aber noch nicht die vorgegebenen Mindestkontaktlängen erfüllt. Wir können den Algorithmus von He so anpassen, dass ein Dual minimaler Größe, das die Anforderungen an die Mindestkontaktlängen erfüllt, direkt konstruiert werden kann. Alternativ können wir das Problem aus einer anderen Perspektive betrachten. Das rechteckige Dual  $\mathcal{R}$  von  $G$  kann als eine orthogonale Zeichnung des Dualgraphen  $G^*$  von  $G$  betrachtet werden, in der jeder Knoten von Grad 3 einer inneren Facette von  $G$  entspricht, und die orthogonalen Kanten ein Paar von Knoten in  $G^*$  verbinden, wenn die entsprechenden Facetten in  $G$  benachbart sind. Diese Sichtweise erlaubt uns, einen Linearzeit-Algorithmus zur Kompaktifizierung von orthogonalen Zeichnungen [DBETT99, Kapitel 5.4] anzuwenden, sodass für jede Kante  $e \in E$  die entsprechende Dualkante  $e^*$  in der orthogonalen Zeichnung die Mindestlänge  $\omega(e)$  hat. Beide Vorgehensweisen minimieren die Gesamtbreite, Gesamthöhe und die Fläche der Zeichnung unter gegebenen Anforderungen an die Kontaktlängen. Im Folgenden werden die beiden Methoden genauer betrachtet, und es werden zwischen ihnen Parallelen gezogen.

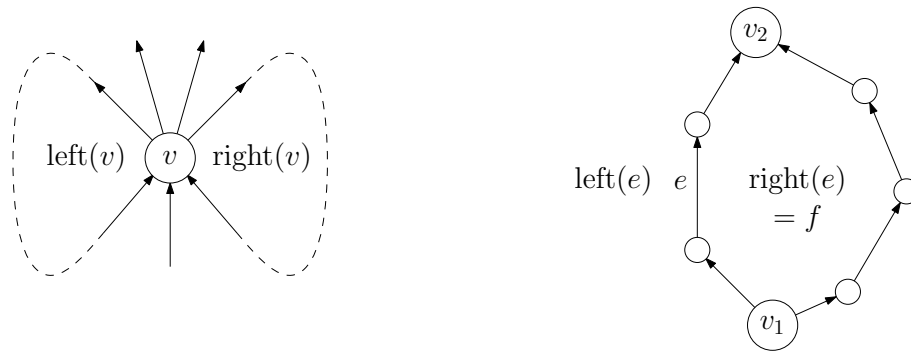
### 3.2.1 Tesselierungsdarstellungen von planaren $s$ - $t$ -Graphen

In diesem Abschnitt werden wir einen Überblick über die *Tesselierungsdarstellungen* (*tessellation representations*) geben. Dies ist eine Darstellungsform für bestimmte planare Graphen, die einige Gemeinsamkeiten mit rechteckigen Dualen aufweist und mit ähnlichen Mitteln konstruiert werden kann. Wir orientieren uns dabei an dem Buch von Di Battista et al. [DBETT99].

Sei  $G = (V, E)$  ein planarer gerichteter azyklischer Graph mit der einzigen Quelle  $s$  und Senke  $t$ . Man nennt  $G$  einen  $s$ - $t$ -Graphen. Ferner ist der Graph  $G$  ein *planarer  $s$ - $t$ -Graph*, wenn er so planar eingebettet ist, dass die Knoten  $s$  und  $t$  auf der äußeren Facette liegen. Es ist möglich,  $G$  so planar zu zeichnen, dass alle Kanten von unten nach oben gerichtet sind. Dann ist  $s$  der unterste und  $t$  der oberste Knoten. Oft wird als Konvention die äußere Facette  $f_0$  in den linken Teil  $s^*$  und den rechten Teil  $t^*$  unterteilt, sodass die Kanten am linken Rand von  $f_0$  adjazent zu  $s^*$  und die am rechten adjazent zu  $t^*$  sind. Für eine Kante  $e \in E$  bezeichne  $\text{left}(e)$  die Facette links und  $\text{right}(e)$  die Facette rechts von  $e$ .

Die Eigenschaften von planaren  $s$ - $t$ -Graphen sind gut untersucht und werden beispielsweise im Buch von Di Battista et al. [DBETT99, Kapitel 4.2] aufgeführt. So bilden für jeden Knoten  $v \in V \setminus \{s, t\}$  in  $G$  die eingehenden und die ausgehenden Kanten jeweils ein Intervall in der zyklischen Anordnung der Kanten um  $v$  [DBETT99, Lemma 4.2]. Somit gibt es eine eindeutige Facette  $\text{left}(v)$  links von  $v$ , die zur linkesten eingehenden und linkesten ausgehenden Kante von  $v$  inzident ist, und analog gibt es eine eindeutige Facette  $\text{right}(v)$  rechts von  $v$ , die zur rechtesten eingehenden und rechtesten ausgehenden Kante von  $v$  inzident ist.





**Abbildung 3.6:** Eigenschaften von planaren  $s$ - $t$ -Graphen. Es ist  $v_1 = \text{orig}(f)$  und  $v_2 = \text{dest}(f)$ .

Sei  $F$  die Menge der Facetten von  $G$ . Jedes  $f \in F$  besteht aus zwei gerichteten Pfaden mit einem gemeinsamen Anfangsknoten  $\text{orig}(f)$  und einem gemeinsamen Endknoten  $\text{dest}(f)$ ; siehe [DBETT99, Lemma 4.1]. Für einen Knoten  $v \in V$  sei  $\text{orig}(v) = \text{dest}(v) = v$ , und für eine Kante  $e = u \rightarrow v \in E$  sei  $u = \text{orig}(e)$  und  $v = \text{dest}(e)$ . Für eine Facette  $f \in F$  sei außerdem  $\text{left}(f) = \text{right}(f) = f$ . Die genannten Eigenschaften sind in Abbildung 3.6 skizziert.

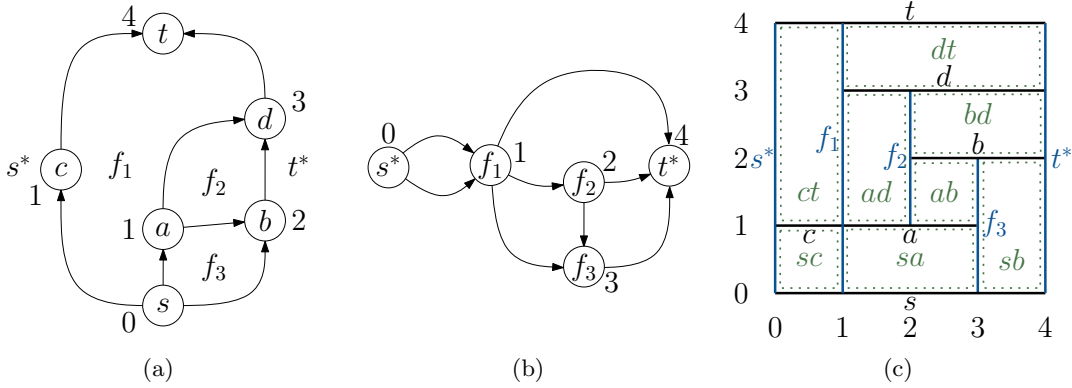
Der *Dualgraph*  $G^*$  von  $G$  wird wie folgt definiert: Die Knotenmenge von  $G^*$  ist die Menge  $F$  der Facetten von  $G$ . Für jede Kante  $e \neq s \rightarrow t$  gibt es in  $G^*$  eine zu  $e$  duale Kante  $e^* = f \rightarrow g$ , wobei  $f = \text{left}(e)$  und  $g = \text{right}(e)$ . Man beachte, dass  $G^*$  Mehrfachkanten haben kann. Der Graph  $G^*$  kann von links nach rechts orientiert werden und ist ebenfalls ein planarer  $s$ - $t$ -Graph. Dabei ist  $s^*$  seine Quelle und  $t^*$  seine Senke.

Eine *topologische Nummerierung*  $N$  eines Graphen weist jedem Knoten eine Zahl zu, sodass für jede Kante  $(u, v)$   $N(v) > N(u)$  gilt. Jeder  $s$ - $t$ -Graph hat eine topologische Nummerierung; siehe [DBETT99, Abschnitt 4.1]. Für einen kantengewichteten Graphen mit der Gewichtsfunktion  $\omega$  heißt  $N$  *gewichtete topologische Nummerierung*, wenn für jede Kante  $(u, v)$  zusätzlich gilt:  $N(v) \geq N(u) + \omega(u, v)$ . Eine gültige gewichtete topologische Nummerierung eines  $s$ - $t$ -Graphen ist beispielsweise die Wahl des maximalen Gesamtgewichts über alle gerichteten  $s$ - $v$ -Pfade in  $G$  als  $N(v)$  für jedes  $v \in V$ . Diese Nummerierung ist sogar *optimal*, sie minimiert also den Abstand des maximalen von den minimalen Wert von  $N$  (für einen  $s$ - $t$ -Graphen ist es  $N(t) - N(s)$ ).

Eine *Kachel* (*tile*) ist ein Rechteck mit horizontalen und vertikalen Seiten. Sie kann auch zu einem Segment oder Punkt degenerieren. Zwei Kacheln sind *adjazent*, wenn sie eine gemeinsame Seite haben. Je nach Orientierung dieser Seite heißen sie horizontal bzw. vertikal adjazent. Für eine Kachel  $\theta$  bezeichne  $x_L(\theta)$  und  $x_R(\theta)$  die  $x$ -Koordinaten seiner linken bzw. rechten Seite, und  $y_B(\theta)$  und  $y_T(\theta)$  die  $y$ -Koordinaten seiner unteren bzw. oberen Seite.

Sei  $G = (V, E)$  ein planarer  $s$ - $t$ -Graph mit Facettenmenge  $F$ . Seien  $o, o_1, o_2 \in V \cup E \cup F$ . Eine *Tesselierungsdarstellung*  $\Theta$  von  $G$  ordnet jedes Objekt  $o$  einer Kachel  $\Theta(o)$  zu, sodass Folgendes gilt: [DBETT99, Abschnitt 4.3]

- Für  $o_1 \neq o_2$  sind die Kacheln  $\Theta(o_1)$  und  $\Theta(o_2)$  im Inneren disjunkt.
- Die Vereinigung aller  $\Theta(o)$ ,  $o \in V \cup E \cup F$  ergibt ein Rechteck.
- Die Kacheln  $\Theta(o_1)$  und  $\Theta(o_2)$  sind genau dann horizontal adjazent, wenn  $o_1 = \text{left}(o_2)$  oder  $o_1 = \text{right}(o_2)$  oder  $o_2 = \text{left}(o_1)$  oder  $o_2 = \text{right}(o_1)$ .
- Die Kacheln  $\Theta(o_1)$  und  $\Theta(o_2)$  sind genau dann vertikal adjazent, wenn  $o_1 = \text{orig}(o_2)$  oder  $o_1 = \text{dest}(o_2)$  oder  $o_2 = \text{orig}(o_1)$  oder  $o_2 = \text{dest}(o_1)$ .



**Abbildung 3.7:** (a) ein planarer  $s$ - $t$ -Graph  $G$  mit einer optimalen ganzzahligen topologischen Nummerierung  $Y$ ; (b) der Dualgraph  $G^*$  von  $G$  mit einer optimalen ganzzahligen topologischen Nummerierung  $X$ ; (c) eine Tesselerungsdarstellung von  $G$ . Die horizontalen schwarzen Segmente entsprechen den Knoten von  $G$ , die vertikalen blauen Segmente den Facetten und die grünen punktiert gezeichneten Rechtecke den Kanten.

Folgender Algorithmus konstruiert eine Tesselerungsdarstellung von  $G$  [DBETT99, Algorithmus 4.1]:

1. Konstruiere den planaren  $s$ - $t$ -Graphen  $G^*$ .
2. Bestimme eine topologische Nummerierung  $Y$  von  $G$ .
3. Bestimme eine topologische Nummerierung  $X$  von  $G^*$ .
4. Für jedes Objekt  $o \in V \cup E \cup F$  weise  $\Theta(o)$  folgende Koordinaten zu:

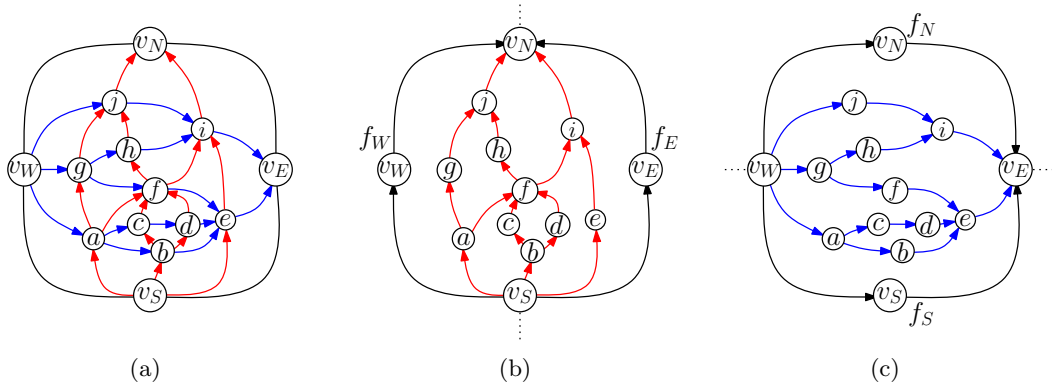
$$\begin{aligned} x_L(o) &= X(\text{left}(o)); & x_R(o) &= X(\text{right}(o)); \\ y_B(o) &= Y(\text{orig}(o)); & y_T(o) &= Y(\text{dest}(o)). \end{aligned}$$

Einen planaren  $s$ - $t$ -Graphen und eine auf die obige Weise berechnete Tesselerungsdarstellung dazu findet man in Abbildung 3.7. Zwar scheint es keinen intuitiven Weg zu geben, Tesselerungsdarstellungen direkt zur Konstruktion rechteckiger Duale zu verwenden: Beispielsweise werden bei Tesselerungsdarstellungen Kanten als ausgedehnte Rechtecke und Facetten als Geradensegmente gezeichnet, wohingegen bei rechteckigen Dualen den Kanten gemeinsame Randsegmente der Rechtecke und Facetten gemeinsame Punkte von jeweils drei Rechtecken entsprechen. Jedoch ist die Vorgehensweise bei der Konstruktion beider Darstellungsformen ähnlich: Die Koordinaten der Objekte werden direkt mit Hilfe topologischer Sortierungen in Dualgraphen berechnet. Ein ähnliches Prinzip gilt auch bei der Konstruktion von *Sichtbarkeitsdarstellungen* (*visibility representations*) von planaren Graphen; siehe etwa [TT86].

Der obige Algorithmus kann so modifiziert werden, dass die Kacheln, die den Kanten von  $G$  entsprechen, vorgegebene Mindestbreiten  $w(e)$  und Mindesthöhen  $h(e)$  haben. Dazu wird jeder Kante das Gewicht  $h(e)$  in  $G$  und der dazu dualen Kante das Gewicht  $w(e)$  in  $G^*$  zugewiesen. Dann werden für  $Y$  und  $X$  in Schritt 2 und 3 optimale gewichtete topologische Nummerierungen auf  $G$  bzw.  $G^*$  gewählt; siehe [DBETT99, Seite 97]. Die gleiche Idee wird in weiteren Abschnitten verwendet, um rechteckige Duale mit vorgegebenen Mindestkontaktlängen zu konstruieren.

### 3.2.2 Algorithmus von He zur Konstruktion eines rechteckigen Duals

Der Algorithmus von He [He93] konstruiert zu einem gegebenen PTP-Graphen  $G = (V, E)$  ein rechteckiges Dual. Dabei sind die Koordinaten der Rechtecke ganzzahlig und werden



**Abbildung 3.8:** (a) Ein PTP-Graph  $G$  mit einer REL  $(T_1, T_2)$ . Die Kanten in  $T_1$  sind rot, die in  $T_2$  blau gezeichnet. (b) Das S-N-Netz  $G_1$  von  $G$ ; (c) das W-E-Netz  $G_2$  von  $G$ .

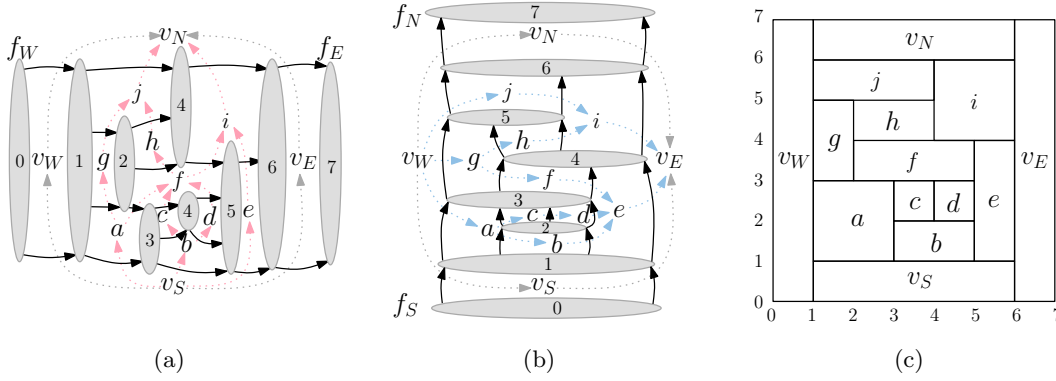
mit Hilfe eines REL von  $G$  bestimmt. Kant und He [KH94] stellten zwei Möglichkeiten vor, wie ein REL eines PTP-Graphen in Linearzeit gefunden werden kann.

Wurde ein REL  $(T_1, T_2)$  von  $G$  konstruiert, unterteilt es  $G$  in zwei gerichtete Teilgraphen induziert von den Kanten in  $T_1$  bzw.  $T_2$ . Sei  $G_1 = (V, E_1)$  der gerichtete Graph mit der Kantenmenge  $E_1 = T_1 \cup \{v_S \rightarrow v_W, v_W \rightarrow v_N, v_S \rightarrow v_E, v_E \rightarrow v_N\}$ . Definiere analog den gerichteten Graphen  $G_2 = (V, E_2)$ ,  $E_2 = T_2 \cup \{v_W \rightarrow v_S, v_S \rightarrow v_E, v_W \rightarrow v_N, v_N \rightarrow v_E\}$ . Der Graph  $G_1$  heißt *S-N-Netz* von  $G$ , und  $G_2$  heißt *W-E-Netz* von  $G$ . He [He93] zeigte, dass  $G_1$  und  $G_2$  azyklisch sind, wobei  $v_S$  die einzige Quelle und  $v_N$  die einzige Senke von  $G_1$  und  $v_W$  die einzige Quelle und  $v_E$  die einzige Senke von  $G_2$  sind. Somit sind  $G_1$  und  $G_2$  *s-t-Graphen*. Die äußere Facette von  $G_1$  wird in den linken Teil  $f_W$  und den rechten Teil  $f_E$  unterteilt. Sei  $\text{left}(v_W) = f_W$ ,  $\text{right}(v_E) = f_E$ ,  $\text{left}(v_S) = \text{left}(v_N) = f_W$ , und  $\text{right}(v_S) = \text{right}(v_N) = f_E$ . Analog definiert man für das W-E-Netz  $G_2$  für einen Knoten  $v \setminus \{v_W, v_E\}$  die Facette *above*( $v$ ) bzw. *below*( $v$ ) als eindeutige Facette inzident zu den linkesten bzw. rechtesten eingehenden und ausgehenden Kanten von  $v$  in  $G_2$ . Die äußere Facette von  $G_2$  wird in den unteren Teil  $f_S$  und den oberen Teil  $f_N$  unterteilt, und man setze  $\text{above}(v_N) = f_N$ ,  $\text{below}(v_S) = f_S$ ,  $\text{above}(v_W) = \text{above}(v_E) = f_N$  und  $\text{below}(v_W) = \text{below}(v_E) = f_S$ . Ein PTP-Graph  $G$  mit einer REL  $(T_1, T_2)$  und den zugehörigen S-N- und W-E-Netzen ist in Abbildung 3.8 dargestellt.

Sei  $G_1^*$  der gerichtete Dualgraph von  $G_1$  (mit der in  $f_W$  und  $f_E$  unterteilten äußeren Facette). Die Knotenmenge von  $G_1^*$  besteht aus den inneren Facetten von  $G_1$  und zusätzlich  $f_W$  und  $f_E$ . Zwei Knoten  $f_1$  und  $f_2$  sind in  $G_1^*$  durch eine Kante  $f_1 \rightarrow f_2$  miteinander verbunden, wenn die Facetten  $f_1$  und  $f_2$  in  $G_1$  eine gerichtete Kante  $e$  gemeinsam haben, sodass  $f_1$  die von links und  $f_2$  die von rechts zu  $e$  adjazente Facette ist. Der Graph  $G_1^*$  ist ein *s-t-Graph* mit der einzigen Quelle  $f_W$  und Senke  $f_E$ . Analog sei  $G_2^*$  der gerichtete Dualgraph von  $G_2$  (mit der in  $f_S$  und  $f_N$  unterteilten äußeren Facette). Seine Knotenmenge enthalte die inneren Facetten von  $G_2$  und zusätzlich dazu  $f_S$  und  $f_N$ . Die Knoten  $f_1$  und  $f_2$  seien in  $G_2^*$  durch eine Kante  $f_1 \rightarrow f_2$  verbunden, wenn die entsprechenden Facetten  $f_1$  und  $f_2$  eine gemeinsame Kante  $e$  in  $G_2$  haben, sodass  $f_1$  rechts und  $f_2$  links von  $e$  liegt. Damit ist  $G_2^*$  ein *s-t-Graph* mit der einzigen Quelle  $f_S$  und Senke  $f_N$ .

He [He93] berechnet auf  $G_1^*$  eine ganzzahlige topologische Nummerierung  $F_1$ . Zusätzlich wird  $F_1(f_W) = 0$  gesetzt. Wie in Abschnitt 3.2.1 erwähnt, stellt die maximale Anzahl Kanten auf einem gerichteten  $f_W$ - $g$ -Weg in  $G_1^*$  eine passende Wahl für  $F_1(g)$  dar. Analog wird eine topologische Nummerierung  $F_2$  auf  $G_2^*$  bestimmt. Bei dieser Wahl sind  $F_1$  und  $F_2$  optimale gewichtete topologische Nummerierungen für die Gewichtsfunktion  $\omega \equiv 1$ .

Mit Hilfe der Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  kann nun ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R} = \{R(v) \mid v \in V\}$



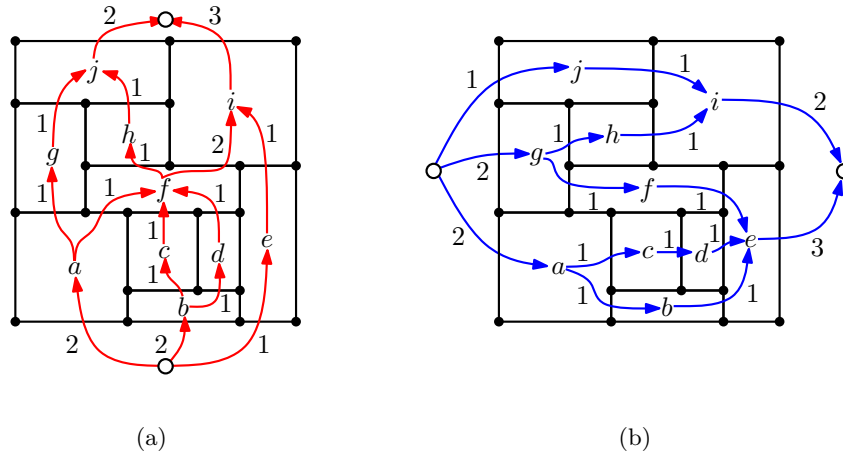
**Abbildung 3.9:** (a) Der Dualgraph  $G_1^*$  von  $G_1$  (schwarze Kanten). Die Knoten sind als Ovale gezeichnet, die mit den Werten von  $F_1$  beschriftet sind. (b) Der Dualgraph  $G_2^*$  von  $G_2$  (schwarze Kanten). Die Knoten sind mit den Werten von  $F_2$  beschriftet. (c) Das rechteckige Dual von  $G$ , das mit dem Algorithmus von He konstruiert wurde.

von  $G$  konstruiert werden. Für einen Knoten  $v \in V \setminus \{v_S, v_N\}$  betrachte die Facetten  $f_1 = \text{left}(v)$  und  $f_2 = \text{right}(v)$  in  $G_1$ . Definiere  $x_L(v) = F_1(f_1)$  und  $x_R(v) = F_1(f_2)$ . Sei ferner  $x_L(v_N) = x_L(v_S) = 1$  und  $x_R(v_N) = x_R(v_S) = F_1(f_E) - 1$ . Für einen Knoten  $v \in V$  betrachte die Facetten  $g_1 = \text{below}(v)$  und  $g_2 = \text{above}(v)$  in  $G_2$ . Setze  $y_B(v) = F_2(g_1)$  und  $y_T(v) = F_2(g_2)$ . Schließlich werden jedem Rechteck  $R(v)$  die  $x$ -Koordinaten  $x_L(v)$ ,  $x_R(v)$  für den linken bzw. rechten Rand und die  $y$ -Koordinaten  $y_B(v)$ ,  $y_T(v)$  für den unteren bzw. oberen Rand zugewiesen. Ein auf diese Weise konstruiertes rechteckiges Dual zum Graphen aus Abbildung 3.8 ist in Abbildung 3.9 zu sehen.

He zeigt, dass diese Konstruktion ein rechteckiges Dual von  $G$  definiert. Ferner wird bei der obigen Wahl von  $F_1$  und  $F_2$  ein Dual  $\mathcal{R}$  mit minimaler Höhe, Breite und Fläche konstruiert unter der Bedingung, dass  $(T_1, T_2)$  das zugehörige REL von  $\mathcal{R}$  ist und alle Kontakte in  $\mathcal{R}$  die Mindestlänge 1 haben. Den Beweis einer verallgemeinerten Variante dieser Aussage für beliebige positive Mindestkontaktlängen findet man in Abschnitt 3.2.4. Man beachte, dass die Orientierung der Kontakte, die den vier äußeren Kanten von  $G$  entsprechen, nicht durch das REL  $(T_1, T_2)$  festgelegt ist. Deshalb dürfen sie sowohl horizontal als auch vertikal realisiert werden.

### 3.2.3 Algorithmus zur Kompaktifizierung einer rechteckigen Zeichnung

Der im Buch von Di Battista et al. [DBETT99, Abschnitt 5.4.1] beschriebene Algorithmus zur Kompaktifizierung rechteckiger Zeichnungen erfordert als Eingabe eine feste orthogonale Zeichnung  $H$  eines eingebetteten planaren Graphen  $\bar{G}$ , in der jede Facette von  $\bar{G}$ , einschließlich der äußeren, als ein Rechteck gezeichnet ist. Der Algorithmus verändert die Segmentlängen in  $H$ , sodass es mit minimaler Breite, Höhe und Fläche auf einem ganzzahligen Gitter mit Zellen der Breite und Höhe 1 gezeichnet werden kann. Die Kompaktifizierung erfolgt unabhängig in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Dazu werden zwei Netzwerke  $N_{\text{hor}}$  und  $N_{\text{ver}}$  wie folgt konstruiert. Die Knotenmenge von  $N_{\text{hor}}$  besteht aus den inneren Facetten von  $H$  und zwei zusätzlichen Knoten  $s$  und  $t$ , die jeweils dem unteren bzw. dem oberen Teil der äußeren Facette entsprechen. Eine Kante  $f \rightarrow g$  ist in  $N_{\text{hor}}$ , wenn die  $f$  und  $g$  entsprechenden Facetten einen gemeinsamen horizontalen Abschnitt  $q$  haben, und  $f$  unterhalb von  $g$  liegt. Hier ist ein Zusammenhang zum in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Algorithmus erkennbar: Ist  $G$  ein PTP-Graph und  $H$  eine Zeichnung eines rechteckigen Duals  $\mathcal{R}$  von  $G$  ohne die vier äußeren Rechtecke, sodass  $(T_1, T_2)$  das zugehörige REL von  $\mathcal{R}$  ist, so entspricht  $N_{\text{hor}}$  gerade  $G_1 - \{v_W, v_E\}$ . Analog wird das Netzwerk  $N_{\text{ver}}$  definiert,



**Abbildung 3.10:** Eine orthogonale Darstellung  $H$  mit Rechtecken und die daraus konstruierten Flussnetzwerke; siehe [DBETT99, Abbildung 5.13 - 5.14]. (a) Das Netzwerk  $N_{\text{hor}}$  zu  $H$  (rot) und ein Minimum Cost Flow auf  $N_{\text{hor}}$ . (b) Das Netzwerk  $N_{\text{ver}}$  zu  $H$  (blau) und ein Minimum Cost Flow auf  $N_{\text{ver}}$ .

so dass es im obigen Fall  $G_2 - \{v_N, v_S\}$  entspricht. Vergleiche dazu Abbildung 3.8(b),(c) mit Abbildung 3.10(a),(b).

Auf den Netzwerken  $N_{\text{hor}}$  und  $N_{\text{ver}}$  werden Flüsse definiert. Für eine Kante  $e = f \rightarrow g$  stellt der Fluss  $\varphi_{\text{hor}}(e)$  die Länge des gemeinsamen horizontalen Abschnitts von  $f$  und  $g$  in der Zeichnung  $H$  dar. Der Kante  $e$  wird also die untere Schranke  $\lambda(e) = 1$ , Kapazität  $\mu(e) = +\infty$  und Kosten  $\chi(e) = 1$  zugewiesen. Analog wird ein Fluss  $\varphi_{\text{ver}}$  auf  $N_{\text{ver}}$  definiert.

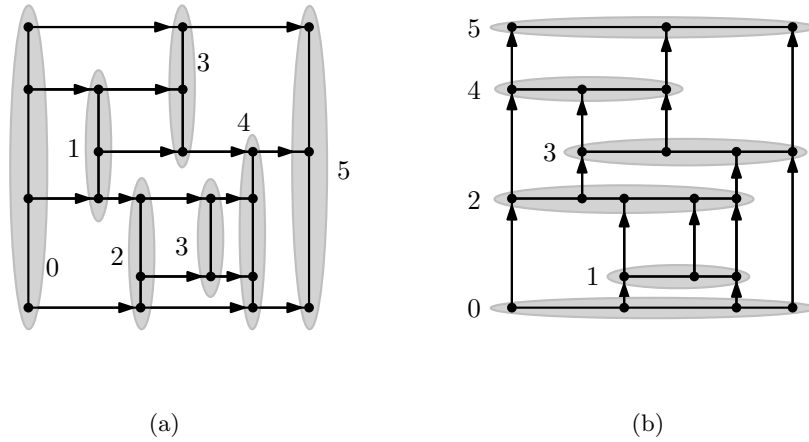
Gegeben eine orthogonale Zeichnung  $H$  von  $G$  mit Mindestkantenlängen eins, können daraus sofort Flüsse auf  $N_{\text{hor}}$  und  $N_{\text{ver}}$  konstruiert werden, indem man den Flusswert einer Kante gleich der Länge des entsprechenden Segments setzt. Dabei gilt Folgendes [DBETT99, Seite 154]: (1) Der Wert des Flusses auf  $N_{\text{hor}}$  ( $N_{\text{ver}}$ ) ist gleich der Breite (Höhe) der Zeichnung; (2) Die Summe der Gesamtkosten der Flüsse auf  $N_{\text{hor}}$  und  $N_{\text{ver}}$  ist gleich der Summe aller Kantenlängen der Zeichnung. Di Battista et al. formulieren die Umkehrung dieser Aussage [DBETT99, Lemma 5.4]:

**Lemma 3.7.** *Setzt man für gegebene Flüsse  $\phi_{\text{hor}}$  auf  $N_{\text{hor}}$  und  $\phi_{\text{ver}}$  auf  $N_{\text{ver}}$  die Länge jedes Segments  $q$  gleich dem Flusswert der  $q$  entsprechenden Kante in  $N_{\text{hor}}$  oder  $N_{\text{ver}}$ , so erhält man eine orthogonale Zeichnung  $\Gamma$  von  $G$  mit der orthogonalen Darstellung  $H$ . Ferner ist die Breite (Höhe) von  $\Gamma$  gleich dem Wert des Flusses in  $N_{\text{hor}}$  ( $N_{\text{ver}}$ ), und die Gesamtlänge der Kanten von  $\Gamma$  ist gleich der Summe der Gesamtkosten von  $\phi_{\text{hor}}$  und  $\phi_{\text{ver}}$ .*

Das Problem der Kompaktifizierung von  $H$  kann somit durch die Berechnung eines Minimum Cost Flow gelöst werden. Mit dem Algorithmus von Garg und Tamassia [GT97] ist es mit dem Zeitaufwand in  $O(n^{7/4} \log n)$  möglich.

Di Battista et al. präsentieren einen weiteren Kompaktifizierungsalgorithmus, der in Linearzeit die Höhe, Breite und Fläche, aber nicht die Gesamtkantenlänge der rechteckigen Zeichnung minimiert [DBETT99, Algorithmus 5.3]. Dazu konstruieren sie einen gerichteten planaren  $s$ - $t$ -Graphen  $N_{\text{hor}}^*$  aus  $H$  wie folgt: Die Knoten von  $N_{\text{hor}}^*$  sind maximale vertikale Segmente, und jedem horizontalen Segment in  $H$  entspricht eine gerichtete Kante, die den entsprechenden linken maximalen vertikalen Segment mit dem rechten verbindet; siehe Abbildung 3.10. Analog definiert man  $N_{\text{ver}}^*$ .

Im oben betrachteten Fall, dass  $H$  eine Zeichnung eines rechteckigen Duals  $\mathcal{R}$  zu einem PTP-Graphen  $G$  mit der zugehörigen REL  $(T_1, T_2)$  ohne die vier äußeren Rechtecke ist,



**Abbildung 3.11:** Dualgraphen zu den Netzwerken in Abbildung 3.10; siehe [DBETT99, Abbildung 5.15]. (a) Dualgraph  $N_{hor}^*$  mit einer optimalen ganzzahligen topologischen Nummerierung. (b) Dualgraph  $N_{ver}^*$  mit einer optimalen ganzzahligen topologischen Nummerierung.

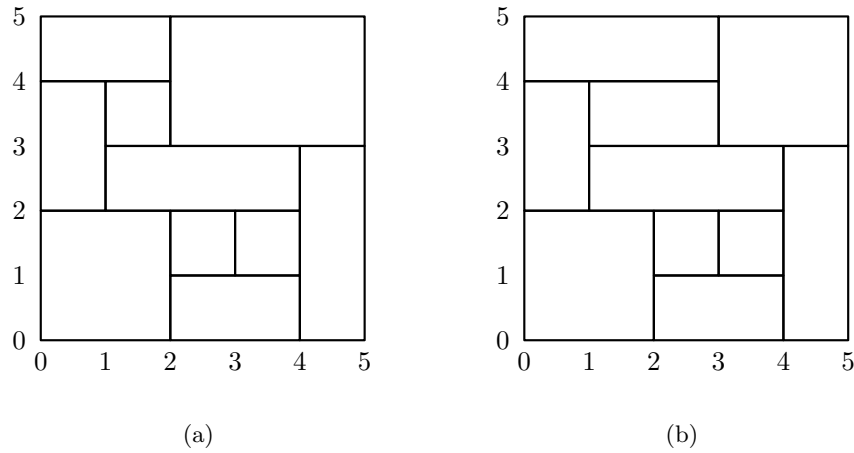
ist  $N_{hor}^*$  äquivalent zu dem Graphen  $G_1^* - \{f_W, f_E\}$  aus dem vorherigen Abschnitt: So entspricht jede Ecke in  $H$  einer inneren Facette von  $G$ , und die Knoten von  $H$  gehören genau dann zu einem maximalen vertikalen Segment, wenn ihre Facetten benachbart sind und ausschließlich Kanten aus  $T_2$  gemeinsam haben. Somit entsprechen die Knoten von  $N_{hor}^*$  gerade den inneren Facetten von  $G_1$ . Offensichtlich sind die Kanten von  $N_{hor}^*$  dual zu den Kanten in  $T_1$ , und somit stimmen  $N_{hor}^*$  und  $G_1^* - \{f_W, f_E\}$  überein. Analog entspricht  $N_{ver}^*$  gerade  $G_2^* - \{f_S, f_N\}$ . Vergleiche dazu Abbildung 3.9(a),(b) mit Abbildung 3.11(a),(b).

Zur Berechnung von Flüssen auf  $N_{hor}$  und  $N_{ver}$  können topologische Nummerierungen auf  $N_{hor}^*$  und  $N_{ver}^*$  verwendet werden:

**Lemma 3.8** (Siehe [DBETT99, Lemma 5.5]). *Für eine gegebene ganzzahlige topologische Nummerierung  $X$  von  $N_{hor}^*$  kann ein Fluss  $\phi$  auf  $N_{hor}$  konstruiert werden, indem man den Wert des Flusses  $\phi(f, g)$  von  $f$  nach  $g$  auf  $\phi(f, g) = X(b'') - X(b')$  setzt, wobei  $b'$  und  $b''$  die maximalen vertikalen Segmente sind, die den linken und rechten Endpunkt des der Kante  $(f, g)$  entsprechenden horizontalen Segments enthalten. Ferner ist der Wert des Flusses  $\phi$  gleich der Differenz des maximalen und minimalen Wertes von  $X$ . Analoges gilt für  $Y$  und  $N_{ver}^*$ .*

Für die Begriffe aus Abschnitt 3.2.2 bedeutet das obige Lemma Folgendes: Man erhält einen Fluss  $\phi$  auf  $G_1$ , wenn man für jede Kante  $e = u \rightarrow v$  von  $G_1$  den Flusswert  $\phi(e)$  entlang  $e$  auf  $\phi(e) = F_1(g) - F_1(f)$  setzt, wobei  $f = \text{left}(e)$  und  $g = \text{right}(e)$  die Facetten von  $G_1$  sind, die  $e$  gemeinsam haben. Insgesamt geht der Algorithmus zur Konstruktion einer Zeichnung  $\Gamma$  von  $H$  mit minimaler Breite, Höhe und Fläche wie folgt vor [DBETT99, Algorithmus 5.3]:

1. Konstruiere planare  $s$ - $t$ -Graphen  $N_{hor}^*$  und  $N_{ver}^*$  und weise ihren Kanten Gewichte 1 zu.
2. Berechne optimale gewichtete topologische Nummerierungen  $X$  und  $Y$  von  $N_{hor}^*$  bzw.  $N_{ver}^*$ .
3. Setze die Länge jedes horizontalen Segments  $e$  von  $H$  auf  $X(b'') - X(b')$ , wobei  $b'$  und  $b''$  die maximalen vertikalen Segmente bzw. Knoten von  $N_{hor}^*$  sind, die den linken bzw. rechten Endpunkt von  $e$  enthalten.
4. Setze die Länge jedes vertikalen Segments  $e$  von  $H$  auf  $Y(b'') - Y(b')$ , wobei  $b'$  und  $b''$



**Abbildung 3.12:** Ergebnisse der Kompaktifizierung; siehe [DBETT99, Abbildung 5.16]. (a) Eine Zeichnung, die mit Hilfe der Minimum Cost Flows aus 3.10(a) und 3.10(b) konstruiert wurde. (b) Eine Zeichnung, die mit Hilfe der topologischen Nummerierungen aus 3.11(a) und 3.11(b) konstruiert wurde.

die maximalen horizontalen Segmente bzw. Knoten von  $N_{\text{ver}}^*$  sind, die den unteren bzw. oberen Endpunkt von  $e$  enthalten.

Sind die Segmentlängen von  $H$  auf die obige Weise festgelegt, so ist dadurch die Zeichnung  $\Gamma$  eindeutig gegeben. Beachte, dass mit dem obigen Algorithmus ein rechteckiges Dual eines PTP-Graphen zu einer gegebenen REL  $(T_1, T_2)$  konstruiert werden kann: Die Graphen  $N_{\text{hor}}^*$  und  $N_{\text{ver}}^*$  (bzw.  $G_1^*$  und  $G_2^*$ ) können direkt aus  $(T_1, T_2)$  konstruiert werden, ohne dass  $H$  gegeben ist; siehe Abschnitt 3.2.2. Es kann gezeigt werden, dass der Algorithmus von He [He93] jedem horizontalen Segment  $s(e)$ , das einer inneren Kante  $e \in T_1$  entspricht, die minimalen und maximalen  $x$ -Koordinaten  $F_1(f_1)$  bzw.  $F_1(f_2)$  zuweist, wobei  $f_1 = \text{left}(e)$  und  $f_2 = \text{right}(e)$ , und jedem vertikalen Segment  $s(e)$ , das einer inneren Kante  $e \in T_2$  entspricht, die minimalen und maximalen  $y$ -Koordinaten  $F_2(g_1)$  bzw.  $F_2(g_2)$ , wobei  $g_1 = \text{below}(e)$  und  $g_2 = \text{above}(e)$ ; siehe Lemma 3.12(b). Dies ist identisch zu Schritt 3 und 4. Somit ist der obige Algorithmus äquivalent zum Algorithmus von He [He93].

