

# Charakterisierung simultaner Planarität mittels verbotener Substrukturen

Diplomarbeit  
von

Lukas Hartmann

An der Fakultät für Informatik  
Institut für Theoretische Informatik

Erstgutachter:	Prof. Dr. Dorothea Wagner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Peter Sanders
Betreuende Mitarbeiter:	Dr. Ignaz Rutter Dipl.-Inform. Thomas Bläsius

Bearbeitungszeit: 1. Juli 2013 – 31. Dezember 2013



**Selbständigkeitserklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht und die Satzung des Karlsruher Instituts für Technologie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet habe.

Karlsruhe, den 18. Dezember 2013

(Lukas Hartmann)



## Zusammenfassung

Für zwei Graphen  $G_1 = (V, E_1)$  und  $G_2 = (V, E_2)$  mit derselben Knotenmenge  $V$  stellt das Problem SIMULTANE EINBETTUNG MIT FESTGELEGTEN KANTEN (SEFE) die Frage nach der Existenz von Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  von  $G_1$  und  $\mathcal{E}_2$  von  $G_2$ , sodass Bestandteile, die in beiden Graphen vorkommen, in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  gleich eingebettet werden. So sollen die Knoten in beiden Einbettungen auf dieselben Punkte und die Kanten, die in beiden Graphen vorkommen, auf dieselben Kurven abgebildet werden. In diesem Fall besitzen  $G_1$  und  $G_2$  eine SEFE.

In dieser Arbeit wird die Lösbarkeit dieses Problems durch verbotene Substrukturen charakterisiert. Dafür definieren wir angepasste Minorenoperationen, die zu dem Begriff des SEFE-Minors führen. Ein Graphenpaar besitzt genau dann eine SEFE, wenn es keine der verbotenen Substrukturen als SEFE-Minor enthält. Wir untersuchen dabei Instanzen, deren gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2} = (V, E_1 \cap E_2)$  zweifach zusammenhängend ist. Als Hilfsmittel benutzen wir den Algorithmus SEFEBICO von Angelini et al., der in diesen Fällen eine simultane Einbettung mit festgelegten Kanten berechnet oder abbricht, falls keine solche existiert. Der Algorithmus verwendet dabei die Datenstruktur des SPQR-Baums, die für den zweifach zusammenhängenden Graphen  $G_{1 \cap 2}$  konstruiert werden kann. In den Situationen, in denen der Algorithmus abbricht, werden wir durch geeignete Operationen die verbotene Substrukturen identifizieren und können so charakterisieren, welche Teilstrukturen eine SEFE im zweifach zusammenhängenden Fall verhindern.



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Struktur dieser Arbeit . . . . .	3
1.2	Stand der Forschung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Grundlagen und Notation</b>	<b>9</b>
2.1	Graphen und Planarität . . . . .	9
2.2	Der SPQR-Baum . . . . .	12
<b>3</b>	<b>SEFE-Minoren</b>	<b>17</b>
3.1	SEFE-Minoren-Operationen . . . . .	17
3.2	Alternierende Ketten . . . . .	20
<b>4</b>	<b>SEFE-Algorithmus von Angelini et al.</b>	<b>23</b>
4.1	Funktionsweise des Algorithmus . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Verbotene Substrukturen</b>	<b>29</b>
5.1	Keine kompatible Einbettung . . . . .	30
5.2	Keine erweiterbare SEFE . . . . .	33
5.3	Nicht-lösbare 2SAT-Instanz . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>63</b>
	<b>Literatur</b>	<b>67</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Die verbotenen Substrukturen $K_5$ , $K_{3,3}$ , $S_1$ und $S_2$ .	3
2.1	Planarer Graph mit verschiedenen Zeichnungen	11
2.2	Mögliche Skelette im SPQR-Baum	13
2.3	Konstruktion des SPQR-Baums	15
3.1	Kontraktion einer exklusiven Kante kann eine SEFE zerstören.	18
3.2	Erlaubte Kontraktion einer exklusiven Kante in Lemma 1	19
3.3	Die verbotenen Substrukturen $K_5$ , $K_{3,3}$ , $S_1$ und $S_2$	20
3.4	Beispiele für Graphen der alternierenden Ketten	21
4.1	Verschiedene Kantentypen für exklusive Kanten	24
4.2	Der Graph $G - G(\nu)$ als weiteres S-Knoten-Kind	26
4.3	Beispiel für die 2SAT-Klauseln eines S-Knotens	27
5.1	Mögliche Kontraktionen von S- und R-Knoten	30
5.2	Situationen in Lemma 5 ohne kompatible Einbettung	32
5.3	P- und R-Knoten mit intrapol Kanten	34
5.4	Reduktion von P- und R-Knoten durch SEFE-Minoren-Operationen	35
5.5	SEFE-Minoren, die als Zwischenschritte in Fall 1 von Lemma 10 auftreten	37
5.6	SEFE-Minoren, die als Zwischenschritte in Fall 2 von Lemma 10 auftreten	39
5.7	Ein R-Knoten kann in Lemma 11 als einen P-Knoten interpretiert werden	40
5.8	Situationen, die in einer 2SAT-Instanz zu einem $K_{3,3}$ führen	41
5.9	Reduktion eines S-Knoten-Kinds in der 2SAT-Instanz	42
5.10	Der Graph $S$ als Spezialfall bei der Reduktion der alternierenden Ketten	47
5.11	Reduktion eines (Halb-)Diamanten mit exklusiver und transzendenter Kante	49
5.12	Reduktion eines (Halb-)Diamanten mit exklusiven Kanten gleichen Typs	50
5.13	Die benachbarten Pole in einem Halbdiamanten	51
5.14	Reduktion eines (Halb-)Diamanten mit verschiedenen exklusiven Kanten	52
5.15	Beispiele für Graphen der reduzierten Ketten	53
5.16	Entfernen von gemeinsamen Kanten in einer reduzierten Kette	57
5.17	Entfernen von exklusiven Kanten in einer reduzierten Kette	58
5.18	Umwandlungen von gemeinsamen Kanten in einer reduzierten Kette	59
5.19	Umwandlungen von exklusiven Kanten in einer reduzierten Kette	60
5.20	Kontraktion von gemeinsamen Kanten in einer reduzierten Kette	61



# 1 Einführung

Bei der Graphenvisualisierung möchte man Graphen gerne so darstellen, dass bestimmte kombinatorische Eigenschaften sofort visuell erfassbar sind. Daher ist es bei zwei gegebenen Graphen oft wünschenswert, gemeinsame Bestandteile gleichartig zu zeichnen und so Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Graphen besser aufzuzeigen. Ein Anwendungsgebiet sind zum Beispiel Graphen, bei denen dynamisch Knoten und Kanten hinzugefügt oder auch wieder entfernt werden. Hält man die genaue Struktur zu zwei Zeitpunkten fest, dann soll direkt erkennbar sein, welche Teilstrukturen sich verändert haben. Für zwei planare Graphen führt diese Grundidee zu der Frage, ob sich ferner planare Einbettungen der beiden Graphen finden lassen, in denen die gemeinsamen Bestandteile gleich eingebettet werden.

Seien  $G_1 = (V, E_1)$  und  $G_2 = (V, E_2)$  zwei Graphen mit derselben Knotenmenge. Als *simultane Planarität* der beiden Graphen fassen wir die Existenz von planaren Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  der beiden Graphen auf, sodass gewisse gemeinsame Bestandteile gleich eingebettet werden. Hierfür haben sich drei grundlegende Möglichkeiten ergeben, die nachfolgend vorgestellt werden:

- Eine *simultane Einbettung* des Graphenpaares  $(G_1, G_2)$  ist dann gegeben, wenn in beiden Einbettungen ein Knoten  $v \in V$  auf den gleichen Punkt in der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  abgebildet wird.
- Eine *simultane Einbettung mit festgelegten Kanten* von  $(G_1, G_2)$  liegt dann vor, wenn die Knoten auf gleiche Punkte und zusätzlich jede Kante, die in beiden Graphen vorkommt, in den Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  auf dieselbe Jordankurve abgebildet werden.
- Eine *simultane geometrische Einbettung* von  $(G_1, G_2)$  ist eine simultane Einbettung mit festgelegten Kanten, für die wir zusätzlich fordern, dass die Kanten nur durch Strecken und nicht durch beliebige Jordankuren eingebettet werden.

Die simultane geometrische Einbettung stellt sehr starke Forderungen an die Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$ . So existieren im Allgemeinen für zwei planare und auch für zwei außenplanare Graphen keine solchen Einbettungen [Bra+07]. Dies ist selbst noch der Fall, wenn beide Graphen Bäume sind [GKV09]. Es kann sogar ein Gegenbeispiel angegeben werden, in dem einer der beiden Graphen ein Baum mit Höhe 4 ist und der andere Graph aus kantendisjunkten Pfaden besteht [Ang+12b]. Im Gegensatz dazu besitzen zwei planare Graphen stets eine simultane Einbettung [PW98]. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns daher mit dem verbleibenden Fall, bei dem wir die simultane Einbettung mit festgelegten Kanten untersuchen. Im Englischen heißt dieses Problem SIMULTANEOUS EMBEDDING WITH FIXED EDGES oder kurz SEFE, sodass wir diese Abkürzung nachfolgend verwenden wollen. Liegt eine simultane Einbettung mit festgelegten Kanten für zwei Graphen  $G_1$  und  $G_2$  vor, so sagen wir daher, dass  $G_1$  und  $G_2$  eine SEFE besitzen.