### 3.2.4 Konstruktion eines rechteckigen Duals mit vorgegebenen Mindestlängen der Kontakte mit dem Algorithmus von He

Sei  $G = (V, E)$  ein PTP-Graph mit einer positiven Kantengewichtsfunktion  $\omega$  und einer gegebenen REL  $(T_1, T_2)$ . Seien  $G_1, G_2, G_1^*$  und  $G_2^*$  wie in Abschnitt 3.2.2 konstruiert. Ordne jeder Kante  $e^*$  in  $G_1^*$  oder  $G_2^*$  das Gewicht der entsprechenden Kante  $e$  in  $G$  zu, zu der  $e^*$  dual ist:  $\omega(e^*) = \omega(e)$ . Seien  $F_1$  und  $F_2$  optimale gewichtete topologische Sortierungen auf  $G_1^*$  bzw.  $G_2^*$ , sodass wie oben erwähnt  $F_1(g)$  ( $F_2(g)$ ) das maximale Gesamtgewicht eines  $f_W$ - $g$ -Pfades in  $G_1^*$  (eines  $f_S$ - $g$ -Pfades in  $G_2^*$ ) bezeichnet. Man kann  $F_1$  und  $F_2$  in Linearzeit berechnen:

**Lemma 3.9.** *Optimale gewichtete topologische Sortierungen  $F_1$  und  $F_2$  auf  $G_1^*$  bzw.  $G_2^*$  können in  $O(|V|)$  Zeit berechnet werden.*

*Beweis.* Benutze eine modifizierte Breitensuche: Am Anfang enthalte die Liste  $L$  nur  $f_W$ . Setze zunächst  $F_1(v) = 0$  für alle Knoten  $g$  in  $G_1^*$ . Entferne in jedem Schritt einen Knoten  $g$  aus  $L$  und expandiere alle ausgehenden Kanten von  $g$ . Für jede expandierte Kante  $e = g \rightarrow h$  setze  $F_1(h)$  auf  $\max\{F_1(h), F_1(g) + \omega(e)\}$ . Füge  $h$  in  $L$  ein, falls alle in  $h$  eingehenden Kanten expandiert wurden (führe dazu geeignete Zähler mit, damit der Test

in  $O(1)$  möglich ist). Für jeden Knoten  $g$ , der in  $L$  eingefügt wurde, ist  $F_1(g)$  das maximale Gesamtgewicht eines  $f_W$ - $g$ -Pfades in  $G_1^*$ . Der Graph  $G_1^*$  ist planar und hat  $O(|V|)$  Knoten und Kanten. Da er außerdem azyklisch und zusammenhängend ist und nur eine Senke  $f_W$  hat, terminiert der Algorithmus nach  $O(|V|)$  Schritten mit dem richtigen Ergebnis. Analoges gilt für  $G_2^*$ .  $\square$

Für jeden inneren Knoten  $v \in V$  definiere das zugehörige Rechteck  $R(v)$  im Dual  $\mathcal{R}$  von  $G$  als

$$R(v) = [x_L(v), x_R(v)] \times [y_B(v), y_T(v)], \quad (\star)$$

$$\text{mit } x_L(v) = F_1(f_1), \quad x_R(v) = F_1(f_2), \quad y_B(v) = F_2(g_1), \quad y_T(v) = F_2(g_2)$$

$$\text{wobei } f_1 = \text{left}(v), \quad f_2 = \text{right}(v) \text{ in } G_1^* \text{ und } g_1 = \text{below}(v), \quad g_2 = \text{above}(v) \text{ in } G_2^*$$

gemäß dem Algorithmus von He [He93]. Passe die vier äußeren Rechtecke gemäß der Abbildung 3.3(b) an.

In diesem Abschnitt werden wir ohne Verwendung der Ergebnisse aus [DBETT99, Abschnitt 4 und 5] den in [He93] vorgestellten Fall von  $\omega \equiv 1$  auf ein beliebiges positives  $\omega$  verallgemeinern, indem wir zeigen, dass die Definition  $(\star)$  ein gültiges rechteckiges Dual zum REL  $(T_1, T_2)$  konstruiert, der die durch  $\omega$  vorgegebenen Mindestkontaktlängen erfüllt und die Gesamtgröße der inneren Rechtecke minimiert.

Der Beweis für die obige Konstruktion ist analog zu [He93]. Wir werden eine leicht verschiedene Definition der Pfade  $P_i$  und  $Q_i$  benutzen, die den vertikalen bzw. horizontalen Streifen im Dual entsprechen: Seien  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k$  die unterschiedlichen Werte von  $F_1$  für die Facetten von  $G_i$ . Im ursprünglichen Algorithmus entspricht den  $x_i$  eine ganzzahlige Folge  $0, 1, 2, \dots, k_1 - 1$ . Zur Vollständigkeit werden wir vorführen, wie die originalen Beweise für den verallgemeinerten Fall angepasst werden können. Wir setzen

- $\text{FACE}_i = \{f \mid f \text{ ist eine Facette in } G_1 \text{ mit } F_1(f) = x_i\}$ .
- $\text{LB}_i = \{e \mid \text{Kante } e \text{ in } G_1 \text{ ist auf dem linken Rand einer Facette } f \in \text{FACE}_i\}$ .
- $\text{RB}_i = \{e \mid \text{Kante } e \text{ in } G_1 \text{ ist auf dem rechten Rand einer Facette } f \in \text{FACE}_i\}$ .
- $P_0 = (v_S \rightarrow v_W, v_W \rightarrow v_N)$
- $P_i = P_{i-1} - \text{LB}_i \cup \text{RB}_i, 1 \leq i \leq k-1$

Definiere die Pfade  $Q_i$  in  $G_2$ ,  $0 \leq i \leq \ell - 1$  analog. Man beachte, dass es für ein allgemeines  $\omega$  unter Umständen mehr Pfade gibt als für  $w \equiv 1$ ; siehe Abbildung 3.13.

**Lemma 3.10.** (a) Für die oben definierte Pfadmengemenge  $\{P_0, \dots, P_{k-1}\}$  gilt:

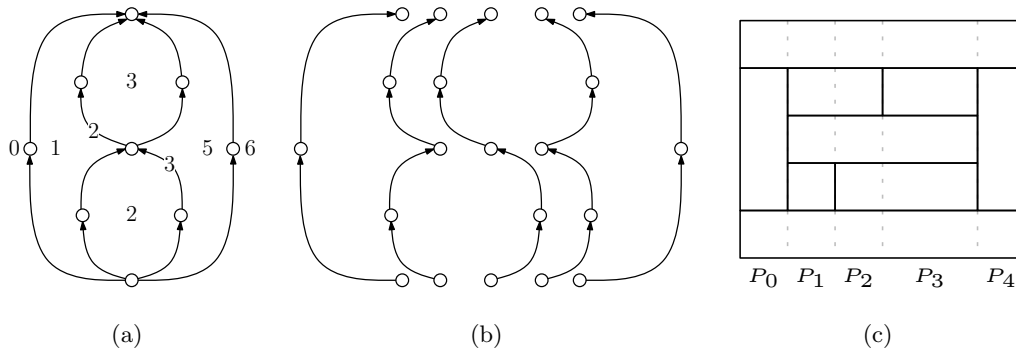
- (1) Jedes  $P_i$  ist ein  $v_S$ - $v_N$ -Pfad;
- (2) Die Vereinigung der Pfade ergibt die Kantenmenge von  $G_1$ ;
- (3)  $P_{i+1}$  liegt rechts von  $P_i$ ;
- (4)  $\text{LB}_i \subseteq P_{i-1}$ .

(b) Ein Knoten  $v \in V$  ist auf dem Pfad  $P_i$  genau dann, wenn  $x_L(v) \leq x_i$  und  $x_{i+1} \leq x_R(v)$ .

*Beweis.* Der Beweis verläuft analog zu dem von Lemma 4 in [He93]. (a) Wir zeigen diese Aussage durch eine Induktion über  $i$ . Zeige:

- (1)  $P_i$  ist ein  $v_S$ - $v_N$ -Pfad in  $G_1$ . Für  $i \geq 1$  liegt  $P_i$  rechts von  $P_{i-1}$ .





**Abbildung 3.13:** (a) Ein S-N-Netz  $G_1$  eines kantengewichteten Graphen  $G$ . Alle unbeschrifteten Kanten haben das Gewicht 1. Die Facetten von  $G_1$  sind mit den Werten einer ganzzahligen topologischen Nummerierung in  $G_1^*$  beschriftet. (b) Das System der  $v_S$ - $v_N$ -Pfade  $\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$  (von links nach rechts). Für den ungewichteten Fall würde es nur  $P_0, P_1, P_3$  und  $P_4$  enthalten. (c) Die Pfade  $P_i$  entsprechen den vertikalen Streifen im Layout.

(2) Für jede Facette  $f$  links von  $P_i$  gilt:  $F_1(f) \leq x_i$ . Für jede Facette  $f$  rechts von  $P_i$  gilt:  $F_1(f) \geq x_{i+1}$ .

(3)  $LB_{i+1} \subseteq P_i$ .

Sei  $i = 0$ :

(1)  $P_0 = (v_S \rightarrow v_W, v_W \rightarrow v_N)$  ist ein S-N-Pfad in  $G_1$ .

(2) Es ist  $x_1 > 0 = x_0$ . Die einzige Facette links von  $P_0$  ist  $f_W$ , und es ist  $F_1(f_W) = x_0 = 0$ . Für jede Facette  $f$  rechts von  $P_0$  ist  $F_1(f) > 0$  und somit  $F_1(f) \geq x_1$ .

(3) Sei  $e \in LB_1$ . Dann gibt es eine Facette  $f \in FACE_1$ , sodass  $e$  auf dem linken Rand von  $f$  liegt. Es ist  $F_1(f) = x_1$ . Sei  $f_1$  die eindeutige Facette, die von rechts an  $P_0$  anliegt. Nach Konstruktion von  $G_1^*$  läuft jeder  $f_W$ - $f$ -Pfad in  $G_1^*$  über  $f_1$ . Somit muss gelten:  $f = f_1$ , sonst käme  $f_1$  vor  $f$  in einem  $f_W$ - $f$ -Pfad, und es würde gelten  $x_1 = F_1(f) > F_1(f_1) > 0 = x_0$ . Der linke Rand von  $f_1$  ist aber gerade  $P_0$ , deshalb gilt  $e \in P_0$ , und somit  $LB(x_1) \subseteq P_0$ .

Sei  $i > 0$ :

(1) Nach Induktionsvoraussetzung ist  $LB_i \subseteq P_{i-1}$ . Bei der Konstruktion von  $P_i$  aus  $P_{i-1}$  wird für jedes  $f \in FACE_i$  der linke Rand von  $f$  mit dem rechten ersetzt. Somit ist  $P_i$  ebenfalls ein  $v_S$ - $v_N$ -Pfad in  $G_1$ , der rechts von  $P_{i-1}$  liegt.

(2) Liegt die Facette  $f$  links von  $P_{i-1}$ , so ist nach Induktionsvoraussetzung  $F_1(f) \leq x_{i-1} < x_i$ . Liegt  $f$  rechts von  $P_{i-1}$  und links von  $P_i$ , so ist  $f \in FACE_i$ , somit  $F_1(f) = x_i$ . Liegt  $f$  rechts von  $P_i$ , so ist nach Induktion  $F_1(f) \geq x_i$ . Angenommen  $F_1(f) = x_i$ . Dann wäre aber  $f \in FACE_i$ , und  $f$  würde von rechts an  $P_{i-1}$  anliegen, da  $LB_i \subseteq P_{i-1}$  nach Induktion. Dann läge aber  $f$  nach Konstruktion links von  $P_i$ , Widerspruch. Somit gilt  $F_1(f) \geq x_{i+1}$ .

(3) Sei  $e \in LB_{i+1}$ ,  $e$  liege also auf dem linken Rand einer Facette  $f$  mit  $F_1(f) = x_{i+1}$ . Angenommen  $e \notin P_i$ . Nach (2) liegt  $e$  rechts von  $P_i$ . Sei  $f'$  die Facette links von  $e$  in  $G_1$ . Sie liegt ebenfalls rechts von  $P_i$ , somit ist nach (2)  $F_1(f') \geq x_{i+1}$ . Dann gilt aber  $F_1(f) \geq F_1(f') + \omega(e) > x_{i+1}$ , Widerspruch.

(b) Sei  $v \in V$  auf  $P_i$ ,  $f_1 = \text{left}(v)$  und  $f_2 = \text{right}(v)$ . Es gelte  $F_1(f_1) = x_{j_1}$  und  $F_1(f_2) = x_{j_2}$ ,  $j_1 < j_2$ . Die Ecke  $v$  wird bei der Konstruktion von  $P_{j_1}$  zum aktuellen Pfad hinzugefügt und bei der Konstruktion von  $P_{j_2}$  entfernt. Da die  $x_j$  streng monoton steigend sind, liegt  $v$  auf allen  $P_i$  für  $i \geq j_1$ ,  $i + 1 \leq j_2$ . Ferner ist  $x_L(v) = x_{j_1}$ ,  $x_R(v) = x_{j_2}$ , und somit liegt  $v$  auf  $P_i$  genau dann, wenn es gilt:  $x_L(v) \leq x_i < x_{i+1} \leq x_R(v)$ .

□

Die obigen Ergebnisse können analog für das W-E-Netzwerk  $G_2$  und das analog konstruierte Pfadsystem  $\{Q_0, \dots, Q_{\ell-1}\}$  von  $G_2$  hergeleitet werden. Insbesondere gilt Folgendes:

Sei  $v \in V$ ,  $F_2(\text{below}(v)) = y_{j_1}$  und  $F_2(\text{above}(v)) = y_{j_2}$ . Die Ecke  $v$  liegt auf dem  $v_W$ - $v_E$ -Pfad  $Q_j$  genau dann, wenn gilt:  $j_1 \leq j \leq j_2 - 1$ , bzw.  $y_B(v) \leq y_j < y_{j+1} \leq y_T(v)$ .

Betrachte nun das gegebene REL  $(T_1, T_2)$  von  $G$ . Für die Koordinaten der Knoten, die durch Pfade in  $T_1$  bzw.  $T_2$  verbunden sind, gelten folgende Zusammenhänge:

**Lemma 3.11.** (1) Ist eine Kante  $u \rightarrow v$  in  $T_2$ , so ist  $x_R(u) = x_L(v)$ .

(2) Gibt es einen gerichteten Pfad in  $T_2$  von  $u$  nach  $v$ , der aus mindestens zwei Kanten besteht, so ist  $x_R(u) < x_L(v)$ .

(3) Ist eine Kante  $u \rightarrow v$  in  $T_1$ , so ist  $y_T(u) = y_B(v)$ .

(4) Gibt es einen gerichteten Pfad in  $T_1$  von  $u$  nach  $v$ , der aus mindestens zwei Kanten besteht, so ist  $y_T(u) < y_B(v)$ .

*Beweis.* Der Beweis ist identisch zu dem von Lemma 5 in [He93]. □

Nun kann gezeigt werden, dass die Zuweisung in  $(\star)$  eine Zeichnung eines rechteckigen Duals zu  $(T_1, T_2)$  definiert, in der die Kontakte die vorgegebenen Mindestlängen einhalten:

**Lemma 3.12.** (a) Sind die Rechtecke  $R(v)$ ,  $v \in V \setminus \{v_S, v_W, v_N, v_E\}$  wie in  $(\star)$  definiert, und für  $v \in \{v_S, v_W, v_N, v_E\}$  wie in Abbildung 3.3(b), so bildet  $\mathcal{R} = \{R(v) \mid v \in V\}$  ein rechteckiges Dual von  $G$ . (b) Ist  $e = u \rightarrow v$  eine Kante in  $T_1$ , haben  $R(u)$  und  $R(v)$  einen gemeinsamen horizontalen Randabschnitt mit der linken und rechten  $x$ -Koordinate  $F_1(\text{left}(e))$  bzw.  $F_1(\text{right}(e))$ . Ist  $e$  eine Kante in  $T_2$ , haben  $R(u)$  und  $R(v)$  einen gemeinsamen vertikalen Randabschnitt mit der unteren und oberen  $y$ -Koordinate  $F_2(\text{below}(e))$  bzw.  $F_2(\text{above}(e))$ .

*Beweis.* Der Beweis verläuft analog zu dem von Theorem 6 in [He93]. Seien die Pfade  $\{P_0, \dots, P_{k-1}\}$  in  $G_1$  und  $\{Q_0, \dots, Q_{\ell-1}\}$  in  $G_2$  wie oben definiert. In  $\mathcal{R}$  entspricht jeder  $v_S$ - $v_N$ -Pfad  $P_i$  ( $1 \leq i \leq k-2$ ) einem vertikalen Streifen, der von den  $x$ -Koordinaten  $x_i$  und  $x_{i+1}$  begrenzt wird. Jeder  $v_W$ - $v_E$ -Pfad  $Q_j$  ( $1 \leq j \leq \ell-2$ ) entspricht einem horizontalen Streifen begrenzt von den  $y$ -Koordinaten  $y_j$  und  $y_{j+1}$ . Zum Beweis der obigen Aussage zeigen wir zuerst, dass alle Rechtecke  $R(v)$ ,  $v \in V \setminus \{v_S, v_W, v_N, v_E\}$ , im Inneren disjunkt sind:

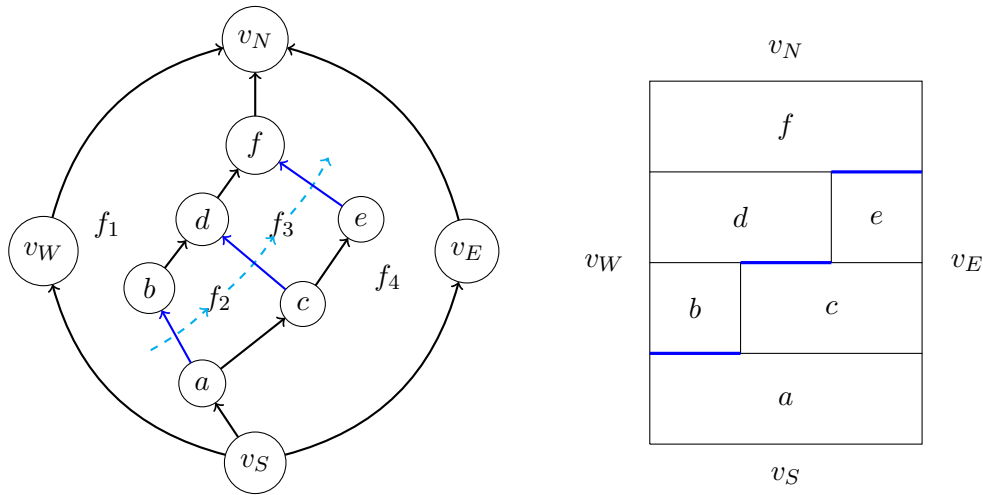
(1) Jedes Rechteck  $R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ,  $1 \leq i \leq k-2$ ,  $1 \leq j \leq \ell-2$ , ist von genau einem  $R(v)$ ,  $v \in V \setminus \{v_S, v_W, v_N, v_E\}$ , belegt.

Betrachte den  $v_S$ - $v_N$ -Pfad  $P_i$  und den  $v_W$ - $v_E$ -Pfad  $Q_j$ . Aus der zyklischen Reihenfolge der Kanten in der Inzidenzliste eines Knotens in einem REL folgt, dass  $P_i$  und  $Q_j$  genau einen Schnittpunkt  $v \in V \setminus \{v_S, v_W, v_N, v_E\}$  haben. Nach Lemma 3.10(b) ist  $v$  der Schnittpunkt von  $P_i$  und  $Q_j$  genau dann, wenn gilt:

$$x_L(v) \leq x_i < x_{i+1} \leq x_R(v), \quad y_B(v) \leq y_j < y_{j+1} \leq y_T(v)$$

Somit wird  $R_{i,j}$  nur von  $R(v)$  überdeckt. Damit wurde die Behauptung (1) gezeigt.

Für  $(i, j) \in \{0, k-1\} \times \{0, \ell-1\}$  haben  $P_i$  und  $Q_j$  mehr als einen Schnittpunkt. In diesem Fall bestehen aber die Pfade nur aus den vier äußeren Knoten, dessen Rechtecke



**Abbildung 3.14:** Skizze zum Beweis von Lemma 3.13. Die Kantenmenge  $S \in T_1$ , die einen  $v_S$ - $v_N$ -Schnitt in  $G_1 - \{v_W, v_E\}$  bildet, ist blau eingezeichnet.

auf die oben beschriebene besondere Weise konstruiert werden und deshalb keine  $R_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq k-2$ ,  $1 \leq j \leq \ell-2$ , überdecken.

Man beachte, dass die Rechtecke  $R_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq k-2$ ,  $1 \leq j \leq \ell-2$ , im Inneren disjunkt sind und das gesamte Rechteck  $R_I = [x_1, x_{k-1}] \times [y_1, y_{\ell-1}]$  überdecken.

Wir zeigen nun, dass die Kontakte zwischen den Rechtecken genau den inneren Kanten aus  $G$  entsprechen, die oben angegebenen Koordinaten haben und somit die durch  $\omega$  vorgegebenen Mindestlängen einhalten:

(2) Wenn  $R(u)$  und  $R(v)$ ,  $\{u, v\} \not\subseteq \{v_S, v_W, v_N, v_E\}$ , einen gemeinsamen Randabschnitt haben, ist die Kante  $\{u, v\}$  in  $G$ .

Annahme:  $R(u)$  und  $R(v)$  haben den gemeinsamen horizontalen Randabschnitt  $I$ , und  $R(u)$  liegt unterhalb von  $R(v)$ . Nach Konstruktion der Rechtecke existieren  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, \ell-1\}$  mit  $[x_i, x_{i+1}] \times \{y_j\} \subseteq I$ . Es gilt also:

$$x_L(u) \leq x_i < x_{i+1} \leq x_R(u), \quad x_L(v) \leq x_i < x_{i+1} \leq x_R(v)$$

Nach Lemma 3.10 liegen  $u$  und  $v$  auf  $P_i$ . Angenommen, die Kante  $u \rightarrow v$  liegt nicht auf  $P_i$ . Dann gibt es einen  $u$ - $v$ -Pfad in  $T_1$  bestehend aus mehr als zwei Kanten, und nach Lemma 3.11 gilt:  $y_T(u) < y_B(v)$ , im Widerspruch zur Existenz von  $I$ . Der vertikale Fall geht analog.

(3) Zeige (b). Sei  $e = u \rightarrow v \in T_1$ . Seien  $g_1, g_2$  die Facetten von  $G_1$  mit  $g_1 = \text{left}(v)$ ,  $g_2 = \text{right}(v)$ , und sei  $F_1(g_1) = x_{i_1}$  und  $F_1(g_2) = x_{i_2}$ . Nach Lemma 5 gilt  $y_T(u) = y_B(v) =: y'$ . Die Kante  $e$  wird für  $j = i_1$  zum aktuellen Pfad  $P_j$  hinzugefügt und für  $j = i_2$  von  $P_j$  entfernt. Somit liegt  $e$  auf  $P_j$  genau für  $j = i_1, \dots, i_2 - 1$ . Damit haben  $R(u)$  und  $R(v)$  genau den gemeinsamen Randabschnitt  $[x_{i_1}, x_{i_2}] \times \{y'\}$ . Den zweiten Teil von (3) zeigt man analog.

Damit wurde die Aussage des Lemmas gezeigt.  $\square$

Wir zeigen, dass die obige Konstruktion eine Zeichnung zu  $(T_1, T_2)$  minimaler Größe unter Einhaltung der vorgegebenen Mindestkontaktlängen liefert.

**Lemma 3.13.** Gegeben sei ein PTP-Graph  $G = (V, E)$  mit einer positiven Kantengewichtsfunktion  $\omega$  und einem zugehörigen REL  $(T_1, T_2)$ . Für jede Kante  $e \in E$  bestimme  $\omega(e)$  die erforderliche Mindestlänge des entsprechenden Segments  $s(e)$  in einem Dual

von  $G$ . Seien ferner  $F_1$  und  $F_2$  optimale gewichtete topologische Nummerierungen auf  $G_1^*$  bzw.  $G_2^*$ , die, wie oben beschrieben, aus maximalen Pfaden in  $G_1^*$  bzw.  $G_2^*$  berechnet wurden. Dann liefert die Definition  $(\star)$  ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}^*$  zu  $(T_1, T_2)$  mit minimaler Gesamtbreite, Gesamthöhe und Gesamtfläche der inneren Rechtecke.

*Beweis.* Betrachte ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}$  zu  $(T_1, T_2)$ , das die obigen Anforderungen an die Mindestkontaktlängen erfüllt. Sei  $P = (f_W = f_0 \rightarrow f_1 \rightarrow \dots \rightarrow f_q \rightarrow f_E = f_{q+1})$  ein Pfad in  $G_1^*$ , und sei  $e_j \in T_1$ , sodass  $e_j^* = f_j \rightarrow f_{j+1}$ ,  $j = 0, \dots, q$ . Die Kantenmenge  $S = \{e_1, \dots, e_{q-1}\} \subseteq T_1$  enthält eine Kante aus jedem  $v_S$ - $v_W$ -Weg in  $G_1' = G_1 - \{v_W, v_E\}$  und ist somit ein  $v_S$ - $v_N$ -Schnitt in  $G_1'$ . Deshalb überdecken die  $x$ -Koordinaten der Kontaktabschnitte, die den Kanten aus  $S$  entsprechen, das gesamte Intervall  $[x_R(v_W), x_L(v_E)]$  (sonst gäbe es einen  $v_S$ - $v_N$ -Pfad in  $T_1 \setminus S$ ). Andererseits enthält jeder  $v_S$ - $v_N$ -Weg in  $T_1$  genau eine Kante aus  $S$ , deshalb überlappen sich die  $x$ -Koordinaten der Kontaktabschnitte zu den Kanten aus  $S$  nur an den Rändern, siehe Abbildung 3.14. Es folgt, dass die Gesamtbreite der inneren Rechtecke in  $\mathcal{R}$  genau

$$\sum_{e \in S} |s(e)| \geq \sum_{e \in S} \omega(e) = \omega(f_1 \rightarrow \dots \rightarrow f_k)$$

beträgt. Sei nun  $P = (f_W = f_0 \rightarrow f_1 \rightarrow \dots \rightarrow f_k \rightarrow f_E = f_{k+1})$  gewichtsmaximal. Die Gesamtbreite der inneren Rechtecke in  $\mathcal{R}^*$  beträgt nach der Wahl von  $F_1$  gerade

$$F_1(f_k) - F_1(f_1) = \omega(f_1 \rightarrow \dots \rightarrow f_k).$$

Somit folgt, dass die Gesamtbreite der inneren Rechtecke in  $\mathcal{R}$  mindestens so groß ist wie in  $\mathcal{R}^*$ . Analoges zeigt man für die Gesamthöhe der inneren Rechtecke.  $\square$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass die obige Konstruktion ein EPRD von  $(G, \omega)$  definiert, falls das gegebene REL  $(T_1, T_2)$  ein EPREL ist. Dafür verwenden wir folgendes Lemma:

**Lemma 3.14.** *Sei  $\phi$  ein Fluss auf  $G_1$ , und für einen  $f$ - $g$ -Pfad  $Q$  in  $G_1^*$  bezeichne  $\phi(Q) = \sum_{e^* \in P} \phi(e)$  das Gewicht von  $Q$  bezüglich  $\phi$ . Dann gilt für jedes Paar von  $v_W$ - $f$ -Pfaden  $Q', Q''$  in  $G_1^*$ :  $\phi(Q') = \phi(Q'')$ .*

*Beweis.* Seien  $P_i$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ ,  $v_S$ - $v_N$ -Pfade nach der obigen Konstruktion. Wir zeigen folgende Aussage induktiv: Für jede Facette  $f$  von  $G_1$ , die links von  $P_i$  liegt,  $0 \leq i \leq k-1$ , gilt: Für jedes Paar von  $f_W$ - $f$ -Pfaden  $Q', Q''$  in  $G_1^*$  gilt:  $\phi(Q') = \phi(Q'') =: \Phi(f)$ .

Induktionsanfang: Sei  $i = 0$ . Die einzige Facette von  $G_1$  links von  $P_0$  ist  $f_W$ , somit folgt die Behauptung. Sei  $i = 1$ . Für  $f_W$  gilt die Behauptung. Nach Definition von  $T_1$  liegt zwischen  $P_0$  und  $P_1$  genau eine Facette  $f$ . Es gibt zwei mögliche  $f_W$ - $f$ -Wege in  $G_1^*$ : über die Kante dual zu  $v_S \rightarrow v_W$  oder über die Kante dual zu  $v_W \rightarrow v_N$ . Da  $\phi$  ein Fluss in  $G_1$  ist, gilt  $\phi(v_S \rightarrow v_W) = \phi(v_W \rightarrow v_N)$ .

Sei nun  $i > 1$ . Die Facette  $f$  liege links von  $P_i$ . Liegt  $f$  links von  $P_{i-1}$ , gilt die Behauptung nach Induktionsvoraussetzung. Betrachte nun eine Facette  $f$ , die zwischen  $P_{i-1}$  und  $P_i$  liegt, also in  $\text{FACE}_i$ . Beachte, dass kein  $f_W$ - $f$ -Pfad eine Kante  $e^*$  enthält, die dual zu einem  $e \in P_i$  ist. Somit verlaufen alle  $f_W$ - $f$ -Pfade links von  $P_i$ . Gibt es nur eine zu  $f$  benachbarte Facette  $f'$  links von  $f$ , so laufen alle  $f_W$ - $f$ -Wege in  $G_1^*$  über  $f'$ . Da  $f'$  links von  $P_{i-1}$  liegt, folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung und der Flusseigenschaft von  $\phi$ .

Sei nun  $f \in \text{FACE}_i$ , und  $f$  habe links zwei oder mehr benachbarte Facetten. Seien  $\{v_0, v_1, \dots, v_q, v_{q+1}\}$  die Knoten von Grad  $\geq 3$  auf dem linken Rand von  $f$ , siehe Abbildung 3.15. Hier wird exemplarisch der Fall von  $q = 2$  bewiesen, der allgemeine Beweis

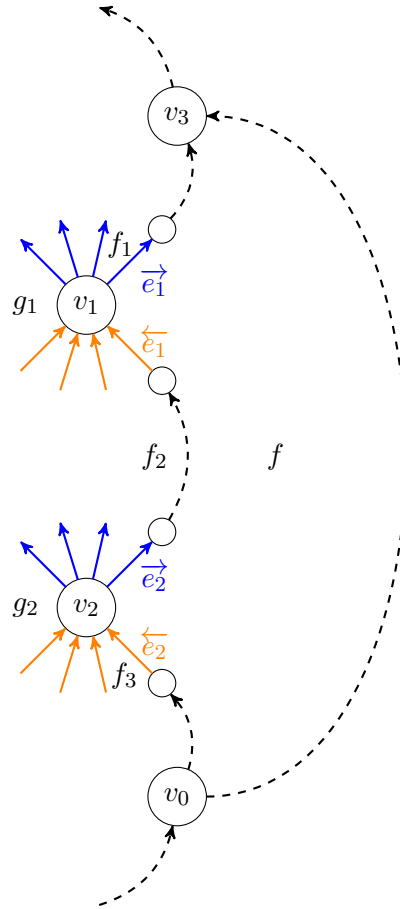


Abbildung 3.15: Skizze zum Beweis von Lemma 3.14

verläuft analog. Sei  $\overleftarrow{e}_j$  die rechteste in  $v_j$  eingehende Kante, und  $\overrightarrow{e}_j$  die rechteste aus  $v_j$  ausgehende Kante. Sei  $\text{left}(\overrightarrow{e}_1) = f_1$ ,  $\text{left}(\overleftarrow{e}_1) = \text{left}(\overrightarrow{e}_2) = f_2$  und  $\text{left}(\overleftarrow{e}_2) = f_3$  (es wird nicht gefordert, dass  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f_3$  paarweise verschieden sind). Sei  $g_1 = \text{left}(v_1)$  und  $g_2 = \text{left}(v_2)$ . Der Vorgänger von  $f$  auf einem  $f_W$ - $f$ -Weg ist (1)  $f_1$ , (2)  $f_2$  oder (3)  $f_3$ . Die Facetten  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f_3$  liegen links von  $P_{i-1}$ . Für ein  $j = 1, \dots, 3$  haben deshalb alle  $f_W$ - $f_j$ -Pfade gleiches Gesamtgewicht bezüglich  $\phi$ . Ein  $f_W$ - $f_1$ -Pfad in  $G_1^*$  über  $g_1$  hat bezüglich  $\phi$  das Gesamtgewicht

$$\Phi(f_1) = \Phi(g_1) + \sum_{e \in T_1^+(v_1)} \phi(e) - \phi(\overrightarrow{e}_1)$$

Ein  $f_W$ - $f_2$ -Pfad in  $G_1^*$  über  $g_1$  oder  $g_2$  hat bzgl.  $\phi$  das Gesamtgewicht

$$\Phi(f_2) = \Phi(g_1) + \sum_{e \in T_1^+(v_1)} \phi(e) - \phi(\overleftarrow{e}_1) = \Phi(g_2) + \sum_{e \in T_1^+(v_2)} \phi(e) - \phi(\overrightarrow{e}_2)$$

Da  $\overleftarrow{e}_1$  und  $\overrightarrow{e}_2$  auf einem kontinuierlichen Abschnitt des gemeinsamen Randes von  $f_2$  und  $f$  liegen (einfacher Pfad), folgt aus der Flusseigenschaft von  $\phi$ :  $\phi(\overleftarrow{e}_1) = \phi(\overrightarrow{e}_2)$ , und somit

$$\Phi(g_1) + \sum_{e \in T_1^+(v_1)} \phi(e) = \Phi(g_2) + \sum_{e \in T_1^+(v_2)} \phi(e)$$

Ein  $f_W$ - $f_3$ -Pfad in  $G_1^*$  über  $g_2$  hat bzgl.  $\phi$  das Gesamtgewicht

$$\Phi(f_3) = \Phi(g_2) + \sum_{e \in T_1^+(v_2)} \phi(e) - \phi(\overleftarrow{e}_2)$$

Im Fall (1) hat somit der  $f_W$ - $f$ -Pfad das Gesamtgewicht

$$\Phi(f_1) + \phi(\vec{e}_1) = \Phi(g_1) + \sum_{e \in T_1^+(v_1)} \phi(e)$$

Im Fall (2) hat er das Gesamtgewicht

$$\Phi(f_2) + \phi(\overleftarrow{e}_1) = \Phi(g_1) + \sum_{e \in T_1^-(v_1)} \phi(e) = \Phi(g_2) + \sum_{e \in T_1^+(v_2)} \phi(e)$$

Im Fall (3) hat er das Gesamtgewicht

$$\Phi(f_3) + \phi(\overleftarrow{e}_2) = \Phi(g_2) + \sum_{e \in T_1^-(v_2)} \phi(e)$$

Wendet man die Flusserhaltungseigenschaft von  $\phi$  auf  $v_1$  und  $v_2$  an, erhält man

$$\Phi(f_1) + \phi(\vec{e}_1) = \Phi(f_2) + \phi(\overleftarrow{e}_1) = \Phi(f_2) + \phi(\vec{e}_2) = \Phi(f_3) + \phi(\overleftarrow{e}_2)$$

Somit haben alle  $f_W$ - $f$ -Wege in  $G_1^*$  das gleiche Gesamtgewicht  $\Phi(f)$ .  $\square$

**Lemma 3.15.** *Ist  $\phi$  ein Fluss auf  $G_1$ , sodass für jede Kante  $e$  in  $G_1$   $\omega(e) \leq \phi(e)$  gilt, so induziert  $\phi$  eine gewichtete topologische Nummerierung  $\Phi$  auf  $G_1^*$ , indem man  $\Phi(f_W) = 0$  und für jede Kante  $e$  von  $G_1$   $\Phi(\text{right}(e)) = \Phi(\text{left}(e)) + \phi(e)$  setzt. Ferner ist  $\Phi(f_E) - \Phi(f_W)$  gerade der Wert des Flusses  $\phi$ .*

*Beweis.* Sei  $e^* = f \rightarrow g$  eine Kante in  $G_1^*$ . Nach Lemma 3.14 haben alle  $f_W$ - $g$ -Pfade gleiches Gewicht bzgl.  $\phi$ , insbesondere alle, die über  $f$  laufen. Somit haben alle  $f$ - $g$ -Pfade das Gewicht  $\phi(e^*)$  bzgl.  $\phi$ . Folglich induziert  $\Phi(g) = \Phi(f) + \phi(e) \geq \Phi(g) + \omega(e)$  eine gewichtete topologische Nummerierung. Die Differenz zwischen dem minimalen und maximalen Wert von  $\Phi$  ist  $\Phi(f_E) - \Phi(f_W) = \sum_{e \in T_1^+(v_S)} \phi(e)$ , und dies ist gerade der Wert des Flusses  $\phi$ .  $\square$

Ist  $(T_1, T_2)$  ein EPREL, so definiert  $\omega$  einen Fluss auf  $G_1 - \{v_W, v_E\}$  und  $G_2 - \{v_S, v_N\}$ , der leicht auf  $G_1$  und  $G_2$  erweitert werden kann. Für die dadurch induzierten optimalen gewichteten topologischen Nummerierungen  $F_1$  bzw.  $F_2$  gilt dann:  $F_1(\text{right}(e)) = F_1(\text{left}(e)) + \omega(e)$  für ein  $e \in T_1$ , und  $F_2(\text{above}(e)) = F_1(\text{below}(e)) + \omega(e)$  für ein  $e \in T_2$ . Konstruiert man das Dual wie in  $(\star)$  und passt die äußeren Rechtecke geeignet an, so hat jedes Segment  $s(e)$  die genaue Länge  $|s(e)| = \omega(e)$ . Zusammen mit Theorem 3.1 und Bemerkung 3.3 ergibt sich eine vollständige Charakterisierung von Graphen, die eine Darstellung als EPRD haben:

**Theorem 3.16.** *Ein Graph  $G$  hat genau dann eine Darstellung als EPRD mit vier Rechtecken am äußeren Rand, wenn er ein PTP-Graph ist und ein EPREL besitzt.*

## 4. Komplexitätsbetrachtungen zu einigen Problemen für rechteckige Duale

Im vorherigen Kapitel beschäftigten wir uns mit der Konstruktion rechteckiger Duale zu einem gewichteten Graphen, wobei die Zeichnung des Duals durch eine Gewichtsfunktion vorgegebene exakte oder minimale Kontaktlängen einhalten musste. In diesem Kapitel führen wir weitere Anforderungen an die Zeichnung ein, wie etwa Einhaltung der vorgegebenen maximalen Kontaktlängen und maximalen Flächeninhalte der Rechtecke. Wir werden zeigen, dass für einige Kombinationen der Anforderungen die Entscheidung, ob zum gegebenen Graphen eine Zeichnung existiert, die sie erfüllt, NP-schwer ist.

Die Komplexität für einige Varianten des Problems, ein rechteckiges Layout unter bestimmten Anforderungen an die Form und Größe der Rechtecke zu zeichnen, wurde im Kontext des Floorplanning für den Chipentwurf untersucht. Dabei stehen Rechtecke für verschiedene Schaltungsblöcke, die auf eine optimale Weise (etwa mit minimaler Gesamtfläche) auf dem Chip platziert werden sollen. Im nachfolgenden Routing-Schritt werden sie durch Leitungen miteinander verbunden. Dabei spielt allerdings die exakte Einhaltung der Adjazenzen oft nicht die entscheidende Rolle, da die Leitungen üblicherweise in mehreren Schichten gelegt werden. Stattdessen konzentriert man sich oft auf die Minimierung der Gesamtfläche unter Einhaltung der Dimensionen, Seitenverhältnisse (aspect ratios) oder Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke oder Mindestlängen der Kontakte. So zeigte Hakimi [Hak88], dass für ein rechteckiges Layout das Minimieren der Fläche des umschreibenden Rechtecks unter Einhaltung vorgegebener Flächen der Rechtecke sowie unteren und oberen Grenzen ihrer Aspect Ratios NP-schwer ist. Allerdings werden dabei keine Anforderungen an die Adjazenzen gestellt. Stockmeyer [Sto84] zeigte die NP-Schwere für das *Orientierungsproblem*: Dabei soll jedes Rechteck eine rechteckige Zelle mit vorgegebenen Seitenlängen enthalten, die entweder vertikal oder horizontal orientiert ist, und es soll beispielsweise die Gesamtfläche der Zeichnung minimiert werden. Die relativen Positionen der Rechtecke zueinander werden durch eine Links- und Oben-Beziehung festgehalten. Diese Festlegung ist allerdings nicht äquivalent zu einer Vorgabe der Adjazenzen durch einen Kontaktgraphen.

Im Kontext von rechteckigen Kartogrammen möchte man für ein festes rechteckiges Dual eines gegebenen Graphen entscheiden, ob man die Rechtecke mit durch Knotengewichte vorgegebenen Flächeninhalten realisieren kann. Biedl und Genc [BG05] zeigten die NP-Schwere des Problems für den Fall, dass die äußere Facette ein nicht notwendigerweise einfaches Polygon beliebiger Komplexität sein darf, aber alle anderen Facetten Rechtecke

sind.

## 4.1 Vorgegebene untere und obere Schranken für die Kontaktlängen

Im Gegensatz zu den in Kapitel 3 betrachteten Fällen, in denen exakte oder minimale Längen der Kontakte vorgegeben wurden, wird folgendes Entscheidungsproblem NP-schwer: Für einen Kontaktgraphen sowie untere und obere Schranken an die Kontaktlängen entscheide, ob es ein rechteckiges Dual mit den geforderten Eigenschaften gibt.

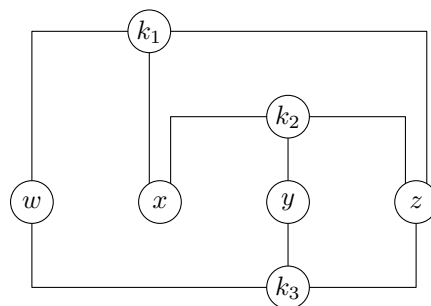
**Theorem 4.1.** *Für einen gegebenen PTP-Graphen  $G = (V, E)$  mit zwei Kantengewichtsfunktionen  $\alpha, \beta : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , wobei  $\alpha(e) \leq \beta(e)$  für alle  $e \in E$ , ist es NP-schwer zu entscheiden, ob es zu  $G$  ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R} = \{R(v) \mid v \in V\}$  gibt, in dem für jede Kante  $uv \in E$  das entsprechende Kontaktsegment  $s(e)$  in  $\mathcal{R}$  die Länge  $\alpha(e) \leq |s(e)| \leq \beta(e)$  hat.*

Der Beweis ist eine Reduktion vom NP-schweren Problem PLANAR 3SAT [Lic82] mit Hilfe bestimmter Hilfskonstruktionen oder *Gadgets*. PLANAR 3SAT ist ein Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Formeln in konjunktiver Normalform mit höchstens drei Variablen pro Klausel. Die zusätzliche Forderung der Planarität einer Formel  $\phi$  bedeutet, dass der durch  $\phi$  induzierte *Variablen-Klausel-Graph*  $H_\phi$  von  $\phi$ , der für jede Variable sowie jede Klausel einen Knoten und für jedes Vorkommen einer Variable in einer Klausel eine Kante hat, planar ist. Ein solcher Graph  $H_\phi$  kann auf einem Gitter polynomieller Größe gezeichnet werden, sodass alle Variablenknoten auf einer horizontalen Linie platziert werden, die Klauselknoten oberhalb oder unterhalb dieser Linie liegen und die Kanten, die einen Klauselknoten mit den drei entsprechenden Variablenknoten verbinden, eine E-Form bilden [KR92]. Eine Beispielinstantz  $\phi$  für PLANAR 3SAT mit einem auf diese Weise gezeichneten Graphen  $H_\phi$  ist in Abbildung 4.1 dargestellt. In unserer Reduktion erstellen wir für eine PLANAR 3SAT-Formel  $\phi$  einen PTP-Graphen  $G_\phi$ . Dieser hat genau dann ein gültiges rechteckiges Dual  $\mathcal{R}_\phi$  (das dann die oben beschriebene Zeichnung von  $H_\phi$  nachbildet), wenn  $\phi$  erfüllbar ist. Im Folgenden beschreiben wir die einzelnen Bausteine zur Konstruktion von  $G_\phi$ .