Mit Hilfe von *verbotenen Substrukturen* lässt sich die Lösbarkeit von graphentheoretischen Problemen oft kompakt charakterisieren: Eine gegebene Instanz ist genau dann lösbar, wenn sie keine verbotene Substruktur enthält. Die wohl bekanntesten Beispiele hierfür sind die Charakterisierungen für planare Graphen von Kuratowski [Kur30] und Wagner [Wag37], die Planarität über die verbotenen Teilgraphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  charakterisieren. Existiert für ein bestimmtes

Problem  $\Pi$  eine vollständige Auflistung von verbotenen Substrukturen, so können wir damit zusätzlich verifizieren, dass ein Algorithmus korrekt arbeitet. Ist eine Instanz von  $\Pi$  lösbar, dann berechnet der Algorithmus die entsprechende Lösung. Ist die Instanz hingegen nicht lösbar, so kann der Algorithmus eine verbotene Substruktur ausgeben. Die verbotenen Substrukturen treten somit als „Zeugen“ dafür auf, dass der entsprechende Algorithmus korrekt gearbeitet hat.

Zusätzlich erlauben es uns verbotene Substrukturen, Aussagen über die Komplexität eines Problems  $\Pi$  und somit über die mögliche Existenz effizienter Algorithmen zu treffen: Können wir für eine Instanz von  $\Pi$  in polynomieller Zeit überprüfen, ob eine vorgegebene Sequenz von konkreten Minoroperationen zu einer gegebenen, verbotenen Substruktur führt und somit die Instanz nicht lösbar ist, so liegt unser Problem in der Komplexitätsklasse  $\text{co-}\mathcal{NP}$ . Ist  $\Pi$  außerdem in der Klasse  $\mathcal{NP}$  enthalten, so wird stark vermutet, dass  $\Pi$  kein  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem ist. Andernfalls würde bereits  $\mathcal{NP} = \text{co-}\mathcal{NP}$  gelten, was als sehr unwahrscheinlich erachtet wird, da ansonsten die Polynomialzeithierarchie bis zur 1. Stufe kollabieren würde. Die Frage, ob  $\mathcal{NP} = \text{co-}\mathcal{NP}$  oder  $\mathcal{NP} \neq \text{co-}\mathcal{NP}$  gilt, ist noch immer ein offenes Problem der Komplexitätstheorie.

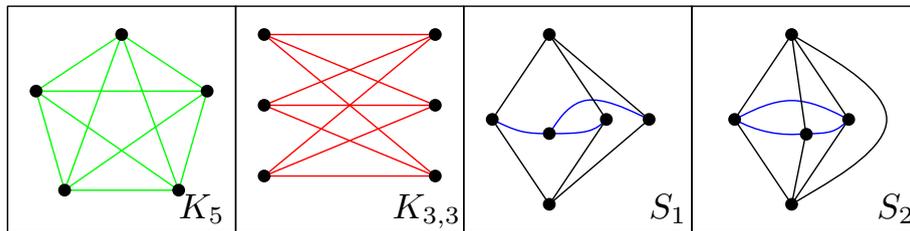
In dieser Arbeit werden wir Graphen  $G_1 = (V, E_1)$  und  $G_2 = (V, E_2)$  betrachten, deren gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2} = (V, E_1 \cap E_2)$  zweifach zusammenhängend ist. Für diese Graphen wollen wir die Existenz einer SEFE durch verbotene Substrukturen charakterisieren. Die verbotenen Substrukturen sind dabei eine Menge  $\mathcal{G}$  von Graphen, die selbst keine SEFE besitzen, und nicht als Minor vorkommen dürfen. Dazu vereinigen wir die beiden Graphen  $G_1$  und  $G_2$  zum Graphen  $G$ , der verschiedene Kantentypen besitzt. *Gemeinsame Kanten* sind dabei Kanten, die in  $E_1 \cap E_2$  vorkommen, während *exklusive Kanten* nur in einem der beiden Ausgangsgraphen vorhanden sind. Wir werden außerdem noch *transzendente Kanten* einführen, die eine Verallgemeinerung der exklusiven Kanten darstellen.

Die verbotenen Substrukturen können wir dann als Minoren des vereinigten Graphen  $G$  auffassen. Da jedoch die üblichen Minoroperationen „Knoten entfernen“, „Kante entfernen“ und „Kante kontrahieren“ zu stark im Bezug auf exklusive Kanten sind, benötigen wir hierfür angepasste Operationen, die wir als *SEFE-Minoren-Operationen* bezeichnen werden. Diese Operationen sind so gestaltet, dass sie eine für den Ausgangsgraphen  $G$  existierende SEFE erhalten. Entsteht ein Graph  $G'$  durch SEFE-Minoren-Operationen aus  $G$ , so nennen wir diesen einen *SEFE-Minor* von  $G$ .

Besitzt  $(G_1, G_2)$  nun eine SEFE, so existiert ebenfalls eine SEFE für den Graphen  $G$ . Da unsere SEFE-Minoren-Operationen eine SEFE erhalten, besitzt jeder SEFE-Minor von  $G$  ebenfalls eine SEFE. Da außerdem jede der verbotenen Substrukturen selbst keine SEFE besitzt, kann keine der Substrukturen als SEFE-Minor von  $G$  auftreten. Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, die Menge  $\mathcal{G}$  der verbotenen Substrukturen zu bestimmen, sodass folgendes Theorem gilt:

**Theorem:** *Seien  $(G_1, G_2)$  zwei Graphen, deren gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2}$  zweifach zusammenhängend ist. Dann existiert genau dann eine SEFE für  $(G_1, G_2)$ , wenn der vereinigte Graph  $G$  keine der verbotenen Substrukturen aus  $\mathcal{G}$  als SEFE-Minor enthält.*

Zur Identifizierung der verbotenen Substrukturen verwenden wir als Hilfsmittel den SPQR-Baum des gemeinsamen Graphen  $G_{1 \cap 2}$  und darauf aufbauend einen SEFE-Algorithmus von Angelini et al. [Ang+12a]. Unsere Analyse wird zeigen, dass  $\mathcal{G}$  genau aus den in Abbildung 1.1 dargestellten Graphen  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ ,  $S_1$  und  $S_2$ , sowie aus einer unendlichen Klasse von Graphen besteht. Eine erste, anschauliche Charakterisierung dieser Klasse führt uns dabei zum Begriff der *alternierenden Ketten*.

Abbildung 1.1: Die verbotenen Substrukturen  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ ,  $S_1$  und  $S_2$ .

## 1.1 Struktur dieser Arbeit

In Kapitel 2 führen wir allgemeine Grundlagen und Notationen ein, die wir in dieser Arbeit benötigen werden. Dazu werden in Abschnitt 2.1 Graphen und verwandte Konzepte eingeführt, bevor wir in Abschnitt 2.2 den SPQR-Baum als Datenstruktur für zweifach zusammenhängende Graphen vorstellen. Dieser repräsentiert alle planaren Einbettungen eines zweifach zusammenhängenden Graphen.

Kapitel 3 dient der genauen Definition der SEFE-Minoren-Operationen. Wir zeigen hier insbesondere, dass diese Operationen eine SEFE erhalten und charakterisieren die unendliche Graphenklasse der alternierenden Ketten.

Anschließend stellen wir in Kapitel 4 den Algorithmus von Angelini et al. für Graphenpaare vor, deren gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2}$  zweifach zusammenhängend ist. Die Darstellung des Algorithmus erfolgt dabei angepasst auf die bereits erarbeiteten Konzepte.

Dem konkreten Auffinden der verbotenen Substrukturen widmet sich schließlich Kapitel 5. Dazu untersuchen wir die Fälle, in denen der Algorithmus aus Kapitel 4 abbricht und somit keine SEFE für die Eingangsgraphen existiert. Mit den eingeführten Notationen ist dies der Fall, wenn für das Skelett eines Knotens  $\mu$  im SPQR-Baum von  $G_{1 \cap 2}$  keine kompatible Einbettung existiert (Abschnitt 5.1), der Graph  $G(\mu)$  keine erweiterbare SEFE besitzt (Abschnitt 5.2) oder die zu einem Kind von  $\mu$  gehörige 2SAT-Instanz nicht lösbar ist (Abschnitt 5.3). Wir können in diesen Situationen durch geeignete SEFE-Minoren-Operationen die verbotenen Substrukturen extrahieren. In Kapitel 6 fassen wir abschließend unsere Resultate zusammen und gehen auf weiterführende Fragestellungen ein.

## 1.2 Stand der Forschung

Wir gehen nun auf weitere Arbeiten ein, die ebenfalls simultane Einbettungen zum Inhalt haben, und zeigen so den aktuellen Stand der Forschung auf diesem Gebiet auf. Durch die Ausrichtung auf SEFE in dieser Arbeit behandeln wir hauptsächlich Veröffentlichungen zu dieser Einbettungsvariante. Einen umfangreichen Überblick über simultane Einbettungen allgemein bietet der Übersichtsartikel von Bläsius, Kobourov und Rutter [BKR13].