Man beachte, dass durch das Weglassen einer der beiden Anforderungen an die Kontaktlängen das Problem trivial wird: Jedes rechteckige Dual kann hinreichend skaliert werden, sodass es die Anforderungen an die Mindestkontaktlängen erfüllt. Analoges gilt für die maximalen Kontaktlängen.

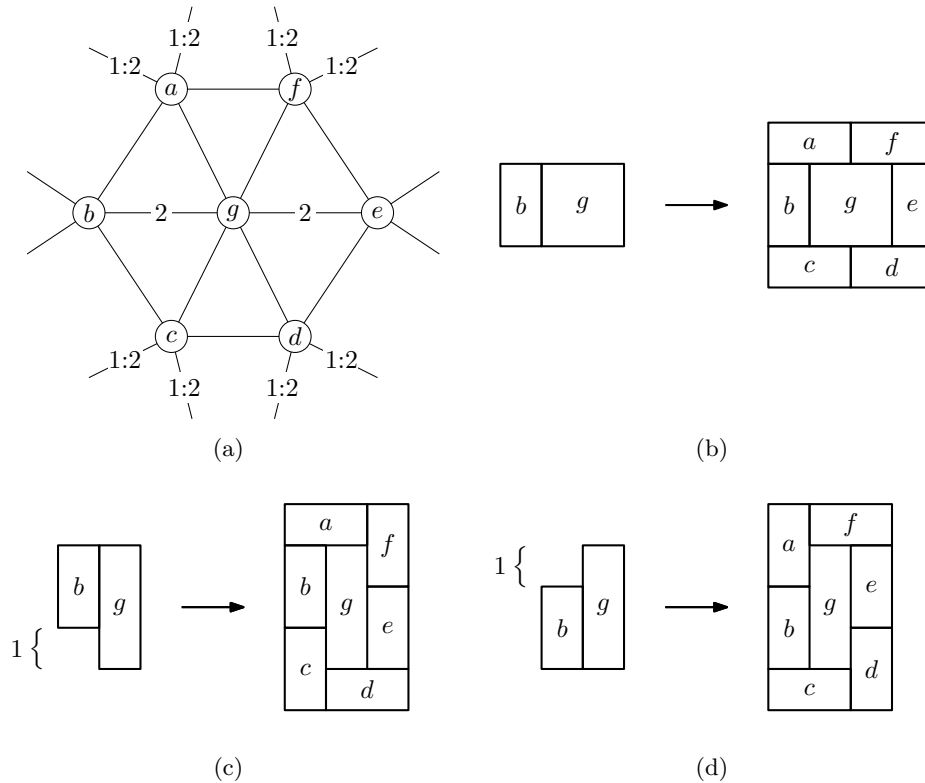
### 4.1.1 Variablen und Leitungen

Zur Konstruktion von Variablen-Gadgets zum Nachbilden der Variablenknoten von  $H_\phi$  kombinieren wir die folgenden zwei Grundbausteine: Der Teilgraph vom *Typ 1* ist ein 6-Kreis mit einem inneren Knoten, siehe Abbildung 4.2. Die äußeren Knoten seien mit  $a, b$ ,



**Abbildung 4.1:** Der Variablen-Klausel-Graph  $H_\phi$  zu einer PLANAR 3SAT-Instanz  $\phi = \{k_1 = \{w, x, z\}, k_2 = \{\bar{x}, y, \bar{z}\}, k_3 = \{\bar{w}, \bar{y}, \bar{z}\}\}$ .

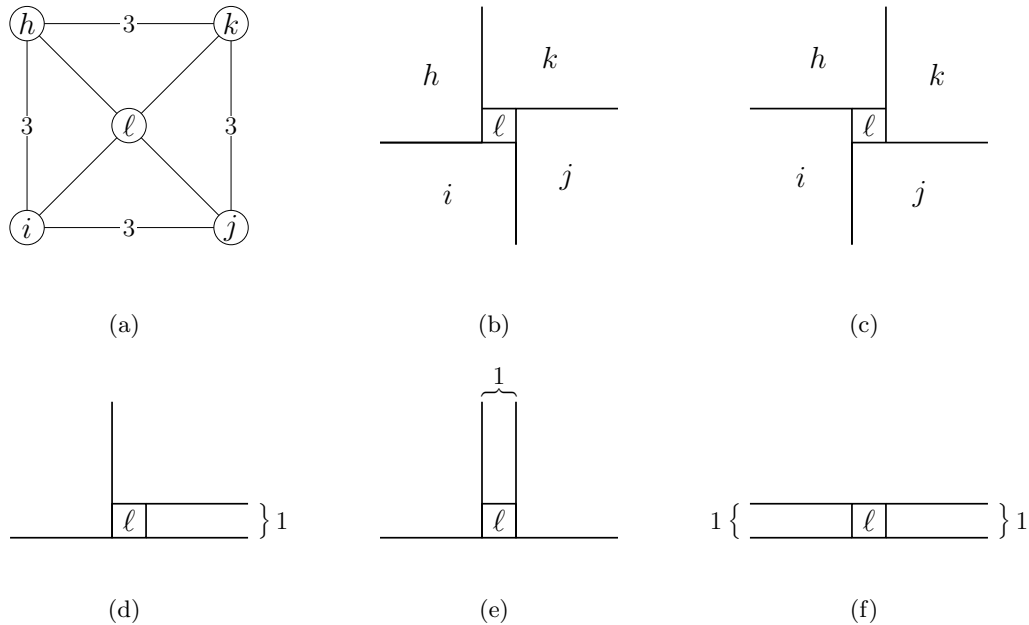




**Abbildung 4.2:** Teilgraph vom Typ 1. Die Kantengewichte in (a) sind  $\alpha(uv) = \beta(uv) = x$  für eine Kante  $uv$ , die mit einem einzelnen Wert  $x$  beschriftet ist (mit  $d = 1$  für die unbeschrifteten Kanten) und  $\alpha(uv) = x, \beta(uv) = y$  für die Beschriftung  $x : y$ . Daraus ergeben sich genau drei mögliche Realisierungen (b), (c), (d) des vorgegebenen Teilgraphen.

$c, d, e, f$  gegen den Uhrzeigersinn beschriftet, und  $g$  sei der innere Knoten. Alle äußeren Knoten haben den Grad 5 in  $G_\phi$ . Die Kantengewichte  $\alpha$  und  $\beta$  seien wie in Abbildung 4.2 gesetzt. Somit hat das Rechteck  $R(g)$  in  $\mathcal{R}_\phi$  den Umfang 8. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe es die Breite zwischen 1 und 2 und die Höhe zwischen 2 und 3. Der Umfang von  $R(b)$  und  $R(e)$  beträgt 6, und der von  $R(a), R(c), R(d)$  und  $R(f)$  zwischen 5 und 7. Für die letzteren vier Rechtecke haben jeweils drei aufeinander folgende Randabschnitte die feste Länge 1, und die jeweils zwei restlichen haben eine Länge zwischen 1 und 2. Aus diesen Gründen müssen  $R(a), R(b), R(c), R(d), R(e)$  und  $R(f)$  als  $1 \times 2$ - bzw.  $2 \times 1$ -Rechtecke realisiert werden. Die Höhe von  $R(g)$  ist 2 oder 3, und somit ist  $R(g)$  entweder ein  $1 \times 3$ - oder ein  $2 \times 2$ -Rechteck. Daraus ergeben sich genau drei mögliche Realisierungen des vorgegebenen Teilgraphen. Es ergeben sich die gleichen Konstruktionen, wenn man die zwei äußeren Kanten von  $b$  oder  $e$  mit den Gewichten 1 jeweils durch eine Kante mit Gewicht 2 ersetzt.

Der Teilgraph vom Typ 2 ist ein 4-Kreis mit einem inneren Knoten, siehe Abbildung 4.3. Die äußeren Knoten seien mit  $h, i, j, k$  gegen den Uhrzeigersinn beschriftet, und sei  $\ell$  der innere Knoten. Das Rechteck  $R(\ell)$  wird als ein  $1 \times 1$ -Quadrat realisiert. Falls die Kontakte, die den 4 Kanten  $hi, ij, jk, kh$  entsprechen, alternierende Orientierungen haben, sind  $R(h), R(i), R(j)$  und  $R(k)$  mindestens  $3 \times 4$ - bzw.  $4 \times 3$ -Rechtecke; siehe Abbildung 4.3(b), (c). Andernfalls hat mindestens eins der Rechtecke  $R(h), R(i), R(j), R(k)$  die Breite oder Höhe 1; siehe Abbildung 4.3(d), (e), (f). Die letzteren drei Fälle schließen wir aus, indem wir den Teilgraphen vom Typ 2 mit mindestens zwei Teilgraphen vom Typ 1 verbinden, sodass die Knoten  $h$  und  $i$  bzw.  $k$  und  $j$  jeweils einen gemeinsamen Nachbar  $p_1$  bzw.  $p_2$  vom Typ des Knotens  $b$  oder  $e$  in Abbildung 4.2 haben. Aufgrund der Form der drei möglichen Realisierungen eines Teilgraphen vom Typ 1 kann das Rechteck  $R(q_1)$  nicht in einem Knick

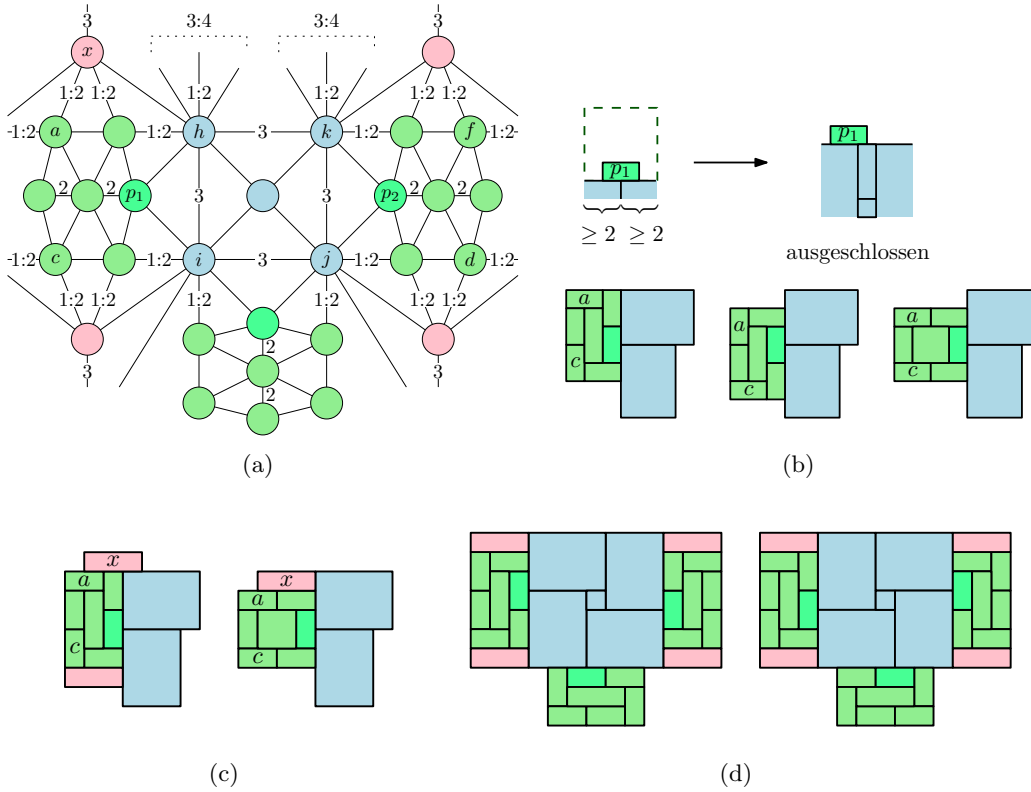


**Abbildung 4.3:** Teilgraph vom Typ 2 und seine grundlegenden Realisierungen.

gebildet von  $R(h)$  und  $R(i)$  liegen, deshalb müssen die Seiten von  $R(h)$  und  $R(i)$ , die zu  $R(p_1)$  adjazent sind, kollinear sein und die Länge mindestens 2 haben. Analoges gilt für  $R(p_2)$ ,  $R(k)$  und  $R(j)$ . Damit sind für das Typ-2-Gadget nur die Realisierungen (b), (c) in Abbildung 4.3 möglich. Durch die Vorgabe der Kantengewichte für die blauen Knoten wie in Abbildung 4.4(a) erzwingt man, dass  $R(h)$ ,  $R(i)$ ,  $R(j)$ ,  $R(k)$   $3 \times 4$ - bzw.  $4 \times 3$ -Rechtecke sind und die Realisierung eines Teilgraphen vom Typ 2 ein  $7 \times 7$ -Quadrat bildet.

Mit Hilfe zusätzlicher Knoten (wie etwa der rosa Knoten  $x$  in Abbildung 4.4) kann man erzwingen, dass Gadgets vom Typ 1 zentriert an einem Gadget vom Typ 2 anliegen. Das Rechteck  $R(x)$  hat einen Umfang zwischen 7 und 9 und hat ein Randsegment der Länge 3. Aus den Gewichten der zu  $x$  inzidenten Kanten folgt, dass  $R(x)$  ein  $3 \times 1$ -Rechteck ist. Die Knoten  $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $f$  der Typ-1-Teilgraphen in Abbildung 4.4 haben den Grad 5 in  $G_\phi$ . Deshalb müssen die oberen bzw. unteren Seiten der entsprechenden grünen Rechtecke in Abbildung 4.4(c) komplett von den rosa Rechtecken überdeckt werden. Daraus folgt, dass das linke und rechte Typ-1-Gadget als  $3 \times 5$ - bzw.  $5 \times 3$ -Rechteck realisiert werden und zentriert an den entsprechenden Typ-2-Gadgets anliegen müssen. Dies gilt ebenfalls für das dritte, untere Typ-1-Gadget, da die beiden in Abbildung 4.4(d) frei verbleibenden Segmente der unteren blauen Rechtecke die Länge 1 haben.

Wir werden den Baustein in Abbildung 4.4 zum Erstellen der Variablen-Gadgets und Leitungen benutzen. Mit den einzigen beiden Realisierungsmöglichkeiten, die in Abbildung 4.4(d) gezeigt sind, kodieren wir den Wahrheitswert der entsprechenden Variable. Ein Variablen-Gadget wird durch eine Reihe von Typ-2-Gadgets gebildet, die an ihren linken bzw. rechten Rändern durch Typ-1-Gadgets verknüpft werden; siehe Abbildung 4.5. Die verknüpften blauen Gadgets befinden sich auf einer Linie, und durch die Verknüpfung wird ihr Wahrheitswert synchronisiert. Ein Paar von Variablen-Gadgets zu den Variablen, die in  $H_\phi$  nebeneinander liegen, wird wie in Abbildung 4.5 in  $G_\phi$  durch *Pufferknoten*  $r$ ,  $s$ ,  $t$  auf einer horizontalen Linie zusammengehalten. Zum Fixieren der Ränder der Variablen-Gadgets verwenden wir zusätzliche Knoten  $p$ ,  $q$ ,  $u$ ,  $v$ . Die Rechtecke  $R(p)$ ,  $R(q)$ ,  $R(u)$ ,  $R(v)$ ,  $R(r)$ ,  $R(t)$  haben aufgrund der angegebenen Kontaktlängen die Breite 5. Somit ist die Position aller Typ-1-Gadgets fest. Die Rechtecke  $R(r)$  und  $R(t)$  müssen  $R(s)$  von oben

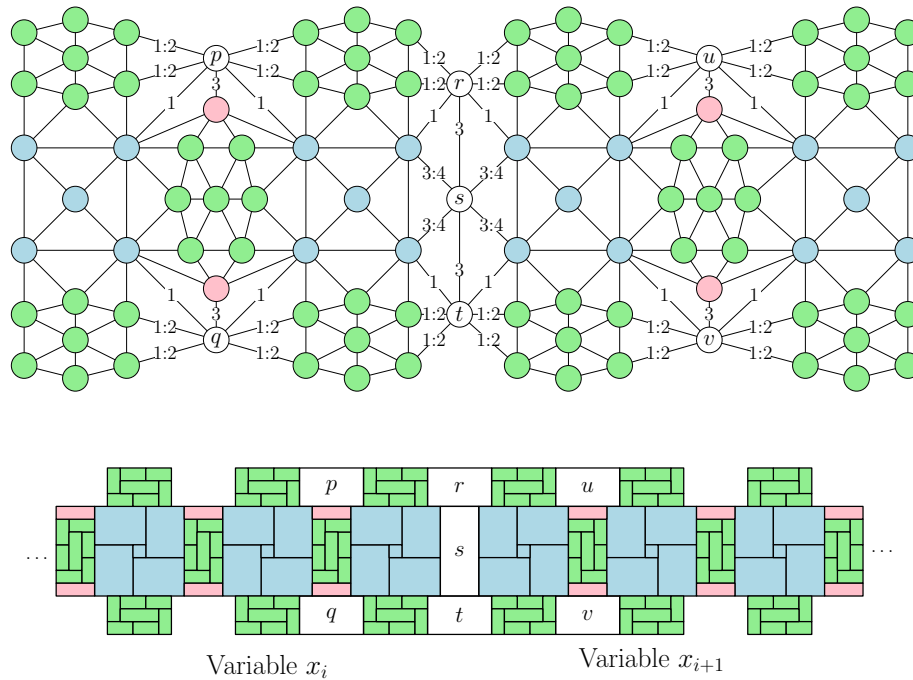


**Abbildung 4.4:** (a) Eine Verknüpfung von drei Gadgets vom Typ 1 (grün) und einem Gadget vom Typ 2 (blau). Die unbeschrifteten Kanten haben die Gewichte 1. (b) Die grünen Gadgets erzwingen, dass die anliegenden blauen Rechtecke die Breite bzw. die Höhe mindestens 2 haben. Die Realisierungen in (c) sind ausgeschlossen, da  $a$  den Grad 5 hat. (d) Somit hat der gegebene Teilgraph genau zwei Realisierungen: Die linke entspricht dem Wahrheitswert *wahr*, die rechte dem Wert *falsch*.

bzw. unten begrenzen, somit hat  $R(s)$  die Höhe 7. Wegen den vorgegebenen Kontaktlängen von  $s$  zu  $r$  bzw.  $t$  hat  $R(s)$  die Breite 3. Somit ist die Konstruktion fest, und die Wahrheitswerte der benachbarten Variablen-Gadgets sind unabhängig voneinander.

### 4.1.2 Inverter

In manchen Fällen müssen wir die Wahrheitswerte der Variablen an den Eingängen der Klausel-Gadgets invertieren. Dazu definieren wir ein Inverter-Gadget, welches mit einem Typ-2-Gadget verknüpft wird. Den entsprechenden Teilgraphen findet man in Abbildung 4.6. Die Rechtecke  $R(a)$ ,  $R(b)$ ,  $R(c)$ ,  $R(i)$ ,  $R(j)$ ,  $R(k)$  müssen als  $1 \times 2$ - bzw.  $2 \times 1$ -Rechtecke realisiert werden,  $R(\ell)$  und  $R(m)$  als  $6 \times 1$ - bzw.  $1 \times 6$ -Rechtecke,  $R(f)$  als ein  $2 \times 2$ -Quadrat und  $R(d)$  und  $R(h)$  als  $2 \times 2$ - oder  $1 \times 3$ -Rechtecke. Somit können  $R(a)$ ,  $R(b)$  und  $R(c)$  wegen des Kontakts zu  $R(d)$  nicht gleichzeitig vertikal ausgerichtet sein, sonst hätte  $R(d)$  die Höhe 4. Wegen der Längen der Kontakte zu den blauen Rechtecken können  $R(a)$  und  $R(c)$  nicht gleichzeitig horizontal ausgerichtet sein, da die nicht verdeckten Randabschnitte der blauen Rechtecke in Abbildung 4.6(b) die exakte Länge 1 haben müssen. Aus dem gleichen Grund müssen die rosa Rechtecke rechts von den blauen liegen, sonst entsteht eine Situation wie in Abbildung 4.7(c). Somit ist entweder  $R(a)$  oder  $R(c)$  horizontal ausgerichtet, und  $R(d)$  muss ein  $1 \times 3$ -Rechteck sein. Die Rechtecke  $R(e)$  und  $R(g)$  haben den Umfang zwischen 8 und 10. Die Rechtecke  $R(\ell)$  und  $R(m)$  müssen aufgrund der vorgegebenen Kontaktlängen die Breite 6 und die Höhe 1 haben. Somit haben  $R(e)$  und  $R(g)$  die Höhe zwischen 1 und 2. Hat etwa  $R(e)$  die Höhe 2, so muss es die Breite 2 haben, da die Kanten  $\{e, i\}$  und  $\{e, h\}$  die Gewichte 1 haben; siehe Abbildung 4.6(c).



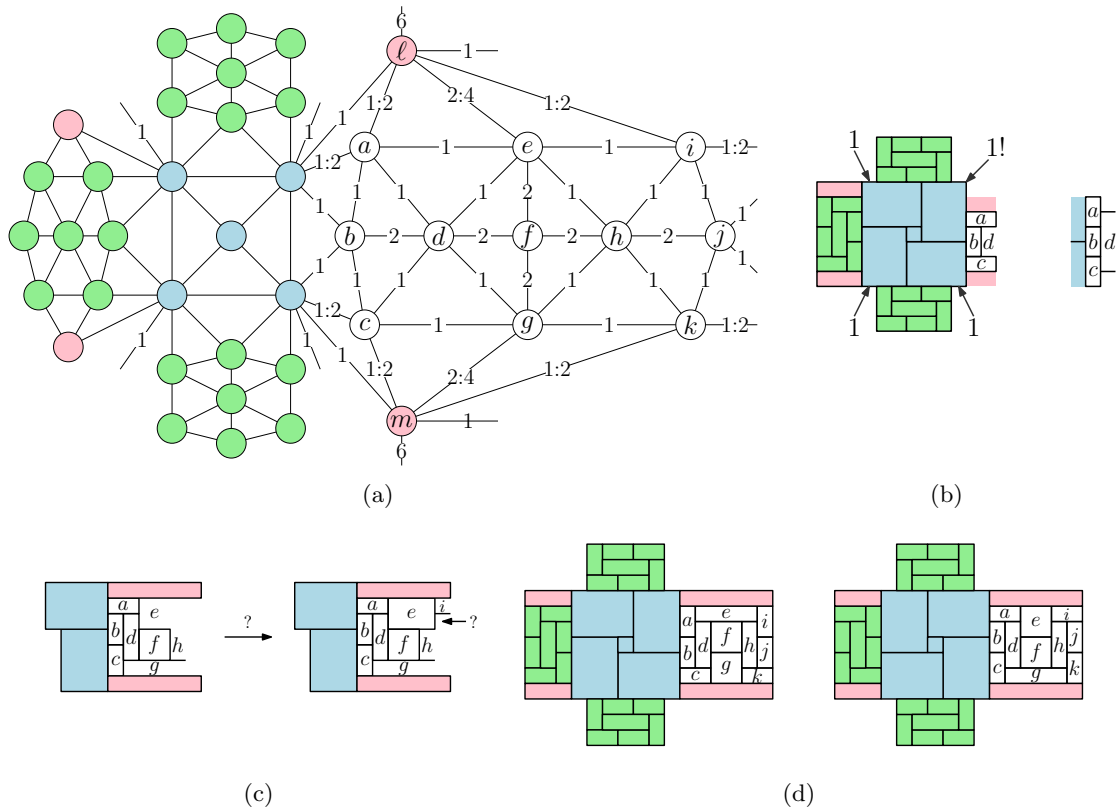
**Abbildung 4.5:** Zwei Variablen-Gadgets werden von den eindeutig realisierbaren Puffern auf einer Linie zusammengehalten.

Für den jeweiligen Wahrheitswert der anliegenden Variable ergibt sich daraus genau eine Realisierung des Inverters; siehe Abbildung 4.6(d).

Um die Konstruktion einheitlich zu halten, verwenden wir ein *Dummy-Gadget*, welches den Wahrheitswert der Variablen nicht invertiert, dessen Realisierungen aber die gleiche Größe wie die des Inverter-Gadgets haben. Der entsprechende Teilgraph ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Die Rechtecke  $R(a)$ ,  $R(b)$ ,  $R(c)$ ,  $R(e)$ ,  $R(f)$ ,  $R(g)$  müssen als  $1 \times 2$ - bzw.  $2 \times 1$ -Rechtecke realisiert werden,  $R(d)$  und  $R(h)$  als  $1 \times 3$ - bzw.  $3 \times 1$ -Rechtecke,  $R(\ell)$  und  $R(m)$  als  $1 \times 6$ - bzw.  $6 \times 1$ -Rechtecke und  $R(i)$  und  $R(j)$  als  $2 \times 3$ - bzw.  $3 \times 2$ -Rechtecke. Mit dem gleichen Argument wie in Abbildung 4.6(b) ist entweder  $R(a)$  oder  $R(c)$  ein  $2 \times 1$ -Rechteck. Ferner müssen  $R(a)$ ,  $R(b)$  und  $R(c)$  zentriert an den beiden blauen Rechtecken anliegen; siehe Abbildung 4.7(d). Für jeden Wahrheitswert ergibt sich somit genau eine Realisierung des Dummy-Gadgets.

### 4.1.3 Klauseln

Wir müssen nur noch das Klausel-Gadget beschreiben. Ein zugehöriges rechteckiges Layout ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Das Gadget hat drei Eingänge, zwei links und einen unten bzw. oben, je nachdem ob die Klausel oberhalb oder unterhalb der Variablen-Reihe liegt. Man beachte, dass der untere bzw. obere Eingang dupliziert wird. Jeder Eingang besteht entweder aus einem Inverter-Gadget oder einem Dummy-Gadget. Der Typ des Gadgets am Eingang hängt nicht nur davon ab, ob die mit dem entsprechenden Eingang verbundene Variable positiv oder negativ in der Klausel vorkommt, sondern auch von der Lage des Eingangs in der Klausel. Der linke obere und der rechte untere Eingang verwendet einen Inverter für ein positives Literal und ein Dummy für ein negatives. Der linke untere und der rechte obere Eingang verwendet ein Dummy für ein positives Literal und einen Inverter für ein negatives. Diese Festlegung hat folgenden Effekt auf die zwei inneren Rechtecke  $R(\ell)$  und  $R(r)$  des Klausel-Gadgets, deren gemeinsamer Randabschnitt die Länge zwischen  $\alpha(lr) = 19$  und  $\beta(lr) = 20$  hat: Jedes Literal, das den Wert *falsch* hat, dehnt sein benachbartes Rechteck  $R(\ell)$  oder  $R(r)$  vertikal um 1 aus (bzw. sogar um 2 für  $R(r)$ , da der Eingang des dritten Literals in der Klausel dupliziert wird); siehe

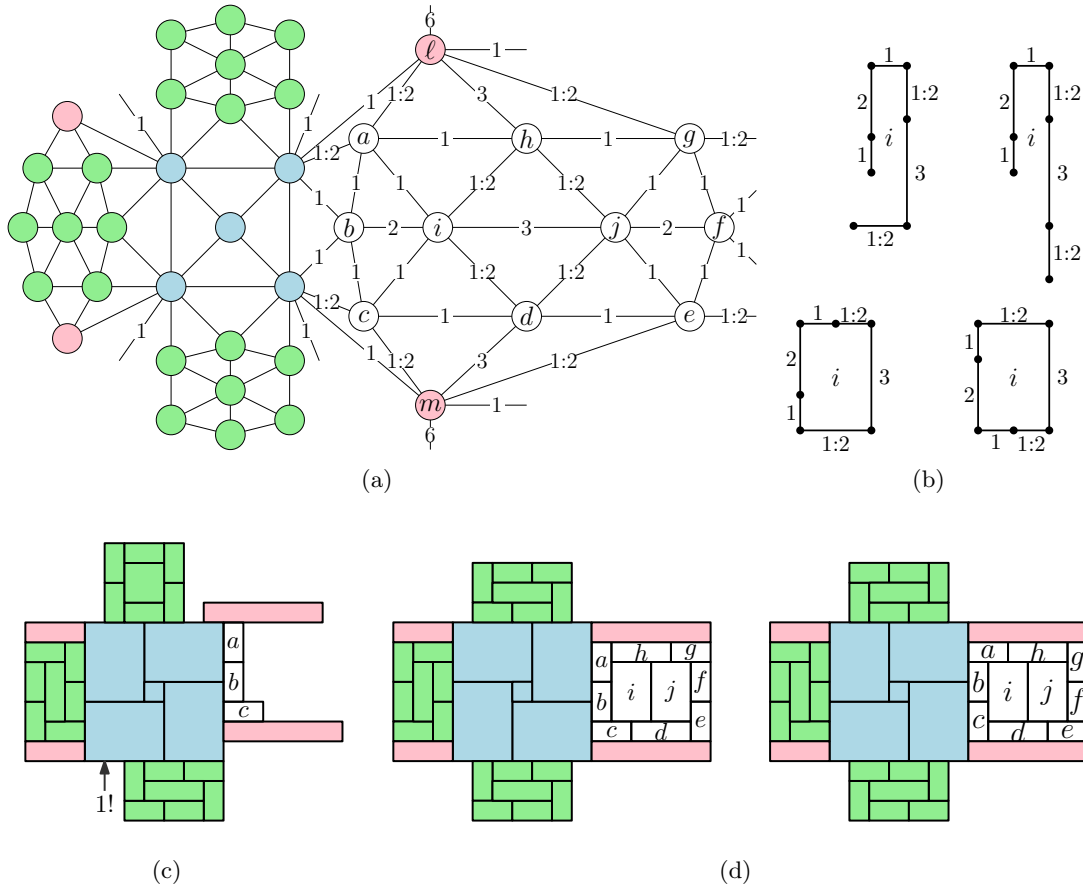


**Abbildung 4.6:** (a) Das Inverter-Gadget. (b) Die Rechtecke  $R(a)$  und  $R(c)$  können nicht die gleiche Orientierung haben. (c) Hat das Rechteck  $R(e)$  die Höhe 2, muss es die Breite 2 haben. Somit ist die Situation in (c) nicht möglich. (d) Das Inverter-Gadget hat für jeden Wahrheitswert genau eine Realisierung.

Abbildung 4.8. Haben beispielsweise alle drei Literale den Wert *wahr*, so haben sowohl  $R(\ell)$  als auch  $R(r)$  die Höhe 19, und es ist auch  $|s(lr)| = 19$ . Betrachtet man alle 8 möglichen Belegungen, stellt man fest, dass solange mindestens ein Literal den Wert *wahr* hat, gilt  $19 \leq |s(lr)| \leq 20$ . Falls aber alle drei Literale *falsch* werden, so steigt die Kontaktlänge auf  $|s(lr)| = 21$ , wodurch die vorgegebene obere Schranke von 20 verletzt wird. Dies ist genau die Eigenschaft, die wir für die Reduktion von PLANAR 3SAT brauchen.

Die vorgestellten Bausteine können auf einem orthogonalen Gitter mit Zellen der Größe  $10 \times 10$  platziert werden. Damit  $G_\phi$  tatsächlich ein PTP-Graph ist, müssen noch die verbleibenden Zwischenräume mit Dummy-Rechtecken bzw. Dummy-Knoten gefüllt werden. Dies ist immer möglich und kann systematisch gemacht werden: Alle Bausteine außer den Klauseln haben nach außen die gleiche Struktur, die aus  $7 \times 7$ -Blöcken besteht, an die zentriert  $3 \times 5$ -Blöcke von links oder rechts bzw.  $5 \times 3$ -Blöcke von unten oder oben anliegen. Abbildung 4.9 zeigt, dass die Klausel-Gadgets zu dieser allgemeinen Struktur konform sind.

Die verbleibenden „Löcher“ werden mit Dummy-Rechtecken der Größe  $7 \times 7$ ,  $5 \times 3$ ,  $3 \times 5$ ,  $3 \times 1$  und  $1 \times 7$  gefüllt, sodass insgesamt keine X-Kreuzungen im Layout entstehen. Somit ist  $G_\phi$  innentrianguliert. Die unteren bzw. oberen Schranken für die Längen der Kontakte zwischen einem Dummy- und einem Nicht-Dummy-Rechteck sind aus den Teilgraphen der einzelnen Gadgets abzulesen (die entsprechenden Kanten sind unter den Kanten, die in den obigen Abbildungen nach außen führen). Für einen Kontakt  $s(e)$  zwischen zwei Dummy-Rechtecken setze  $\alpha(e) = \beta(e)$  gleich der gewünschten Kontaktlänge  $|s(e)|$  gemäß Abbildung 4.9. Man beachte, dass für unseren Beweis es nicht nötig ist, zu zeigen, dass Dummy-Rechtecke jeweils eindeutige Realisierungen haben. Abbildung 4.9 zeigt das recht-



**Abbildung 4.7:** (a) Das Dummy-Gadget. (b) Die Rechtecke  $R(i)$  und  $R(j)$  müssen als  $2 \times 3$ - bzw.  $3 \times 2$ -Rechtecke realisiert werden. (c) Die Rechtecke  $R(a)$ ,  $R(b)$ ,  $R(c)$  müssen zentriert an den blauen Rechtecken anliegen. (d) Das Dummy-Gadget hat für jeden Wahrheitswert genau eine Realisierung.

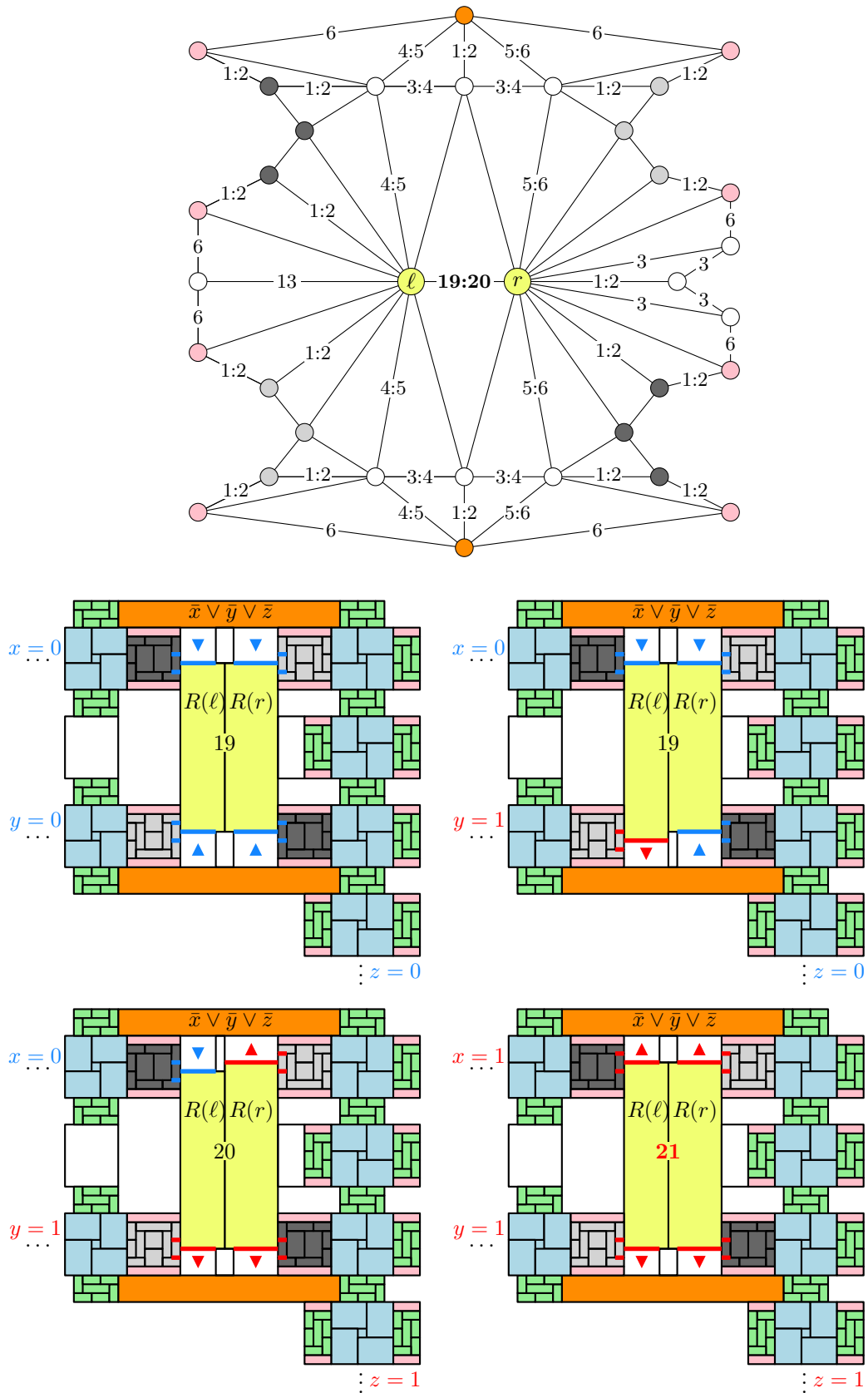
eckige Dual des vollständigen Graphen  $G_\phi$  für die Beispielformel  $\phi$  aus Abbildung 4.1 und eine erfüllende Belegung von  $\phi$ .

Mit Hilfe der beschriebenen Gadgets sind wir in der Lage, Theorem 4.1 zu beweisen.

*Beweis von Theorem 4.1.* Sei  $\phi$  eine PLANAR 3SAT-Formel. Wie oben erwähnt, kann der Variablen-Klausel-Graph  $H_\phi$  auf einem orthogonalen Gitter gezeichnet werden, dessen Größe polynomiell in der Größe von  $\phi$  ist. Ferner ist die Anzahl der Knoten und Kanten in jedem Gadget-Teilgraphen in  $O(1)$  bzw. polynomiell für die Variablen-Gadgets. Deshalb kann  $G_\phi$  in polynomieller Zeit konstruiert werden. Die Lage der Typ-1- und Typ-2-Bausteine in einem zu  $\alpha$  und  $\beta$  konformen rechteckigen Dual von  $G_\phi$  ist nach der obigen Konstruktion eindeutig, und die jeweilige Realisierungsmöglichkeit hängt nur vom Wahrheitswert der entsprechenden Variable ab.

Ist  $\phi$  erfüllbar, wähle die Realisierungen der Gadgets je nach dem Wert der jeweiligen anliegenden Variable. Nach Konstruktion des Klausel-Gadgets können nun alle Rechtecke unter Einhaltung der Bedingungen an die Kontaktlängen realisiert werden. Somit hat  $G_\phi$  ein gültiges rechteckiges Dual.

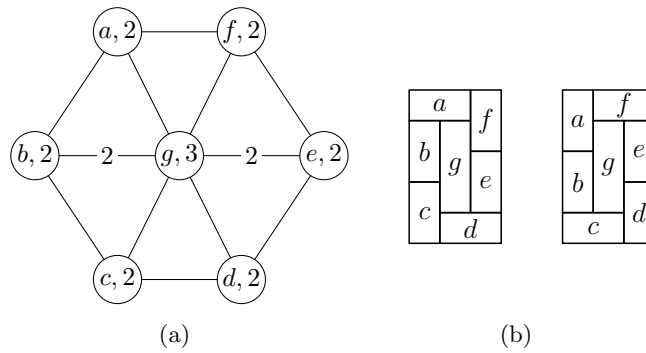
Sei nun  $\mathcal{R}$  ein rechteckiges Dual von  $G_\phi$ , das die durch  $\alpha$  und  $\beta$  vorgegebenen Bedingungen an die Kontaktlängen erfüllt. Dann hat in jeder Klausel der Kontakt zwischen den gelben Rechtecken  $R(\ell)$  und  $R(r)$  die Länge höchstens 20, und mindestens eins der anliegenden Typ-2-Gadgets muss die Realisierung haben, die dem Wert *wahr* entspricht.



**Abbildung 4.8:** Das Klausel-Gadget für die Klausel  $\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$  und die Realisierungen für die Belegungen  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$  und  $(1, 1, 1)$ . Die Höhen der gelben Rechtecke und somit die Länge ihres gemeinsamen Randsegments sind durch die Wahrheitswerte der Variablen eindeutig festgelegt.







**Abbildung 4.10:** Teilgraph vom Typ 1. Die Kanten in (a) sind mit den Kantengewichten  $\omega(uv)$  beschriftet (es ist  $\omega(uv) = 1$  für jede unbeschriftete Kante  $uv$ ). Die Knoten sind mit den entsprechenden Knotengewichten  $\gamma(v)$  beschriftet. (b) Die einzigen beiden Realisierungen des Typ-1-Teilgraphen.

## 4.2 Minimale Kontaktlängen, maximale Flächen

In diesem Abschnitt zeigen wir die NP-Schwere für eine Variation des Entscheidungsproblems aus dem vorherigen Abschnitt. Zu einem PTP-Graphen  $G$  seien nun die minimalen Kontaktlängen und die maximalen Flächeninhalte der Rechtecke gegeben, und es soll wieder entschieden werden, ob unter diesen Voraussetzungen ein rechteckiges Dual von  $G$  existiert.

**Theorem 4.3.** *Für einen gegebenen PTP-Graphen  $G = (V, E)$  mit einer Kantengewichtsfunktion  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  und einer Knotengewichtsfunktion  $\gamma : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist es NP-schwer, zu entscheiden, ob es zu  $G$  ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R} = \{R(v) \mid v \in V\}$  gibt, in dem folgendes gilt:*

- (1) *Für jede Kante  $uv \in E$  hat das entsprechende Kontaktsegment  $s(e)$  in  $\mathcal{R}$  die Länge  $|s(e)| \geq \omega(e)$ .*
- (2) *Für jeden Knoten  $v \in V$  hat das Rechteck  $R(v)$  den Flächeninhalt  $|R(v)| \leq \gamma(v)$ .*

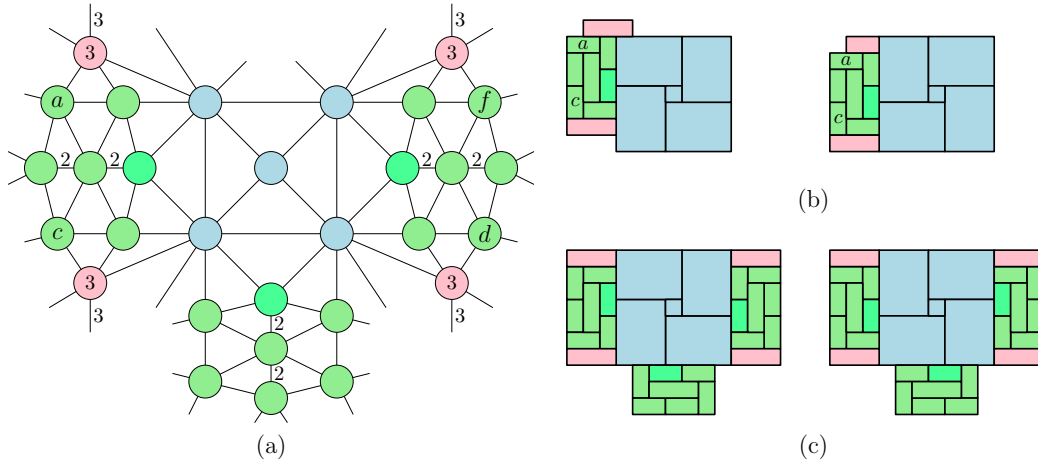
Zum Beweis von Theorem 4.3 werden wir wie im vorherigen Abschnitt eine Reduktion von PLANAR 3SAT verwenden. Mit Ausnahme des Klausel-Gadgets werden die gleichen Konstruktionen benutzt, die Eindeutigkeit der Realisierungen muss jetzt aber mit Hilfe minimaler Kontaktlängen und maximaler Flächeninhalte erzwungen werden.