### Positive und negative Instanzen

Betrachten wir zunächst Instanzen  $(G_1, G_2)$ , für die stets eine SEFE existiert. Erten und Kobourov [EK05] zeigen, dass ein Baum und ein Pfad immer eine SEFE besitzen. Dieses Resultat wird von Di Giacomo und Liotta [DL07] auf den Fall ausgeweitet, dass einer der Graphen außenplanar und der andere ein Kreis ist. Zusätzlich wird in dieser Arbeit gezeigt, dass eine SEFE für zwei außenplanare Graphen existiert, wenn ihr gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2}$  aus einzelnen Pfaden besteht. Frati [Fra07] stellt einen Algorithmus vor, mit dem  $G_1$  und  $G_2$  simultan eingebettet werden können, falls  $G_1$  ein Baum und  $G_2$  ein beliebiger, planarer Graph ist. Dieser arbeitet noch immer

Instanz	Existenz einer SEFE	Referenz
$G_1$ Baum und $G_2$ Pfad	✓	[EK05]
$G_1$ außenplanar und $G_2$ Kreis	✓	[DL07]
$G_1, G_2$ außenplanar und $G_{1 \cap 2}$ Menge von Pfaden	✓	[DL07]
$G_1$ Baum und $G_2$ planar	✓	[Fra07]
$G_1$ Pseudowald, $G_2$ planar und $G_{1 \cap 2}$ kreisfrei	✓	[Fra07]
$G_1$ disjunkte Kreise, $G_2$ planar und $G_{1 \cap 2}$ kreisfrei	✓	[Fow+09]
$G_1$ außenplanar und $G_2$ planar	–	[Bra+07]
$k \geq 3$ außenplanare Graphen	–	[Bra+07]
Drei Pfade	–	[Bra+07]
$G_1$ und $G_2$ außenplanar	–	[Fra07]

Tabelle 1.1: Positive und negative Instanzen für das Problem SEFE.

korrekt, wenn  $G_1$  ein Pseudowald und  $G_{1 \cap 2}$  kreisfrei ist. Ein *Pseudowald* ist ein ungerichteter Graph, der höchstens einen Kreis besitzt. Nach Fowler et al. [Fow+09] lässt sich dieses Resultat auf den Fall erweitern, dass  $G_1$  disjunkte Kreise enthält und  $G_{1 \cap 2}$  kreisfrei ist.

In der Literatur finden sich darüber hinaus auch Beispiele für Instanzen, die keine SEFE besitzen. So zeigen Brass et al. [Bra+07], dass nicht immer eine SEFE existiert, wenn einer der beiden Graphen außenplanar und der andere Graph planar ist. Möchten wir  $k$  außenplanare Graphen  $G_1, \dots, G_k$  mit  $k \geq 3$  simultan einbetten, so existiert nach Brass et al. im Allgemeinen ebenfalls keine SEFE. In dieser Arbeit wird ferner ein Beispiel angegeben, in dem drei Pfade bereits keine SEFE besitzen. Frati [Fra07] erweitert das Ergebnis zu außenplanaren Graphen: Er zeigt, dass selbst zwei außenplanare Graphen im Allgemeinen keine SEFE besitzen.

Eine Übersicht der vorgestellten Beispiele und Gegenbeispiele findet sich in Tabelle 1.1.

## Charakterisierungen

Neben positiven und negativen Instanzen wurde in verschiedenen Arbeiten untersucht, unter welchen Umständen bestimmte Graphen immer eine SEFE besitzen. Jünger und Schulz [JS09] charakterisieren die Existenz einer SEFE über den gemeinsamen Graphen. So besitzen zwei Graphen  $G_1$  und  $G_2$  stets eine SEFE, falls ihr gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2}$  nur zwei verschiedene planare Einbettungen besitzt. Hat  $G_{1 \cap 2}$  hingegen mehrere Einbettungen, so können passende Graphen  $G_1$  und  $G_2$  konstruiert werden, für die keine SEFE existiert. Ebenfalls gilt nach Jünger und Schulz folgende wichtige Beziehung: Zwei Graphen  $G_1$  und  $G_2$  besitzen genau dann eine SEFE, wenn kombinatorische Einbettungen für  $G_1$  und  $G_2$  existieren, die dieselben Einbettungen des gemeinsamen Graphen  $G_{1 \cap 2}$  induzieren. Diese Charakterisierung wird in vielen Algorithmen verwendet, ist jedoch nicht offensichtlich. Für mehr als zwei Graphen ist dieser Zusammenhang sogar falsch, wie Angelini, Di Battista und Frati [ADF11] zeigen.

Eine Charakterisierung für Graphen  $G_1$ , die mit jedem beliebigen anderen Graphen  $G_2$  eine SEFE besitzen, liefern Fowler et al. [Fow+11]. So darf  $G_1$  keinen Teilgraph enthalten, der aus einem Kreis der Länge drei (ein Dreieck) und einer zusätzlichen Kante besteht, die nicht zu einem Knoten des Kreises inzident ist. Mit diesem Zusammenhang lassen sich außerdem außenplanare Graphen  $G_1$  charakterisieren, für die mit jedem anderen außenplanaren Graphen  $G_2$  eine SEFE existiert.

## Algorithmen

Für gegebene Graphen ist es wünschenswert zu entscheiden, ob sie eine SEFE besitzen und falls dies der Fall ist, wie eine solche Einbettung aussieht. Da es sowohl positive als auch negative In-

stanzen gibt, bietet es sich an, Algorithmen zu entwickeln, die eine SEFE berechnen können. Nach Gassner et al. [Gas+06] ist dieses Problem für drei und mehr Graphen  $\mathcal{NP}$ -vollständig, während für zwei planare Graphen  $G_1$  und  $G_2$  die Komplexität noch immer offen ist. Für bestimmte Fälle existieren jedoch effiziente Algorithmen, die wir nachfolgend vorstellen.

Ein erster Algorithmus stammt von Fowler et al. [Fow+09] für den Fall, dass  $G_1$  ein Pseudowald ist. Dieser lässt sich auf die Situation erweitern, wenn  $G_1$  höchstens zwei Kreise enthält und der gemeinsame Graph  $G_{1 \cap 2}$  ein Pseudowald ist. Beide Algorithmen besitzen eine lineare Laufzeit. Für Graphen, deren gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2}$  zweifach zusammenhängend ist, wurden zwei unterschiedliche Linearzeit-Algorithmen entwickelt. Der Algorithmus von Haeupler, Jampani und Lubiw [HJL10] basiert auf einem Planaritätstest von Haeupler und Tarjan [HT08] und benutzt PQ-Bäume als Datenstruktur. Angelini et al. [Ang+12a] verwenden einen anderen Ansatz, indem eine Einbettung von  $G_{1 \cap 2}$ , ausgehend von dessen SPQR-Baum, berechnet wird und exklusive Kanten nachträglich hinzugefügt werden. In der gleichen Arbeit wird auch ein Algorithmus mit linearer Laufzeit für Instanzen vorgestellt, deren gemeinsamer Graph ein Stern ist.

Die Arbeit von Bläsius und Rutter [BR13b] erweitert diese Resultate dahingehend, dass ein Algorithmus entwickelt wird für zweifach zusammenhängende Graphen, deren gemeinsamer Graph zusammenhängend ist. Dieser verwendet PQ-Bäume und hat quadratische Laufzeit. Ebenfalls von Bläsius und Rutter [BR13a] stammen Resultate für den Fall, dass der gemeinsame Graph nicht zusammenhängend ist, indem die relative Lage der Zusammenhangskomponenten von  $G_{1 \cap 2}$  betrachtet wird. Bläsius und Rutter stellen einen Linearzeit-Algorithmus für Instanzen vor, deren gemeinsamer Graph aus disjunkten Kreisen besteht. Dieser kann auf gemeinsame Graphen erweitert werden, deren Komponenten bereits feste Einbettungen besitzen. Der resultierende Algorithmus besitzt quadratische Laufzeit.

Einen anderen algebraischen Ansatz wählt Schaefer [Sch13]. Er verwendet ein klassisches Theorem von Hanani und Tutte [Han34; Tut70], nach dem ein Graph  $G$  genau dann planar ist, wenn seine *independent odd crossing number*  $X_{\text{odd}}(G) = 0$  ist. Für eine Einbettung  $\mathcal{E}$  ist  $X_{\text{odd}}(\mathcal{E})$  definiert als die Anzahl an nichtadjazenten Kantenpaaren, die sich in dieser Einbettung ungerade oft kreuzen. Für einen Graphen ist dann  $X_{\text{odd}}(G)$  das Minimum der  $X_{\text{odd}}(\mathcal{E})$  für seine möglichen Einbettungen. Diese Charakterisierung lässt sich in ein System von linearen Gleichungen über  $\mathbb{F}_2$ , dem Körper mit zwei Elementen, überführen. Darauf aufbauend entwickelt Schaefer Algorithmen mit polynomieller Laufzeit für die Fälle, dass der gemeinsame Graph  $G_{1 \cap 2}$  aus zweifach zusammenhängenden Komponenten besteht, dass  $G_{1 \cap 2}$  Maximalgrad 3 besitzt oder dass einer der beteiligten Graphen eine disjunkte Vereinigung aus Unterteilungen von dreifach zusammenhängenden Graphen ist.

Bläsius, Karrer und Rutter [BKR14] zeigen, dass mit geringen Modifikationen der Algorithmus von Angelini et al. für zweifach zusammenhängende Graphen ebenfalls angewendet werden kann, wenn  $G_{1 \cap 2}$  aus zweifach zusammenhängenden Komponenten besteht. Dazu sind einige Vorberechnungsschritte nötig, die in linearer Zeit durchgeführt werden können, sodass der modifizierte Algorithmus noch immer lineare Laufzeit besitzt. Auf ähnliche Weise können zu den Eingabegraphen äquivalente SEFE-Instanzen konstruiert werden, die bestimmte Schnittknoten nicht mehr enthalten. Dies ist für Schnittknoten im vereinigten Graphen  $G_1 \cup G_2$  und für *simultane Schnittknoten* mit Maximalgrad 3 möglich. Simultane Schnittknoten sind hierbei Schnittknoten in  $G_1$  und  $G_2$ , die jedoch nicht als Schnittknoten im vereinigten Graphen auftreten. Diese Vorberechnungen lassen sich ebenfalls in linearer Zeit durchführen. In derselben Arbeit stellen Bläsius, Karrer und Rutter außerdem einen Algorithmus mit quadratischer Laufzeit für den Fall vor, dass die Graphen  $G_1$  und  $G_2$  *gemeinsamen P-Knoten-Grad 3* besitzen. Sei  $\mathcal{T}$  der SPQR-Baum eines Blocks von  $G_1$  oder  $G_2$  und  $\mu$  ein P-Knoten in  $\mathcal{T}$  mit Polen  $u$  und  $v$ . Dann besitzt  $\mu$  den *P-Knoten-Grad*  $k$ , falls für  $u$  und  $v$  je höchstens  $k$  Kinder  $\mu_i$  von  $\mu$  existieren, für die  $u$  bzw.  $v$  zu einer gemeinsamen Kante in  $G(\mu_i)$  inzident ist,  $i = 1, \dots, k$ . Die Graphen  $G_1$  und  $G_2$  besitzen nun gemeinsamen P-Knoten-Grad  $k$ , wenn für alle P-Knoten aller Blöcke von  $G_1$  und  $G_2$  der P-

Instanz	Komplexität	Referenz
Drei planare Graphen	$\mathcal{NP}$ -vollständig	[Gas+06]
$G_1$ Pseudowald	$O( V )$	[Fow+09]
$G_1$ hat $\leq 2$ Kreise und $G_{1 \cap 2}$ Pseudowald	$O( V )$	[Fow+09]
$G_{1 \cap 2}$ zweifach zusammenhängend	$O( V )$	[HJL10]
$G_{1 \cap 2}$ zweifach zusammenhängend	$O( V )$	[Ang+12a]
$G_{1 \cap 2}$ Stern	$O( V )$	[Ang+12a]
$G_1, G_2$ zweifach zshg. und $G_{1 \cap 2}$ zshg.	$O( V ^2)$	[BR13b]
$G_{1 \cap 2}$ besteht aus disjunkten Kreisen	$O( V )$	[BR13a]
$G_{1 \cap 2}$ besteht aus Komponenten mit fester Einbettung	$O( V ^2)$	[BR13a]
$G_{1 \cap 2}$ besteht aus zweifach zshg. Komponenten	polynomiell	[Sch13]
$G_{1 \cap 2}$ hat Maximalgrad 3	polynomiell	[Sch13]
$G_1$ besteht aus Unterteilungen dreifach zshg. Komponenten	polynomiell	[Sch13]
$G_{1 \cap 2}$ besteht aus zweifach zshg. Komponenten	$O( V )$	[BKR14]
$(G_1, G_2)$ haben gemeinsamen P-Knoten-Grad 3	$O( V ^2)$	[BKR14]

Tabelle 1.2: Bekannte Algorithmen zur Berechnung einer SEFE und ihre Laufzeit.

Knoten-Grad  $k$  ist. Dieses Resultat erweitert folglich den Fall, dass der gemeinsame Graph  $G_{1 \cap 2}$  Maximalgrad 3 besitzt.

In Tabelle 1.2 findet sich eine Übersicht über die vorgestellten Algorithmen und ihre Laufzeit.

## Verwandte Probleme

Abschließend wollen wir weitere Einbettungsprobleme vorstellen, die eng mit unserem Problem SEFE verbunden sind.

Angelini et al. [Ang+12a] zeigen die Äquivalenz zwischen SEFE für Graphen, deren gemeinsamer Graph zusammenhängend ist, und PARTITIONED T-COHERENT 2-PAGE BOOK EMBEDDING auf. Eine Instanz von PARTITIONED 2-PAGE BOOK EMBEDDING besteht aus einem Eingabegraphen  $G$  und einer Partition seiner Kanten in disjunkte Mengen  $E_1$  und  $E_2$ . Es soll eine Einbettung  $\mathcal{E}$  von  $G$  gefunden werden, bei der alle Knoten auf einer Geraden  $l$  (dem Buchrücken, *spine*), und alle Kanten aus  $E_i$  kreuzungsfrei auf einer zu  $l$  adjazenten Halbebene (einer Buchseite, *page*), eingebettet werden können,  $i = 1, 2$ . Das Problem PARTITIONED T-COHERENT 2-PAGE BOOK EMBEDDING ist nun eine Verallgemeinerung davon, die als Eingabe zusätzlich einen Baum  $T$  besitzt, deren Blätter gerade die Knoten von  $G$  sind. Sei nun  $T_t$  der Teilbaum von  $T$ , dessen Wurzel  $t$  ist. Wir stellen an  $\mathcal{E}$  die zusätzliche Forderung, dass für jeden inneren Knoten  $t$  aus  $T$  die Blätter von  $T_t$ , d.h. die enthaltenen Knoten aus  $G$ , benachbart in  $l$  eingebettet werden. Die Transformation einer SEFE-Instanz, deren gemeinsamer Graph zusammenhängend ist, in eine äquivalente Instanz von PARTITIONED T-COHERENT 2-PAGE BOOK EMBEDDING kann in Linearzeit erfolgen, sodass die beiden Probleme die gleiche Zeitkomplexität besitzen. Somit ist die Komplexität von PARTITIONED T-COHERENT 2-PAGE BOOK EMBEDDING ebenfalls noch offen.

Der Algorithmus von Bläsius und Rutter [BR13b] für zusammenhängende Graphen  $G_1$  und  $G_2$ , deren gemeinsamer Graph zweifach zusammenhängend ist, verwendet PQ-Bäume. Die möglichen zyklischen Kantenordnungen eines Knotens in einem zweifach zusammenhängenden, planaren Graphen können jeweils durch einen PQ-Baum dargestellt werden, sodass für eine planare Einbettung die Ordnungen für die entsprechenden PQ-Bäume konsistent gewählt werden müssen. Bläsius und Rutter definieren darauf aufbauend das Problem SIMULTANEOUS PQ-ORDERING. Für eine gegebene Menge an PQ-Bäumen mit einer hierarchischen Beziehung wird die Frage ge-

stellt, ob für jeden PQ-Baum simultane zyklische Ordnungen seiner Blätter so gewählt werden können, dass diese Ordnungen konsistent die hierarchische Beziehung berücksichtigen.

Eng verwandt mit der Suche nach einer SEFE ist auch das Problem PARTIALLY EMBEDDED PLANARITY. Für einen Graphen  $G$ , einen Teilgraphen  $H$  von  $G$  und eine planare Einbettung  $\mathcal{H}$  von  $H$  soll eine planare Einbettung  $\mathcal{E}$  von  $G$  gefunden werden, für die  $\mathcal{E}|_H = \mathcal{H}$  gilt. Anders ausgedrückt soll die Einbettung  $\mathcal{E}$  gerade die Einbettung  $\mathcal{H}$  erweitern. Von Angelini et al. [Ang+10] stammt ein Algorithmus, der dieses Problem in linearer Zeit löst. Die Arbeit von Jelínek, Kratochvíl und Rutter [JKR13] komplementiert das Verständnis dieses Problems, indem sie PARTIALLY EMBEDDED PLANARITY mittels verbotener Substrukturen charakterisiert. Dazu werden auf das Problem angepasste Minoren-Operationen eingeführt, mit denen bestimmte Teilstrukturen nicht als Minoren auftreten dürfen. Die gefundenen verbotenen Substrukturen bestehen aus 22 Graphen mit bis zu sechs Knoten und aus einer unendlichen Graphenklasse. Wie bereits erwähnt, zeigen Jünger und Schulz, dass zwei Graphen genau dann eine SEFE besitzen, wenn es planare Einbettungen gibt, die auf dem gemeinsamen Graphen übereinstimmen. Mit Hilfe der verbotenen Substrukturen von PARTIALLY EMBEDDED PLANARITY kann man daher besser verstehen, welche Teilstrukturen im gemeinsamen Graphen nicht vorkommen dürfen.