### 4.2.1 Variablen und Leitungen

Für die Variablen-Gadgets und Leitungen verwenden wir die gleichen Konstruktionen wie im vorherigen Abschnitt. Das Gadget vom *Typ 1* ist in Abbildung 4.10 dargestellt. Die Funktion  $\omega$  wird so definiert, dass  $\omega(e) \geq 1$  gilt für jede Kante  $e$  von  $G_\phi$ . Im Teilgraphen vom Typ 1 gilt ferner  $\omega(bg) = \omega(ge) = 2$ . Das Rechteck  $R(g)$  hat somit den Umfang mindestens 8, ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Breite mindestens 1 und die Höhe mindestens 2. Wegen der Maximalfläche 3 ist es somit ein  $1 \times 3$ -Rechteck. Aufgrund der Mindestkontaktlängen 2 müssen die Rechtecke  $R(b)$  und  $R(e)$  zu den gegenüberliegenden langen Seiten von  $R(g)$  adjazent sein. Daraus ergeben sich genau zwei Möglichkeiten, das Rechteck  $R(g)$  mit Rechtecken  $R(a), \dots, R(f)$  der Fläche  $\leq 2$  unter Einhaltung der entsprechenden Mindestkontaktlängen zu umschließen.

Der Teilgraph vom *Typ 2* wird analog zu Abbildung 4.3 definiert. Dabei gelte  $\omega(hi) = \omega(ij) = \omega(jk) = \omega(kh) = 3$ ,  $\gamma(h) = \gamma(i) = \gamma(j) = \gamma(k) = 12$  und  $\gamma(\ell) = 1$ . Für die Realisierungsmöglichkeiten (b) und (c) folgt sofort, dass  $R(h), R(i), R(j)$  und  $R(k)$

$3 \times 4$ - bzw.  $4 \times 3$ -Rechtecke sind und zusammen mit  $R(\ell)$  ein  $7 \times 7$ -Quadrat bilden. Für die Möglichkeiten (d), (e) und (f) hat mindestens eins der Rechtecke  $R(h)$ ,  $R(i)$ ,  $R(j)$ ,  $R(k)$  die Breite oder Höhe 1. Diese drei Fälle schließen wir aus, indem wir analog zum vorherigen Abschnitt den Teilgraphen vom Typ 2 mit mindestens zwei Teilgraphen vom Typ 1 verbinden; siehe Abbildung 4.4(b). Mit Hilfe zusätzlicher Knoten kann man wieder erzwingen, dass Gadgets vom Typ 1 zentriert an einem Gadget vom Typ 2 anliegen; siehe Abbildung 4.11. Es ergeben sich wieder genau zwei Realisierungsmöglichkeiten, die wir zur Kodierung der Wahrheitswerte verwenden; siehe Abbildung 4.11(c).

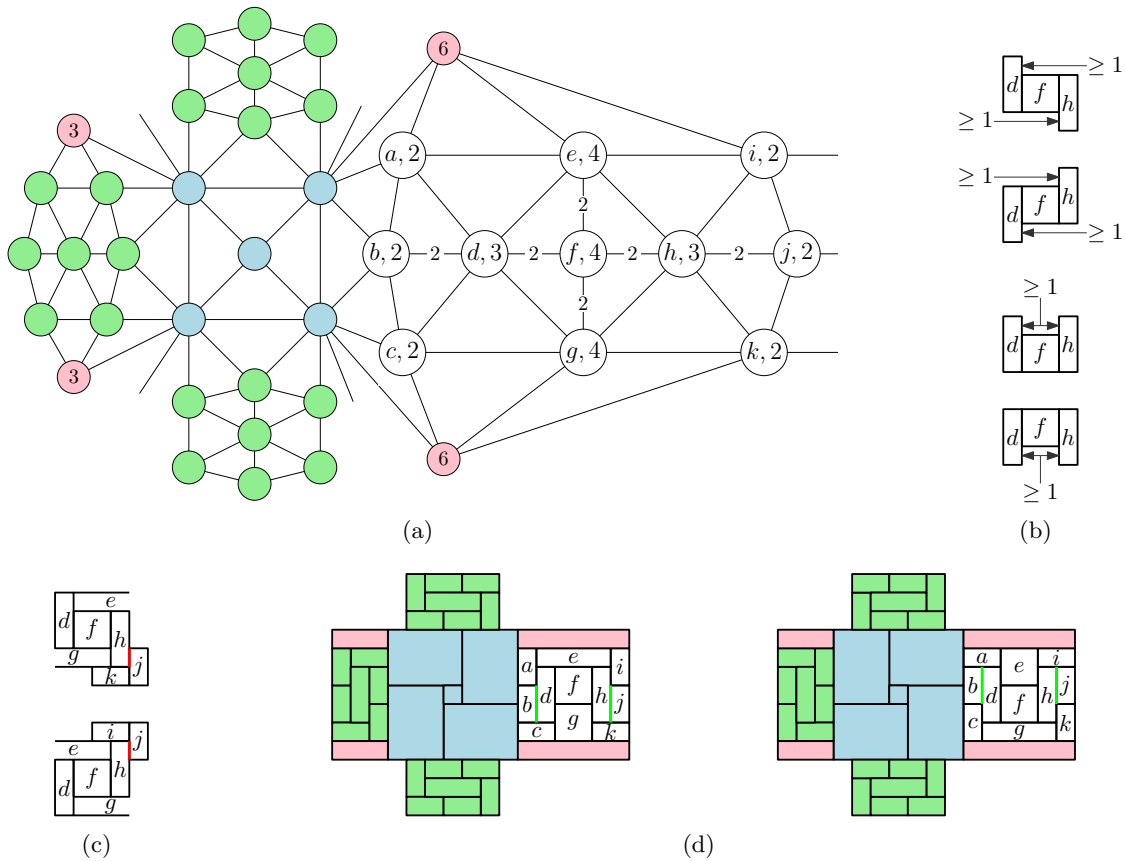


**Abbildung 4.11:** (a) Eine Verknüpfung von drei Gadgets vom Typ 1 und einem Gadget vom Typ 2. (b) Die rosa Rechtecke mit Maximalfläche 3 stellen sicher, dass die Typ-1-Gadgets zentriert anliegen: Die Knoten  $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $f$  haben in  $G_\phi$  den Grad 5. Liegt ein Typ-1-Gadget nicht zentriert an oder hat ein rosa Viereck die Fläche  $< 3$ , muss einer dieser Knoten (hier:  $a$ ) den Grad 6 haben. (c) Die beiden möglichen Realisierungen. Links: Wahrheitswert *wahr*, rechts: Wahrheitswert *falsch*.

Zwei Gadgets zu verschiedenen Variablen verbindet man mit Pufferknoten analog zu Abbildung 4.5. Wir setzen  $\gamma(p) = \gamma(q) = \gamma(r) = \gamma(t) = \gamma(u) = \gamma(v) = 15$ ,  $\gamma(s) = 21$ , und für jede Kante  $xy$  mit dem Gewicht  $\alpha(xy)$  in Abbildung 4.5 sei  $\omega(xy) = \alpha(xy)$ . Die Rechtecke  $R(p)$ ,  $R(q)$ ,  $R(u)$ ,  $R(v)$  haben die Mindesthöhe 3 (da alle grünen Knoten den Grad 5 haben) und somit die maximale Breite 5. Somit ist die Position aller Typ-1-Gadgets fest. Die Rechtecke  $R(r)$  und  $R(t)$  begrenzen  $R(s)$  von oben bzw. unten, somit hat  $R(s)$  die Höhe 7. Wegen der vorgegebenen Mindestkontaktlängen von  $s$  zu  $r$  bzw.  $t$  hat  $R(s)$  die Breite 3. Somit ist die Konstruktion fest.

#### 4.2.2 Inverter

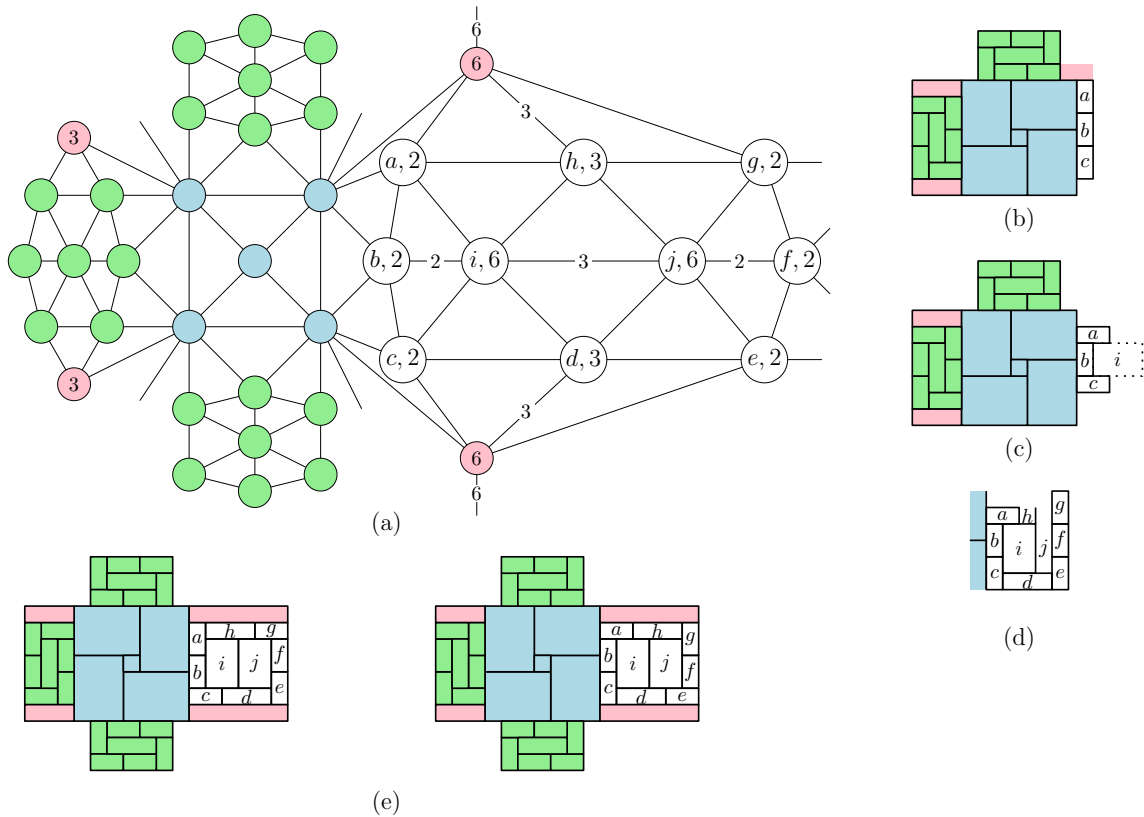
Der Teilgraph zum Inverter-Gadget ist in Abbildung 4.12 dargestellt. Der Umfang von  $R(d)$  und  $R(h)$  ist mindestens 8 und die Breite und Höhe mindestens 1, somit haben sie die Fläche 3 und werden als  $1 \times 3$ -Rechtecke realisiert. Aufgrund der angegebenen Mindestkontaktlängen muss  $R(f)$  als ein  $2 \times 2$ -Quadrat realisiert werden. Es ergeben sich insgesamt vier Möglichkeiten für die gemeinsame Realisierung von  $R(d)$ ,  $R(f)$  und  $R(h)$ ; siehe Abbildung 4.12(b). Der Umfang von  $R(e)$  und  $R(g)$  ist ebenfalls mindestens 8, somit haben sie die Fläche zwischen 3 und 4. Die Breite (bzw. Höhe) von  $R(e)$  oder  $R(g)$  ist somit entweder 2 oder mindestens 3 (ist sie  $\geq 3$ , so muss die Höhe gleich 1 sein, denn für die Höhe echt zwischen 1 und 2 würden Kontakte mit Länge kleiner 1 entstehen). Die Rechtecke  $R(a)$ ,  $R(b)$ ,  $R(c)$ ,  $R(i)$ ,  $R(j)$ ,  $R(k)$  haben den Umfang  $\geq 5$  und die Breite, Höhe und Fläche zwischen 1 und 2. Daraus ergeben sich die beiden möglichen Layouts, die durch den Wert der entsprechenden Variablen festgelegt sind. Fordert man  $\deg(i) = 5$  und  $\deg(k) = 5$ , so müssen die dazu benachbarten rosa Rechtecke als  $6 \times 1$ -Rechtecke realisiert werden (die obere Seite von  $R(i)$  und die untere Seite von  $R(k)$  müssen von den rosa Rechtecken verdeckt sein), und der Inverter liegt zentriert an.



**Abbildung 4.12:** (a) Das Inverter-Gadget. (b) Für das  $2 \times 2$ -Quadrat  $R(f)$  und die  $1 \times 3$ -Rechtecke  $R(d)$  und  $R(h)$  ergeben sich insgesamt vier Möglichkeiten der gemeinsamen Realisierung. (c) Ist die Breite von  $R(e)$  bzw.  $R(g)$  mindestens 3, so ist ihre Höhe gleich 1. In den beiden Fällen in (c) ist es somit nicht möglich, die  $1 \times 2$ - bzw.  $2 \times 1$ -Rechtecke  $R(i)$ ,  $R(j)$  und  $R(k)$  so zu platzieren, dass der Kontakt  $s(hj)$  (rot bzw. grün) die Mindestlänge 2 hat. (d) Somit hat das Inverter-Gadget für jeden Wahrheitswert genau eine Realisierung.

Das Dummy-Gadget ist in Abbildung 4.13 gezeigt. Der Umfang von  $R(i)$  und  $R(j)$  ist mindestens 9, deshalb ist ihre Fläche mindestens 3,5 (ihre Höhe oder Breite ist wegen  $\omega(ij) = 3$  mindestens 3). Der Umfang von  $R(d)$  und  $R(h)$  ist mindestens 7. Ihre Breite oder Höhe ist aufgrund der Kantengewichte mindestens 3, deshalb haben sie die Fläche 3 und sind  $3 \times 1$ - oder  $1 \times 3$ -Rechtecke. Der Umfang von  $R(a)$ ,  $R(c)$ ,  $R(e)$ ,  $R(g)$ ,  $R(b)$  und  $R(f)$  ist mindestens 5, und ihre Breite und Höhe liegt zwischen 1 und 2. Angenommen, eines dieser Rechtecke ist kein  $1 \times 2$ - bzw.  $2 \times 1$ -Rechteck. Da der entsprechende Knoten den Grad 5 hat, muss es eine Seite der Länge echt zwischen 1 und 2 haben, die aus zwei Kontakten besteht, und einer davon ist kürzer als 1, Widerspruch. Das Rechteck  $R(b)$  muss zu den beiden blauen Rechtecken benachbart sein, daher gibt es für die Realisierung von  $R(a)$ ,  $R(b)$  und  $R(c)$  vier Möglichkeiten. Die Rechtecke  $R(a)$  und  $R(c)$  können nicht gleichzeitig  $1 \times 2$ -Rechtecke sein, sonst hat ein blaues Rechteck zu wenige Adjazenzen; siehe Abbildung 4.13(b). Angenommen,  $R(a)$  und  $R(c)$  sind  $2 \times 1$ -Rechtecke. Dann hat  $R(i)$  die Höhe 2 und die maximale Breite 3 und kann somit mit  $R(j)$  keinen Kontakt der Mindestlänge 3 haben; siehe Abbildung 4.13(c). Folglich müssen  $R(a)$  und  $R(c)$  unterschiedliche Orientierungen haben. Damit hat  $R(i)$  die Höhe 3 und die Breite 1 oder  $\geq 2$ . Aufgrund des Mindestumfangs 9 und der Maximalfläche 6 muss es die Breite 2 haben.

Seien  $R(a)$  horizontal und  $R(b)$ ,  $R(c)$  vertikal ausgerichtet. Dann ist  $R(d)$  ein  $3 \times 1$ -Rechteck. Das Rechteck  $R(j)$  hat die Breite 1 oder  $\geq 2$ . Ist sie 1, so sind  $R(e)$  und  $R(f)$   $1 \times 2$ -Rechtecke, und  $R(j)$  kann nicht umschlossen werden; siehe Abbildung 4.13(d). Das



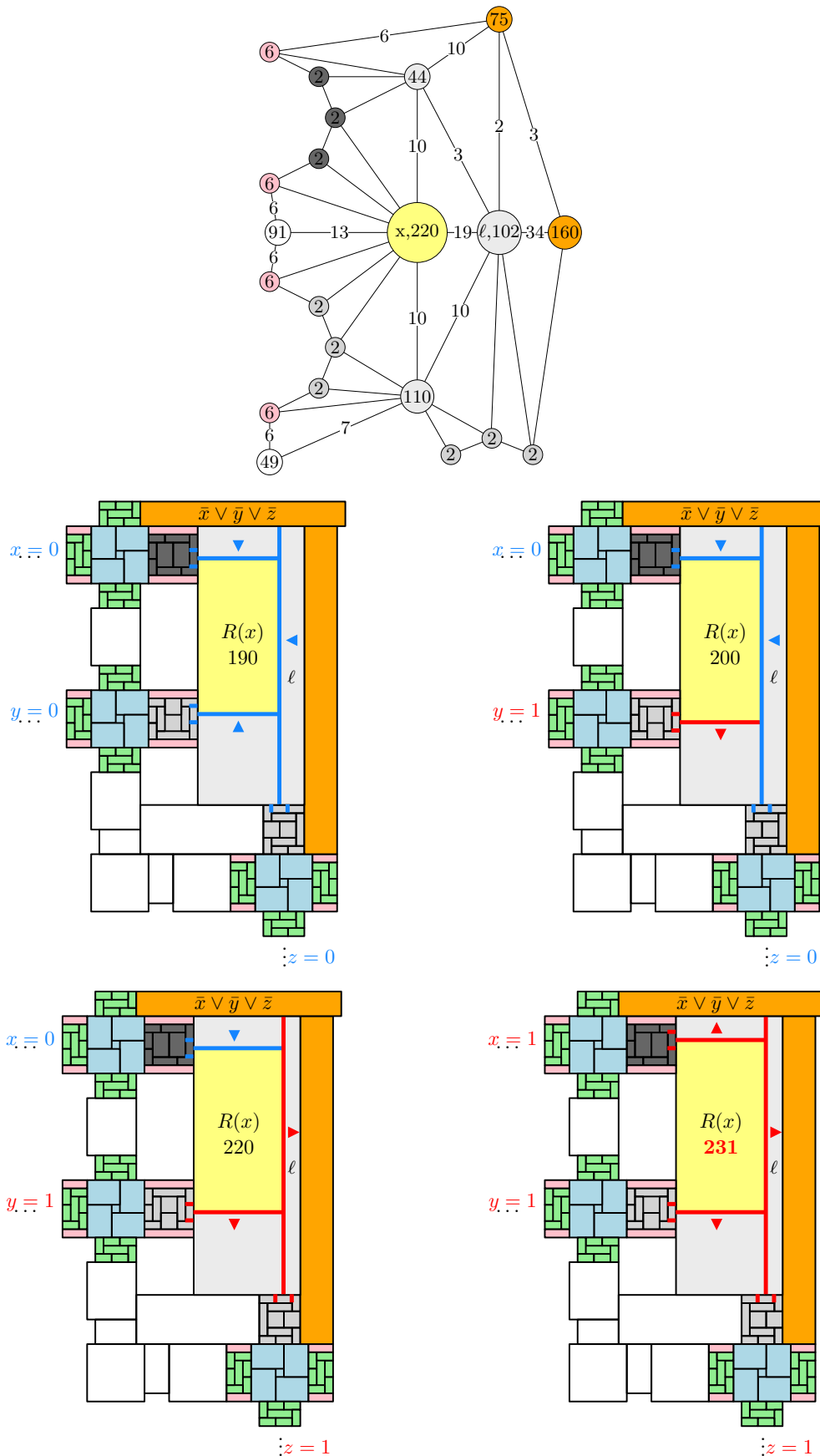
**Abbildung 4.13:** (a) Das Dummy-Gadget. (b), (c): Das Rechteck  $R(b)$  ist ein  $1 \times 2$ -Rechteck, und die  $1 \times 2$ - oder  $2 \times 1$ -Rechtecke  $R(a)$  und  $R(c)$  müssen unterschiedlich orientiert sein. (d) Die Rechtecke  $R(i)$  und  $R(j)$  müssen  $2 \times 3$ -Rechtecke sein. (e) Somit hat das Dummy-Gadget für jeden Wahrheitswert genau eine Realisierung.

Rechteck  $R(j)$  ist also ein  $2 \times 3$ -Rechteck, und das restliche Layout ergibt sich eindeutig. Der symmetrische Fall ist analog. Die beiden möglichen Realisierungen sind in Abbildung 4.13(e) zu sehen.

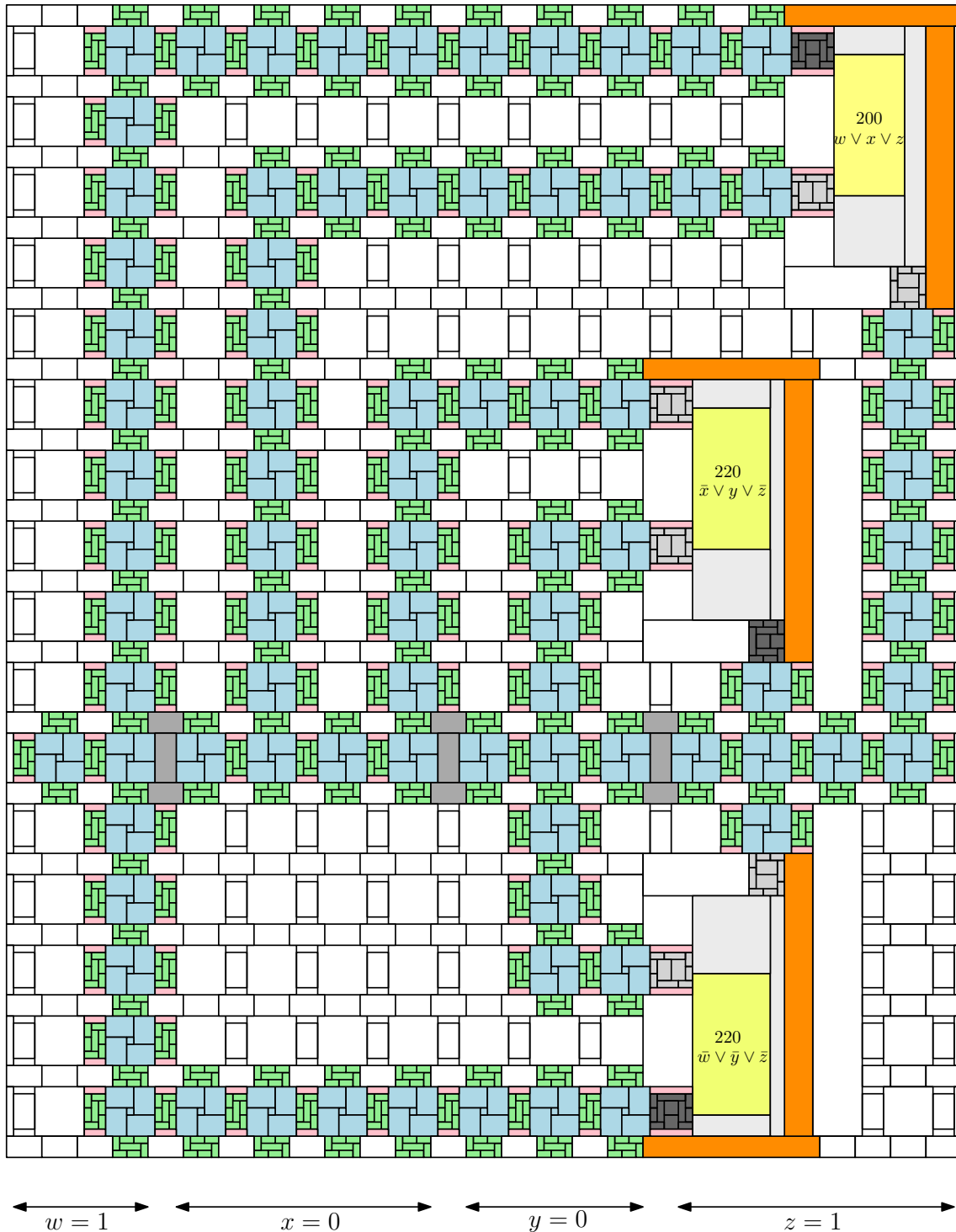
### 4.2.3 Klauseln

Wir verwenden eine neue Konstruktion für das Klausel-Gadget. Ein rechteckiges Layout dazu ist in Abbildung 4.14 dargestellt. Man beachte, dass aufgrund der obigen Konstruktionen die Position der Typ-1- und Typ-2-Gadgets fest ist. Das Klausel-Gadget hat drei Eingänge: zwei von links und einen von unten bzw. oben, je nachdem ob die Klausel oberhalb oder unterhalb der Variablen-Reihe liegt. An jedem Eingang liegt wieder entweder ein Inverter-Gadget oder ein Dummy-Gadget an, und die Wahl hängt sowohl von der Lage des Eingangs als auch vom Typ des Vorkommens der entsprechenden Variable in der Klausel ab. Der linke obere Eingang sowie der obere Eingang (falls die Klausel unterhalb der Variablen-Reihe liegt) verwenden einen Inverter für ein positives Literal und ein Dummy für ein negatives. Der linke untere Eingang sowie der untere Eingang (falls die Klausel oberhalb der Variablen-Reihe liegt) verwenden ein Dummy für ein positives Literal und einen Inverter für ein negatives.

Diese Definition hat folgenden Effekt auf die Fläche des gelben inneren Rechtecks  $R(x)$  des Klausel-Gadgets, die den Höchstwert  $\gamma(x) = 220$  hat: Aus der Festlegung der Adjazenzen in Abbildung 4.14 folgt, dass die Position des oberen bzw. unteren Randes von  $R(x)$  durch den Wahrheitswert eindeutig vorgegeben ist, der der Realisierung des Typ-2-Gadgets am linken oberen bzw. linken unteren Eingang entspricht.



**Abbildung 4.14:** Das Klausel-Gadget für die Klausel  $\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$  und die Realisierungen für die Belegungen  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$  und  $(1, 1, 1)$ . Die Höhe und Breite des gelben Rechtecks ist durch die Wahrheitswerte der Variablen eindeutig festgelegt.



**Abbildung 4.15:** Das rechteckige Dual von  $G_\phi$  zu der PLANAR 3SAT-Instanz  $\phi = (w \vee x \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{w} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$  mit einer erfüllenden Belegung  $w = 1, x = 0, y = 0, z = 1$ . Die Variablen-Gadgets sind alphabetisch von links nach rechts angeordnet.

Die orangenen Rechtecke bilden den oberen bzw. rechten Rand des hellgrauen Rechtecks  $R(\ell)$ , dessen linker Rand den rechten Rand von  $R(x)$  enthalten muss. Der Wahrheitswert am dritten Eingang legt somit die Position des rechten Randes von  $R(x)$  fest. Somit vergrößert jedes Literal, das den Wahrheitswert *falsch* hat, die Höhe bzw. Breite von  $R(x)$  um 1. Damit hat  $R(x)$  die Fläche 231 genau bei der einzigen Belegung, in der alle Literale den Wert *falsch* haben, und in den restlichen sieben Fällen ist seine Fläche höchstens  $220 = \gamma(x)$ .

Abbildung 4.15 zeigt, wie ein rechteckiges Dual des vollständigen Graphen  $G_\phi$  für eine Beispielformel  $\phi$  und eine erfüllende Belegung von  $\phi$  aussieht.

Mit Hilfe der beschriebenen Gadgets sind wir in der Lage, Theorem 4.3 zu beweisen.

*Beweis von Theorem 4.3.* Zu einer gegebenen PLANAR 3SAT-Instanz  $\phi$  konstruiere den PTP-Graphen  $G_\phi$  aus den obigen Gadgets und definiere die Gewichtsfunktionen  $\omega$  und  $\gamma$  entsprechend. Aus der Konstruktion folgt, dass das gültige rechteckige Dual von  $G_\phi$  eindeutig ist bis auf die Flips, die den Werten der Variablen entsprechen, und die Größen der inneren Rechtecke in den Klauseln. Hat  $\phi$  eine erfüllende Belegung, hat  $G_\phi$  ein Layout, sodass die durch  $\omega$  und  $\gamma$  vorgegebenen Bedingungen eingehalten werden. Aus einer Zeichnung eines rechteckigen Duals, das die durch  $\omega$  und  $\gamma$  vorgegebenen Bedingungen erfüllt, kann direkt eine erfüllende Belegung von  $\phi$  abgelesen werden. Analog zum vorherigen Abschnitt erfolgt die Konstruktion von  $G_\phi$  aus  $\phi$  in polynomieller Zeit. Somit haben wir das Theorem 4.3 gezeigt.  $\square$

### 4.3 Minimierung der Gesamtgröße für vorgegebene Mindestkontaktlängen

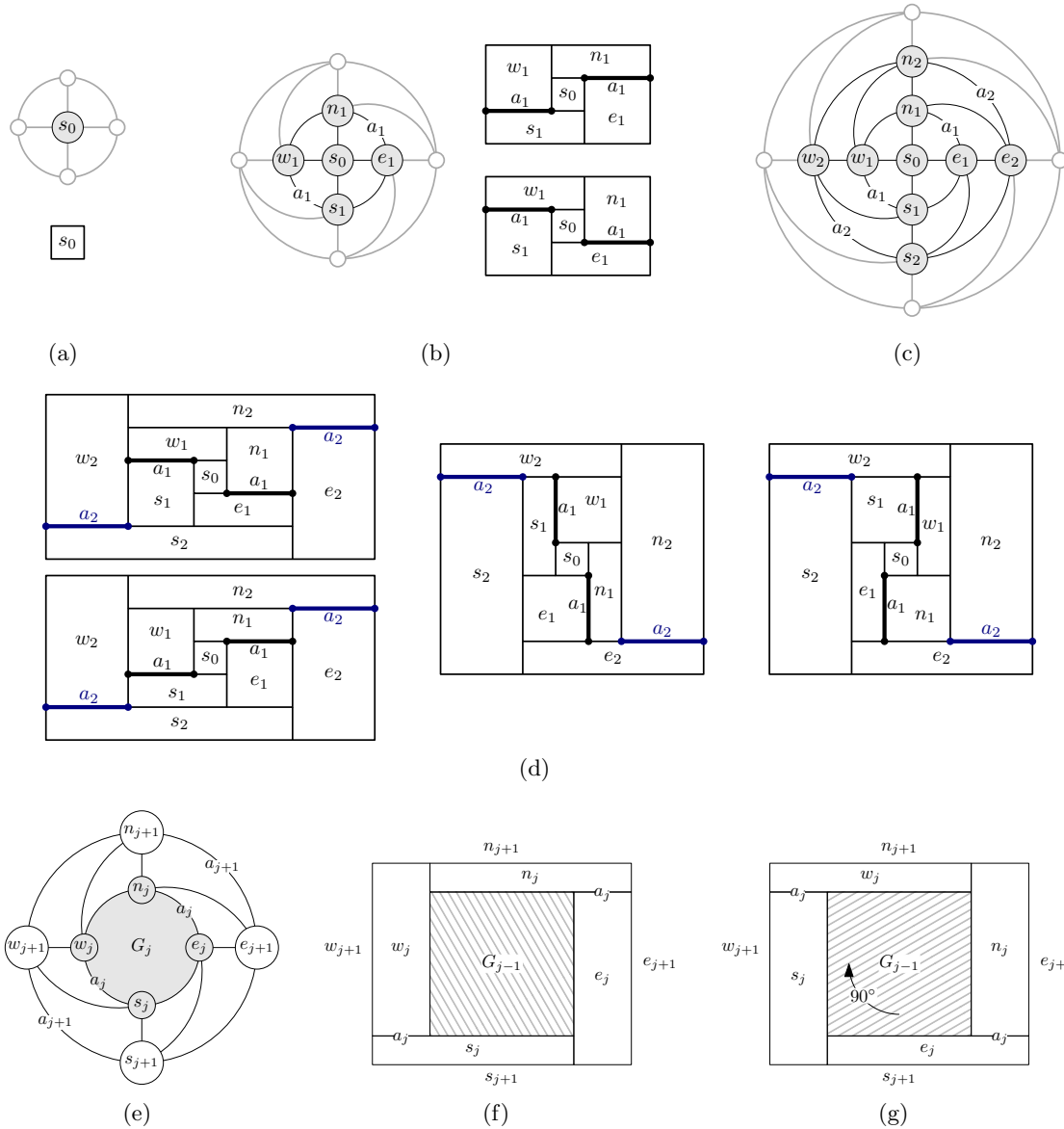
In Abschnitt 3.2 haben wir gesehen, dass für einen gegebenen PTP-Graphen  $G = (V, E)$  mit einem festen REL und durch eine Kantengewichtsfunktion  $\omega$  vorgegebenen unteren Schranken an die Kontaktlängen eine entsprechende Zeichnung mit minimalen Breite, Höhe und Fläche der inneren Rechtecke in Linearzeit konstruiert werden kann. In diesem Abschnitt interpretieren wir die Kantengewichte  $\omega$  ebenfalls als untere Schranken an die Kontaktlängen, allerdings ist nun die REL frei wählbar. Wir zeigen, dass es im Allgemeinen NP-schwer ist, eine optimale Zeichnung  $\Gamma$  von  $G$  über alle möglichen RELs zu finden. Wir betrachten unterschiedliche Optimierungskriterien wie Minimierung des Umfangs, der Gesamtfläche und der Gesamtabweichung der tatsächlichen Kontaktlängen  $|s(e)|$  von den Mindestlängen  $\omega(e)$ .

#### 4.3.1 Minimierung der Gesamtfläche

Wir betrachten zuerst das Problem der Flächenminimierung und werden folgendes Theorem zeigen:

**Theorem 4.4.** *Für einen gegebenen PTP-Graphen  $G = (V, E)$  mit einer Kantengewichtsfunktion  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  und eine Flächenschranke  $A \in \mathbb{Q}^+$  ist es NP-schwer, zu entscheiden, ob es zu  $G$  ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R} = \{R(v) \mid v \in V\}$  und eine Zeichnung  $\Gamma$  von  $\mathcal{R}$  gibt, sodass die Gesamtfläche von  $\Gamma$  höchstens  $A$  beträgt unter der Bedingung, dass für jede Kante  $e \in E$  das entsprechende Kontaktsegment  $s(e)$  in  $\Gamma$  die Länge  $|s(e)| \geq \omega(e)$  hat.*

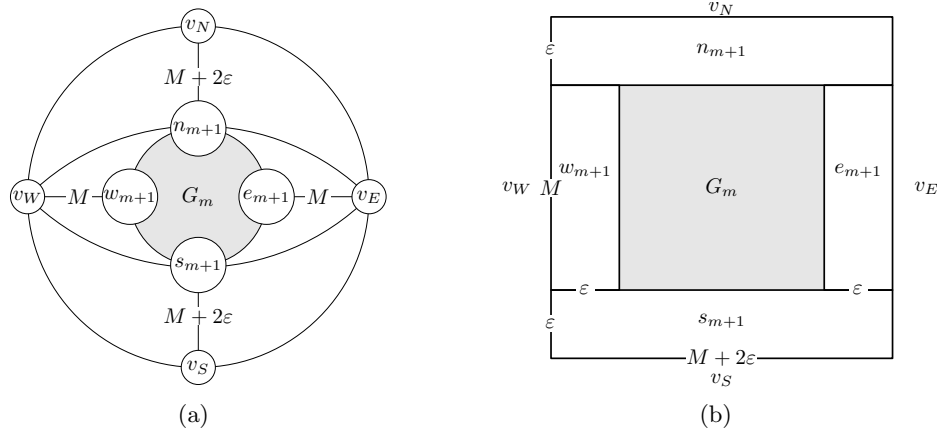
Wir werden Theorem 4.4 durch eine Reduktion vom NP-schweren Problem PARTITION [Kar72] beweisen: Für gegebene positive natürliche Zahlen  $a_1, \dots, a_m$  entscheide, ob eine Teilmenge  $P$  von  $\{1, \dots, m\}$  existiert, sodass gilt:  $\sum_{i \in P} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_i =: \sigma$ .



**Abbildung 4.16:** Die rekursiv definierten Graphen  $G_j$ ,  $j = 0, \dots, m$ . Die vier äußeren unbeschrifteten Knoten gehören jeweils nicht zu  $G_j$ . Schwarze unbeschriftete Kanten haben das Gewicht  $\varepsilon$ . (a) Der Graph  $G_0 = (\{s_0\}, \emptyset)$  und das entsprechende Dual. (b) Der Graph  $G_1$  und die beiden dazugehörigen Realisierungen. Die Kontakte  $s_1 w_1$  und  $s_1 e_1$  (dick gezeichnet) haben die Mindestlänge  $a_1$ . (c) Der Graph  $G_2$ . (d) Die vier Realisierungen von  $G_2$ . (e) Der Graph  $G_{j+1}$  besteht aus einem Vierer-Kreis, der  $G_j$  in seinem Inneren enthält (grau). (f), (g): Die beiden Realisierungen von  $G_j$ .

Gegeben sei eine Instanz  $a_1, \dots, a_m$  des PARTITION-Problems. Für die Reduktion definieren wir eine Familie von Graphen  $G_j$  für  $j = 0, \dots, m$  rekursiv; siehe Abbildung 4.16. Setze  $\varepsilon = \frac{1}{4(2m+5)}$ , und sei  $a_{m+1} = \varepsilon$ . Der Graph  $G_0$  enthalte einen einzigen Knoten  $s_0$ . Der Graph  $G_1$  bestehe aus einem Vierer-Kreis  $s_1, e_1, n_1, w_1$ , der im Inneren den Knoten  $s_0$  enthält. Die Kanten  $w_1 s_1$  und  $e_1 n_1$  haben die Gewichte  $a_1$ ; siehe Abbildung 4.16(b). Im Folgenden betrachten wir nur die rechteckigen Duale von  $G_j$ , in denen  $R(s_j)$  das linke untere,  $R(w_j)$  das linke obere,  $R(n_j)$  das rechte obere und  $R(e_j)$  das rechte untere äußere Rechteck ist. Der Graph  $G_1$  hat genau zwei solche Realisierungen. In Abbildung 4.16(e) ist gezeigt, wie man  $G_{j+1}$  aus  $G_j$  erhält: Man fügt  $G_j$  in das Innere des Kreises  $s_{j+1}, e_{j+1}, n_{j+1}, w_{j+1}$  ein und verbindet  $s_{j+1}$  mit  $s_j$  und  $e_j$ ,  $e_{j+1}$  mit  $e_j$  und  $n_j$ ,  $n_{j+1}$  mit  $n_j$  und  $w_j$  und  $w_{j+1}$





**Abbildung 4.17:** Der Graph  $G$  und sein rechteckiges Dual. Die Kanten sind mit den Gewichten beschriftet, die unbeschrifteten Kanten haben das Gewicht  $\varepsilon$ .

mit  $w_j$  und  $s_j$ . Die Kanten  $s_j w_j$  und  $e_j n_j$  haben das Gewicht  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , und für alle anderen Kanten wähle das Gewicht  $\varepsilon$ .

Für die vier äußeren Rechtecke  $R(s_j)$ ,  $R(w_j)$ ,  $R(n_j)$  und  $R(e_j)$  ergeben sich also genau zwei gemeinsame Realisierungen; siehe Abbildungen 4.16(f),(g). Anstelle des grau schraffierten Rechtecks kann ein beliebiges passendes Dual von  $G_{j-1}$  eingefügt werden, wobei es in Abbildung 4.16(g) gegenüber 4.16(f) um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn gedreht ist. In Abbildung 4.16(d) sind alle Realisierungen von  $G_2$  dargestellt.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Sei  $\mathcal{R}_j$  ein rechteckiges Dual von  $G_j$ . Definiere

$$H(\mathcal{R}_j) = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq j, \text{ der Kontakt } s(w_i s_i) \text{ ist horizontal in } \mathcal{R}_j\},$$

$$V(\mathcal{R}_j) = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq j, \text{ der Kontakt } s(w_i s_i) \text{ ist vertikal in } \mathcal{R}_j\}.$$

Beachte, dass die Kontakte zu den Kanten  $w_i s_i$ ,  $w_i n_i$ ,  $e_i n_i$ ,  $e_i s_i$  alternierende Orientierungen haben müssen, da die beiden Layouts in Abbildung 4.16(f), (g) die einzig möglichen sind. Wir zeigen folgendes Lemma:

**Lemma 4.5.** Für den Graphen  $G_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , und eine Partition  $P_H, P_V$  von  $\{1, \dots, j-1\}$  existiert ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}$  mit dem unteren linken Rechteck  $R(s_j)$ , oberen linken Rechteck  $R(w_j)$ , oberen rechten Rechteck  $R(n_j)$  und unteren rechten Rechteck  $R(e_j)$ , sodass Folgendes gilt:  $H(\mathcal{R}_j) = P_H \cup \{j\}$ ,  $V(\mathcal{R}_j) = P_V$ . Ferner hat jede Zeichnung von jedem solchen  $\mathcal{R}_j$  die Breite bzw. Höhe mindestens

$$w(\mathcal{R}_j) = 2 \sum_{i \in H(\mathcal{R}_j)} a_i + (2|V(\mathcal{R}_j)| + 1)\varepsilon,$$

$$h(\mathcal{R}_j) = 2 \sum_{i \in V(\mathcal{R}_j)} a_i + (2|H(\mathcal{R}_j)| + 1)\varepsilon,$$

und es existiert eine Zeichnung von  $\mathcal{R}_j$  mit Breite  $w(\mathcal{R}_j)$  und Höhe  $h(\mathcal{R}_j)$ .