## 2 Grundlagen und Notation

In diesem Kapitel möchten wir grundlegende Konzepte und Notationen einführen. Dabei beschränken wir uns hauptsächlich auf diejenigen Aspekte, die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigen werden. Für eine allgemeine Einführung in Graphentheorie verweisen wir an dieser Stelle auf das gleichnamige Buch von Diestel [Die10]. Eine kompakte Einführung zu Algorithmen und Datenstrukturen kann in *The Basic Toolbox* von Mehlhorn und Sanders [MS08] gefunden werden.

### 2.1 Graphen und Planarität

Ein *Graph*  $G$  ist ein Paar  $G = (V, E)$  mit einer endlichen Menge  $V$  von *Knoten* (*vertices*) und einer endlichen Menge  $E$  von *Kanten* (*edges*). Dabei ist  $E \subseteq [V]^2$ , d.h. die Elemente von  $E$  sind zwei-elementige Teilmengen von  $V$ . Für die Knotenmenge eines gegebenen Graphen  $G$  schreiben wir auch  $V(G)$  und für die Kantenmenge  $E(G)$ . Anschaulich gesprochen verbindet eine Kante  $e = \{u, v\} \in E$  zwei Knoten  $u$  und  $v$  miteinander, wofür wir verkürzend  $e = uv$  schreiben. In unserer Definition eines Graphen besitzen die Kanten keine Richtungsinformation, sodass  $uv = vu$  gilt. Wir sprechen daher auch von einem *ungerichteten Graphen*. In manchen Situationen ist es jedoch von Vorteil, dass die Kanten in eine bestimmte Richtung zeigen. Ein *gerichteter Graph* ist ein Tupel  $G = (V, E)$  mit  $E \subseteq V \times V$ . Jede Kante besteht somit aus einem geordneten Paar  $(u, v)$  von Knoten. Da wir in dieser Arbeit nur mit ungerichteten Graphen arbeiten, werden wir uns bei den nachfolgenden Definitionen auf diesen Fall beschränken. Auf gerichtete Graphen können die meisten Definitionen jedoch analog übertragen werden.

Bei einer Kante  $e = uv$  sind die Knoten  $u$  und  $v$  *adjazent* zueinander und jeweils *inzident* zur Kante  $e$ . Existiert eine weitere Kante  $e' = vw$ , so sind die Kanten  $e$  und  $e'$  in  $v$  ebenfalls *adjazent*. Für einen Knoten  $v \in V$  sei der *Grad* von  $v$  die Anzahl der zu  $v$  inzidenten Kanten aus  $E$ . Wir schreiben hierfür auch  $\deg(v)$ . Einen Knoten  $v$  mit  $\deg(v) = 0$  bezeichnen wir als *isolierten Knoten*. Ist  $E$  eine Multimenge, in der Elemente mehrfach vorkommen dürfen, so können mehrere Kanten das gleiche Knotenpaar in  $G$  verbinden. In diesem Fall nennen wir  $G$  einen *Multigraphen*. Zwei Kanten  $e$  und  $e'$  mit  $e \neq e'$ , die dieselben inzidenten Knoten besitzen, heißen *parallele Kanten*. Einen Graphen ohne Multikanten werden wir als *einfachen Graphen* bezeichnen. Ein gerichteter Graph kann durch seine Definition auch Kanten  $(v, v)$  für  $v \in V$  besitzen, die als *Schleifen* bezeichnet werden. Ein einfacher Graph darf ferner keine solchen Kanten enthalten.

#### Pfade und Kreise

Ein *Pfad* in  $G$  ist eine Folge von Knoten  $v_1, \dots, v_k$ , sodass  $v_i v_{i+1} \in E(G)$  und die Kanten  $v_i v_{i+1}$  paarweise verschieden sind für  $i = 1, \dots, k-1$ . Je nach Situation werden wir einen Pfad auch als Folge von Kanten  $v_1 v_2, \dots, v_{k-1} v_k$  ansehen. Ein Pfad heißt *einfach*, falls zusätzlich die Knoten  $v_1, \dots, v_k$  paarweise verschieden sind. Ein Graph, in dem für je zwei Knoten  $u$  und  $v$  ein Pfad  $u, \dots, v$  existiert, heißt *zusammenhängend*.

Ein (*einfacher*) *Kreis* ist ein Pfad  $v_0, \dots, v_k$ , für den  $v_0 = v_k$  gilt und für den die Knoten  $v_1, \dots, v_k$  paarweise verschieden sind. Einen Graphen, der einen Kreis enthält, nennen wir *zyklisch*. Ein Graph, in dem es keinen Kreis gibt, heißt *azyklisch*, *kreisfrei* oder *Wald* und einen zusammenhängenden, kreisfreien Graphen bezeichnen wir als einen *Baum*. In einem Baum existiert zwischen jedem Knotenpaar ein eindeutiger Pfad. Die Knoten  $v$  mit  $\deg(v) > 1$  nennen wir in einem Baum *innere Knoten*. Knoten mit  $\deg(v) = 1$  bezeichnen wir als *Blätter*. In einem Baum können wir einen Knoten  $r$  als *Wurzel* auszeichnen und so eine hierarchische Beziehung zwischen den Knoten ausdrücken. Für einen Knoten  $v$  bezeichnen wir den ersten Knoten  $u$  nach  $v$  auf dem eindeutigen Pfad  $v, u, \dots, r$  als *Vater* von  $u$ . Umgekehrt ist  $v$  ein *Kind* von  $u$ .

### Teilgraphen und Minoren

Ein *Teilgraph* oder *Subgraph* eines Graphen  $G$  ist ein Graph  $G' = (V', E')$ , sodass  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$  gilt. Eine Teilmenge  $V' \subseteq V$  induziert den Subgraphen  $G[V'] = (V', E \cap [V']^2)$  von  $G$ . Den Teilgraphen  $G[V \setminus V']$  bezeichnen wir auch als  $G - V'$ . Analog definieren wir für  $E' \subseteq E$  den Teilgraph  $G - E'$  durch das Paar  $(V^*, E \setminus E')$ , wobei in  $V^*$  bereits alle isolierten Knoten entfernt wurden. Wir schreiben auch  $G - v$  statt  $G - \{v\}$  für ein  $v \in V$  und  $G - e$  statt  $G - \{e\}$  für  $e \in E$ , wenn wir einen Knoten bzw. eine Kante aus  $G$  entfernen wollen. Ist ein Teilgraph  $G' = (V', E')$  gegeben, so bezeichnen wir mit  $G - G'$  ebenfalls den Graphen  $G[V \setminus V']$ .

Eine weitere Möglichkeit, einen gegebenen Graphen zu verändern, besteht in der *Kantenkontraktion*. Anschaulich gesprochen wird dabei eine Kante  $e$  zusammengezogen und alle Kanten, die adjazent zu  $e$  sind, an einem verbleibenden Knoten gesammelt. Formal ergibt sich aus  $G = (V, E)$  durch Kontraktion der Kante  $e = uv$  der Graph  $G' = (V', E')$  mit  $V' = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{x\}$  für  $x \notin V$  und  $E' = E(G - u - v) \cup \{e' = xw \mid uw \in E \text{ oder } vw \in E, e' \neq uv\}$ . Darauf aufbauend können wir den Begriff des Graphenminors definieren. Ein *Minor* eines Graphen  $G$  ist ein Graph  $G'$ , der durch eine (endliche) Folge der Operationen „Knoten entfernen“, „Kante entfernen“ oder „Kante kontrahieren“ aus  $G$  entsteht. Diese bezeichnen wir auch als *Minorenoperationen*. Ein Minor kann daher als Verallgemeinerung eines Teilgraphen angesehen werden, da jeder Teilgraph von  $G$  auch ein Minor von  $G$  ist.

### k-facher Zusammenhang

Wie bereits erwähnt, ist ein Graph  $G$  zusammenhängend, wenn es zwischen jedem Knotenpaar einen Pfad in  $G$  gibt. Wir müssen daher mindestens einen Knoten aus  $G$  entfernen, damit dieser in verschiedene Teilgraphen zerfällt. Diesen Umstand verallgemeinern wir durch folgende Definition: Ein Graph ist *k-fach zusammenhängend*, falls nach dem Entfernen von weniger als  $k$  Knoten der resultierende Graph zusammenhängend ist. Nach dem Satz von Menger [Men27] existieren in einem  $k$ -fach zusammenhängenden Graphen  $G$  zwischen jeweils zwei Knoten  $u$  und  $v$  (mindestens)  $k$  paarweise knotendisjunkte Pfade. Ein einfach zusammenhängender Graph ist folglich auch zusammenhängend, und wir werden diese Begriffe synonym verwenden. Zerfällt ein zusammenhängender Graph  $G$  nach dem Entfernen eines Knotens  $v$  in verschiedene Teilgraphen, so heißt  $v$  *Schnittknoten* (*cutvertex*). Ein zusammenhängender Graph ist somit genau dann zweifach zusammenhängend, wenn er keine Schnittknoten besitzt. Einen inklusionsmaximalen, zweifach zusammenhängenden (Teil-)Graphen bezeichnen wir als *Block*. Jeder Knoten, der kein Schnittknoten ist, gehört in einem zusammenhängenden Graphen zu genau einem Block.