*Beweis.* Die Aussage gilt offensichtlich für  $j = 1$ . Sei nun  $j \geq 2$ , und die Aussage gelte für  $j - 1$ . Wir zeigen zuerst den ersten Teil. Wir unterscheiden zwei Fälle:

**Fall 1:**  $j - 1 \in P_H$ . Definiere  $P'_H = P_H \setminus \{j - 1\}$ ,  $P'_V = P_V$  und wende die Induktionsvoraussetzung auf  $P'_H$ ,  $P'_V$  und  $G_{j-1}$  an. Dann existiert ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}_{j-1}$  von  $G_{j-1}$ , das die obigen Voraussetzungen für  $P'_H$  und  $P'_V$  erfüllt. Wir erhalten  $\mathcal{R}_j$  durch das Einfügen von  $\mathcal{R}_{j-1}$  in das graue Rechteck in Abbildung 4.16(f).

**Fall 2:**  $j - 1 \in P_V$ . Definiere  $P'_H = P_V \setminus \{j - 1\}$ ,  $P'_V = P_H$  und wende die Induktionsvoraussetzung auf  $P'_H$ ,  $P'_V$  und  $G_{j-1}$  an. Dann existiert ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}_{j-1}$  von  $G_{j-1}$ , das die obigen Voraussetzungen für  $P'_H$  und  $P'_V$  erfüllt. Wir erhalten  $\mathcal{R}_j$  durch eine Rotation von  $\mathcal{R}_{j-1}$  um  $90^\circ$  in Uhrzeigersinn und anschließendes Einfügen in das graue Rechteck in Abbildung 4.16(g).

Die unteren Schranken an die Höhe und Breite sind leicht ersichtlich: Für jedes  $i \in H(\mathcal{R}_j)$  entsprechen den Kanten  $s_i w_i$  und  $n_i e_i$  sowie für jedes  $i \in V(\mathcal{R}_j)$  den Kanten  $s_i e_i$  und  $n_i w_i$  horizontale Kontakte, und diese liegen vollständig links bzw. rechts voneinander, d. h. ihre Projektionen auf die  $x$ -Achse sind im Inneren disjunkt. Analoges gilt für die Höhe. Mit Hilfe der Methoden in Abschnitt 3 kann eine Zeichnung von  $\mathcal{R}_j$  mit der Breite  $w(\mathcal{R}_j)$  und Höhe  $h(\mathcal{R}_j)$  konstruiert werden.  $\square$

Wir konstruieren den PTP-Graph  $G = (V, E)$  wie in Abbildung 4.17. Definiere  $M = 2\sigma + (2m + 1)\varepsilon < 2\sigma + \frac{1}{4}$ . Die Abbildung zeigt, wie die vier äußeren Knoten  $v_S, v_E, v_N$  und  $v_W$  mit den Knoten  $s_{m+1}, e_{m+1}, n_{m+1}$  und  $w_{m+1}$  zu verbinden sind. Die Gewichte der entsprechenden Kanten sind so gewählt, dass in jeder Zeichnung  $\Gamma$  eines rechteckigen Duals von  $G$  die Gesamtbreite und Gesamthöhe der inneren Rechtecke mindestens  $M + 2\varepsilon$  betragen. Falls sie in einer Zeichnung  $\Gamma$  jeweils genau  $M + 2\varepsilon$  betragen, hat das durch  $\Gamma$  induzierte Zeichnung  $\Gamma_m$  eines rechteckigen Duals  $\mathcal{R}_m$  von  $G_m$  die Höhe und Breite höchstens  $M$  (graues Rechteck in Abbildung 4.17).

Nun können wir Theorem 4.4 beweisen.

*Beweis von Theorem 4.4.* Setze  $A = (M + 4\varepsilon)^2 = (2\sigma + (2m + 5)\varepsilon)^2 = (2\sigma + \frac{1}{4})^2$ . Angenommen, es existiert eine Lösung  $P$  für die Instanz  $a_1, \dots, a_m$  des PARTITION-Problems. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $m \in P$ . Dann existiert ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}_m$  von  $G_m$  mit  $H(\mathcal{R}_m) = P$ , das mit der Breite  $w(\mathcal{R}_m) \leq 2\sigma + (2m + 1)\varepsilon = M$  und Höhe  $h(\mathcal{R}_m) \leq 2\sigma + (2m + 1)\varepsilon = M$  gezeichnet werden kann. Dann kann  $\mathcal{R}_m$  zu einem rechteckigen Dual  $\mathcal{R}$  von  $G$  ergänzt werden, das mit der Höhe und Breite höchstens  $M + 4\varepsilon$  und der Fläche höchstens  $A$  gezeichnet werden kann.

Angenommen, die gegebene PARTITION-Instanz hat keine Lösung. Da jedes rechteckige Dual  $\mathcal{R}_m$  von  $G_m$  durch  $H(\mathcal{R}_m)$  eine Partition von  $\{1, \dots, m\}$  induziert, hat jede Zeichnung von  $\mathcal{R}_m$  die Höhe oder Breite mindestens  $2\sigma + 1$ . Somit hat jede Zeichnung eines rechteckigen Duals  $\mathcal{R}$  von  $G$  die Breite mindestens  $2\sigma + 1$  und die Höhe mindestens  $M$  (oder umgekehrt). Somit ist ihre Fläche mindestens  $M(2\sigma + 1) \geq 2\sigma(2\sigma + 1) > (2\sigma + \frac{1}{4})^2 = A$ . Der Graph  $G$  kann in Zeit polynomiell in  $m$  konstruiert werden. Somit ist Theorem 4.4 bewiesen.  $\square$

Analog kann gezeigt werden, dass für einen PTP-Graphen  $G$  und gegebene Mindestkontaktlängen die Minimierung der längeren Seite oder des Umfangs einer Zeichnung eines rechteckigen Duals von  $G$  NP-schwer ist: Die längere Seite jeder Zeichnung  $\Gamma_m$  eines rechteckigen Duals  $\mathcal{R}_m$  von  $G_m$  beträgt mindestens  $2\sigma + 1$ , wenn die PARTITION-Instanz keine Lösung hat, und sonst existiert eine solche kompakte Zeichnung  $\Gamma_m$  eines  $\mathcal{R}_m$  mit längerer Seite höchstens  $2\sigma + \frac{1}{4}$ . Ferner beträgt der Umfang für jede Zeichnung  $\Gamma$  eines rechteckigen Duals  $\mathcal{R}$  von  $G$  mindestens  $4\sigma + 1$ , wenn die PARTITION-Instanz keine Lösung hat, und sonst existiert eine kompakte Zeichnung  $\Gamma$  eines  $\mathcal{R}$  mit dem Umfang höchstens  $4\sigma + \frac{1}{2}$ .

**Korollar 4.6.** *Für einen gegebenen PTP-Graphen  $G = (V, E)$  mit einer Kantengewichtsfunktion  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  und eine Längenschranke  $\ell \in \mathbb{Q}^+$  ist es NP-schwer, zu entscheiden, ob es zu  $G$  ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R} = \{R(v) \mid v \in V\}$  und eine Zeichnung  $\Gamma$  von  $\mathcal{R}$  gibt, sodass der Umfang von  $\Gamma$  (bzw. das Maximum aus der Höhe und Breite von  $\Gamma$ ) höchstens  $\ell$*

beträgt unter der Bedingung, dass für jede Kante  $e \in E$  das entsprechende Kontaktsegment  $s(e)$  in  $\Gamma$  die Länge  $|s(e)| \geq \omega(e)$  hat.

**Bemerkung 4.7.** Die Entscheidungsprobleme in Theorem 4.4 und Korollar 4.6 sind NP-vollständig.

*Beweis.* Die NP-Schwere haben wir bereits gezeigt. Es bleibt zu zeigen, dass die obigen Probleme in NP liegen. Angenommen, wir bekommen als Eingabe ein REL  $(T_1, T_2)$  von  $G$ . Mit dem Algorithmus aus Abschnitt 3.2.4 ist es in Linearzeit möglich, eine Zeichnung zu  $(T_1, T_2)$  zu konstruieren, die unter Einhaltung der vorgegebenen Mindestkontaktlängen gleichzeitig die Gesamtbreite und die Gesamthöhe der inneren Rechtecke minimiert. Anschließend müssen noch  $O(1)$  Möglichkeiten einer kompakten Realisierung der vier äußeren Rechtecke betrachtet werden. Für ein gegebenes festes REL kann man also in Linearzeit prüfen, ob die Schranken  $A$  bzw.  $\ell$  eingehalten werden können. Damit sind die obigen Entscheidungsprobleme in NP.  $\square$

### 4.3.2 Minimierung der Gesamtlänge aller Kanten

Seien  $G$ ,  $\varepsilon$  und  $M$  wie oben gegeben. Mit der gleichen Konstruktion können wir folgenden Satz beweisen:

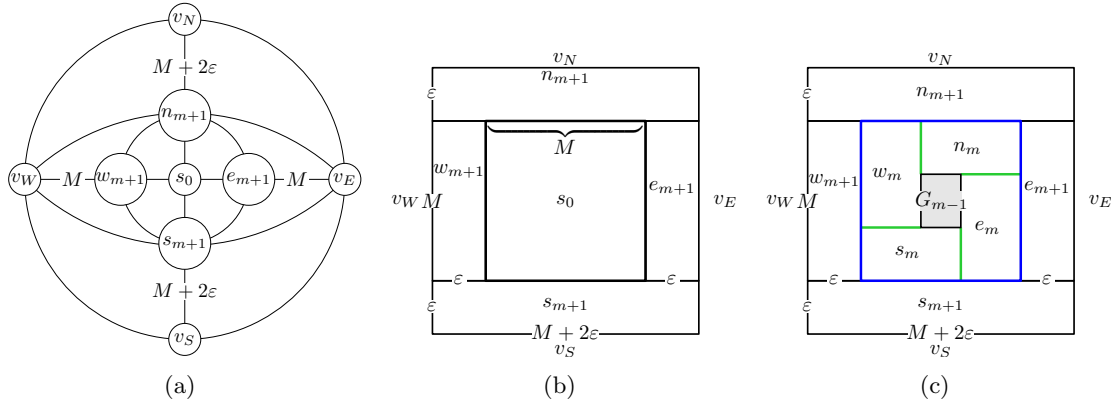
**Theorem 4.8.** Für einen gegebenen PTP-Graphen  $G = (V, E)$  mit einer Kantengewichtsfunktion  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  und eine Längenschranke  $\ell \in \mathbb{R}^+$  ist es NP-schwer, zu entscheiden, ob es zu  $G$  ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R} = \{R(v) \mid v \in V\}$  und eine Zeichnung  $\Gamma$  von  $\mathcal{R}$  gibt, sodass die Gesamtkantenlänge von  $\Gamma$  höchstens  $\ell$  beträgt unter der Bedingung, dass für jede Kante  $e \in E$  das entsprechende Kontaktsegment  $s(e)$  in  $\Gamma$  die Länge  $|s(e)| \geq \omega(e)$  hat.

Sei  $\mathcal{R}_j$  ein rechteckiges Dual von  $G_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Wir betrachten hier weiterhin nur Duale  $\mathcal{R}_j$  mit dem unteren linken Rechteck  $R(s_j)$ , oberen linken Rechteck  $R(w_j)$ , oberen rechten Rechteck  $R(n_j)$  und unteren rechten Rechteck  $R(e_j)$ . Sei  $\Gamma$  eine kompakte Zeichnung von  $\mathcal{R}_j$ , d. h.  $\Gamma$  hat die minimale Höhe und Breite unter Einhaltung der Mindestkontaktlängen. Wir bezeichnen mit  $P(\Gamma)$  den Umfang von  $\Gamma$  und mit  $L(\Gamma)$  die Gesamtlänge aller Kanten in  $\Gamma$ .

**Lemma 4.9.** Alle kompakten Zeichnungen eines beliebigen Duals von  $G_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , haben den gleichen Umfang und die gleiche Gesamtkantenlänge. Bezeichne diese mit  $P(G_j)$  bzw.  $L(G_j)$ . Ferner ist  $P(G_j) = 4\varepsilon(j+1) + 4\sum_{i=1}^j a_i$ , und  $P(G_j) = 2(w(\mathcal{R}_j) + h(\mathcal{R}_j))$  für ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}_j$  von  $G_j$  mit der obigen Definition von  $w$  und  $h$ .

*Beweis.* Die Aussage gilt für  $j = 1$ . Sei  $\mathcal{R}_j$  ein rechteckiges Dual von  $G_j$  für ein  $j \geq 2$  und  $\mathcal{R}_{j-1}$  das von  $\mathcal{R}_j$  induzierte Dual von  $G_{j-1}$ . Hat  $\mathcal{R}_j$  die Form wie in Abbildung 4.16(f), so hat eine kompakte Zeichnung  $\Gamma$  von  $\mathcal{R}_j$  die Breite  $w(\mathcal{R}_{j-1}) + 2a_j$  und Höhe  $h(\mathcal{R}_{j-1}) + 2\varepsilon$ . Hat  $\mathcal{R}_j$  die Form wie in Abbildung 4.16(g), so hat  $\Gamma$  die Breite  $h(\mathcal{R}_{j-1}) + 2a_j$  und Höhe  $w(\mathcal{R}_{j-1}) + 2\varepsilon$ . In beiden Fällen ergibt sich der Umfang von  $\Gamma$  zu  $P(G_{j-1}) + 4a_j + 4\varepsilon$ , und für  $P(G_j)$  gelten die obigen Beziehungen. Analog ergibt sich die Gesamtkantenlänge von  $\Gamma$  in beiden Fällen zu  $L(G_j) = P(G_j) + L(G_{j-1}) + 2a_j + 2\varepsilon$ .  $\square$

Offensichtlich können  $P(G_j)$  und  $L(G_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , in Linearzeit berechnet werden. Sei  $\Gamma_0$  eine Zeichnung von  $\tilde{G}$  aus Abbildung 4.18(a),(b) mit minimaler Gesamtkantenlänge, und sei  $\Delta = L(\Gamma_0)$ . Für den Beweis von Theorem 4.8 setzen wir  $\ell = \Delta + L(G_{m-1}) + 2a_m + \frac{1}{2}$ .



**Abbildung 4.18:** (a) PTP-Graph  $\bar{G}$ . Die Gewichte unbeschrifteter Kanten betragen  $\varepsilon$ . (b) Eine Zeichnung zu  $\bar{G}$  mit minimaler Gesamtkantenlänge (die vier äußeren Rechtecke sind nicht gezeichnet). (c) Hat die PARTITION-Instanz eine Lösung, kann ein rechteckiges Dual von  $G_m$  so gezeichnet werden, dass sein äußeres Rechteck die Größe  $M \times M$  hat (blau). Der Fall in Abbildung 4.16(g) ist analog.

*Beweis von Theorem 4.8.* Angenommen, die PARTITION-Instanz ist lösbar. Dann existiert ein Dual  $\mathcal{R}_m$  von  $G_m$  mit einer kompakten Zeichnung  $\Gamma_m$ , sodass  $w(\mathcal{R}_m), h(\mathcal{R}_m) \leq M$ . Wir konstruieren eine rechteckige Zeichnung  $\Gamma$  von  $G$ , indem wir das äußere Rechteck von  $\Gamma_m$  auf  $M \times M$  vergrößern und anschließend  $\Gamma_m$  in das entsprechende  $M \times M$ -Quadrat von  $\Gamma_0$  einfügen. Dann ergibt sich für die Gesamtlänge der vier Kontakte zu  $s_m e_m, e_m n_m, n_m w_m, w_m s_m$  in  $\Gamma$  (grün in Abbildung 4.18):

$$\begin{aligned} |s(s_m e_m)| + |s(e_m n_m)| + |s(n_m w_m)| + |s(w_m s_m)| &= 2M - \frac{1}{2}P(G_{m-1}) \\ &= 2M - \frac{1}{2}(4\varepsilon m + 8\sigma - 4a_m) = 2M - 2\varepsilon m - 4\sigma + 2a_m \\ &= 2(2m + 1)\varepsilon - 2\varepsilon m + 2a_m = 2\varepsilon(m + 1) + 2a_m < \frac{1}{4} + 2a_m \end{aligned}$$

Somit gilt:  $L(\Gamma) \leq \Delta + L(G_{m-1}) + 2a_m + \frac{1}{4} \leq \ell$ .

Hat dagegen die PARTITION-Instanz keine Lösung, so ist für jedes rechteckige Dual  $\mathcal{R}_m$  von  $G_m$   $w(\mathcal{R}_m) \geq 2\sigma + 1$  oder  $h(\mathcal{R}_m) \geq 2\sigma + 1$ . Dann wäre die Höhe oder Breite des blauen Rechtecks in Abbildung 4.18(c) mindestens  $2\sigma + 1$ . Die Länge der grünen Segmente in Abbildung 4.18(c) ist mindestens  $2a_m + 2\varepsilon$ . Somit beträgt die Gesamtkantenlänge jeder gültigen Zeichnung eines rechteckigen Duals  $\mathcal{R}$  von  $G$  mindestens

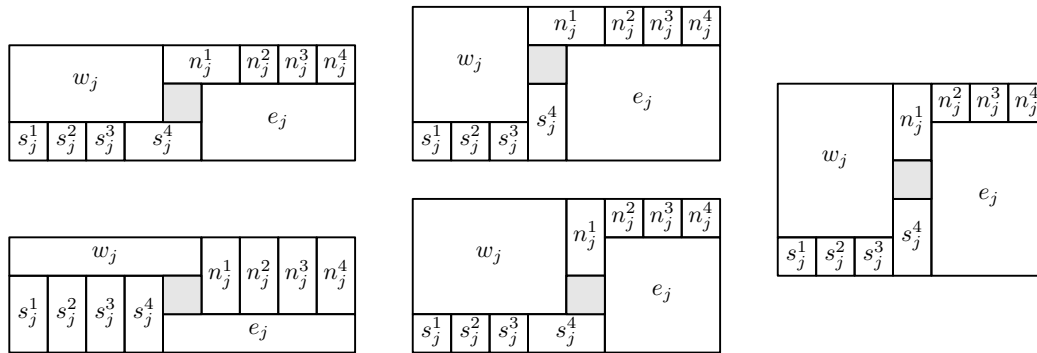
$$\begin{aligned} L(\Gamma_0) + L(G_{m-1}) + (2a_m + 2\varepsilon) + 2(2\sigma + 1 - M) \\ \geq \Delta + L(G_{m-1}) + 2a_m + 2\varepsilon + \frac{3}{2} > \ell. \end{aligned}$$

Somit haben wir Theorem 4.8 gezeigt.  $\square$

Man beachte, dass die Minimierung der Gesamtkantenlänge einer Zeichnung eines rechteckigen Duals von  $G$  unter den vorgegebenen Mindestkontaktlängen äquivalent ist zur Minimierung der Gesamtabweichung der tatsächlichen Kontaktlängen von den vorgegebenen Mindestkontaktlängen.

**Bemerkung 4.10.** Das Entscheidungsproblem in Theorem 4.8 ist NP-vollständig.

*Beweis.* Der Beweis verläuft ähnlich zu dem von Bemerkung 4.8: Für ein gegebenes festes REL  $(T_1, T_2)$  können wir in polynomieller Zeit eine Zeichnung zu  $G$  ohne die vier äußeren



**Abbildung 4.19:** Rechteckige Duale zu einem Graphen  $G_j$  und  $a_j = 3$  für einheitliche Mindestkontaktlängen. Die Breite und Höhe einer kompakten Zeichnung eines rechteckigen Duals von  $G_j$  variieren höchstens um 2.

Rechtecke konstruieren, die die minimale Gesamtkantenlänge hat (berechne dazu einen Minimum Cost Flow wie in Abschnitt 3.2.3). Anschließend müssen noch  $O(1)$  Möglichkeiten für die Realisierung der vier äußeren Rechtecke betrachtet werden. Damit ist das obige Entscheidungsproblem in NP.  $\square$

### 4.3.3 Einheitliche Mindestlängen

Die Komplexität der Flächen- oder Umfangsminimierung einer Zeichnung eines rechteckigen Duals zu einem gegebenen PTP-Graphen unter einheitlichen Mindestkontaktlängen ist eine offene Frage in der Arbeit von He [He93], die noch nicht beantwortet wurde. Zum Versuch einer Reduktion vom PARTITION-Problem können wir ähnliche Konstruktionen wie im vorherigen Abschnitt verwenden, wobei wir die Mindestbreiten und -höhen der Zeichnungen durch zusätzliche Knoten erzwingen; siehe Abbildung 4.19. Allerdings hätte der konstruierte Graph die Größe linear in  $S = \sum_i^m a_i$ , und eine Reduktion, die zu der obigen analog ist, liefe in der Zeit polynomiell in  $m$  und  $S$ . Dabei existiert zum PARTITION-Problem ein pseudopolynomieller Algorithmus, der in  $O(m \cdot S)$  läuft.



## 5. Optimierung der rechteckigen Duale mit MILP

In Kapitel 4 haben wir gezeigt, dass es in vielen Fällen schwer ist, zu einem gegebenen PTP-Graphen  $G$  eine „gute“ Zeichnung zu finden, d. h. ein rechteckiges Dual von  $G$ , das mit bestimmten Anforderungen an die Kontaktlängen oder Flächen der Rechtecke dargestellt werden kann oder für spezifizierte Mindestkontaktlängen die Größe der Zeichnung oder die Gesamtabweichung der tatsächlichen Kontaktlängen von den vorgegebenen minimiert. In diesem Kapitel wenden wir gemischt-ganzzahlige lineare Programmierung zur Konstruktion optimaler rechteckiger Duale für bestimmte Anforderungen an ihre Zeichnungen an.

Das Finden eines passenden rechteckigen Duals eines PTP-Graphen  $G$  ist ein Teilproblem bei der Erstellung rechteckiger Kartogramme. In der Arbeit von van Kreveld und Speckmann [vKS07] werden für jede Kante die zugehörigen Färbungs- und Orientierungsoptionen aus der vorliegenden Landkarte extrahiert, üblicherweise sind es höchstens zwei von den möglichen vier. Anschließend wird für jede Kombination der Möglichkeiten ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R}$  erstellt, und für eine Zeichnung von  $\mathcal{R}$  wird der *kartographische Fehler* minimiert, d. h. die Abweichung der tatsächlichen Flächen der Rechtecke von den durch die Knotengewichte vorgegebenen. Für jedes fest gewählte  $\mathcal{R}$  geschieht dies durch Heuristiken, bilineare Programmierung oder mehrere Iterationen von linearer Programmierung [SvKF06]. In einer neueren Arbeit von Buchin, Speckmann und Verdonschot [BSV11] wird eine weitere Methode zur Bestimmung eines optimalen rechteckigen Duals eines PTP-Graphen ohne benutzerdefinierte Einschränkungen an die Orientierungen der Kontakte vorgestellt. Diese basiert auf dem Ergebnis von Fusy [Fus09], laut dem die RELs von  $G$  einen distributiven Verband bilden. Ein näherungsweise optimales rechteckiges Dual kann durch das Traversieren des Verbands unter Verwendung der *simulierten Abkühlung* [Kir84] gefunden werden.

Optimiert man die rechteckigen Duale unter dem Aspekt der Kontaktlängen, so sind die Optimierungsfunktionen etwa für die Minimierung der längeren Seite der Zeichnung oder der Abweichung der tatsächlichen Kontaktlängen von den vorgegebenen linear. Deshalb erscheint es in diesem Kontext sinnvoll, gemischt-ganzzahlige lineare Programmierung zu verwenden.

## 5.1 Formulierung eines MILP

In diesem Abschnitt werden wir beschreiben, wie man zu einem gegebenen PTP-Graphen  $G = (V, E)$  mit einer positiven Kantengewichtsfunktion  $\omega$  ein gemischt-ganzzahliges lineares Programm formulieren kann, welches eine lineare Funktion über alle RELs von  $G$  minimiert.

### 5.1.1 Beschreibung eines REL

Um ein REL  $(T_1, T_2)$  von  $G$  zu beschreiben, kodieren wir die Färbung und Orientierung jeder inneren Kante in  $G$  mit binären Variablen. Sei  $E_0$  die Menge der inneren Kanten von  $G$ . Für jedes  $e = \{u, v\} \in E_0$  führen wir eine Variable  $\text{color}_e \in \{0, 1\}$  ein. Dabei bedeutet  $\text{color}_e = 0$  (1), dass  $e$  der Partition  $T_1$  ( $T_2$ ) zugeordnet wurde. Für die inneren Kanten, die zu einem der vier äußeren Knoten inzident sind, fordern wir, dass ihre Färbung der Definition eines REL entspricht. Für jede innere Kante  $e = \{u, v\} \in E_0$ ,  $u \in \{v_S, v_W, v_E, v_N\}$  sollen folgende Nebenbedingungen gelten:

$$\begin{aligned} \text{color}_e &= 0 \text{ für } u \in \{v_S, v_N\}, \\ \text{color}_e &= 1 \text{ für } u \in \{v_W, v_E\}. \end{aligned} \tag{C1}$$

Um die Orientierung der Kanten zu beschreiben, führen wir für jedes  $e \in E_0$  eine Variable  $\text{dir}_e \in \{0, 1\}$  ein. Ihr Wert gibt an, ob  $e = uv$  in  $T_1$  bzw.  $T_2$  als  $u \rightarrow v$  oder  $v \rightarrow u$  orientiert ist: Ist  $\text{dir}_e = 0$ , so stimmt die Orientierung von  $uv$  mit einer fest gewählten *Default-Orientierung* überein. Ist dagegen  $\text{dir}_e = 1$ , so hat  $uv$  die entgegengesetzte Orientierung zu der Default-Wahl. Falls  $u \rightarrow v$  die Default-Orientierung von  $e$  ist, schreiben wir  $\text{default}(e) = u \rightarrow v$ . Für ein  $e = uv \in E_0$  bedeutet also  $\text{dir}_e = 0$ , dass  $e$  in  $T_1$  bzw.  $T_2$  die gleiche Orientierung wie  $\text{default}(e)$  hat, und sonst gilt  $\text{dir}_e = 1$ .

Wir wählen eine beliebige Orientierung der Kanten in  $G$  und setzen sie als Default-Orientierung fest. In unserer Implementierung weisen wir dafür jedem Knoten von  $v \in V$  eine eindeutige ganzzahlige ID  $\text{id}(v)$  zu, und für eine Kante  $e = \{u, v\} \in E_0$  sei  $\text{default}(e) = u \rightarrow v$ , wenn  $\text{id}(u) < \text{id}(v)$ . Die Orientierung einer inneren Kante, die zu einem äußeren Knoten inzident ist, muss der Definition eines REL entsprechen: Ist  $\text{default}(e) = v_S \rightarrow v$  für  $e = \{v_S, v\}$ , fordere  $\text{dir}_e = 0$ , und  $\text{dir}_e = 1$  sonst. Ist  $\text{default}(e) = v \rightarrow v_N$  für  $e = \{v_N, v\}$ , fordere  $\text{dir}_e = 0$ , und  $\text{dir}_e = 1$  sonst. Analoge Nebenbedingungen werden für Kanten  $\{v_W, v\}$  und  $\{v_E, v\}$  formuliert:

$$\begin{aligned} \text{Für } e = \{v_S, v\} \in E_0 \text{ dir}_e &= \begin{cases} 0, \text{ falls } \text{default}(e) = v_S \rightarrow v, \\ 1, \text{ sonst.} \end{cases} \\ \text{Für } e = \{v_N, v\} \in E_0 \text{ dir}_e &= \begin{cases} 0, \text{ falls } \text{default}(e) = v \rightarrow v_N, \\ 1, \text{ sonst.} \end{cases} \\ \text{Für } e = \{v_W, v\} \in E_0 \text{ dir}_e &= \begin{cases} 0, \text{ falls } \text{default}(e) = v_W \rightarrow v, \\ 1, \text{ sonst.} \end{cases} \\ \text{Für } e = \{v_E, v\} \in E_0 \text{ dir}_e &= \begin{cases} 0, \text{ falls } \text{default}(e) = v \rightarrow v_E, \\ 1, \text{ sonst.} \end{cases} \end{aligned} \tag{C2}$$

Wir präsentieren nun die Variablen und Nebenbedingungen zur Sicherstellung der korrekten zyklischen Ordnung der Kanten in  $(T_1, T_2)$  um einen inneren Knoten  $u$  in  $G$ . Sei  $v$  ein weiterer Knoten in  $G$  mit  $e = \{u, v\} \in E$ . Wir betrachten die beiden Halbkanten  $u \rightarrow v$  und  $v \rightarrow u$  zu  $e$  separat. Für jede aus  $u$  ausgehende Halbkante  $h = u \rightarrow v$ ,  $\{u, v\} \in E$ ,



führen wir die ganzzahligen Variablen  $\ell_h \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\ell_h^1, \ell_h^2, \ell_h^3, \alpha_h \in \{0, 1\}$  ein. Für  $\ell$  soll Folgendes gelten:

$$\ell_h = \begin{cases} 0, & \text{falls } \text{color}_e = 0 \text{ und } e \text{ als } v \rightarrow u \text{ in } T_1 \text{ orientiert ist,} \\ 1, & \text{falls } \text{color}_e = 1 \text{ und } e \text{ als } v \rightarrow u \text{ in } T_2 \text{ orientiert ist,} \\ 2, & \text{falls } \text{color}_e = 0 \text{ und } e \text{ als } u \rightarrow v \text{ in } T_1 \text{ orientiert ist,} \\ 3, & \text{falls } \text{color}_e = 1 \text{ und } e \text{ als } u \rightarrow v \text{ in } T_2 \text{ orientiert ist.} \end{cases}$$

Dies wird durch die folgende Nebenbedingung erreicht:

$$\ell_h = \begin{cases} 2 \cdot (1 - \text{dir}_e) + \text{color}_e, & \text{falls } \text{default}(e) = u \rightarrow v \\ 2 \cdot \text{dir}_e + \text{color}_e, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{C3})$$

Damit also für den Knoten  $u$  die REL-Eigenschaft gilt, muss es für jedes  $i = 0, \dots, 3$  eine Halbkante  $h = u \rightarrow v$  in der Inzidenzliste von  $u$  geben mit  $\ell_h = i$ , und außerdem muss  $\ell_h$  im Uhrzeigersinn um  $u$  steigen, außer einer einzigen Ausnahme: Genau einmal soll für ein Paar von Halbkanten  $h_1$  und  $h_2$   $\ell_{h_1} = 3$  und  $\ell_{h_2} = 0$  gelten, wobei  $h_2 = u \rightarrow v_2$  der rechte Nachbar von  $h_1 = u \rightarrow v_1$  ist. Dies erreichen wir mit den Hilfsvariablen  $\ell_h^1, \ell_h^2, \ell_h^3, \alpha_h$ . Für jede Halbkante  $h = u \rightarrow v$  führen wir die folgenden Nebenbedingungen ein:

$$\ell_h = \ell_h^1 + \ell_h^2 + \ell_h^3, \quad \ell_h^3 \leq \ell_h^2, \quad \ell_h^2 \leq \ell_h^1. \quad (\text{C4})$$

Somit ist  $\ell_h^i = 1$  genau dann, wenn  $\ell_h \geq i$ , wobei  $i = 1, 2, 3$ . Damit also jeder Wert  $i \in \{0, \dots, 3\}$  von  $\ell_h$  in der Inzidenzliste  $\text{Adj}(u)$  von  $u$  vorkommt, fordern wir:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \text{Adj}(u)} \ell_{u \rightarrow v}^3 &\geq 1, & \sum_{v \in \text{Adj}(u)} \ell_{u \rightarrow v}^2 - \ell_{u \rightarrow v}^3 &\geq 1, \\ \sum_{v \in \text{Adj}(u)} \ell_{u \rightarrow v}^1 - \ell_{u \rightarrow v}^2 &\geq 1, & \sum_{v \in \text{Adj}(u)} \ell_{u \rightarrow v}^1 &\leq \text{deg}(u) - 1. \end{aligned} \quad (\text{C5})$$

Dabei ist für ein  $j = 1, 2$  genau dann  $\ell_{u \rightarrow v}^j - \ell_{u \rightarrow v}^{j+1} = 1$ , wenn  $\ell_h = j$ , und 0 sonst.

Für jedes Paar von Halbkanten  $h_1 = u \rightarrow v_1$  und  $h_2 = u \rightarrow v_2$ , sodass  $h_2$  der Nachfolger von  $h_1$  im Uhrzeigersinn in der Inzidenzliste von  $u$  ist, stellen wir die folgende Nebenbedingung auf:

$$\ell_{h_1} - 3 \cdot \alpha_{h_1} \leq \ell_{h_2}. \quad (\text{C6})$$

Ist also  $\alpha_{h_1} = 0$ , so muss  $\ell_{h_1} \leq \ell_{h_2}$  sein, und  $\ell_{h_1} > \ell_{h_2}$  kann nur dann gelten, wenn  $\alpha_{h_1} = 1$ . Zusätzlich fordern wir:

$$\sum_{v \in \text{Adj}(u)} \alpha_{u \rightarrow v} = 1. \quad (\text{C7})$$

Damit wird garantiert, dass die im Uhrzeigersinn aufsteigende Ordnung der Labels  $\ell_h$  genau einmal gestört wird.

Aus der obigen Beschreibung folgt, dass jedes REL  $(T_1, T_2)$  eine Belegung der ganzzahligen Variablen  $\text{color}_e, \text{dir}_e, \ell_h, \ell_h^1, \ell_h^2, \ell_h^3, \alpha_h$  für die inneren Kanten  $e$  von  $G$  und die Halbkanten  $h = u \rightarrow v, \{u, v\} \in E, u \in V \setminus \{v_S, v_W, v_N, v_E\}$ , induziert, die die obigen Nebenbedingungen erfüllt. Umgekehrt induziert jede erfüllende Variablenbelegung durch  $\text{color}_e$  und  $\text{dir}_e$  ein gültiges REL.

### 5.1.2 Beschreibung einer Zeichnung zum REL

Betrachte das REL  $(T_1, T_2)$ , das durch eine erfüllende Belegung der oben vorgestellten ganzzahligen Variablen induziert wird. In diesem Abschnitt werden wir eine Zeichnung  $\Gamma$  zu  $(T_1, T_2)$ , die die durch  $\omega$  vorgegebenen Mindestkontaktlängen einhält, mit Hilfe zusätzlicher reellwertiger Variablen und linearer Nebenbedingungen beschreiben. Die äußeren Rechtecke  $R(v_S)$ ,  $R(v_W)$ ,  $R(v_N)$ ,  $R(v_E)$  werden in der Praxis meistens nicht gezeichnet, deshalb werden wir ihre Koordinaten nicht durch das lineare Programm modellieren und nehmen an,  $\Gamma$  besteht nur aus inneren Rechtecken. Die Koordinaten der vier äußeren Rechtecke können bei Bedarf im Anschluss an die Optimierung berechnet werden. Man beachte, dass die inneren Facetten von  $G$  gerade den Knoten in  $\Gamma$  entsprechen. Wir definieren eine Konstante  $M = \sum_{e \in E_0} \omega(e)$  und nehmen an, dass die Breite bzw. Höhe von  $\Gamma$  höchstens  $M$  ist. Seien  $F_0$  die inneren Facetten von  $G$ . Für jedes  $f \in F_0$  führen wir zwei reellwertige Variablen  $x_f, y_f \in [0, M]$  ein, die die Koordinaten des  $f$  entsprechenden Knoten in  $\Gamma$  angeben sollen.

Für jedes Paar von benachbarten Facetten  $f, g \in F_0$  sind die Variablen  $x_f$  und  $x_g$  bzw.  $y_f$  und  $y_g$  abhängig voneinander, und die Art der Abhängigkeit ist durch die Färbung  $\text{color}_e$  und Orientierung  $\text{dir}_e$  der gemeinsamen inneren Kante  $e$  von  $f$  und  $g$  bestimmt. Ist etwa die Kante  $e$  in  $T_1$ , so entspricht  $e$  ein horizontaler Kontakt  $s(e)$  in  $\Gamma$  der Länge  $|s(e)| \geq \omega(e)$ . Da die Knoten in  $\Gamma$ , die  $f$  bzw.  $g$  entsprechen, gerade die Endpunkte von  $s(e)$  sind, muss je nach Orientierung von  $e$  in  $T_1$  entweder  $x_g \geq x_f + \omega(e)$  oder  $x_f \geq x_g + \omega(e)$  gelten, und außerdem ist  $y_f = y_g$ . Ist  $e$  in  $T_2$ , so ist  $s(e)$  vertikal, und es gilt analog je nach Orientierung von  $e$  entweder  $y_g \geq y_f + \omega(e)$  oder  $y_f \geq y_g + \omega(e)$ , und es ist  $x_f = x_g$ . Sei also  $e = \{u, v\}$  eine innere Kante in  $G$  mit  $\text{default}(e) = u \rightarrow v$ , und seien  $f, g \in F_0$ , so dass  $f$  die Facette links von  $u \rightarrow v$  und  $g$  die Facette rechts von  $u \rightarrow v$  ist. Die beschriebenen Abhängigkeiten können mit Hilfe von  $M$  durch folgende Nebenbedingungen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
x_g &\geq \omega(e) + x_f - (M + \omega(e)) \cdot \text{dir}_e - (M + \omega(e)) \cdot \text{color}_e \\
x_f &\geq \omega(e) + x_g - (M + \omega(e)) \cdot (1 - \text{dir}_e) - (M + \omega(e)) \cdot \text{color}_e \\
y_f &\geq \omega(e) + y_g - (M + \omega(e)) \cdot \text{dir}_e - (M + \omega(e)) \cdot (1 - \text{color}_e) \\
y_g &\geq \omega(e) + y_f - (M + \omega(e)) \cdot (1 - \text{dir}_e) - (M + \omega(e)) \cdot (1 - \text{color}_e) \\
x_f &\geq x_g - M \cdot (1 - \text{color}_e) \\
x_g &\geq x_f - M \cdot (1 - \text{color}_e) \\
y_f &\geq y_g - M \cdot \text{color}_e \\
y_g &\geq y_f - M \cdot \text{color}_e
\end{aligned} \tag{C8}$$

Ist beispielsweise  $\text{color}_e = 1$  und  $\text{dir}_e = 1$ , so werden die obigen Nebenbedingungen zu  $y_g \geq \omega(e) + y_f$ ,  $x_f = x_g$ ,  $x_g \geq x_f - 2M - \omega(e)$ ,  $x_f \geq x_g - M$ ,  $y_f \geq y_g - M$ ,  $y_f \geq y_g - M$ ,  $y_g \geq y_f - M$ . Die fünf letzten davon sind für alle  $x_f, x_g, y_f, y_g \in [0, M]$  erfüllt. Die restlichen drei Fälle ergeben sich analog. Dadurch lassen sich die Korrektheit und Vollständigkeit der Nebenbedingungen (C8) zeigen.

**Lemma 5.1.** *Sei  $(T_1, T_2)$  das durch die Werte der Variablen  $\text{color}_e$  und  $\text{dir}_e$ ,  $e \in E_0$  induzierte REL, und  $\Gamma$  eine gültige Zeichnung zu  $(T_1, T_2)$  mit der Höhe und Breite höchstens  $M$ . Dann induziert  $\Gamma$  eine Belegung der Variablen  $x_f, y_f$ ,  $f \in F_0$ , die die Nebenbedingungen (C8) erfüllt.*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Koordinaten der Ecken von  $\Gamma$  nichtnegativ. Für jede Facette  $h = (q, r, s) \in F_0$ ,  $q, r, s \in V$ , sei  $p_h$  der gemeinsame Punkt der Rechtecke  $R(q)$ ,  $R(r)$ ,  $R(s)$  in einem rechteckigen Dual zu  $(T_1, T_2)$ . Setze den Wert von  $x_h$  bzw.  $y_h$  als  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinate von dem Punkt  $p_h$  in  $\Gamma$ .

Betrachte eine Kante  $e = \{u, v\} \in E_0$  mit  $\text{default}(e) = u \rightarrow v$  und dem dazugehörigen Kontakt  $s(e)$  in  $\Gamma$ . Seien  $f, g \in F_0$  mit  $f = \text{left}(u \rightarrow v)$  und  $g = \text{right}(u \rightarrow v)$ . Sei zunächst  $s(e)$  horizontal, also  $\text{color}_e = 0$ . Gehört  $s(e)$  zum oberen Rand von  $R(u)$  und unteren Rand von  $R(v)$ , so ist  $u \rightarrow v \in T_1$ , also  $\text{dir}_e = 0$ . Ferner ist  $p_f$  der linke und  $p_g$  der rechte Endpunkt von  $s(e)$ . Es gilt also  $x_g \geq x_f + \omega(e)$ . Gehört hingegen  $s(e)$  zum unteren Rand von  $R(u)$  und oberen Rand von  $R(v)$ , so ist  $v \rightarrow u \in T_1$ , also  $\text{dir}_e = 1$ . In diesem Fall ist  $p_f$  der rechte und  $p_g$  der linke Endpunkt von  $s(e)$ . Es gilt also  $x_f \geq x_g + \omega(e)$ . In beiden Fällen ist  $y_f = y_g$ , und es gilt:

$$x_g \geq \omega(e) + x_f - (M + \omega(e)) \cdot \text{dir}_e, \quad x_f \geq \omega(e) + x_g - (M + \omega(e)) \cdot (1 - \text{dir}_e).$$

Analoges gilt, wenn  $s(e)$  vertikal ist. Fasst man alle möglichen Fälle zusammen, ergibt sich, dass für  $e$  alle Nebenbedingungen in (C8) erfüllt sind.  $\square$

**Definition 5.1.** Sei  $\Gamma_{\text{ILP}}(G)$  eine Zeichnung, die entsteht, indem man jeder Kante  $e \in E_0$  ein Segment  $s(e)$  mit Endpunkten  $(x_f, y_f)$  und  $(x_g, y_g)$  zuordnet, wobei  $f = \text{left}(\text{default}(e))$  und  $g = \text{right}(\text{default}(e))$  innere Facetten von  $G$  sind, die  $e$  gemeinsam haben.

**Lemma 5.2.** Sei  $(T_1, T_2)$  das durch die Werte der Variablen  $\text{color}_e$  und  $\text{dir}_e$ ,  $e \in E_0$  induzierte REL, und für jede innere Kante  $e \in E_0$  von  $G$  mit  $f = \text{left}(\text{default}(e))$ ,  $g = \text{right}(\text{default}(e))$ ,  $f, g \in F_0$ , seien die Nebenbedingungen (C8) erfüllt. Dann ist  $\Gamma_{\text{ILP}}(G)$  eine Zeichnung des rechteckigen Duals  $\mathcal{R}$  von  $G$  zu  $(T_1, T_2)$ , die die durch  $\omega$  vorgegebenen Mindestlängen der Kontakte einhält.

*Beweis.* Sei  $\bar{f} = \{f_1, \dots, f_k\}$  eine inklusionsmaximale Menge von Facetten in  $F_0$ , so dass  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , ausschließlich Kanten aus  $T_2$  gemeinsam haben. Nach (C8) sind alle Werte der Variablen  $x_{f_i}$  gleich. Definiere  $X(\bar{f}) = x_{f_i}$ . Dann entspricht jede solche Menge  $\bar{f}$  einer inneren Facette des Graphen  $G_1$  aus Abschnitt 3.2.2, die genau die Facetten  $f_1, \dots, f_k$  enthält.

Sei  $e = \{u, v\} \in E_0$ ,  $u \rightarrow v \in T_1$  und  $f_\ell, f_r \in F_0$  mit  $f_\ell = \text{left}(u \rightarrow v)$  und  $f_r = \text{right}(u \rightarrow v)$ . Ist  $\text{default}(e) = u \rightarrow v$ , so ist  $\text{dir}_e = 0$ . Ist hingegen  $\text{default}(e) = v \rightarrow u$ , so ist  $\text{dir}_e = 1$ . Da  $\text{color}_e = 0$ , folgt aus (C8) in beiden Fällen  $x_{f_r} \geq x_{f_\ell} + \omega(e)$ . Sei  $\Delta$  das maximale Gewicht  $\omega(e)$  einer äußeren Kante  $e \in E \setminus E_0$ . Wir setzen  $X(f_W) = -\Delta$  und  $X(f_E) = M + \Delta$ . Somit gilt für jede Kante  $\bar{f} \rightarrow \bar{g}$  von  $G_1^*$ :  $X(\bar{g}) \geq X(\bar{f}) + \omega(\bar{f} \rightarrow \bar{g})$ , und  $X$  ist eine gewichtete topologische Nummerierung auf  $G_1^*$ .

Analog induzieren die Werte der Variablen  $y_f$ ,  $f \in F_0$ , eine gewichtete topologische Nummerierung  $Y$  auf  $G_2^*$ . Mit  $X$  und  $Y$  konstruiert der erweiterte Algorithmus von He aus Abschnitt 3.2.4 eine gültige Zeichnung  $\Gamma$  des rechteckigen Duals  $\mathcal{R}$  zu  $(T_1, T_2)$ , so dass für jede Kante  $e \in E_0$  das Segment  $s(e)$  in  $\Gamma$  die Endpunkte  $(x_f, y_f)$  und  $(x_g, y_g)$  für  $f = \text{left}(\text{default}(e))$  und  $g = \text{right}(\text{default}(e))$  hat; siehe Lemma 3.12. Somit gilt  $\Gamma = \Gamma_{\text{ILP}}(G)$ .  $\square$

### 5.1.3 Zielfunktion

Mit den oben beschriebenen Variablen können verschiedene lineare Minimierungsaufgaben formuliert werden. Wir betrachten zuerst die Minimierung des Umfangs einer Zeichnung  $\Gamma$  über alle RELs. Sei  $f_1 \in F_0$  die Facette rechts von  $v_S \rightarrow v_W$  und  $f_2 \in F_0$  die Facette links von  $v_E \rightarrow v_N$ . Die Facetten  $f_1$  und  $f_2$  entsprechen der linken unteren bzw. der rechten oberen Ecke von  $\Gamma$ . Sei  $\mathbf{x}$  der Variablenvektor zum vorgestellten MILP. Die Zielfunktion für die Minimierung des Umfangs definieren wir wie folgt: Minimiere

$$\mu_{\text{Umfang}}(\mathbf{x}) = x_{f_2} - x_{f_1} + y_{f_2} - y_{f_1}$$

unter den oben angegebenen Nebenbedingungen.

Ähnlich kann die Länge der maximalen Seite von  $\Gamma$  minimiert werden. Wir führen dazu eine zusätzliche Variable  $\varepsilon_{\max}$  und zwei zusätzliche Nebenbedingungen ein und minimieren  $\mu_{\text{längere Seite}}(\mathbf{x})$  unter den obigen Nebenbedingungen:

$$\varepsilon_{\max} \geq x_{f_2} - x_{f_1}, \quad \varepsilon_{\max} \geq y_{f_2} - y_{f_1}, \quad \mu_{\text{längere Seite}}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\max}.$$

Die Minimierung der Gesamtabweichung  $\sum_{e \in E_0} |s(e)| - \omega(e)$  der Kontaktlängen  $|s(e)|$  von den vorgegebenen Mindestlängen  $\omega(e)$  ist äquivalent zur Minimierung der Gesamtkantenlänge  $\sum_{e \in E_0} |s(e)|$  von  $\Gamma$ . Nach Lemma 5.2 ist  $|s(e)| = |x_g - x_f| + |y_g - y_f|$ , wobei  $f, g \in F_0$  die beiden zu  $e$  inzidenten Facetten sind. Wir benutzen einen Standard-Trick aus der linearen Optimierung, um die Beträge in die Zielfunktion zu übernehmen: Für jedes  $e$  führen wir die zusätzlichen Variablen  $\delta_e^+, \delta_e^-, \varepsilon_e^+, \varepsilon_e^- \in [0, M]$  und die folgenden Nebenbedingungen ein:

$$x_g - x_f = \delta_e^+ - \delta_e^-, \quad y_g - y_f = \varepsilon_e^+ - \varepsilon_e^-.$$

Minimiert man die Zielfunktion

$$\mu_{\text{Fehler}}(\mathbf{x}) = \sum_{e \in E_0} \delta_e^+ + \delta_e^- + \varepsilon_e^+ + \varepsilon_e^-$$

unter den angegebenen Nebenbedingungen, so ist für jedes  $e \in E_0$  entweder  $\delta_e^+ = 0$  oder  $\delta_e^- = 0$  sowie entweder  $\varepsilon_e^+ = 0$  oder  $\varepsilon_e^- = 0$ . Somit ist  $|x_g - x_f| = \delta_e^+ - \delta_e^-$  und  $|y_g - y_f| = \varepsilon_e^+ - \varepsilon_e^-$ , und  $\mu_{\text{Fehler}}(\mathbf{x})$  gibt die Gesamtlänge der Kanten in  $\Gamma$  an.

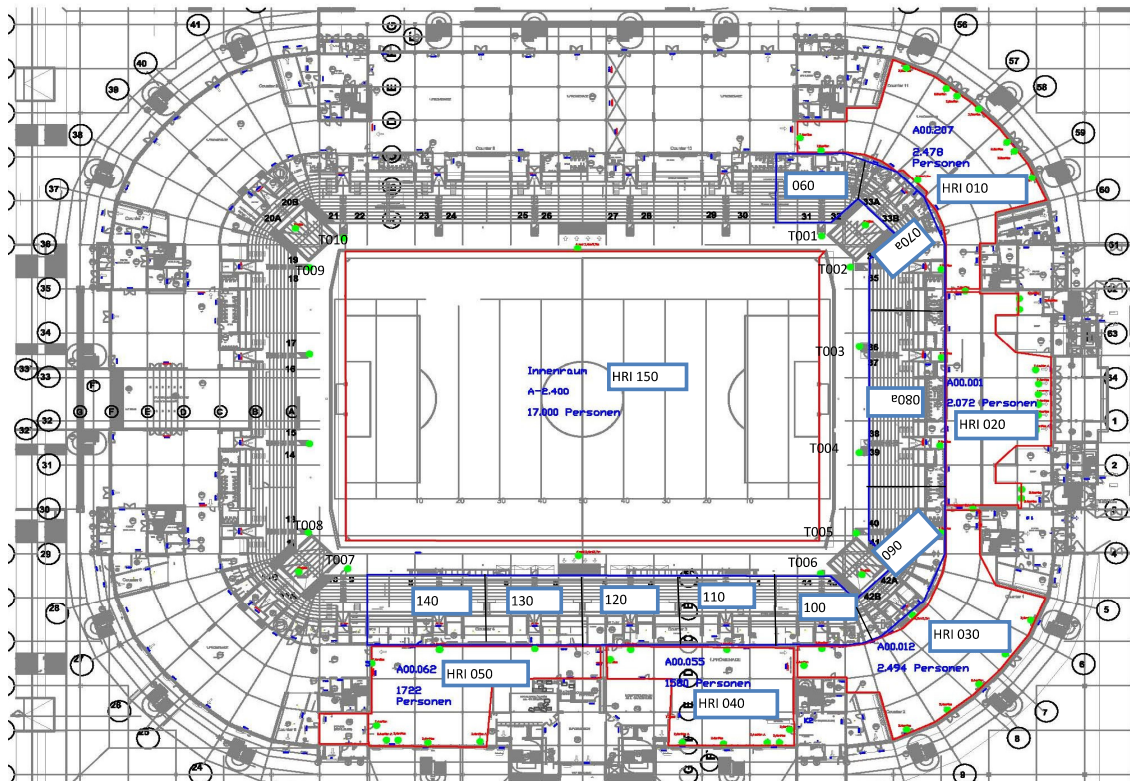
Die Anzahl der Variablen sowie der Nebenbedingungen im beschriebenen gemischt-ganzzahligen linearen Programm ist in  $O(n)$ ,  $n = |V|$ . Für die Minimierung von  $\mu_{\text{Fehler}}$  werden  $12|E_0| \leq 36n$  ganzzahlige und  $2|F_0| + 4|E_0| \leq 16n$  reellwertige Variablen benötigt. Dabei ist  $|F_0| = 2n - 6$  und  $|E_0| = 3n - 11$ . Es werden  $20|E_0| \leq 60n$  Nebenbedingungen verwendet, wobei die Gleichungen jeweils als eine Nebenbedingung gezählt und die oberen bzw. unteren Schranken der Variablen nicht als Nebenbedingungen mitgezählt wurden.

## 5.2 Experimente

Rechteckige Flächenkartogramme eignen sich gut zur Darstellung der Bevölkerung oder anderer Eigenschaften der einzelnen Gebiete auf einer Karte. Die darzustellenden Größen werden dabei als Knotengewichte des Kontaktgraphen gespeichert. Kontaktrepräsentationen mit vorgegebenen Kontaktlängen können hingegen zur Visualisierung der als Kanten Gewichte gespeicherten Wichtigkeit der einzelnen Verbindungen zwischen den benachbarten Gebieten oder Räumen benutzt werden. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, wie man rechteckige Duale mit vorgegebenen Mindestkontaktlängen zur schematischen Darstellung von Menschenströmen in Gebäuden verwenden kann.

### 5.2.1 Personenzählung im Forschungsprojekt „Hermes“

Das Karlsruher Unternehmen Vitracom AG beschäftigt sich unter anderem mit Personenzählung. Es war einer der 13 Partner im von dem Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderten Forschungsprojekt Hermes [HSB10]. Darunter waren das Jülich Supercomputing Centre, Universitäten, Hersteller-Firmen sowie die Düsseldorfer Polizei und Feuerwehr. Im Rahmen des Projekts wurde ein Evakuierungsassistenz-System für Großveranstaltungen entwickelt. Dieses soll die Betreiber der Veranstaltungen und die zuständigen Sicherheitskräfte in einem Krisenfall unterstützen. Um gefährliches Gedränge und Stausituationen zu vermeiden, schlägt es Richtungen zum Abfließen der Menschenmassen vor,



**Abbildung 5.1:** Lageplan Der Esprit-Arena in Düsseldorf. Die grünen Punkte markieren Durchgänge und Türen, an denen Sensoren für die Personenzählung installiert wurden. Bereitgestellt durch Vitracom AG.

die anhand einer Personenfluss-Simulation ermittelt werden. Als Eingangsdaten für die Berechnung werden dazu die Informationen benötigt, wie viele Menschen sich gerade in einem Bereich befinden und wie sie sich zwischen den Bereichen bewegen.

Das System wurde in der Esprit-Arena in Düsseldorf eingesetzt. Dazu wurde ein Teil des Tribünenbereichs, inklusive Promenaden- und Zugangsbereiche, mit etwa 100 Mono- und Stereo-Sensoren von Vitracom ausgestattet. Damit kann an den Messpunkten der Personenstrom exakt erfasst werden. Einmal pro Minute wird an den Türen und Durchgängen die Anzahl der Personen ermittelt, die in der letzten Minute die betrachtete Messstelle in die jeweilige Richtung passiert haben. Diese Personenzahlen werden wir durch Kontaktlängen in rechteckigen Dualen visualisieren.

### 5.2.2 Modellierung durch einen kantengewichteten PTP-Graph

Der Lageplan des Stadions sowie die Positionen der zum Zeitpunkt der Messungen bereits installierten Sensoren für die Personenzählung ist in Abbildung 5.1 zu sehen. Den im Bild rechten und unteren Teil des Stadions, der mit Sensoren ausgestattet wurde, werden wir mit einem Graphen modellieren, so dass die Räume durch die Knoten und die von den Sensoren überwachten Türen und Durchgänge, zu denen Messdaten vorlagen, durch die Kanten dargestellt sind. Dabei verschmelzen wir die meisten Mehrfachkanten (die Durchgänge von dem Feld in den Außenbereich modellieren wir zunächst einzeln). Der zugehörige Kontaktgraph ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Beachte, dass der Kontaktgraph zum vollständigen Lageplan keine planare Zeichnung hat, in der das Feld HRI150 von den Tribünen 140, 130, usw. umschlossen ist, denn die Tunnels führen von dem Feld in den Außenbereich des Stadions.

Wir ergänzen den Kontaktgraphen in Abbildung 5.2(a) zu einem PTP-Graphen  $G = (V, E)$ ; siehe Abbildung 5.2(b). Dazu unterteilen wir den Außenbereich in den südlichen

Teil  $v_S$ , den westlichen Teil  $v_W$ , den nördlichen Teil  $v_N$  und den östlichen Teil  $v_E$ . Die Durchgänge von dem Feld in den Außenbereich unter dem Raum HRI030, unter HRI050 und links von der Tribüne 140 fassen wir zur Kante von HRI150 nach  $v_W$  zusammen, und die drei anderen solchen Durchgänge (links oben, oben Mitte und rechts oben von HRI150 in Abbildung 5.1) zur Kante von HRI150 nach  $v_N$ . Wir triangulieren die inneren Facetten des Graphen durch das Hinzufügen von Kanten, die sich aus den Nachbarschaften der Räume im Lageplan ergeben.

Ein Datensatz aus den von Vitracom bereitgestellten Messdaten enthält für einen ganzen Tag die Anzahlen der Personen  $\pi_{t,d,\text{ein}}$  bzw.  $\pi_{t,d,\text{aus}}$ , die zu einer bis auf eine Minute genau gemessenen Zeit  $t$  beim Passieren eines bestimmten Durchgangs  $d$  von insgesamt 62 in die jeweilige Richtung (für festgelegte Richtungen „ein“ und „aus“) gezählt wurden. Um die Auslastung der einzelnen Kanten von  $G$  für den Zeitraum  $[t_1, t_2]$  (in Minuten) anhand dieser Daten schematisch darzustellen, setzen wir die Kantengewichte  $\omega$  des Graphen  $G$  wie folgt: Seien wieder  $E_0$  die inneren Kanten von  $G$ , und für  $e = \{u, v\} \in E_0$  sei  $D_e$  die Menge aller Durchgänge, die  $e$  zugewiesen wurden (für die Kanten, denen keine Durchgänge zugeordnet wurden, ist  $D_e = \emptyset$ ). Wir definieren  $\sigma(e)$  als die Gesamtzahl registrierter Überquerungen eines  $d \in D_e$  in der Zeit  $[t_1, t_2]$  in eine der beiden Richtungen:

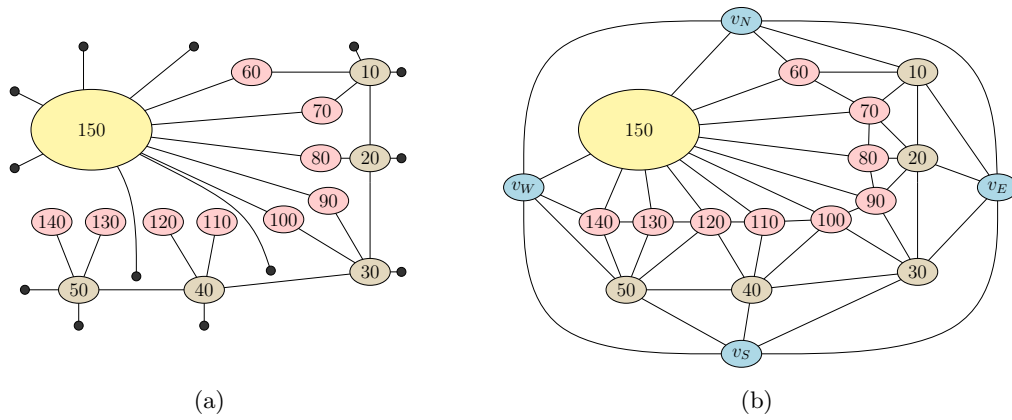
$$\sigma(e) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{d \in D_e} \pi_{t,d,\text{ein}} + \pi_{t,d,\text{aus}}.$$

Um die Lesbarkeit der zu konstruierenden Zeichnung  $\Gamma$  eines rechteckigen Duals  $\mathcal{R}$  von  $G$  zu verbessern, sollen alle Segmentlängen  $|s(e)|$  in  $\Gamma$ ,  $e \in E_0$ , eine gewisse Mindestlänge  $\Delta$  haben. Der Parameter  $\Gamma$  kann von dem Benutzer gewählt werden. In unseren Experimenten hat sich die Wahl  $\Delta = \max\{0,15 \max_{e \in E_0} \sigma(e), 1\}$  als gut geeignet erwiesen. Wir setzen also die Mindestlängen der Segmente  $|s(e)|$ ,  $e \in E_0$  auf  $\max\{\sigma(e), \Delta\}$ . In der resultierenden Zeichnung  $\Gamma$  muss also  $|s(e)| \geq \sigma(e)$  gelten. Um in  $\Gamma$  die tatsächlich gezählten Personenzahlen  $\sigma(e)$  zu veranschaulichen, wird bei jedem Segment  $s(e)$ ,  $e \in E_0$ , eine mittlere Teilstrecke der Länge  $\sigma(e)$  beispielsweise durch eine andere Farbe hervorgehoben. Wir möchten eine Zeichnung  $\Gamma$  konstruieren, in der die Segmentlängen  $|s(e)|$  möglichst nah an den darzustellenden Messdaten  $\sigma(e)$  sind, die Gesamtlänge der nicht hervorgehobenen Anteile der Segmente soll also minimiert werden. Wir lösen diese Aufgabe mit dem in Abschnitt 5.1 beschriebenen Ansatz der gemischt-ganzzahligen linearen Programmierung und wählen  $\mu_{\text{Fehler}}$  als die zu minimierende Zielfunktion.

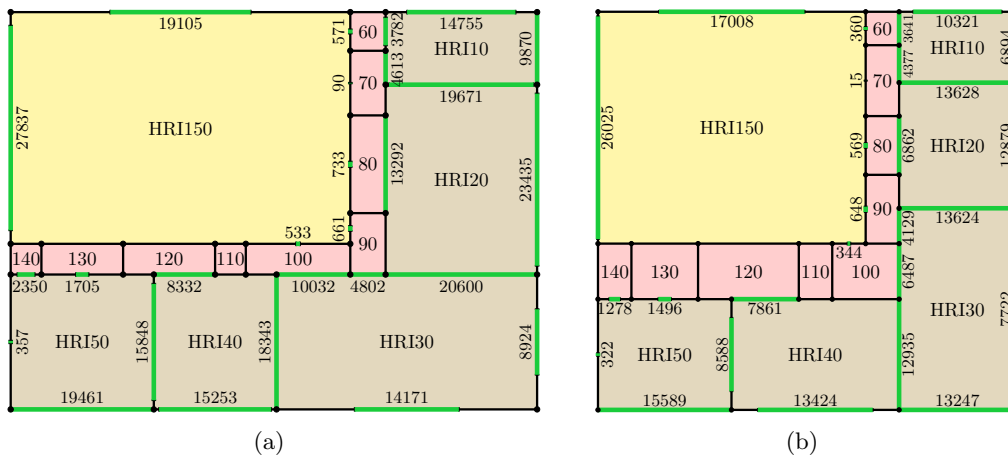
### 5.2.3 Diagramme

Wir erstellen Zeichnungen der rechteckigen Duale von  $G$  für unterschiedliche Arten von Veranstaltungen, die in der Düsseldorfer Esprit Arena stattgefunden haben. Zunächst betrachten wir den Personenfluss am ganzen Tag der Veranstaltung. Unter Personenfluss wird im Folgenden die Anzahl Personen verstanden, die innerhalb des Zeitraums  $[t_1, t_2]$  beim Wechsel zwischen zwei bestimmten Bereichen gezählt wurden. Damit die einzelnen Räume in einem rechteckigen Diagramm leichter zu erkennen sind, soll ihre Positionen etwa den im Lageplan in Abbildung 5.1 entsprechen. Dazu führen wir eine zusätzliche Einschränkung an die Orientierung der Kontakte ein: Der gemeinsame Abschnitt zwischen HRI150 und Tribüne 100 soll horizontal sein und der zwischen HRI150 und Tribüne 90 vertikal. Damit wird in einem Diagramm genauso wie im Lageplan die rechte untere Ecke des Feldes HRI150 durch die Tribünen 100 und 90 gebildet.

In Abbildung 5.3 sind die Diagramme für zwei große Konzerte zu sehen: den „Take That“ Open-Air Konzert am 25. Juli 2011 und den Auftritt von den „Black Eyed Peas“ am 28. Juni 2011, beide mit über 40.000 Zuschauern. Vergleicht man diese zwei Zeichnungen



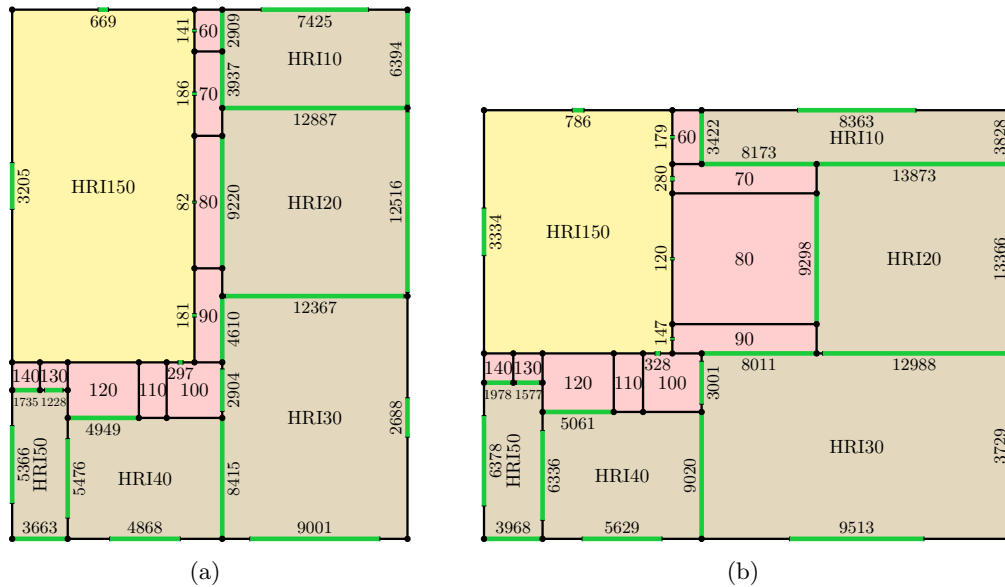
**Abbildung 5.2:** (a) Der Kontaktgraph zum rechten unteren Bereich der Arena, zu dem Messdaten vorliegen. Die Knoten sind mit ihren Hermes-Raum-Indizes (HRI) beschriftet. Das Spielfeld ist gelb, die Tribünen rosa und der Promenadenbereich hellbraun gefärbt. Die schwarzen Knoten stellen den Außenbereich dar. (b) Der zu einem PTP-Graphen ergänzte Kontaktgraph. Die vier äußeren Knoten sind blau gefärbt.



**Abbildung 5.3:** Personenfluss auf großen Konzerten. Die Messungen erfassen einen ganzen Tag. (a) Take That Open-Air Konzert am 25. Juli 2011, (b) Black Eyed Peas am 28. Juni 2011.

mit den Diagrammen für den Tag eines Fußball-Spiels in Abbildung 5.4, so kann man leicht die charakteristischen Unterschiede im Personenfluss erkennen: Im Gegensatz zu einem Konzert ist bei einem Fußball-Spiel der Fluss hauptsächlich zwischen dem Außenbereich und Promenadenbereich HRI10 bis HRI50, innerhalb des Promenadenbereichs und zwischen dem Promenadenbereich und den Zuschauerblöcken 60 bis 140 zu beobachten, während der direkte Fluss zwischen dem Außenbereich und dem Feld HRI150 erwartungsgemäß niedrig ist. Bei einem Konzert bewegen sich hingegen viele Besucher von dem Außenbereich in den Feld und umgekehrt.

Die beschriebenen Diagramme können auch zur Visualisierung der zeitlichen Änderungen im Personenfluss herangezogen werden. Die Diagramme in Abbildungen 5.5 und 5.6 sind für ein um 13:00 Uhr begonnenes Fußball-Spiel die Messzahlen zwischen 14:00 Uhr und 16:00 Uhr dargestellt. An den Diagrammen kann man das Ende der zweiten Halbzeit zwischen 14:40 und 15:00 Uhr gut erkennen: Zwischen 14:40 und 15:20 Uhr beobachtet man einen deutlichen Anstieg des Personenflusses zwischen den Tribünen und dem Promenadenbereich, innerhalb des Promenadenbereichs und zwischen dem Promenaden- und dem Außenbereich, als die Zuschauer das Stadion verlassen.



**Abbildung 5.4:** Personenfluss am Tag eines Fussball-Spiels. Der Fluss vom/zum Feld ist offensichtlich viel geringer als bei Open-Air Konzerten. (a) Fortuna Düsseldorf gegen FC Ingolstadt 04 am 5. August 2011, (b) Fortuna Düsseldorf gegen FC Energie Cottbus am 24. September 2011

### 5.2.4 Implementierung

Den Algorithmus zur Konstruktion der Diagramme aus dem vorherigen Abschnitt implementierten wir in der Programmiersprache Java. Der entsprechende PTP-Graph  $G$  wird im GraphMP-Format [BEL05], einem erweiterbaren XML-basierten Dateiformat zur Beschreibung von Graphen, an das Programm übergeben. Für die interne Darstellung von  $G$  benutzen wir eine Datenstruktur aus der freien Software-Bibliothek JUNG (Java Universal Network/Graph Framework) [jun]. Wir erstellen unsere eigenen Klassen für die Knoten, (Halb-)Kanten und Facetten und erweitern die Datenstruktur zu einer doppelt verketteten Kantenliste (DCEL) [BCKO08, Abschnitt 2.2] für die Repräsentation der Einbettung von  $G$ . In einer weiteren XML-Datei speichern wir die Zuordnung der Türen zu den Kanten von  $G$ . Die Messdaten bestehen aus zwei Tabellen, die für die Zeit  $t = 00:00, \dots, 23:59$  und die Türnummer  $d$  die Anzahl  $\pi_{t,d,\text{ein}}$  bzw.  $\pi_{t,d,\text{aus}}$  der gezählten Durchquerungen von  $d$  im Zeitraum  $[t, t + 1]$  in die jeweilige Richtung angeben. Für einen gewählten Zeitraum  $[t_1, t_2]$  berechnen wir die Personenzahlen  $\sigma(e)$  und die Kantengewichte  $\omega(e)$ ,  $e \in E_0$ , wie oben beschrieben.

Zum Erstellen und Lösen des MILP benutzen wir den Optimierer Gurobi [Gur12] und das zugehörige Java-Interface. Wir iterieren über die Kanten und Knoten von  $G$  und erstellen die Variablen, Nebenbedingungen und Zielfunktion  $\mu_{\text{Fehler}}$  wie in Abschnitt 5.1 beschrieben. Für den Graphen in Abbildung 5.2 dauert die Optimierung weniger als 0.1 Sekunde auf einem Intel Core i5 Prozessor. Anhand der Lösung des MILP wird direkt die zugehörige Zeichnung  $\Gamma$  erstellt. Diese kann mit den Visualisierungsmitteln von JUNG dargestellt werden. Zusätzlich haben wir einen Exporter in das XML-basierte Ipe-Format [ipe] implementiert, das eine benutzerfreundliche Nachbearbeitung des Diagramms mit dem Ipe-Editor erlaubt.





**Abbildung 5.5:** Personenfluss am Ende eines Fussball-Spiels, 24. September 2011, Spielbeginn: 13:00. Die Diagramme wurden auf eine etwa gleiche Größe skaliert.



Abbildung 5.6: Maßstabsgetreue Darstellung der Diagramme aus Abbildung 5.5.

## 6. Einige Spezialfälle von Kontaktrepräsentationen

In diesem Kapitel untersuchen wir einige Spezialfälle von löcherfreien Kontaktrepräsentationen für einen gegebenen planaren innentriangulierten Graph  $G$ . In Abschnitt 6.1 betrachten wir rechteckige Duale, in denen für ein  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ , alle inneren Rechtecke als  $1 \times p$  bzw.  $p \times 1$ -Rechtecke gezeichnet werden sollen.

### 6.1 Rechteckige Duale aus identischen Rechtecken

In diesem Abschnitt sei ein PTP-Graph  $G = (V, E)$  mit den vier ausgezeichneten äußeren Knoten  $v_S, v_W, v_N, v_E$  und der entsprechenden eindeutigen planaren Einbettung gegeben. Sei  $V_0 = V \setminus \{v_S, v_W, v_N, v_E\}$  die Menge der inneren Knoten von  $G$ . Für einen Parameter  $p \in \mathbb{N}$  mit  $p \geq 2$  entscheide, ob zu  $G$  ein rechteckiges Dual  $\mathcal{R} = \{R(v) \mid v \in V\}$  und einer Zeichnung  $\Gamma$  existiert, in der für jedes  $v \in V_0$  das Rechteck  $R(v)$  entweder mit Breite  $p$  und Höhe 1 oder umgekehrt gezeichnet ist. Sei  $\mathcal{J}_p$  die Menge von PTP-Graphen, die für ein festes  $p$  eine solche Zeichnung besitzen. Im positiven Fall schreiben wir also  $G \in \mathcal{J}_p$ . Ferner sei  $R_I$  das Rechteck begrenzt von den vier äußeren Rechtecken  $R(v_S), R(v_W), R(v_N), R(v_E)$  in einem rechteckigen Dual von  $G$ .

Auf den ersten Blick weist das Problem, für einen PTP-Graph  $G$  zu entscheiden, ob  $G \in \mathcal{J}_p$ , einige Ähnlichkeiten zu dem Packungsproblem identischer Rechtecken innerhalb eines Rechtecks auf; siehe etwa die Arbeit von Birgin et al. [BLM10] für einen Überblick. Allerdings spielen bei den Packungsproblemen die Adjazenzen zwischen den einzelnen Rechtecken keine Rolle, und außerdem müssen die entstehenden Layouts nicht löcherfrei sein.

**Bemerkung 6.1.** *Gilt  $G \in \mathcal{J}_p$  und hat die entsprechende erfüllende Zeichnung  $\Gamma$  die Höhe und Breite mindestens  $p$ , so gibt es in  $\Gamma$  eine Gruppe bestehend aus  $p$  Rechtecken, die paarweise über gemeinsame lange Seiten der Länge  $p$  benachbart sind.*

*Beweis.* Fülle das Rechteck  $R_I$  beliebig mit  $p \times 1$ - bzw.  $1 \times p$ -Rechtecken beginnend mit der untersten Zeile. Existiert in der ersten Zeile eine Gruppe von  $p$  paarweise benachbarten vertikalen Rechtecken, gilt die Aussage der Bemerkung. Sonst müssen einige Rechtecke horizontal eingefügt werden. Dann gibt es in der ersten Zeile eine U-Lücke der Breite  $p \cdot m_1$  und Höhe mindestens  $p$ ,  $m_1 \in \mathbb{N}$ , deren unterste Zeile nur aus horizontalen Rechtecken besteht und deren linker bzw. rechter Rand jeweils durch  $R(v_W), R(v_E)$  oder ein vertikales Rechteck gebildet ist (blau in Abbildung 6.1(a)).

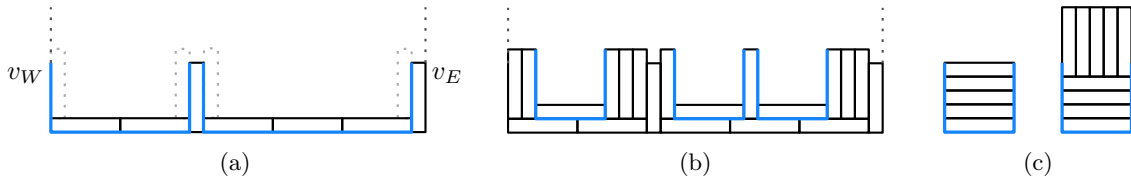
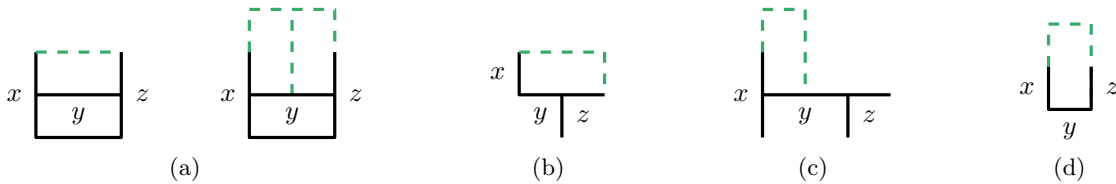


Abbildung 6.1: Skizze zu Bemerkung 6.1.

Abbildung 6.2: Möglichkeiten, ein neues  $1 \times 2$ - bzw.  $2 \times 1$ -Rechteck (grün gestrichelt) einzufügen.

Ist  $m_1 > 1$ , so müssen in die linke bzw. rechte untere Ecke dieser Lücke vertikale Rechtecke eingefügt werden (sonst treffen sich vier Rechtecke in einem Punkt). Dazwischen müssen einige horizontale Rechtecke eingefügt werden. Somit muss es in der zweiten Zeile von  $R_I$  eine ähnliche Lücke mit Breite  $p \cdot m_2$  und Höhe mindestens  $p$  geben,  $m_2 < m_1$ , usw. Man beachte, dass dabei die vertikalen Ränder der Lücken nicht wiederverwendet werden.

Irgendwann entsteht also eine Lücke mit Breite und Höhe  $p$ , deren linker bzw. rechter Rand jeweils durch  $R(v_W)$ ,  $R(v_E)$  oder ein vertikales Rechteck gebildet ist; siehe Abbildung 6.1(b). Beim Füllen dieser Lücke entsteht notwendigerweise eine Gruppe aus  $p$  entweder vertikalen oder horizontalen Rechtecken, die paarweise über gemeinsame lange Seiten der Länge  $p$  benachbart sind; siehe Abbildung 6.1(c).  $\square$

Im Folgenden werden wir den Fall  $p = 2$  genauer untersuchen.

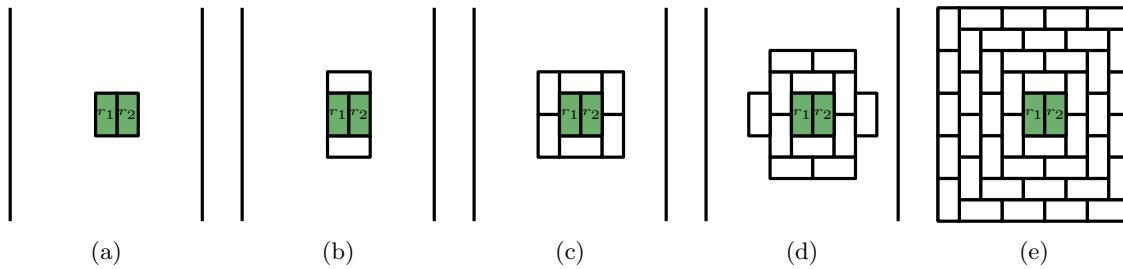
### 6.1.1 Rechtecke der Größe $1 \times 2$

Betrachte zuerst folgendes Problem: Gegeben sei ein Rechteck  $R_0$  mit dem Flächeninhalt  $2n$  und ganzzahligen Höhe  $h$  und Breite  $w$ . Finde alle Möglichkeiten,  $R_0$  mit  $n$  Rechtecken der Größe  $1 \times 2$  oder  $2 \times 1$  zu füllen, sodass keine vier Rechtecke einen gemeinsamen Punkt haben.

Ist die unterste Zeile von  $R_0$  vollständig ausgefüllt, so kann der Rest bis auf die Alternative (a) in Abbildung 6.2 eindeutig ausgefüllt werden: Bis auf diesen Fall existiert genau eine Möglichkeit, ein neues  $1 \times 2$ - bzw.  $2 \times 1$ -Rechteck einzufügen, siehe Abbildung 6.2(b), (c), (d). Soll ferner  $R_0$  vollständig ausgefüllt sein, so muss es in  $R_0$  nach Bemerkung 6.1 zwei Rechtecke mit einer gemeinsamen langen Seite geben. Das „Umschließen“ eines solchen Paares  $r_1, r_2$  mit anderen Rechtecken erzeugt ein eindeutiges Muster, das sich zu den Rändern von  $R_0$  ausbreitet; siehe Abbildung 6.3.

**Lemma 6.2.** *Betrachte ein Paar  $r_1, r_2$  von Rechtecken in  $R_0$ , die eine gemeinsame lange Seite haben. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $w \leq h$ . Die Abstände dieses Paares vom linken bzw. rechten Rand von  $R_0$  unterscheiden sich höchstens um eins.*

*Beweis.* Angenommen, dies ist nicht notwendigerweise der Fall. Betrachte die Abbildung 6.4(a). Wir stellen uns vor,  $R_0$  sei ausgehend von dem Paar  $r_1, r_2$  unendlich weit nach oben und nach unten ausgedehnt. Das blaue Muster, das ausgehend von  $r_1$  und  $r_2$  zum linken bzw. rechten Rand von  $R_0$  konstruiert wird, ist eindeutig. Beim Ausfüllen von



**Abbildung 6.3:** Ein Paar Rechtecke mit einer gemeinsamen langen Seite erzeugt ein eindeutiges Muster, das sich zu den Rändern von  $R_0$  ausbreitet.

$R_0$  ist die Option in Abbildung 6.2(a) der einzige Freiheitsgrad: Beim Einfügen von  $r_3$  zwischen  $x_1, y_1$  und  $z_1$  in Abbildung 6.4(a) wurde die linke Option und beim Einfügen von  $r_4$  und  $r_5$  zwischen  $x_2, y_2$  und  $z_2$  die rechte Option in Abbildung 6.2(a) angewendet. In beiden Fällen entstehen wieder Paare von Rechtecken mit einer gemeinsamen langen Seite ( $y_1$  und  $r_3$  bzw.  $r_4$  und  $r_5$ ), deren Abstände zum linken bzw. rechten Rand von  $R_0$  sich um mehr als eins unterscheiden. Es entstehen also offensichtlich Muster, die nicht durch eine horizontale Gerade separiert werden können. Folglich kann bei der angenommenen Platzierung von dem Paar  $r_1, r_2$  kein endliches Rechteck vollständig gefüllt werden.  $\square$

**Korollar 6.3.** *Ein vollständig ausgefülltes Rechteck  $R_0$  hat immer die Gestalt wie in Abbildung 6.2(b), also eine einzige Reihe der „Kreise“ um Paare von Rechtecken mit einer gemeinsamen langen Seite (grün).*

*Beweis.* Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $w \leq h$ . Nach Bemerkung 6.1 und 6.2 muss man in  $R_0$  ein Paar Rechtecke  $r_1, r_2$  mit einer gemeinsamen langen Seite einfügen, sodass der Unterschied der Abstände von  $r_1$  bzw.  $r_2$  zum linken bzw. rechten Rand von  $R_0$  höchstens eins beträgt. Dies induziert einen „Kreis“, also ein Muster bestehend aus  $r_1, r_2$ , einer Menge konzentrischer rechteckiger Ringe und gegebenenfalls einem Halbring um  $r_1$  und  $r_2$  wie in Abbildung 6.3(e). Dieses Muster  $K$  streckt sich bis zur linken und rechten Seite von  $R_0$  und unterteilt  $R_0$  in maximal zwei Rechtecke  $R_1$  (oberhalb von  $K$ ) und  $R_2$  (unterhalb von  $K$ ). Die untere Zeile von  $R_1$  (bzw. die obere Zeile von  $R_2$ ) kann nun eindeutig gefüllt werden, sodass alle Rechtecke außer eventuell dem linken oder dem rechten horizontal ausgerichtet sind. Dies induziert ähnliche Kreismuster in  $R_1$  bzw.  $R_2$ , usw.  $\square$

**Theorem 6.4.** *Sei ein PTP-Graph  $G = (V, E)$  gegeben. Man kann in  $O(|V|)$  Zeit entscheiden, ob  $G \in \mathcal{J}_2$ .*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe  $v_S$  nicht mehr Nachbarn als  $v_W$  (sonst führe die gleiche Argumentation ausgehend von  $v_W$  durch). Angenommen, es gilt  $G \in \mathcal{J}_2$ . Sei  $\mathcal{R}$  das entsprechende rechteckige Dual, zu dem eine erfüllende Zeichnung  $\Gamma$  existiert. Nach Korollar 6.3 müssen die Rechtecke zu allen inneren Nachbarknoten von  $v_S$ , außer eventuell zum linken und rechten, in  $\Gamma$  horizontal orientiert sein. Insgesamt ergeben sich also nur vier Möglichkeiten für die Belegung der untersten Zeile des Rechtecks  $R_I$ , das alle inneren Rechtecke enthält.