### Einbettungen und planare Graphen

Bis jetzt sind unsere Definitionen zu Graphen rein kombinatorischer Natur gewesen. Durch die Struktur eines Graphen ist es naheliegend, diesen auch als geometrisches Objekt zu betrachten. Eine *Zeichnung* eines zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Abbildung  $\Gamma$ , die jeden

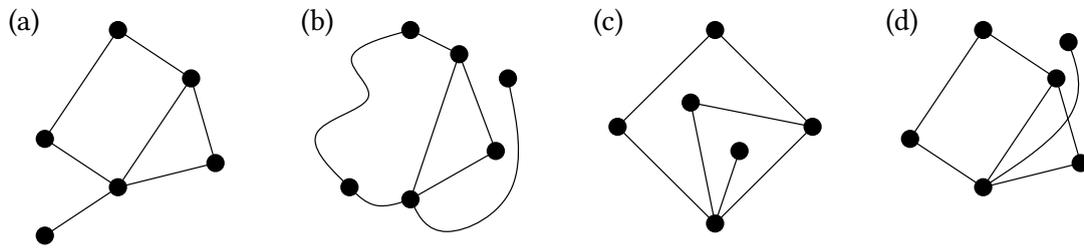


Abbildung 2.1: Ein planarer Graph mit verschiedenen Zeichnungen: Die Zeichnungen (a) und (b) sind äquivalent und induzieren die gleiche Einbettung. Zeichnung (c) ist nicht äquivalent zu den vorherigen Zeichnungen. Zeichnung (d) ist eine nicht planare Zeichnung für den Graphen.

Knoten  $v \in V$  auf einen Punkt der euklidische Ebene  $\mathbb{R}^2$  und jede Kante  $e = uv \in E$  auf eine einfache Jordan-Kurve in  $\mathbb{R}^2$  abbildet, welche die Punkte  $\Gamma(u)$  und  $\Gamma(v)$  miteinander verbindet. Eine Zeichnung heißt *planar*, wenn sich die Jordan-Kurven nur in gemeinsamen Endpunkten schneiden. Einen Graphen nennen wir ebenfalls *planar*, wenn für ihn eine planare Zeichnung existiert. Durch eine planare Zeichnung  $\Gamma$  zerfällt  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma(G)$  ferner in verschiedene offene Gebiete, die wir als *Facetten* bezeichnen. Genau eine der Facetten ist unbeschränkt und wir nennen diese die *äußere Facette*. Die anderen Facetten sind *innere Facetten*.

Für eine Facette  $f$  betrachten wir die Knoten  $v \in V$ , für die  $\Gamma(v)$  auf dem Rand von  $f$  liegt. Gehen wir den Rand der Facette so ab, dass dabei  $f$  links liegt, so erhalten wir eine zyklische Reihenfolge von Randknoten, die wir mit  $\partial f$  bezeichnen. Beachte, dass in dieser Liste auch Knoten mehrfach auftreten können. Wir können nun eine Äquivalenzrelation auf den Zeichnungen eines Graphen  $G$  einführen: Zwei Zeichnungen sind äquivalent, wenn die zyklischen Reihenfolgen der Randknoten  $\partial f$  für jede Facette  $f$  und die äußere Facette gleich sind. Eine Äquivalenzklasse von (planaren) Zeichnungen bezeichnen wir als (*planare*) *Einbettung*. Erhält man aus einer Einbettung  $\mathcal{E}_1$  die Einbettung  $\mathcal{E}_2$  durch Umkehrung der zyklischen Ordnungen  $\partial f$  aller Facetten  $f$ , so ist  $\mathcal{E}_1$  genau eine Spiegelung der Einbettung  $\mathcal{E}_2$ . In Abbildung 2.1 sind verschiedene Zeichnungen und Einbettungen für einen planaren Graphen dargestellt.

## Eigenschaften planarer Graphen

Planarität ist eine wichtige Eigenschaft eines Graphen und nicht nur für theoretische Untersuchungen interessant. So lassen sich einige schwierige Probleme auf planaren Graphen deutlich effizienter lösen. Zum Beispiel können maximale Flüsse in einem planaren Graphen mit einem Algorithmus von Erickson [Eri10] in  $O(|V| \log |V|)$  Zeit berechnet werden. Ein Teilgraph oder ein Minor eines planaren Graphen ist selbst wieder planar. Nach dem Satz von Kuratowski [Kur30] lassen sich planare Graphen vollständig über gewisse Teilstrukturen charakterisieren: Ein Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung des  $K_5$  oder des  $K_{3,3}$  als Subgraphen enthält. Ein Graph  $G'$  ist eine Unterteilung von  $G$ , wenn  $G$  aus  $G'$  entsteht, indem Knoten  $v$  mit  $\deg(v) = 2$  und ihre inzidenten Kanten  $uv$  und  $vw$  aus  $G'$  entfernt und durch Kanten  $uw$  ersetzt werden. In der Literatur findet sich für einen Graphen auch die Bezeichnung *topologischer Minor* von  $G$ , wenn dieser eine Unterteilung eines Teilgraphen von  $G$  ist. Ein ähnliches Resultat liefert der Satz von Wagner [Wag37], mit dem sich Planarität eines Graphen mittels Minoren charakterisieren lässt: Ein Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er keinen der beiden Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  als Minor enthält. Algorithmisch lässt sich Planarität effizient testen. Ein erster Linearzeit-Algorithmus wurde hierzu von Hopcroft und Tarjan [HT74] vorgestellt.

Ein planarer Graph  $G = (V, E)$  besitzt weitere interessante Eigenschaften. Bezeichnen wir mit  $|F|$  die Anzahl der Facetten von  $G$ , so gilt stets die *Euler-Formel*  $|V| - |E| + |F| = 2$ . Fer-

ner ist  $G$  genau dann planar, wenn alle Blöcke in  $G$  planare Graphen sind. Wir beenden diesen Abschnitt mit einem klassischen Resultat von Whitney [Whi32], das besagt, dass bei Festlegung der äußeren Facette für jeden dreifach zusammenhängenden, planaren Graphen genau eine, bis auf Spiegelung eindeutige, planare Einbettung existiert.

## 2.2 Der SPQR-Baum

Der von Di Battista und Tamassia [DT96a; DT96b] eingeführte SPQR-Baum ist eine Datenstruktur, mit deren Hilfe ein zweifach zusammenhängender Graph in seine dreifach zusammenhängenden Komponenten aufgeteilt werden kann. Die Beziehung zwischen diesen Komponenten wird dabei als Baum repräsentiert, dessen Blätter bijektiv den Kanten des Graphen entsprechen. Zunächst wird beschrieben, aus welchen Bestandteilen ein SPQR-Baum besteht und wie wir diesen für einen gegebenen Graphen konstruieren können. Anschließend werden wir auf weitere Eigenschaften der Datenstruktur eingehen. Die Beschreibung des SPQR-Baums basiert dabei stark auf der Darstellung von Rutter [Rut11].

Zur Beschreibung des SPQR-Baums benötigen wir die nachfolgenden Definitionen. Ein *Zerlegungspaar* (*split pair*) eines Graphen  $G$  ist ein Knotenpaar  $\{u, v\}$ , das entweder adjazent ist oder für das der Graph  $G - u - v$  in verschiedene Zusammenhangskomponenten zerfällt. Eine *maximale Zerlegungskomponente* (*split component*) bezüglich eines Zerlegungspaares  $\{u, v\}$  ist eine Kante  $uv$  oder ein maximaler Teilgraph von  $G$ , der  $u$  und  $v$  enthält und für den die beiden Knoten kein Zerlegungspaar bilden. Mit dieser Definition gehört jeder Knoten  $w \neq u, v$  aus  $G$  zu genau einer maximalen Zerlegungskomponente.

### Bestandteile eines SPQR-Baums

Sei  $G$  nun ein zweifach zusammenhängender Graph. Mit  $\mathcal{T}$  bezeichnen wir den SPQR-Baum von  $G$ . Um die Knoten des Graphen  $G$  und die Knoten des SPQR-Baums einfacher auseinander halten zu können, werden die Knoten aus  $\mathcal{T}$  stets mit griechischen Buchstaben bezeichnet (meist  $\mu, \nu$  oder  $\xi$ ), während die Knoten aus  $G$  mit Buchstaben des lateinischen Alphabets benannt werden (meist  $u, v$  oder  $w$ ). Wir werden den Graphen  $G$  sukzessive mit Hilfe von Zerlegungspaaren zerlegen und so  $\mathcal{T}$  konstruieren. Jedem Zerlegungsschritt, d.h. jedem Knoten  $\mu$  in  $\mathcal{T}$ , ordnen wir dabei einen Multigraphen  $\text{skel}(\mu)$  zu, den wir *Skelett bezüglich  $\mu$*  nennen. Jeder Knoten von  $\text{skel}(\mu)$  ist ebenfalls in  $G$  enthalten, während eine Kante  $uv$  in  $\text{skel}(\mu)$  einem Zerlegungspaar  $\{u, v\}$  in  $G$  entspricht, anhand dessen wir den Graph in einem nächsten Schritt weiter zerlegen. Die Kanten sind dabei entweder *virtuelle Kanten*, die einen Subgraphen aus  $G$  repräsentieren, oder *reale Kanten*, die auch als Kante in  $G$  vorkommen. Je nach Gestalt des Skeletts eines Knotens in  $\mathcal{T}$  teilen wir diesen in unterschiedliche Typen ein:

- Das Skelett eines *Q-Knotens* besteht aus genau zwei parallelen Kanten  $uv$  mit einer virtuellen Kante und einer realen Kante.
- Das Skelett eines *S-Knotens* (*series node*) besteht aus einem Kreis von virtuellen Kanten mit Länge  $k \geq 3$ .
- Das Skelett eines *P-Knotens* (*parallel node*) besteht aus zwei Knoten  $u$  und  $v$  und  $k \geq 3$  virtuellen Kanten, die parallel zwischen  $u$  und  $v$  verlaufen.
- Das Skelett eines *R-Knotens* (*rigid node*) ist ein einfacher dreifach zusammenhängender Graph aus virtuellen Kanten.

Die Blätter unseres SPQR-Baums  $\mathcal{T}$  bilden dabei die Q-Knoten, während S-Knoten, P-Knoten und R-Knoten nur als innere Knoten in  $\mathcal{T}$  auftreten. Außerdem sind reale Kanten nur in den

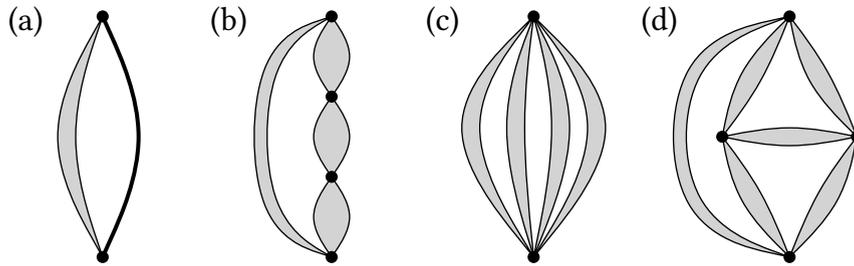


Abbildung 2.2: Mögliche Skelette der Knotentypen Q-Knoten (a), S-Knoten (b), P-Knoten (c) und R-Knoten (d) in einem SPQR-Baum. Virtuelle Kanten sind dick dargestellt und grau hinterlegt.

Skeletten von Q-Knoten vorhanden. Beispiele für Skelette der verschiedenen Knotentypen sind in Abbildung 2.2 dargestellt. Beachte, dass durch die nachfolgende Konstruktion nie zwei S-Knoten oder zwei P-Knoten in  $\mathcal{T}$  zueinander adjazent sein werden.

### Konstruktion

Nachfolgend ist beschrieben, wie wir den gewurzelten SPQR-Baum von  $G$  bezüglich einer *Referenzkante*  $e' = u'v'$  konstruieren können. Für  $e'$  erstellen wir einen Q-Knoten  $\rho$ , dessen Skelett die Kante  $e'$  und zusätzlich eine virtuelle Kante  $u'v'$  enthält. Der Knoten  $\rho$  wird die Wurzel des SPQR-Baums  $\mathcal{T}$ . In jedem Konstruktionsschritt ist ein Teilgraph  $G^*$  von  $G$ , ein Knotenpaar  $\{u, v\}$  und ein Vaterknoten  $\mu$  in  $\mathcal{T}$  gegeben. Wir erzeugen darauf aufbauend einen neuen Knoten  $\nu$ , der ein Kind von  $\mu$  sein wird. Die Knoten  $u$  und  $v$  bezeichnen wir als die *Pole* von  $\nu$ . Initial setzen wir  $G^* = G - e'$ ,  $\{u, v\} = \{u', v'\}$  und  $\mu = \rho$ . Je nach Struktur von  $G^*$  unterscheiden wir die nachfolgend aufgeführten Zerlegungsfälle. Wir wenden den entsprechenden Fall auf  $\nu$  an und fügen anschließend eine virtuelle Kante  $uv$  dem Skelett  $\text{skel}(\nu)$  hinzu, die wir als *Vaterkante* bezeichnen. Die Konstruktion des SPQR-Baums ist beispielhaft in Abbildung 2.3 dargestellt.

1. Der Graph  $G^*$  besteht nur aus der Kante  $uv$ . Dann ist  $\nu$  ein Q-Knoten, dessen Skelett die reale Kante  $uv$  enthält.
2. Der Graph  $G^*$  ist nicht zweifach zusammenhängend. Sei  $P$  ein einfacher Pfad von  $u$  nach  $v$  in  $G^*$  und seien  $v_1, \dots, v_{k-1}$  die Schnittknoten von  $G^*$  in der Reihenfolge, wie sie auf  $P$  vorkommen ( $k \geq 2$ ). Zur übersichtlicheren Darstellung setzen wir  $v_0 = u$  und  $v_k = v$ . Dann ist  $\nu$  ein S-Knoten und  $\text{skel}(\nu)$  besteht aus dem Pfad  $e_1, \dots, e_k$  von virtuellen Kanten, wobei  $e_i = v_{i-1}v_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Fahre fort mit dem Block  $G_i^*$  zwischen  $v_{i-1}$  und  $v_i$ , dem Knotenpaar  $\{v_{i-1}, v_i\}$  und dem Knoten  $\nu$  als Vaterknoten, für jeweils  $i = 1, \dots, k$ .
3. Das Knotenpaar  $\{u, v\}$  ist ein Zerlegungspaar von  $G^*$ . Seien  $G_1^*, \dots, G_k^*$  die maximalen Zerlegungskomponenten bezüglich  $\{u, v\}$ . Dann ist  $\nu$  ein P-Knoten und  $\text{skel}(\nu)$  enthält  $k$  parallele virtuelle Kanten zwischen  $u$  und  $v$ . Fahre mit der Zerlegung von  $G_i^*$  bezüglich  $\{u, v\}$  und dem Vaterknoten  $\nu$  fort, für jeweils  $i = 1, \dots, k$ .
4. Keiner der genannten Fälle trifft zu. Dann ist  $\nu$  ein R-Knoten und wir gehen bei der weiteren Zerlegung wie folgt vor: Bezüglich eines Zerlegungspaares  $\{x, y\}$  von  $G^*$  bezeichnen wir eine maximale Zerlegungskomponente  $G^{**}$  als *intern*, falls die Pole von  $G^*$  nicht in  $V(G^{**}) \setminus \{x, y\}$  enthalten sind. Ein *maximales Zerlegungspaar* von  $G^*$  ist ein Zerlegungspaar  $\{x, y\}$  von  $G^*$ , wenn keiner der beiden Knoten in einer internen maximalen Zerlegungskomponente eines anderen Zerlegungspaares  $\{x', y'\}$  enthalten ist. Beispielhaft sind in Abbildung 2.3 (c) für einen Teilgraphen  $G_3^*$  verschiedene Zerlegungspaare dargestellt.

Das Paar  $\{x', y'\}$  ist kein maximales Zerlegungspaar, da es in der hellgrau unterlegten, internen maximalen Zerlegungskomponente von  $\{v', y\}$  enthalten ist. Bezüglich  $\{x, y\}$  ist das Paar in der dunkelgrau dargestellten Komponente enthalten. Diese ist jedoch keine interne Zerlegungskomponente, da sie den Pol  $v'$  von  $G_3^*$  enthält. Das Paar  $\{x, y\}$  selbst ist in keiner internen Zerlegungskomponente enthalten und somit ein maximales Zerlegungspaar.

Seien nun  $\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_k, v_k\}$  die maximalen Zerlegungspaare von  $G^*$  und  $G_i^*$  sei die Vereinigung aller internen maximalen Zerlegungskomponenten von  $\{u_i, v_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Das Skelett  $\text{skel}(\nu)$  besitzt für jeden Teilgraph  $G_i^*$  die virtuelle Kante  $e_i = u_i v_i$ . Fahre bei der Zerlegung jeweils mit  $G_i^*$ , dem Knotenpaar  $\{u_i, v_i\}$  und dem Vaterknoten  $\nu$  fort.

### Eigenschaften des SPQR-Baums

Sei nun ein Knoten  $\mu$  im SPQR-Baum  $\mathcal{T}$  gegeben, der die Kinder  $\mu_1, \dots, \mu_k$  besitzt, d.h. die Knoten  $\mu_i$  und  $\mu$  sind in  $\mathcal{T}$  adjazent. Für jedes Kind  $\mu_i$  gibt es eine virtuelle Kante  $e_i$  in  $\text{skel}(\mu)$ , deren inzidente Knoten genau die Pole von  $\mu_i$  sind. Sei  $\mathcal{T}_i$  der Teilbaum von  $\mathcal{T}$ , dessen Wurzel  $\mu_i$  ist. Dann induzieren die realen Kanten der Q-Knoten bzw. der Blätter von  $\mathcal{T}_i$  einen zusammenhängenden Teilgraphen  $G_i^*$  von  $G$ , der die Pole von  $\mu_i$  beinhaltet. Da jede Kante aus  $G$  nur in einem einzigen Q-Knoten als reale Kante vorkommt, sind die Teilgraphen  $G_1^*, \dots, G_k^*$  paarweise kantendisjunkt, und zwei verschiedene Teilgraphen besitzen einen gemeinsamen Knoten nur dann, wenn dieser ein Pol von beiden Graphen ist. In Abbildung 2.3 (b) ist beispielhaft ein P-Knoten mit den, durch seine Kinder induzierten, Teilgraphen  $G_1^*$ ,  $G_2^*$  und  $G_3^*$  dargestellt.