Für jede dieser Belegungen ist  $w$  und  $h$  festgelegt, und es existiert höchstens eine Möglichkeit,  $R_I$  zu füllen: Es gibt immer eine Möglichkeit, ein Rechteck eindeutig einzufügen (Die zu wählende Option in Abbildung 6.2(a) hängt davon ab, ob  $y$  einen oder zwei noch nicht eingefügte Nachbarn hat). Das Einfügen erfolgt ähnlich wie in Abschnitt 3.1, man

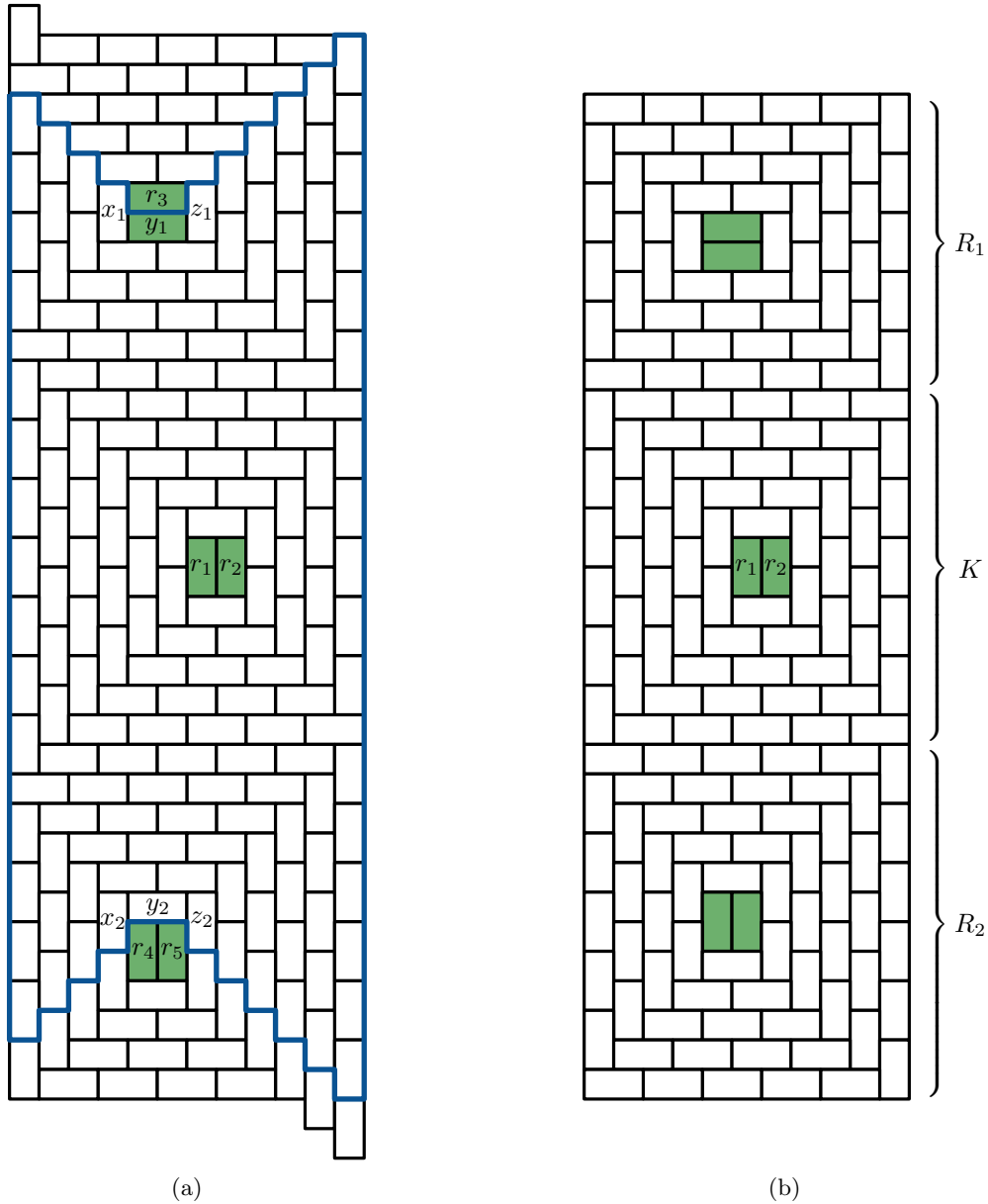


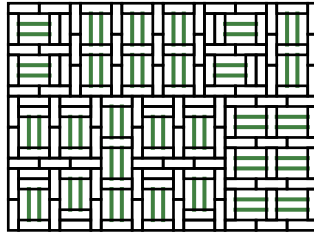
Abbildung 6.4: Illustration zu Bemerkung 6.2.

fügt also in jedem Schritt ein Rechteck in eine U-Lücke ein und aktualisiert die Liste der U-Lücken, indem man die entsprechenden  $\perp$ - bzw.  $\lrcorner$ -Markierungen verwaltet. Außerdem muss man in jedem Schritt prüfen, ob die neu entstehenden Kontakte den tatsächlichen Kanten in  $G$  entsprechen. Das Einfügen eines Rechtecks  $R(v)$  für ein  $v \in V_0$  ist in  $O(\deg(v))$  Zeit möglich (oder in  $O(|V|)$ , aber dann terminiert der Algorithmus), und somit ist der Gesamtaufwand in  $O(|E|) = O(|V|)$  Zeit.

Wurde nach dem Einfügen aller inneren Rechtecke  $R_I$  erfolgreich ausgefüllt, hat man ein Zertifikat für  $G \in \mathcal{J}_2$  konstruiert. Ist hingegen die Konstruktion für alle vier Belegungen der untersten Zeile von  $R_I$  fehlgeschlagen, existiert für  $G$  nach Korollar 6.3 keine passende Zeichnung, und somit gilt  $G \notin \mathcal{J}_2$ .  $\square$

### 6.1.2 Rechtecke der Größe $1 \times p$

Für eine fest gewählte natürliche Zahl  $p \geq 2$  und einen gegebenen PTP-Graphen  $G = (V, E)$  untersuchen wir nun das Entscheidungsproblem, ob  $G \in \mathcal{J}_p$  gilt.



**Abbildung 6.5:** Ein Layout aus  $1 \times 3$ - und  $3 \times 1$ -Rechtecken.

Für  $k > 2$  haben entsprechende Zeichnungen rechteckiger Duale nicht notwendigerweise die Form wie in Abbildung 6.4, siehe z.B. Abbildung 6.5. Es ist jedoch möglich, das obige Entscheidungsproblem effizient zu lösen.

Für den linken inneren Nachbarn  $v \in V_0$  von  $v_S$  kann das Rechteck  $R(v)$  mit Dimensionen 1 und  $p$  entweder horizontal oder vertikal ausgerichtet sein. Wir zeigen, dass es für jede von diesen Möglichkeiten höchstens eine Möglichkeit gibt, die unterste Zeile von  $R_I$  mit Rechtecken  $R(v)$ ,  $v \in V_0$ , unter Einhaltung der durch  $G$  vorgegebenen Adjazenzen zu füllen.

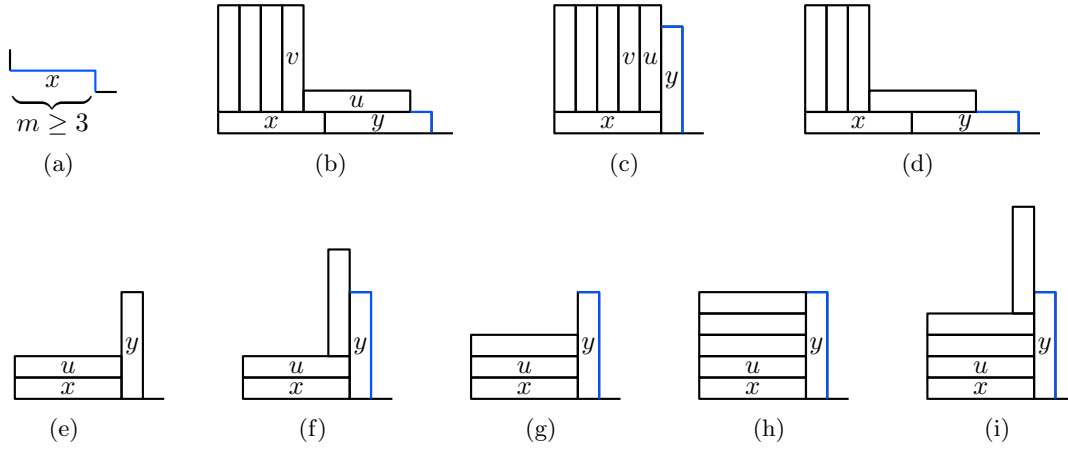
**Lemma 6.5.** *Die unterste Zeile von  $R_I$  werde von links nach rechts gefüllt. Man kann immer ein oder mehrere Rechtecke auf eine eindeutige Weise einfügen, sodass entweder die unterste Zeile komplett ausgefüllt ist, oder für das rechte Ende eine der vier Möglichkeiten in Abbildungen 6.6(a), 6.7(a), 6.8(a) oder 6.9(a) entsteht.*

*Beweis.* Sei  $\text{fdeg}(v)$  die Anzahl noch nicht eingefügter Nachbarn von  $R(v)$ . Die Behauptung stimmt, wenn nur das linke unterste Rechteck eingefügt wurde: Es gilt der Fall 1 (Abbildung 6.6(a)) oder Fall 3 (Abbildung 6.8(d)). Angenommen, die Behauptung gilt vor dem Einfügen von  $R(y)$  rechts von  $R(x)$ , wobei  $x$  und  $y$  Nachbarn von  $v_S$  sind. Sei  $u \neq v_S$  der gemeinsame, noch nicht eingefügte Nachbar von  $x$  und  $y$ , und  $v$  der gemeinsame, noch nicht eingefügte Nachbar von  $x$  und  $u$ .

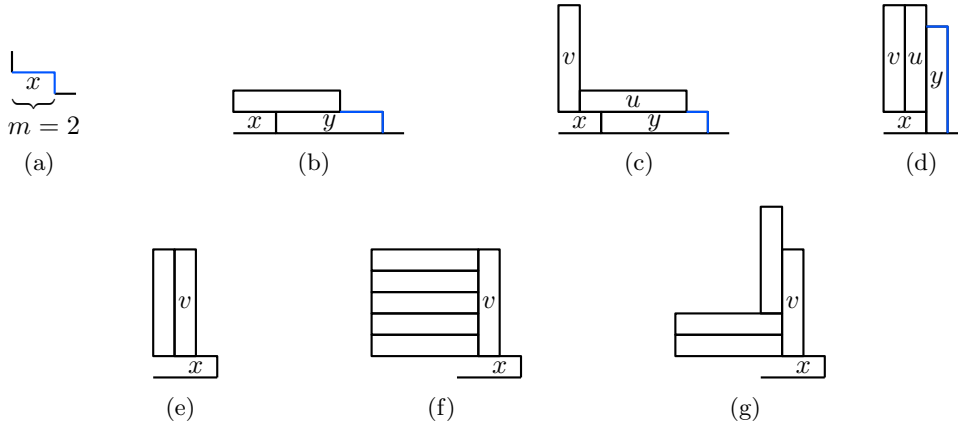
Abbildungen 6.6, 6.7, 6.8 und 6.9 zeigen die Fallunterscheidung nach der rechten Seite der eingefügten Rechtecke. In allen Fällen kann man nach dem eindeutigen Einfügen von  $R(y)$ , den restlichen Nachbarn von  $R(x)$  und gegebenenfalls weiteren Rechtecken die gewünschte Form der rechten Seite erreichen. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $p \geq 3$ . Anhand von Abbildung 6.4(b) sieht man leicht, dass die Behauptung auch für  $p = 2$  gilt.

**Fall 1:** Die rechte Seite habe die Form wie in Abbildung 6.6(a), sie bestehe also aus einem horizontal ausgerichteten Rechteck  $R(x)$ , dessen linke und untere Seite sowie eventuell ein linker Teil der oberen Seite verdeckt sind, und der obere rechte Abschnitt der Breite  $m \geq 3$  noch frei ist. Außerdem bilde die obere Seite von  $R(x)$  den unteren Teil eines  $\perp$ -Knicks. Sei zuerst  $\text{fdeg}(x) = m + 1$ . Dann müssen die  $m - 1$  linken Rechtecke vertikal eingefügt werden (das rechteste davon sei  $R(v)$ ), und für die restlichen zwei Rechtecke  $R(u)$  und  $R(y)$  gibt es zwei Möglichkeiten: Ist  $\text{deg}(v) > 4$ , so müssen  $R(u)$  und  $R(y)$  horizontal orientiert sein; siehe Abbildung 6.6(b). Es entsteht der Fall 4 (Abbildung 6.9(a)). Ist  $\text{deg}(v) = 4$ , so müssen  $R(u)$  und  $R(y)$  wie in Abbildung 6.6(c) vertikal orientiert sein. Es entsteht der Fall 3 (Abbildung 6.8(d)). Ist  $\text{fdeg}(x) \leq m$ , so müssen alle noch nicht eingefügten Nachbarn von  $R(x)$  vertikal eingefügt werden, außer den zwei rechtesten, die horizontal eingefügt werden müssen; siehe Abbildung 6.6(d). Es entsteht der Fall 1 (Abbildung 6.6(a)) oder Fall 2 (Abbildung 6.7(a)).

Angenommen, es ist  $\text{fdeg}(x) = 2$  und  $m = p$ . Dann muss  $R(u)$  horizontal und  $R(y)$  vertikal eingefügt werden; siehe Abbildung 6.6(e). Damit die rechte Seite wieder die Form wie in einem der Fälle 1 bis 4 hat, muss noch die linke Seite von  $R(y)$  vollständig verdeckt werden.



**Abbildung 6.6:** (a) Fall 1 aus Lemma 6.5. (b)  $\text{fdeg}(x) = m + 1$ ,  $\text{deg}(v) > 4$ . Es entsteht der Fall 4 (Abbildung 6.9(a)). (c)  $\text{fdeg}(x) = m + 1$ ,  $\text{deg}(v) = 4$ . Es entsteht der Fall 3 (Abbildung 6.8(d)). (d)  $\text{fdeg}(x) \leq m$ . Es entsteht der Fall 1 (Abbildung 6.6(a)) oder Fall 2 (Abbildung 6.7(a)). (e)  $\text{fdeg}(x) = 2$ ,  $m = p$ . (f), (g): Verdecke die linke Seite von  $R(y)$ . (h), (i): Es entsteht der Fall 3 (Abbildung 6.8(a), 6.8(d)).

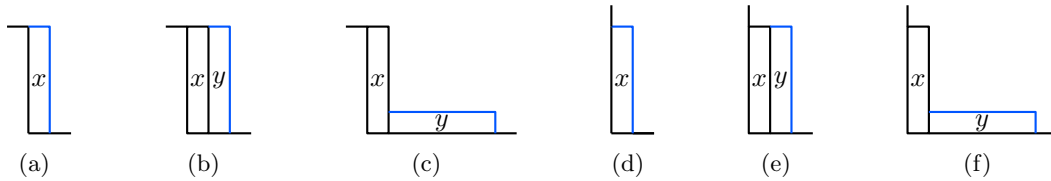


**Abbildung 6.7:** (a) Fall 2 aus Lemma 6.5. (b)  $\text{fdeg}(x) = 2$ . Es entsteht wieder der Fall 2. (c), (d)  $\text{fdeg}(x) = 3$ . (e), (f), (g): Verdecke die linke Seite von  $R(v)$ . Ist danach  $\text{fdeg}(v) > 2$ , wähle (c). Es entsteht der Fall 4 (Abbildung 6.9(a)). Ist  $\text{fdeg}(v) = 2$ , wähle (d). Es entsteht der Fall 3 (Abbildung 6.8(d)).

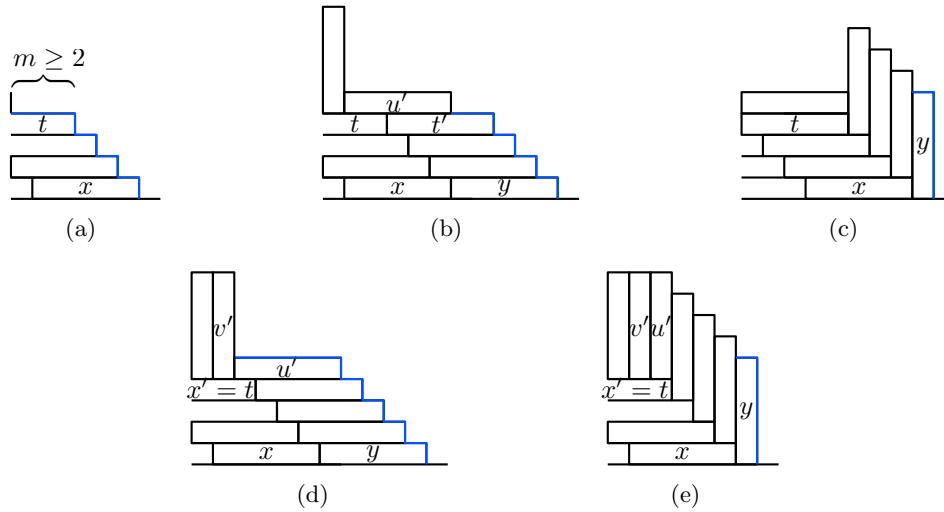
Dazu fügen wir ein Rechteck in die Ecke gebildet von  $R(u)$  und  $R(y)$  ein: horizontal, falls  $\text{deg}(u) = 4$ , und vertikal sonst; siehe Abbildungen 6.6(f) und 6.6(g). Auf die gleiche Weise fügt man weitere Rechtecke ein, bis die linke Seite von  $R(y)$  wie etwa in Abbildungen 6.6(h) und 6.6(i) vollständig verdeckt ist. Es entsteht der Fall 3 (Abbildung 6.8(a), 6.8(d)).

**Fall 2:** Die rechte Seite habe nun eine ähnliche Form wie im vorherigen Fall, und sei nun  $m = 2$ ; siehe Abbildung 6.7(a). Ist  $\text{fdeg}(x) = 2$ , so füge zwei horizontale Rechtecke wie in Abbildung 6.7(b) ein. Es entsteht wieder der Fall 2. Ist  $\text{fdeg}(x) = 3$ , so muss das linke Rechteck  $R(v)$  vertikal eingefügt werden, und für die anderen zwei einzufügenden Rechtecke  $R(u)$  und  $R(y)$  gibt es zwei Möglichkeiten; siehe Abbildung 6.7(c) und 6.7(d). Um zwischen diesen entscheiden zu können, muss man zuerst die linke Seite von  $R(v)$  vollständig verdecken. Dies geschieht analog zu Fall 1 durch das Einfügen der Rechtecke in die Ecke gebildet von  $R(x)$  und  $R(v)$ . Sei die linke Seite von  $R(v)$  vollständig verdeckt wie etwa in Abbildungen 6.7(e), 6.7(f) oder 6.7(g). Ist nun  $\text{fdeg}(v) > 2$ , wähle die Möglichkeit in der Abbildung 6.7(c). Es entsteht der Fall 4 (Abbildung 6.9(a)). Ist hingegen  $\text{fdeg}(v) = 2$ , so wähle die in Abbildung 6.7(d). Es entsteht der Fall 3 (Abbildung 6.8(d)).





**Abbildung 6.8:** (a), (d): Fall 3 aus Lemma 6.5. (b), (e):  $\text{fdeg}(x) = 2$ . Es entsteht wieder der Fall 3. (c), (f):  $\text{fdeg}(x) > 2$ . Es entsteht der Fall 1 (Abbildung 6.6(a)).



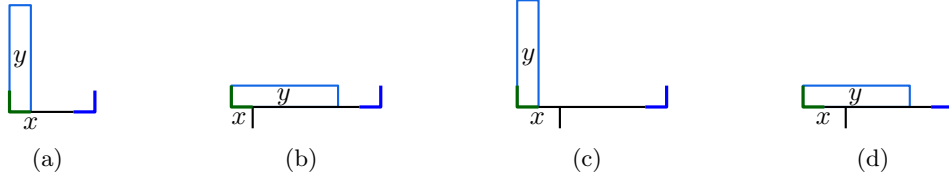
**Abbildung 6.9:** (a) Fall 4 aus Lemma 6.5. (b)  $2 \leq \text{fdeg}(t) \leq m$ , zusätzlich  $m < p$  oder  $\text{fdeg}(t) > 2$ . Es entsteht wieder der Fall 4. (c)  $\text{fdeg}(t) = 2$ ,  $m = p$ . Es entsteht der Fall 3 (Abbildung 6.8(d)). (d), (e):  $\text{fdeg}(t) = m + 1$ . Auswahl je nach  $\text{fdeg}(v')$  analog zu Fall 1 oder Fall 2. Es entsteht der Fall 4 oder Fall 3; siehe (d) bzw. (e).

**Fall 3:** Die rechte Seite bestehe aus einem vertikal ausgerichteten Rechteck  $R(x)$ , dessen linke Seite vollständig verdeckt ist; siehe Abbildungen 6.8(a) und 6.8(d). Ist  $\text{fdeg}(x) = 2$ , füge  $R(y)$  vertikal ein wie in Abbildungen 6.8(b) und 6.8(e). Es entsteht wieder der Fall 3. Ist hingegen  $\text{fdeg}(x) \geq 3$ , so muss  $R(y)$  wie in Abbildungen 6.8(c) und 6.8(f) horizontal eingefügt werden. Dadurch entsteht der Fall 1 (Abbildung 6.6(a)).

**Fall 4:** Die rechte Seite habe die Form einer Treppe mit der obersten Stufe der Breite  $m \geq 2$  gebildet von einem horizontalen Rechteck  $R(t)$  und den unteren Stufen der Breite 1; siehe Abbildung 6.9(a). Dies kann als eine Verallgemeinerung der Fälle 1 und 2 aufgefasst werden. Ist  $2 \leq \text{fdeg}(t) \leq m$  und zusätzlich  $m < p$  oder  $\text{fdeg}(t) > 2$ , so muss der rechte obere Nachbar  $R(u')$  von  $R(t)$  horizontal eingefügt werden, und man kann neue Rechtecke eindeutig einfügen, sodass es wieder eine solche Treppe entsteht; siehe Abbildung 6.9(b). Ist  $\text{fdeg}(t) = 2$  und  $m = p$ , so hat  $R(t)$  genau einen oberen Nachbar. Damit müssen auf die unteren Treppenstufen vertikale Rechtecke eingefügt werden; siehe Abbildung 6.9(c). Es entsteht der Fall 3 (Abbildung 6.8(d)). Betrachte schließlich den Fall  $\text{fdeg}(t) = m + 1$ . Es entstehen zwei Möglichkeiten wie in Abbildungen 6.9(c) und 6.9(d). Die Auswahl erfolgt eindeutig je nach  $\text{fdeg}(v')$  analog zu Fall 1 (falls  $m \geq 3$ ) oder Fall 2 (falls  $m = 2$ ). Es entsteht der Fall 4 bzw. Fall 3.

Somit folgt die Behauptung mit vollständiger Induktion. □

Nachdem man die unterste Zeile von  $R$  ausgefüllt hat, bleibt höchstens eine Möglichkeit, den Rest von  $R$  unter Berücksichtigung der Adjazenzen von  $G$  auszufüllen: Die Lücken der Breite  $< p$  werden mit vertikalen Rechtecken gefüllt; siehe Abbildung 6.10(a). In eine



**Abbildung 6.10:** Einfügen eines Rechtecks bei ausgefüllter unterer Zeile.

U-Lücke der Breite  $\geq p$  kann man links ein neues Rechteck  $R(y)$  eindeutig einfügen: Das Rechteck  $R(x)$  bilde die untere linke Seite der U-Lücke. Hat der freie obere Rand von  $R(x)$  die Breite 1 wie in Abbildung 6.10(b), muss  $R(y)$  horizontal eingefügt werden. Ist sie mindestens 2, so hängt die Orientierung von  $R(y)$  von  $\text{fdeg}(x)$  ab: Ist  $\text{fdeg}(x) \geq 2$ , so muss  $R(y)$  vertikal eingefügt werden; siehe Abbildung 6.10(c). Ist hingegen  $\text{fdeg}(x) = 1$ , muss  $R(y)$  horizontal eingefügt werden, da es die freie Seite von  $R(x)$  vollständig verdecken muss; siehe Abbildung 6.10(d).

**Theorem 6.6.** *Sei ein PTP-Graph  $G = (V, E)$  gegeben, und sei  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ . Man kann in  $O(|V|)$  Zeit entscheiden, ob  $G \in \mathcal{J}_p$ .*

*Beweis.* Für jede Orientierung des linken inneren Nachbarn  $R(v)$  von  $R(v_S)$  werden die Rechtecke analog wie bei dem Test in Abschnitt 3.1 eingefügt: Die  $\lrcorner$ - und  $\llcorner$ -Knicke werden in einer von links nach rechts sortierten doppelt verketteten Liste  $L$  gespeichert. Die benachbarten  $\lrcorner$ - $\llcorner$ -Paare werden auf den Stapel  $S$  gelegt, außer wenn sie  $R(v_S)$  als untere Seite haben. Das Füllen von  $\lrcorner$ - $\llcorner$ -Lücken aus  $S$  und das Einfügen der oberen Nachbarn von  $R(v_S)$  erfolgt abwechselnd: Ist der Stapel  $S$  leer, so wird die unterste Zeile gemäß den Fällen 1 bis 4 aus Lemma 6.5 erweitert. Der linke obere noch nicht eingefügte Nachbar  $R(q)$  von  $R(x)$  in Fällen 1 und 2 bzw. von  $R(t)$  im Fall 4 kann immer eindeutig eingefügt werden. Die entstehenden Knicke werden in die Liste  $L$  eingefügt. Anschließend werden die resultierenden U-Lücken iterativ gefüllt, bis der Stapel  $S$  wieder leer wird. Danach ist die linke Seite von  $R(q)$  vollständig verdeckt, und dann wird der eventuell unterbrochene Schritt zur Erweiterung der untersten Zeile vervollständigt.

Jedes Mal also, wenn  $S$  leer wird, bilden die eingefügten Rechtecke eine absteigende Treppe ab  $R(v_W)$  bis zum rechtesten eingefügten Rechteck. Wurde der rechteste Nachbar  $x$  von  $v_S$  eingefügt, so wurde die unterste Zeile vollständig ausgefüllt. Füge dann den  $\llcorner$ -Knick  $(x, v_E)$  in die Liste  $L$  ein, und fülle die Lücken aus  $S$ , bis  $S$  leer ist (oder das Einfügen wegen einem Fehler abgebrochen wird).

Betrachte eine U-Lücke  $(u, v_1, \dots, v_k, w)$  aus  $S$  (siehe Abbildung 3.4). Für das einzufügende Rechteck  $R(v)$  gehört  $v$  zur Facette  $(u, v_1, v)$  von  $G$  und kann in  $O(1)$  Zeit bestimmt werden. Sei nun  $S$  leer, und die unterste Zeile sei noch nicht gefüllt. Die in diesem Schritt bei der Erweiterung der untersten Zeile einzufügenden Rechtecke (abgesehen von denjenigen, die durch das Füllen von U-Lücken hinzugefügt werden) können in  $O(\text{fdeg}(x))$  Zeit für die Fälle 1 und 2, in  $O(1)$  für den Fall 3 und in  $O(\text{fdeg}(t) + n_t)$  für den Fall 4 bestimmt werden, wobei  $n_t$  die Anzahl der „Treppenstufen“ bezeichnet. Amortisiert ist es  $O(1)$  pro eingefügtes Rechteck.

Beim Einfügen eines Rechtecks  $R(v)$  kann man in  $O(\text{deg}(v))$  Zeit prüfen, ob die entstehenden Kontakte den Kanten aus  $G$  entsprechen (oder in  $O(|V|)$ , aber dann bricht der Algorithmus mit einem Fehler ab). Die  $\text{fdeg}$ -Werte der Rechtecke bzw. Knoten können ebenfalls in  $O(\text{deg}(v))$  aktualisiert werden. Das Aktualisieren von  $L$  und  $S$  erfolgt in  $O(1)$  Zeit. Der Aufwand zum Einfügen eines Rechtecks  $R(v)$  ist somit in  $O(\text{deg}(v))$ , und insgesamt ergibt sich der Zeitaufwand  $O(|V|)$ .  $\square$

## 7. Kontaktlängenuniverselle Darstellung planarer Graphen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Anzahl Ecken pro Polygon, die für eine kantenproportionale rektile Repräsentation (edge-proportional rectilinear representation oder kurz EPRR) eines zweifach knotenzusammenhängenden planar eingebetteten innentriangulierten Graphen  $G = (V, E)$  für eine frei gewählte positive Kantengewichtsfunktion  $\omega$  auf  $E$  erforderlich ist. Da die inneren Facetten eines planaren Graphen  $G$  den Kreuzungen in der Kontaktdarstellung entsprechen, hat kein  $G$  mit einer inneren Facette der Größe  $\geq 5$  eine löcherfreie rektile Kontaktdarstellung. Viereckige innere Facetten entsprechen X-Kreuzungen. Diese möchten wir vermeiden, da alle Kontakte positive Längen haben sollen. Aus diesem Grund betrachten wir in diesem Kapitel nur innentriangulierte Graphen.

### 7.1 Minimale Komplexität kantenproportionaler Darstellungen

Die *Komplexität* eines rektilearen Polygons  $p$  ist die Anzahl der Ecken in  $p$  und wird mit  $k(p)$  bezeichnet. Die Komplexität eines EPRR  $P = \{P(u) \mid u \in V\}$  von  $G$  sei  $k(P) := \max_{u \in V} k(P(u))$ . Die Komplexität eines Graphen  $G$  mit der Gewichtsfunktion  $\omega$  sei  $k(G, \omega) = \min_{P \in \mathcal{P}} k(P)$ , wobei  $\mathcal{P}$  die Menge aller EPRRs von  $(G, \omega)$  ist. Für eine Graphenklasse  $\mathcal{G}$  sei die Komplexität von  $\mathcal{G}$  die maximale Komplexität eines Graphen  $G$  aus  $\mathcal{G}$  für eine beliebig gewählte Kantengewichtsfunktion  $\omega$ , d. h.

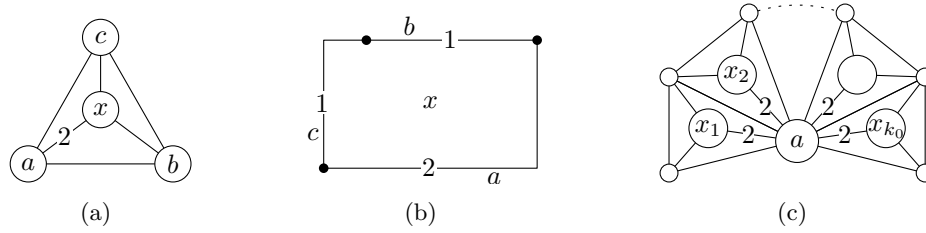
$$k(\mathcal{G}) = \max_{G \in \mathcal{G}} \max_{\omega: E \rightarrow \mathbb{R}^+} k(G, \omega).$$

Unser Ziel in diesem Kapitel ist,  $k(\mathcal{G})$  für unterschiedliche Klassen von Graphen zu bestimmen.

**Theorem 7.1.** *Für jeden zweifach zusammenhängenden innentriangulierten Graphen  $G$ , in dem es ein Paar von adjazenten inneren Knoten gibt, und eine beliebig gewählte positive natürliche Zahl  $k_0$  existiert eine positive Gewichtsfunktion  $\omega$ , so dass  $k(G, \omega) \geq k_0$ .*

*Sei  $\mathcal{I}$  die Klasse zweifach zusammenhängender innentriangulierter Graphen, die kein Paar von adjazenten inneren Knoten enthalten. Es ist  $k(\mathcal{I}) \geq k_0$  für jedes  $k_0 \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Für den ersten Teil des Theorems sei  $G$  ein zweifach zusammenhängender innentriangulierter Graph mit zwei zueinander adjazenten inneren Knoten  $u$  und  $v$ . Wir



**Abbildung 7.1:** Beweisskizze zum zweiten Teil von Theorem 7.1. Unbeschriftete Kanten haben das Gewicht 1.

definieren die Kantengewichtsfunktion  $\omega$ , so dass  $\omega(e) = 1$  für jedes  $e \in E \setminus \{uv\}$  und  $\omega(uv) = k_0 \cdot (\deg(u) + \deg(v) - 2) =: M$ . Das Polygon  $P(u) \cup P(v)$  hat nun in jeder kantenproportionalen Kontaktrepräsentation von  $G$  den Umfang  $\deg(u) + \deg(v) - 2$ . Andererseits enthält dieses Polygon notwendigerweise den Kontaktabschnitt der Länge  $M$ , der der Kante  $uv$  entspricht. Somit hat dieser Abschnitt mindestens  $M/(\deg(u) + \deg(v) - 2) = k_0$  Knicke.

Für den zweiten Teil betrachte den vollständigen Graphen  $K_4$  mit dem inneren Knoten  $x$ , den äußeren Knoten  $a, b, c$  und den Gewichten aller Kanten 1, außer für  $\omega(ax) = 2$ ; siehe Abbildung 7.1(a), (b). Da  $\omega(ax) \geq \omega(bx) + \omega(cx)$ , muss der Abschnitt  $s(ax)$  einen Knick haben. Betrachte nun den Graphen in Abbildung 7.1(c), der sich aus  $k_0$  solchen  $K_4$ -Graphen zusammensetzt, die alle den gemeinsamen Knoten  $a$  und paarweise gemeinsame Kanten haben. Es ist  $G \in \mathcal{I}$ . Seien  $x_j, j = 1, \dots, k_0$  die inneren Knoten dieser  $K_4$ -Teilgraphen, und haben alle Kantengewichte in  $G$  den Wert 1, außer für  $\omega(ax_j) = 2, j = 1, \dots, k_0$ . Nach der obigen Beobachtung hat jedes Segment  $s(ax_j)$  in jedem EPRR von  $G$  notwendigerweise einen Knick, und somit hat  $P(a)$  mindestens  $k_0$  Ecken. Folglich ist  $k(\mathcal{I}) \geq k_0$ .  $\square$

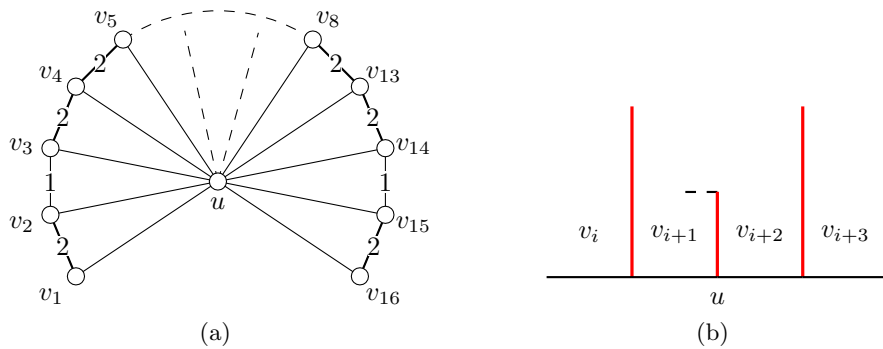
Dieses Theorem zeigt, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, die Komplexität kantenproportionaler Darstellungen für Familien von Graphen einzuschränken, die beliebig viele innere Knoten haben dürfen. Im Folgenden betrachten wir außenplanare Graphen und Graphen mit einem inneren Knoten.

## 7.2 Außenplanare Graphen

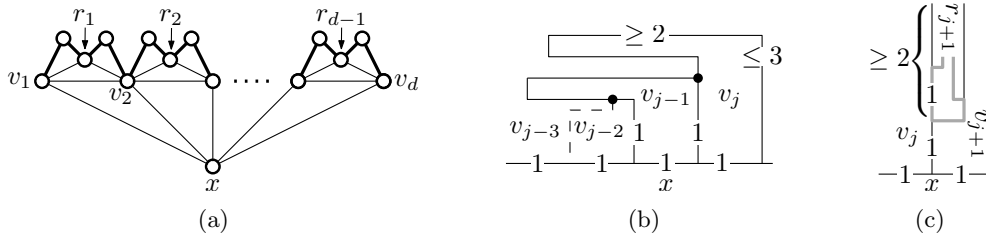
Sei  $\mathcal{O}$  die Klasse zweifach zusammenhängender innentriangulierter außenplanarer Graphen. Wir zeigen zuerst, dass es  $k(\mathcal{O}) \geq 6$  gilt, sogar für die Klasse der *Außenpfade*. Dies sind die außenplanaren Graphen, deren schwaches Dual ein einfacher Pfad ist. Im Folgenden betrachten wir einen Graphen  $G \in \mathcal{O}$  immer zusammen mit einer entsprechenden außenplanaren Einbettung.

**Proposition 7.2.** *Für die Klasse  $\mathcal{P}$  zweifach zusammenhängender innentriangulierter Außenpfade gilt  $k(\mathcal{P}) \geq 6$ .*

*Beweis.* Betrachte einen Außenpfad  $G$  mit 17 Knoten  $v_1, \dots, v_{16}, u$ , die in dieser Reihenfolge auf der äußeren Facette liegen, so dass  $u$  mit allen anderen Knoten verbunden ist; siehe Abbildung 7.2(a). Die Kantengewichte von  $v_1v_2, \dots, v_{15}v_{16}$  seien  $2, 1, 2, 2, 1, 2, \dots, 2, 1, 2$ , und es gelte  $\omega(uv_j) = 1$  für  $j = 1, \dots, 16$ . Angenommen,  $G$  besitzt ein EPRR aus Rechtecken. Betrachte vier Knoten  $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}$ , so dass die Kontakte der entsprechenden Rechtecke die Längen 2-1-2 haben. Wir zeigen, dass das Polygon  $P(u)$  für jede solche Folge einen Knick haben muss.



**Abbildung 7.2:** Beweisskizze zu Proposition 7.2. Unbeschriftete Kanten haben das Gewicht 1.



**Abbildung 7.3:** Ein Graph, der für  $d = 64$  kein EPRR aus Sechsecken besitzt. Dünn gezeichnete Kanten haben das Gewicht 1 und dick gezeichneten das Gewicht 4.

Angenommen, dies ist nicht der Fall, und die Kontaktabschnitte von  $P(v_i)$ ,  $P(v_{i+1})$ ,  $P(v_{i+2})$ ,  $P(v_{i+3})$  zu  $P(u)$  liegen auf einer Geraden wie in Abbildung 7.2(b). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei diese horizontal. Jedes dieser Segmente hat die Länge 1. Betrachte nun die Höhen dieser vier Rechtecke. Aus  $\omega(v_i v_{i+1}) = 2$  folgt, dass  $P(v_i)$  und  $P(v_{i+1})$  mindestens die Höhe 2 haben, und dasselbe folgt für  $P(v_{i+2})$  und  $P(v_{i+3})$ . Allerdings muss wegen  $\omega(v_{i+1} v_{i+2}) = 1$  die Höhe von  $P(v_{i+1})$  oder  $P(v_{i+2})$  1 sein, ein Widerspruch. Somit muss  $P(u)$  für jede solche Folge einen Knick haben. Da es insgesamt fünf solche Folgen gibt (für  $i = 1, 4, 7, 10, 13$ ) und die Anzahl Ecken in einem rektilinearen Polygon gerade ist, hat  $P(u)$  mindestens sechs Ecken.  $\square$

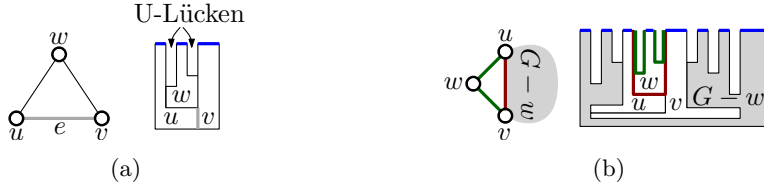
Für allgemeine zweifach zusammenhängende inntriangulierte außenplanare Graphen  $\mathcal{O}$  zeigen wir nun eine stärkere Aussage:

**Proposition 7.3.** Für die Graphenklasse  $\mathcal{O}$  gilt  $k(\mathcal{O}) \geq 8$ .

*Beweis.* Betrachte die Familie von Graphen, die in Abbildung 7.3(a) dargestellt ist. Wir zeigen, dass wenn die dünn gezeichneten Kanten das Gewicht 1 und die dick gezeichneten das Gewicht 4 haben, hat für  $d = 64$  der entsprechende kantengewichtete Graph  $(G, \omega)$  kein EPRR mit Komplexität weniger als 8. Angenommen,  $P$  ist eine solche Darstellung von  $G$  mit  $k(P) \leq 6$  (wie bereits erwähnt, ist die Anzahl Ecken in rektilinearen Polygonen immer gerade).

*Behauptung 1:* Es gibt eine Kette  $Q = \{v_i, \dots, v_{i+8}\}$ , so dass die Kontakte zwischen  $P(x)$  und  $P(v)$  für  $v \in Q$  auf einer Geraden liegen. Dies folgt aus der Tatsache, dass der Pfad  $v_1, \dots, v_d$  aus 64 Knoten besteht: Existiert keine solche Kette  $Q$ , so hat  $P(x)$  für alle 9 nacheinander folgenden Kontakte zu  $P(v_j)$  für  $j = 1, \dots, d$  mindestens einen Knick. Dann hätte der Rand von  $P(x)$  mindestens  $\lceil 64/9 \rceil = 7$  Knicke.

*Behauptung 2:* Seien  $i$  und  $Q$  wie in Behauptung 1 gewählt, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit liegen die Kontakte zwischen  $P(x)$  und  $P(v)$  für  $v \in Q$  auf einer horizontalen



**Abbildung 7.4:** Konstruktion einer rektilinearen kantenproportionalen Darstellung mit Achtecken für einen außenplanaren innentriangulierten Graph  $G \in \mathcal{O}$ . (a) Ein Dreieck mit der Referenzkante  $e$ , der den Basisfall bildet. (b) Das Einfügen von  $P(w)$  in die von  $P(u)$  und  $P(v)$  gebildete U-Lücke (rot), das zwei neue U-Lücken (grün) erzeugt.

Geraden. Dann ist für  $j = i + 3, \dots, i + 5$  die Höhe von  $P(v_j)$  größer als 3. Angenommen, die Höhe von  $P(v_j)$  ist höchstens 3. Da  $P(v_j)$  den Umfang mindestens  $2 \cdot 4 + 5 = 13$  hat, muss es als ein L-förmiges Polygon mit einem Überhang der Breite mindestens 2 nach links oder rechts realisiert werden. Angenommen, ersteres ist der Fall. Es folgt, dass  $P(v_{j-1})$  die Höhe höchstens 1 hat; siehe Abbildung 7.3(b). Dann hat aber  $P(v_{j-2})$  den Umfang höchstens 4, da es in einem  $1 \times 1$ -Quadrat eingeschlossen ist. Dies ist ein Widerspruch. Der Fall, dass  $P(v_j)$  den Überhang nach rechts hat, ist symmetrisch. Somit wurde die Behauptung 2 gezeigt.

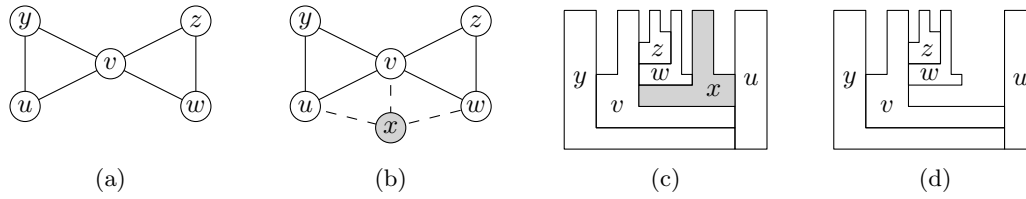
Betrachte nun das Polygon  $P(v_{i+4})$ . Seine rechte oder linke Seite hat keinen Knick und besteht somit aus einem vertikalen Abschnitt der Länge mindestens 3. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei es die rechte Seite. Wir betrachten dann  $v_{i+4}$ ,  $v_{i+5}$  und ihren gemeinsamen Nachbar  $r_{i+4}$ . Die entstehende Situation ist für  $j = i + 4$  in Abbildung 7.3(c) dargestellt. Die beiden Polygone  $P(v_{i+4})$  und  $P(v_{i+5})$  haben die Höhe mindestens 3. Somit hat die von  $P(v_{i+4})$  und  $P(v_{i+5})$  gebildete U-Lücke, in der sich  $P(r_{i+4})$  befindet, die Breite höchstens 1 und die Höhe mindestens 2. Ferner haben die Kontakte zwischen  $P(r_{i+4})$  und  $P(v_{i+4})$  sowie zwischen  $P(r_{i+4})$  und  $P(v_{i+5})$  die Länge 1, und, da  $P(r_{i+4})$  den Umfang mindestens 10 hat, muss es mindestens zwei konkave Knicke haben. Dies ist ein Widerspruch zu der angenommenen Komplexität 6 von  $P$ .  $\square$

Wir beschreiben nun einen Algorithmus, der für jeden außenplanaren Graph  $G \in \mathcal{O}$  und eine beliebige positive Kantengewichtsfunktion  $\omega$  von  $G$  ein EPRR der Komplexität 8 konstruiert.

**Proposition 7.4.** *Für die Klasse  $\mathcal{O}$  von zweifach zusammenhängenden innentriangulierten außenplanaren Graphen gilt  $k(\mathcal{O}) \leq 8$ .*

*Beweis.* Wir zeigen, dass für jeden Graph  $G = (V, E) \in \mathcal{O}$ , eine beliebige positive Kantengewichtsfunktion  $\omega$  und eine frei gewählte Referenzkante  $e = st \in E$  auf der äußeren Facette von  $G$  ein EPRR  $P$  existiert, so dass für jede andere Kante  $uv \in E \setminus \{e\}$  auf der äußeren Facette es in  $P$  eine U-Lücke gibt, deren linke und rechte Seite von den Polygonen  $P(u)$  bzw.  $P(v)$  und die untere entweder von  $P(u)$  oder  $P(v)$  gebildet ist, deren Öffnung nach oben zeigt und deren Breite höchstens  $\varepsilon/2$  beträgt, wobei  $\varepsilon$  nicht größer als das minimale Gewicht einer Kante in  $E$  ist. Ferner haben  $P(s)$ ,  $P(t)$  eine I- oder L-Form und alle Polygone  $P(v)$  für  $v \in V \setminus \{s, t\}$  eine  $\perp$ -Form, und die mittleren oberen Segmente der Polygone (blau in Abbildung 7.4) können unter Einhaltung der Polygonform und Kontaktlängen beliebig nach oben verschoben werden.

Für ein Dreieck  $uvw$  mit der Referenzkante  $uv$  ist die obige Konstruktion möglich, siehe Abbildung 7.4(a). Wir konstruieren die Zeichnung induktiv. Sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger Graph aus  $\mathcal{O}$ , und sei eine Kante  $e \in E$  auf der äußeren Facette von  $G$  frei gewählt. Hat  $G$  mehr als drei Knoten, so gibt es aufgrund der Außenplanarität von  $G$  einen Knoten



**Abbildung 7.5:** EPRR mit Achtecken für außenplanare innentriangulierte Graphen mit separierenden Knoten. (a), (b): Nach dem Hinzufügen von  $x$  und Kanten  $xw, xv, xu$  ist  $v$  nicht mehr ein separierender Knoten. (c) Konstruiere ein EPRR mit Achtecken; (d) entferne  $P(x)$ .

$w \in V$  von Grad 2, der kein Endpunkt von  $e$  ist. Seien  $u$  und  $v$  die beiden Nachbarn von  $w$ . Es gibt die Kante  $uv$  in  $E$ , und es ist  $uv \neq e$ , da  $G$  kein Dreieck ist. Nach Induktion hat  $G - w$  eine gewünschte Darstellung  $P$  bezüglich der Referenzkante  $e$ . Da die Kante  $uv$  auf der äußeren Facette von  $G - w$  liegt, gibt es für  $uv$  eine U-Lücke in  $P$  der Breite höchstens  $\varepsilon/2$ . In diese fügen wir dann ein neues  $\perp$ -förmiges Polygon  $P(w)$  mit den erforderlichen Längen der Kontakte zu  $P(u)$  und  $P(v)$  wie in Abbildung 7.4(b) (man ziehe dazu die blauen Segmente gegebenenfalls nach oben). Nach dem Einfügen bleiben alle Invarianten erhalten.  $\square$

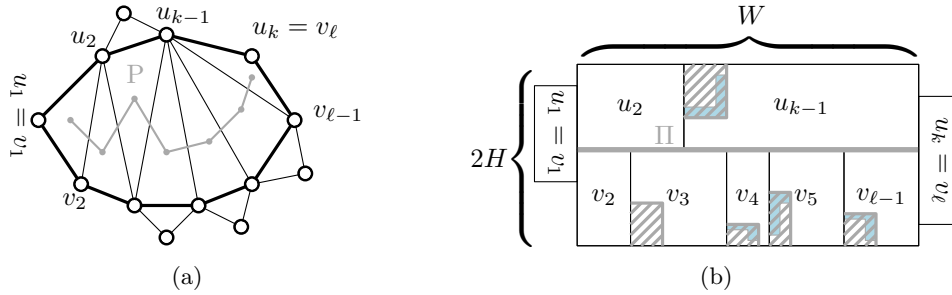
Im Beweis von Proposition 7.4 konnte man  $\varepsilon$  beliebig klein wählen und die mittleren oberen Randabschnitte der Polygone beliebig weit nach oben verschieben. Dadurch kann man für ein  $G \in \mathcal{O}$  sogar für eine beliebige Knotengewichtsfunktion  $\gamma : V \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  und eine beliebige positive Kantengewichtsfunktion  $\omega$  eine kantenproportionale Kontaktdarstellung ohne Löcher mit höchstens Achtecken konstruieren, so dass für jedes  $v \in V$  das Polygon  $P(v)$  die Fläche  $\gamma(v)$  hat.

**Bemerkung 7.5.** In Proposition 7.4 kann auf die Forderung des zweifachen Zusammenhangs verzichtet werden, d. h. für die Klasse  $\mathcal{O}'$  von innentriangulierten außenplanaren Graphen gilt  $k(\mathcal{O}') \leq 8$ .

*Beweis.* Sei  $G \in \mathcal{O}'$  und  $\omega$  eine positive Kantengewichtsfunktion von  $G$ . Wir vermeiden separierende Knoten durch das Hinzufügen zusätzlicher Knoten; siehe Abbildung 7.5. Sei  $v$  ein separierender Knoten in  $G$  und  $u, w \in V$  zwei Nachbarn von  $v$ , die in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten von  $G - \{v\}$  liegen, sodass die Kanten  $vu$  und  $vw$  in der Adjazenzliste von  $v$  benachbart sind. Füge zu  $G$  einen neuen Knoten  $x$  hinzu: Sei  $G_v = (V \cup \{x\}, E \cup \{xw, xv, xu\})$ . Setze die Gewichte der neuen Kanten auf einen beliebigen positiven Wert. Der Graph  $G_v$  ist weiterhin außenplanar, allerdings ist  $v$  kein separierender Knoten mehr in  $G_v$ . Eliminiere auf diese Weise alle separierenden Knoten und erhalte einen außenplanaren innentriangulierten Graph  $G'$ . Jede Zusammenhangskomponente von  $G'$  ist zweifach zusammenhängend, sodass auf sie die Konstruktion aus Proposition 7.4 angewendet werden kann. Durch das Entfernen der Polygone, die den neu hinzugefügten Knoten entsprechen, entstehen aufgrund der Außenplanarität von  $G'$  keine Löcher.  $\square$

Wir betrachten nun einige spezielle Klassen außenplanarer Graphen und zeigen, wie man für sie ein EPRR der Komplexität 6 konstruiert. Ein *Caterpillar* ist ein Pfad oder ein Baum, der zu einem Pfad wird, falls man alle seine Blätter entfernt. Einen außenplanar eingebetteten Graph  $G$  nennt man ein *Outerpillar*, falls das schwache Dual von  $G$  ein Caterpillar ist. Ein Außenpfad ist somit auch ein Outerpillar.

**Proposition 7.6.** Für die Klasse  $\mathcal{P}$  zweifach zusammenhängender innentriangulierter Außenpfade gilt  $k(\mathcal{P}) \leq 6$ . Für die Klasse  $\mathcal{P}'$  zweifach zusammenhängender innentriangulierter Outerpillar gilt ebenfalls  $k(\mathcal{P}') \leq 6$ .



**Abbildung 7.6:** Konstruktion eines EPRR mit Sechsecken für Outerpillars. (a) Der Eingabegraph  $G$  mit einem Außenpfad-Teilgraph  $G_p$  (Rand der äußeren Facette von  $G_p$  dick gezeichnet). (b) Ein EPRR des Außenpfads  $G_p$  mit U-Lücken (schraffierte Rechtecke) für die verbleibenden Knoten von  $G$ .

*Beweis.* Sei  $G$  ein Outerpillar. Konstruiere  $G_p$  aus  $G$  durch das Entfernen aller Knoten von Grad 2. Füge die entfernten Dreiecke nacheinander wieder zu  $G_p$  hinzu, solange  $G_p$  ein Außenpfad bleibt; in Abbildung 7.6(a) wären es etwa die Dreiecke  $v_1v_2u_2$  und  $u_{k-1}v_{\ell-1}v_\ell$ . Sei  $\Pi$  der schwache Dual zu  $G_p$ . Der Pfad  $\Pi$  unterteilt die äußere Facette von  $G_p$  in zwei intern disjunkte Pfade  $\pi_1 = u_1, \dots, u_k$  (der obere Pfad) und  $\pi_2 = v_1, \dots, v_\ell$  (der untere Pfad) mit den gemeinsamen Endpunkten  $u_1 = v_1$  und  $u_k = v_\ell$  von Grad 2 in  $G$ .

Sei  $H$  größer als das maximale Kantengewicht in  $G$  und  $W$  die Summe der Gewichte aller inneren Kanten von  $G_p$ . Konstruiere ein Rechteck der Breite  $W$  und Höhe  $2H$  und teile es horizontal in zwei  $W \times H$ -Rechtecke auf. Wir unterteilen das obere Rechteck in Rechtecke  $P(u_2), \dots, P(u_{k-1})$ , so dass die Breite von  $P(u_i)$  gleich der Summe der Gewichte aller inneren Kanten von  $G_p$  ist, die zu  $u_i$  inzident sind. Analog teilen wir das untere  $W \times H$ -Rechteck in Rechtecke  $P(v_2), \dots, P(v_{\ell-1})$ ; siehe Abbildung 7.6(b). Man beachte, dass dadurch die korrekte Länge der den inneren Kanten von  $G_p$  entsprechenden Kontakte sichergestellt ist. Anschließend platzieren wir  $P(u_1)$  und  $P(u_k)$  als Rechtecke an den linken bzw. rechten Rand der Zeichnung, so dass die dazugehörigen Kontakte die korrekten Längen haben.

Nun müssen noch die Längen der Kontakte zu den Kanten zwischen zwei inneren Knoten auf  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$  angepasst werden. Momentan haben sie die Länge  $H$ , die jedoch zu groß ist. Um dies zu korrigieren, entfernen wir für jedes solche Paar  $v_i v_{i+1}$ , das in dieser Reihenfolge auf  $\pi_1$  oder  $\pi_2$  vorkommt, ein rechteckiges Stück der Höhe  $H - \omega(v_i v_{i+1})$  und Breite höchstens  $\varepsilon/2$  von der linken äußeren Ecke von  $P(v_{i+1})$  ( $\varepsilon$  sei wieder kleiner oder gleich dem minimalen Gewicht in  $G$ ). Somit sind  $P(v_i)$  und  $P(v_{i+1})$  rektilineare Vier- oder Sechsecke und haben einen vertikalen Kontakt der Länge  $\omega(v_i v_{i+1})$ . Ist  $G$  ein Außenpfad, so ist die Konstruktion eines EPRR damit beendet. Für den allgemeineren Fall eines Outerpillars betrachte die schmalen U-Lücken zwischen den Polygonen zu den inneren Knoten von  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$  (schraffiert in Abbildung 7.6(b)). In diese Lücken können wir die fehlenden Polygone mit dem gleichen Ansatz wie im Beweis von Proposition 7.4 einfügen; siehe Abbildung 7.4(b). Die freien äußeren Seiten der Polygone können so nach außen verschoben werden, dass die fehlenden Polygone L-förmig mit korrekten Kontaktlängen in die entsprechenden U-Lücken eingefügt werden (blau in Abbildung 7.6(b)). Somit hat jedes Polygon höchstens 6 Ecken.  $\square$

Ein *Lobster* ist ein Caterpillar oder ein Baum, der zu einem Caterpillar wird, wenn man alle seine Blätter entfernt. Ein außenplanar eingebetteter Graph  $G$  heiße *Outerlobster*, wenn sein schwaches Dual ein Lobster ist.

**Proposition 7.7.** Für die Klasse  $\mathcal{L}$  zweifach zusammenhängender innentriangulierter Outerlobster gilt  $k(\mathcal{L}) \geq 8$ .



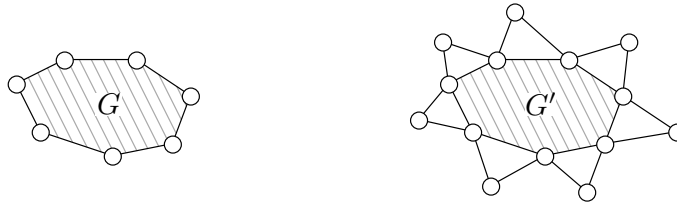


Abbildung 7.7: Beweisskizze zu Bemerkung 7.8.

*Beweis.* Der kantengewichtete Graph  $(G, \omega)$  im Beweis von Proposition 7.3 ist ein Outerlobster und hat die Mindestkomplexität 8.  $\square$

**Bemerkung 7.8.** *Im Allgemeinen existiert zu einem Graph  $G \in \mathcal{O}$  mit einer positiven Kantengewichtsfunktion  $\omega$  kein rektilineares Layout aus Sechs- und Vierecken ohne  $X$ -Kreuzungen, bei dem die Kontaktlängen zu allen inneren Kanten korrekt sind.*

*Beweis.* Sei  $G \in \mathcal{O}$  beliebig gewählt. Ergänze  $G$  wie in Abbildung 7.8, so dass alle Kanten von  $G$  zu inneren Kanten werden. Existiert zu  $G'$  ein rektilineares Layout aus Vier- und Sechsecken, in dem alle Kontakte zu den inneren Kanten von  $G'$  korrekte Längen haben, so existiert ein EPRR der Komplexität höchstens 6 zu  $G$ , Widerspruch zu Proposition 7.3.  $\square$

In den obigen Konstruktionen haben zwar alle Polygone  $P(v)$  höchstens 8 Ecken, das äußere Polygon hat aber im Allgemeinen eine unbeschränkte Komplexität. Dies lässt sich allerdings nicht einmal für Außenpfade vermeiden:

**Lemma 7.9.** *Gegeben seien  $k_0, K_0 \in \mathbb{N}$ ,  $k_0, K_0 \geq 4$ . Für einen Graph  $G \in \mathcal{O}$  existiert im Allgemeinen kein EPRR, so dass alle Polygone  $P(v)$ ,  $v \in V$  höchstens  $k_0$  Ecken und das äußere Polygon  $P_{\text{out}}$  höchstens  $K_0$  Ecken haben (selbst wenn  $G$  ein Außenpfad ist).*

*Beweis.* Betrachte den Außenpfad  $G$  aus Abbildung 7.8. Sei  $M = 4k_0$ . Wähle den Grad  $d$  von  $u$  als  $d = 5 \cdot (k_0 + K_0 + 1) + 1$ . Angenommen, ein solches EPRR mit höchstens  $k_0$  Ecken pro inneres Polygon und höchstens  $K_0$  Ecken auf dem äußeren Polygon existiert. Dann gibt es nacheinander folgende Knoten  $v_i, \dots, v_{i+4}$ ,  $i \in \{0, \dots, d-4\}$ , so dass gilt: (1) Die Kontakte zwischen  $P(v_i)$  und  $P(u), \dots, P(v_{i+4})$  und  $P(u)$  liegen auf einer Geraden; (2) Die äußeren, freien Seiten von  $P(v_i), \dots, P(v_{i+4})$  liegen auf einer Geraden. Sonst gäbe es für jede 5 nacheinander folgenden Knoten  $v_j, \dots, v_{j+4}$  einen Knick von  $P(u)$  oder von dem äußeren Polygon  $P_{\text{out}}$ , und es gälte  $k_0 + K_0 \geq k(P(u)) + k(P_{\text{out}}) \geq \frac{d}{5} - 1$  bzw.  $5 \cdot (k_0 + K_0 + 1) \geq d$ .

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $w(\{v_i, v_{i+1}\}) = 1$  (sonst verwende  $i+1$  statt  $i$ ). Dann ist auch  $w(\{v_{i+2}, v_{i+3}\}) = 1$ , und die Gerade, die die Kontakte zwischen  $P(v_i)$  und  $P(u), \dots, P(v_{i+3})$  und  $P(u)$  enthält, muss parallel sein zur Geraden, die die freien Seiten von  $P(v_i), \dots, P(v_{i+3})$  enthält, und hat von ihr den Abstand höchstens 1. Somit befindet sich der Kontakt der Länge  $M$  zwischen  $P(v_{i+1})$  und  $P(v_{i+2})$  komplett innerhalb eines Rechtecks  $R$  der Breite höchstens 4 und der Höhe höchstens 1 (blau punktiert in Abbildung 7.8). Pro 4 Längeneinheiten hat er also mindestens einen Knick, und  $P(v_{i+1})$  hat insgesamt mindestens  $k_0 + 1$  Ecken, Widerspruch.  $\square$

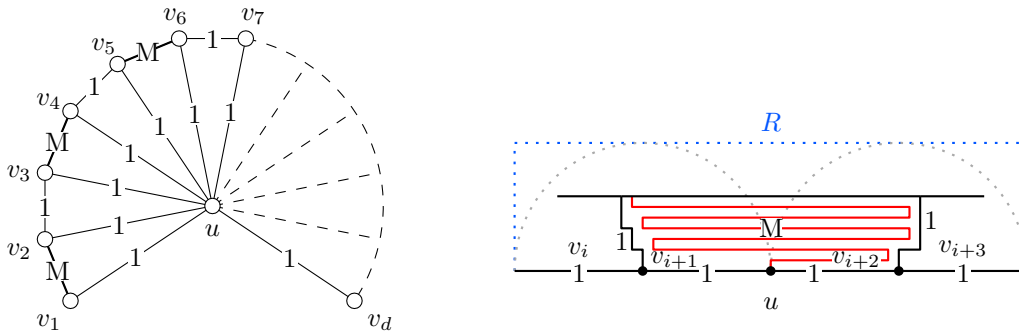


Abbildung 7.8: Beweisskizze zu Lemma 7.9.

### 7.3 Graphen mit genau einem inneren Knoten

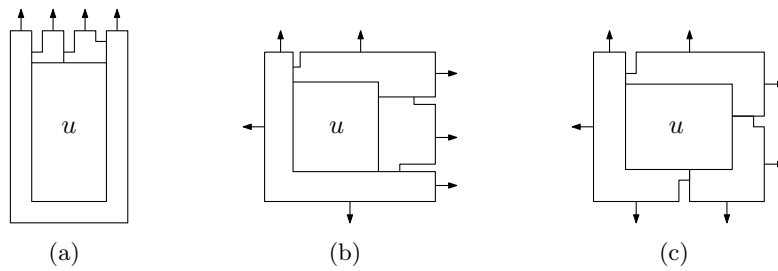
Wir zeigen, dass für die Darstellung eines innentriangulierten Graphen mit genau einem inneren Knoten als EPRR die Polygonkomplexität 8 ebenfalls ausreicht.

**Lemma 7.10.** *Sei  $\mathcal{I}_1$  die Klasse von planar eingebetteten innentriangulierten zweifach zusammenhängenden Graphen mit genau einem inneren Knoten. Es ist  $k(\mathcal{I}_1) \leq 8$ .*

*Beweis.* Betrachte einen Graph  $G = (V, E) \in \mathcal{I}_1$  mit einer positiven Kantengewichtsfunktion  $\omega$ . Sei  $u$  der einzige innere Knoten in  $G$  und  $v_1, \dots, v_d$  die Nachbarn von  $u$  in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn. Sei  $\sigma = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \omega(uv_i)$ ,  $\ell = \max_{i=1, \dots, d} \omega(uv_i)$ ,  $j = \operatorname{argmax}_{i=1, \dots, d} \omega(uv_i)$  und  $\varepsilon$  das minimale Kantengewicht in  $G$ . Man kann  $P(u)$  immer als ein Rechteck zeichnen, so dass alle Kontakte zwischen  $P(u)$  und einem  $P(v_i)$  gerade Segmente sind, außer für höchstens drei Knoten  $v_i$ , deren Kontakte zu  $P(u)$  insgesamt höchstens drei Knicke haben: Ist  $\ell > \sigma$ , so zeichne  $P(v_j)$  als ein U-förmiges Polygon der Breite  $2\sigma - \ell$  und Höhe  $\ell - \sigma$ , dessen Rand die linke, untere und rechte Seite von  $P(u)$  enthält, und zeichne die restlichen Polygone  $P_i$ ,  $i \neq j$ , L- oder  $\perp$ -förmig auf der oberen Seite von  $P(u)$  wie in Abbildung 7.9(a). Ist  $\ell = \sigma$ , so zeichne  $P(v_j)$  als ein L-förmiges Polygon, dessen Rand zwei Seiten von  $P(u)$  enthält, und zeichne die restlichen Polygone  $P_i$ ,  $i \neq j$ , wie in Abbildung 7.9(b). Ist  $\ell < \sigma$ , zeichne die Polygone  $P(v_i)$  wie in Abbildung 7.9(c). In allen drei Fällen kann man die Polygone  $P(v_i)$  so um  $P(u)$  mit jeweils höchstens 8 Ecken so zeichnen, dass es zwischen jedem Paar  $P(v_i)$  und  $P(v_{i+1})$  (Indizes modulo  $d$ ) eine U-Lücke der Breite höchstens  $\varepsilon/2$  gibt, deren Öffnung nach außen zeigt und deren Tiefe hinreichend groß gewählt werden kann.

Durch die Wegnahme von  $u, v_1, \dots, v_d$  zerfällt  $G$  in  $d$  (möglicherweise leere) Zusammenhangskomponenten. Sei  $G_i$  der Teilgraph von  $G$ , der durch  $v_i, v_{i+1}$  und eine solche Komponente, die den gemeinsamen Nachbar  $v \neq u$  von  $v_i$  und  $v_{i+1}$  enthält (falls dieser existiert) induziert ist. Falls  $G_i$  aus mehr als zwei Knoten besteht, ist  $G_i \in \mathcal{O}$ . Wähle  $v_i v_{i+1}$  als Referenzkante und verwende die Konstruktion aus dem Beweis von Proposition 7.4. Damit kann man  $G_i - \{v_i, v_{i+1}\}$  in der entsprechenden U-Lücke der Breite  $\varepsilon/2$  gebildet von  $P(v_i)$  und  $P(v_{i+1})$  durch  $\perp$ -förmige Polygone realisieren. Damit hat man ein EPRR von  $G$  der Komplexität 8 konstruiert.  $\square$

Für einen zweifach zusammenhängenden innentriangulierten Graph  $G$  mit mindestens einem inneren Knoten  $u$ , einer positiven Kantengewichtsfunktion  $\omega$  und Knotengewichtsfunktion  $\gamma$  gibt es im Gegensatz zu außenplanaren Graphen im Allgemeinen keine knoten- und kantenproportionale Kontaktdarstellung: Haben die Kontakte zu den Kanten  $\{u, v_i\}$  die korrekten Längen  $\omega(\{u, v_i\})$ , hat  $P(u)$  die Fläche höchstens  $(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^d \omega(\{u, v_i\}))^2$ . Übersteigt  $\gamma(u)$  diesen Wert, kann  $P(u)$  nicht gleichzeitig mit korrekten Kontaktlängen und korrekter Fläche gezeichnet werden.



**Abbildung 7.9:** Beweissskizze zu Lemma 7.10 für  $d = 3$ . Für  $d > 3$  erhält man eine analoge Konstruktion durch das Unterteilen der Polygone.

In diesem Kapitel haben wir planare innentriangulierte Graphen, die eine längenuniverselle Darstellung als EPRR beschränkter Komplexität besitzen, vollständig charakterisiert: Dies sind genau die Graphen, die eine beschränkte Anzahl innerer Knoten haben. Wir haben gezeigt, dass für Outerpillars die Komplexität 6 ausreicht und im Allgemeinen notwendig ist. Ferner ist für Outerlobster im Allgemeinen die Komplexität 8 erforderlich. Somit haben die angegebenen Konstruktionen die bestmögliche Komplexität.



## 8. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel fassen wir die Ergebnisse unserer Arbeit zusammen und geben einen Ausblick auf einige offene Fragestellungen zur Darstellung kantengewichteter Graphen als Kontaktrepräsentationen.

### 8.1 Beitrag

In dieser Arbeit haben wir die bislang noch nicht untersuchte Problemstellung betrachtet, wie man kantengewichtete planare Graphen durch Kontaktrepräsentationen darstellen könnte. Unser Ansatz ist, das Gewicht  $\omega(e)$  einer Kante  $e$  durch die Länge  $|s(e)|$  des entsprechenden Kontakts  $s(e)$  zu kodieren.

Wir haben einen Linearzeit-Algorithmus angegeben, der entscheidet, ob zu einem gegebenen kantengewichteten PTP-Graph ein kantenproportionales rechteckiges Dual existiert, und im positiven Fall ein solches konstruiert. Im Fall, dass die kombinatorische Struktur (REL) eines rechteckigen Duals festgelegt ist, haben wir vorhandene Werkzeuge verwendet, um ein rechteckiges Dual minimaler Größe, für das  $|s(e)| \geq \omega(e)$  für alle  $e \in E$  gilt, effizient zu konstruieren. Ist im Gegensatz dazu kein REL festgelegt, werden viele Entscheidungs- und Optimierungsprobleme NP-schwer. Wir haben die NP-Vollständigkeit des Problems gezeigt, zu entscheiden, ob für einen PTP-Graph ein rechteckiges Dual existiert, das unter Einhaltung vorgegebener unterer und oberer Schranken an die Kontaktlängen gezeichnet werden kann. Das Entscheidungsproblem ist ebenfalls NP-schwer, falls man stattdessen untere Schranken an die Kontaktlängen und obere Schranken an die Flächen der Rechtecke vorgibt. Außerdem haben wir gezeigt, dass viele Optimierungsprobleme wie etwa die Minimierung des Umfangs, der längeren Seite des äußeren Rechtecks, der Gesamtfläche und der Gesamtdifferenz  $|s(e)| - \omega(e)$  unter Einhaltung der Mindestkontaktlängen  $\omega(e)$  für  $s(e)$  NP-vollständig sind, falls das REL variieren kann.

Wir haben eine interessante praktische Anwendung rechteckiger Duale kantengewichteter Graphen gefunden. Durch Experimente auf realen Daten haben wir gesehen, dass diese Art der Kontaktdarstellungen sich gut zur schematischen Visualisierung von Menschenströmen in Gebäuden eignet. Bei der Erstellung der Diagramme haben wir die Kantengewichte  $\omega(e)$  anhand von Messdaten gesetzt und als untere Schranken für  $|s(e)|$  verwendet, wobei die Gesamtdifferenz  $|s(e)| - \omega(e)$  minimiert wurde. Zur Lösung dieses im Allgemeinen NP-vollständigen Problems haben wir ein gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsprogramm formuliert.

Ferner haben wir einen Spezialfall rechteckiger Kontaktdarstellungen betrachtet, nämlich rechteckige Duale mit inneren Rechtecken der Größe  $1 \times p$  für ein ganzzahliges  $p$ , und gezeigt, dass für einen gegebenen PTP-Graph in Linearzeit geprüft werden kann, ob eine solche Darstellung existiert.

Im letzten Teil der Arbeit haben wir gezeigt, dass die Klasse von planar eingebetteten Graphen, für die es unabhängig von  $\omega$  eine kantenproportionale löcherfreie Kontaktrepräsentation mit rektilinearen Polygonen beschränkter Komplexität existiert, relativ klein ist: Enthält ein Graph zwei adjazente oder mehr als  $O(1)$  nicht adjazente innere Knoten, sind unter Umständen Polygone mit unbeschränkt vielen Ecken erforderlich. Für innentriangulierte Outerpillars sind Sechsecke unter Umständen notwendig und immer ausreichend, und bereits für Outerlobster sind in einigen Fällen Achtecke erforderlich. Für allgemeine innentriangulierte außenplanare Graphen und innentriangulierte Graphen mit genau einem inneren Knoten haben wir eine universelle komplexitätsminimale Konstruktion mit rektilinearen Achtecken angegeben.

## 8.2 Kritik und offene Fragestellungen

Wir haben gezeigt, dass EPRRs mit beschränkter Polygonkomplexität ohne zusätzliche Annahmen an  $\omega$  nur für relativ eingeschränkte Klassen von Graphen existieren. Um die betrachteten Darstellungsformen für allgemeinere Graphklassen anwenden zu können, müssen wir zulassen, dass  $|s(e)|$  nicht immer exakt mit  $\omega(e)$  übereinstimmt. Eine solche Möglichkeit besteht beispielsweise darin, die Kantengewichte  $\omega(e)$  als untere Schranken für die Kontaktlängen  $|s(e)|$  zu interpretieren und eine Zeichnung zu konstruieren, die die Differenz  $|s(e)| - \omega(e)$  minimiert, wobei man bei der Visualisierung für jedes  $s(e)$  einen Abschnitt der Länge  $\omega(e)$  hervorhebt. Diesen Ansatz haben wir bei der schematischen Darstellung von Personenflüssen in Gebäuden verwendet. Man könnte versuchen, diese Idee von rechteckigen Dualen auf rektilineare Kontaktrepräsentationen beschränkter Komplexität auszuweiten. Da das Problem bereits für Rechtecke NP-schwer ist, stellt sich die Frage nach Approximationslösungen. Weitere Möglichkeiten eines Kompromisses zwischen der Fehlerminimierung und Darstellung allgemeiner Klassen von Graphen wären ebenfalls von Interesse.

Ferner ist es offen, wie der Test in Abschnitt 3.1, ob zu einem kantengewichteten PTP-Graph ein EPRD existiert, für Graphen mit mehr als vier äußeren Knoten effizient durchgeführt werden kann. Ein Problem dabei ist, dass die Form der äußeren Rechtecke stark variieren kann und somit die Form des Polygons, in das die inneren Rechtecke eingefügt werden müssen, im Allgemeinen nicht mehr fest ist.

Eine weitere Richtung, die man verfolgen könnte, wäre es, das Konzept eines RELs auf konvexe Zeichnungen mit mehr als zwei möglichen Orientierungen zu übertragen. Bei dreieckigen Gittern sind beispielsweise drei Orientierungen  $0$ ,  $\frac{1}{3}\pi$  und  $\frac{2}{3}\pi$  erlaubt. Dies induziert eine Partition  $(T_1, T_2, T_3)$  der Kanten des Kontaktgraphen. Im Gegensatz zu rechteckigen Dualen kann es in diesem Szenario zu einem kantengewichteten Graph exponentiell viele kombinatorisch unterschiedliche kantenproportionale Kontaktrepräsentationen geben. Kann man effizient entscheiden, ob mindestens eine existiert?

Wir haben gezeigt, dass die Minimierung der Größe eines rechteckigen Duals über alle RELs unter der Bedingung  $|s(e)| \geq \omega(e)$  für alle  $e \in E$  NP-schwer ist. Wie ist die Komplexität dieses Problems für  $\omega \equiv 1$ ? Dies entspricht einer offenen Frage in der Arbeit von He [He93].

# Literaturverzeichnis

- [ABF<sup>+</sup>11] Muhammad Jawaherul Alam, Therese Biedl, Stefan Felsner, Andreas Gerasch, Michael Kaufmann und Stephen G. Kobourov: *Linear-Time Algorithms for Proportional Contact Graph Representations*. In: *Proc. 22nd Int'l Symp. Algorithms and Computation (ISAAC'11)*, Band 7074 der Reihe *Lecture Notes Comput. Sci.*, Seiten 281–291. Springer-Verlag, 2011.
- [ABF<sup>+</sup>12] Muhammad Jawaherul Alam, Therese Biedl, Stefan Felsner, Michael Kaufmann, Stephen G. Kobourov und Torsten Ueckerdt: *Computing cartograms with optimal complexity*. In: *Proc. 28th ACM Symp. Comput. Geom. (SoCG'12)*, Ann. ACM Symp. Comput. Geom., Seiten 21–30. ACM, 2012.
- [BCKO08] Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld und Mark Overmars: *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag TELOS, Santa Clara, CA, USA, 3. Auflage, 2008.
- [BEL05] U. Brandes, M. Eiglsperger und J. Lerner: *GraphML Primer*, 2005. <http://graphml.graphdrawing.org/primer/graphml-primer.html>.
- [BG05] Therese Biedl und Burkay Genc: *Complexity of Octagonal and Rectangular Cartograms*. In: *Proc. 17th Canadian Conf. Comput. Geom. (CCCG'05)*, Seiten 117–120, 2005.
- [BLM10] Ernesto G. Birgin, Rafael D. Lobato und Reinaldo Morabito: *An effective recursive partitioning approach for the packing of identical rectangles in a rectangle*. *J. Operational Research Society*, 61(2):306–320, 2010.
- [BM04] John M. Boyer und Wendy J. Myrvold: *On the Cutting Edge: Simplified  $O(n)$  Planarity by Edge Addition*. *J. Graph Algorithms Appl.*, 8(2):241–273, 2004.
- [BSV11] Kevin Buchin, Bettina Speckmann und Sander Verdonschot: *Optimizing Regular Edge Labelings*. In: *Proc. 18th Int'l Conf. on Graph Drawing*, Band 6502 der Reihe *Lecture Notes Comput. Sci.*, Seiten 117–128. Springer-Verlag, 2011.
- [BV11] Therese Biedl und Lesvia Elena Ruiz Velázquez: *Orthogonal Cartograms with Few Corners Per Face*. In: *Proc. 12th Int'l Symp. Algorithms and Data Structures (WADS'11)*, Band 6844 der Reihe *Lecture Notes Comput. Sci.*, Seiten 98–109. Springer-Verlag, 2011.
- [CDR07] Sergio Cabello, Erik D. Demaine und Günter Rote: *Planar Embeddings of Graphs with Specified Edge Lengths*. *J. Graph Algorithms Appl.*, 11(1):259–276, 2007.
- [CG09] Jérémie Chalopin und Daniel Gonçalves: *Every planar graph is the intersection graph of segments in the plane*. In: *Proc. 41st Ann. ACM Symp. Theory Comput. (STOC'09)*, Seiten 631–638. ACM, 2009.

- [DBETT99] Giuseppe Di Battista, Peter Eades, Roberto Tamassia und Ioannis G. Tollis: *Graph Drawing: Algorithms for the Visualization of Graphs*. Prentice Hall, 1999.
- [dBMS09] Mark de Berg, Elena Mumford und Bettina Speckmann: *On rectilinear duals for vertex-weighted plane graphs*. *Discrete Mathematics*, 309(7):1794–1812, 2009.
- [EM09] David Eppstein und Elena Mumford: *Orientation-Constrained Rectangular Layouts*. In: *Proc. 11th Int'l Symp. Algorithms and Data Structures (WADS'09)*, Band 5664 der Reihe *Lecture Notes Comput. Sci.*, Seiten 266–277. Springer-Verlag, 2009.
- [EMSV09] David Eppstein, Elena Mumford, Bettina Speckmann und Kevin Verbeek: *Area-universal rectangular layouts*. In: *Proc. 25th ACM Symp. Comput. Geom. (SoCG'09)*, Seiten 267–276. ACM, 2009.
- [EW90] Peter Eades und Nicholas C. Wormald: *Fixed edge-length graph drawing is NP-hard*. *Discrete Applied Mathematics*, 28(2):111–134, 1990.
- [Fus09] Éric Fusy: *Transversal structures on triangulations: A combinatorial study and straight-line drawings*. *Discrete Math.*, 309(7):1870–1894, 2009.
- [GT97] Ashim Garg und Roberto Tamassia: *A new minimum cost flow algorithm with applications to graph drawing*. In: *Proc. of Internat. Symp. Graph Drawing (GD 96)*, Band 1190 der Reihe *Lecture Notes Comput. Sci.*, Seiten 201–216. Springer-Verlag, 1997.
- [Gur12] Gurobi Optimization, Inc.: *Gurobi Optimizer Reference Manual*, 2012. <http://www.gurobi.com>.
- [Hak88] S. Louis Hakimi: *A problem on rectangular floorplans*. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2:1533–1536, 1988.
- [He93] Xin He: *On Finding the Rectangular Duals of Planar Triangular Graphs*. *SIAM J. Comput.*, 22(6):1218–1226, 1993.
- [HK01] Petr Hliněný und Jan Kratochvíl: *Representing graphs by disks and balls (a survey of recognition-complexity results)*. *Discrete Math.*, 229(1–3):101–124, 2001.
- [HSB10] Stefan Holl, Armin Seyfried und Maik Boltes: *Hermes - Erforschung eines Evakuierungsassistenten für den Krisenfall bei Großveranstaltungen*. In: *GI Jahrestagung (2)*, Band 176 der Reihe *Lecture Notes in Informatics*, Seiten 162–167. Gesellschaft für Informatik, 2010.
- [ipe] *Ipe Extensible Drawing Editor*. <http://ipe7.sourceforge.net/>.
- [jun] *Java Universal Network/Graph Framework (JUNG)*. <http://jung.sourceforge.net/>.
- [Kar72] Richard M. Karp: *Reducibility Among Combinatorial Problems*. In: *Complexity of Computer Computations*, The IBM Research Symposia Series, Seiten 85–103. Plenum Press, New York, 1972.
- [KH94] Goos Kant und Xin He: *Two algorithms for finding rectangular duals of planar graphs*. In: *Proc. 19th Int'l Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, Band 790 der Reihe *Lecture Notes Comput. Sci.*, Seiten 396–410. Springer-Verlag, 1994.



- [Kir84] Scott Kirkpatrick: *Optimization by simulated annealing: Quantitative studies*. Journal of Statistical Physics, 34:975–986, 1984.
- [KK88] Krzysztof A. Kozminski und Edwin Kinnen: *Rectangular dualization and rectangular dissections*. IEEE Trans. Circuits and Systems, 35(11):1401–1416, 1988.
- [KN07] Kawaguchi und Hiroshi Nagamochi: *Orthogonal Drawings for Plane Graphs with Specified Face Areas*. In: *Proc. Theory and Application of Models of Computation (TAMC'07)*, Band 4484 der Reihe *Lecture Notes Comput. Sci.*, Seiten 584–594. Springer-Verlag, 2007.
- [Koe36] Paul Koebe: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*. Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Klasse, 88:141–164, 1936.
- [KR92] Donald E. Knuth und Arvind Raghunathan: *The Problem of Compatible Representatives*. SIAM J. Discrete Math., 5(3):422–427, 1992.
- [Lic82] David Lichtenstein: *Planar Formulae and Their Uses*. SIAM J. Comput., 11(2):329–343, 1982.
- [LL84] Sany M. Leinwand und Yen Tai Lai: *An algorithm for building rectangular floor-plans*. In: *Proc. 21st Design Automation Conference*, Seiten 663–664, 1984.
- [LLY03] Chien Chih Liao, Hsueh I Lu und Hsu Chun Yen: *Compact floor-planning via orderly spanning trees*. J. Algorithms, 48(2):441–451, 2003.
- [MM99] Terry A. McKee und F. R. McMorris: *Topics in Intersection Graph Theory*. SIAM, 1999.
- [NR12] Takao Nishizeki und Md. Saidur Rahman: *Rectangular Drawing Algorithms*. In: Roberto Tamassia (Herausgeber): *Handbook of Graph Drawing and Visualization*, Kapitel 13. CRC Press, 2012. Noch nicht erschienen.
- [Sto84] Larry Stockmeyer: *Optimal orientations of cells in slicing floorplan designs*. Inf. Control, 57(2-3):91–101, 1984.
- [SvKF06] Bettina Speckmann, Marc van Kreveld und Sander Florisson: *A Linear Programming Approach to Rectangular Cartograms*. In: *Progress in Spatial Data Handling*, Seiten 529–546. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [TT86] Roberto Tamassia und Ioannis G. Tollis: *A Unified Approach a Visibility Representation of Planar Graphs*. Discrete Comput. Geom., 1:321–341, 1986.
- [vKS07] Marc van Kreveld und Bettina Speckmann: *On rectangular cartograms*. Comput. Geom. Theory Appl., 37(3):175–187, 2007.
- [Wag09] Dorothea Wagner: *Algorithmen für planare Graphen*. Vorlesungsskript, 2009. "[http://i11www.itl.uni-karlsruhe.de/\\_media/teaching/sommer2009/planargraphs/vorlesung.pdf](http://i11www.itl.uni-karlsruhe.de/_media/teaching/sommer2009/planargraphs/vorlesung.pdf)".
- [Whi32] Hassler Whitney: *Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs*. American Journal of Mathematics, 54(1):150–168, 1932.
- [YS93] Kok Hoo Yeap und Majid Sarrafzadeh: *Floor-Planning by Graph Dualization: 2-Concave Rectilinear Modules*. SIAM J. Comput., 22(3):500–526, 1993.