Wir können darauf aufbauend den zu  $\mu$  gehörigen Graphen (*pertinent graph*)  $G(\mu)$  konstruieren, indem wir jede virtuelle Kante  $e_i$  in  $\text{skel}(\mu)$  durch den Graphen  $G_i^*$  ersetzen. Der Graph  $G(\mu)$  besitzt somit nur noch die Vaterkante als einzige virtuelle Kante. Das Skelett  $\text{skel}(\mu)$  ist ein Minor von  $G(\mu)$ , der durch Kontraktion jedes Teilgraphen  $G_i^*$  zu einer einzigen Kante entsteht. Offensichtlich ist für die Wurzel  $\rho$  von  $\mathcal{T}$  der Graph  $G(\rho)$  gerade der ursprüngliche Graph  $G$ . Die Vaterkante repräsentiert in  $G(\mu)$  den Rest des Graphen  $G$ , der dem Teilgraphen  $G - G(\mu)$  entspricht. Sei nun  $\mathcal{T}_\mu$  der Teilbaum von  $\mathcal{T}$  mit Wurzel  $\mu$ . Dann wird  $G - G(\mu)$  genau von den Kanten in den Q-Knoten aus  $\mathcal{T} - \mathcal{T}_\mu$  induziert. Da ferner  $G - G(\mu)$  und  $G(\mu)$  kantendisjunkt sind und als gemeinsame Knoten nur die beiden Pole von  $\mu$  besitzen, können wir  $G - G(\mu)$  genau wie einen Teilgraphen  $G_i^*$  behandeln, der zu einem Kind von  $\mu$  gehört. Wir können somit den SPQR-Baum auch als ungewurzelt ansehen und die Vaterkante als weitere virtuelle Kante eines Kindes von  $\mu$  interpretieren. Der Teilgraph  $G - G(\mu)$  kann folglich zu einer einzigen Kante kontrahiert werden, die zu den Polen von  $\mu$  inzident ist. Mit dieser Sichtweise brauchen wir in  $\text{skel}(\mu)$  nicht mehr zu differenzieren, ob eine virtuelle Kante zu einem Kind gehört oder Vaterkante ist. Wir werden daher je nach Situation die ungewurzelte der gewurzelten Sichtweise vorziehen.

Betrachten wir nun die Situation, wenn  $G$  ein planarer Graph ist. Da  $\text{skel}(\mu)$  für jeden Knoten  $\mu$  aus  $\mathcal{T}$  ein Minor von  $G(\mu)$  und somit von  $G$  ist, ist  $\text{skel}(\mu)$  ebenfalls planar. Eine planare Einbettung  $\mathcal{E}$  von  $G$  induziert somit auch eine planare Einbettung  $\mathcal{E}_\mu$  von  $\text{skel}(\mu)$ . Besitzt umgekehrt  $\text{skel}(\mu)$  eine planare Einbettung  $\mathcal{E}_\mu$  für jeden Knoten  $\mu$  in  $\mathcal{T}$ , so können wir darauf aufbauend eine planare Einbettung  $\mathcal{E}$  von  $G$  konstruieren, sodass  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  mit  $\mathcal{E}_\mu$  auf  $\text{skel}(\mu)$  übereinstimmt. Der Graph  $G$  ist daher planar, falls  $\text{skel}(\mu)$  planar für alle Knoten  $\mu$  in  $\mathcal{T}$  ist. Durch Variation der planaren Einbettungen der Skelette im SPQR-Baum können wir somit jede mögliche planare Einbettung von  $G$  erhalten. Auf diese Weise repräsentiert der SPQR-Baum alle Einbettungen eines planaren Graphen. Da ferner bei Q-Knoten, S-Knoten und P-Knoten immer eine planare Einbettung für ihre Skelette existiert, erhalten wir eine zusätzliche Charakterisierung zur Planarität von zweifach zusammenhängenden Graphen: Ein zweifach zusammenhängender Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn  $\text{skel}(\mu)$  planar ist für alle R-Knoten  $\mu$  im SPQR-Baum von  $G$ .

Abschließend sei festgehalten, dass der SPQR-Baum für einen zweifach zusammenhängenden Graphen immer existiert und, als ungewurzelter Baum betrachtet, eindeutig ist. Für einen gegebenen Graphen kann der SPQR-Baum in linearer Zeit konstruiert werden [GM01].

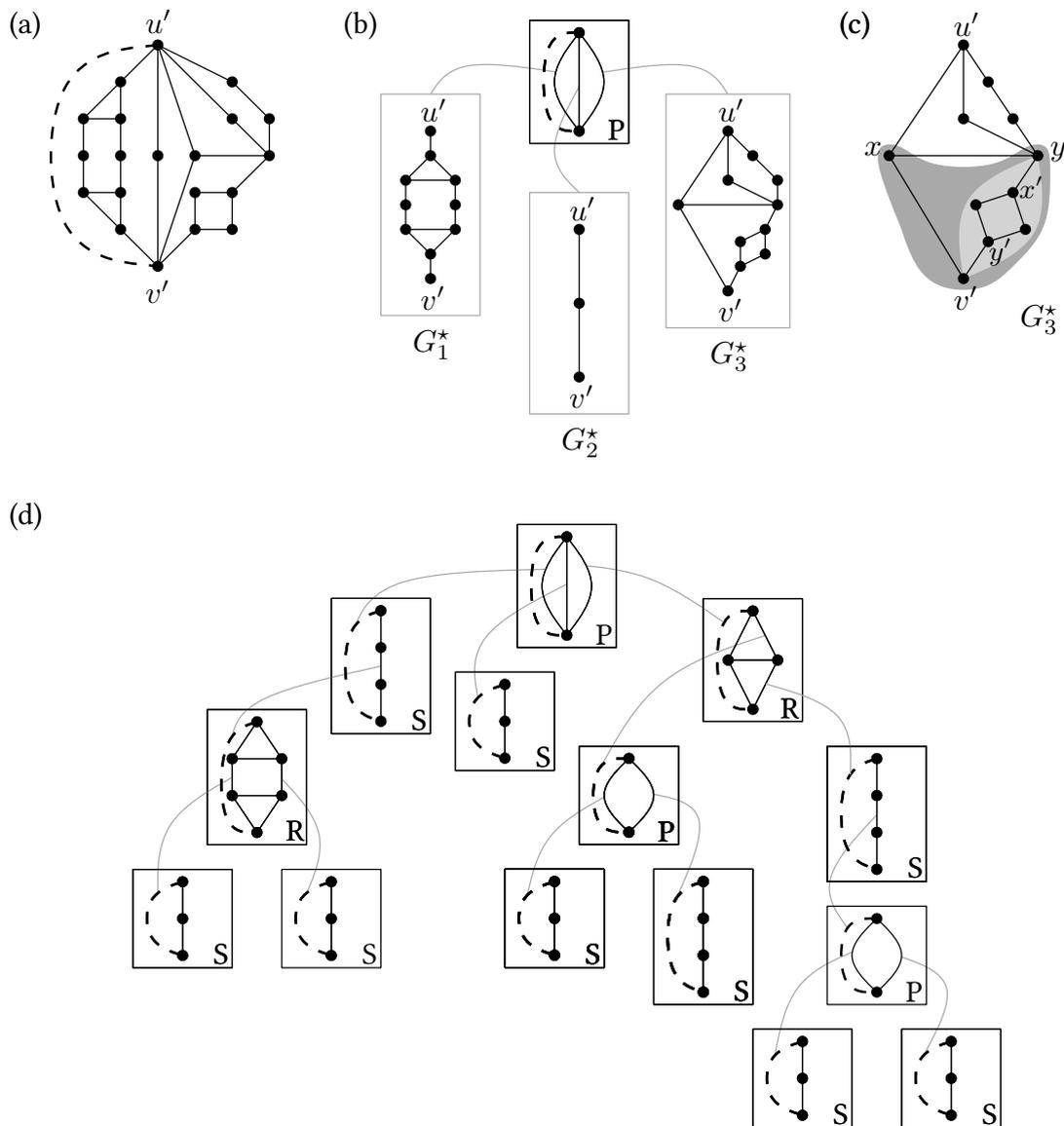


Abbildung 2.3: Ein zweifach zusammenhängender Graph  $G$ , für den der SPQR-Baum konstruiert werden soll (a), sowie der erste Konstruktionsschritt entlang des Zerlegungspaars  $\{u', v'\}$  (b). Für den Teilgraphen  $G_3^*$  sind die maximalen Zerlegungspaare gerade  $\{x, y\}$ ,  $\{u', x\}$ ,  $\{u', y\}$ ,  $\{v', x\}$  und  $\{v', y\}$ . Das Paar  $\{x', y'\}$  ist kein maximales Zerlegungspaar (c).

Der vollständige SPQR-Baum (d). Die Referenzkante  $u'v'$  und die jeweiligen Vaterkanten sind gestrichelt dargestellt. Zur besseren Darstellung wurden jeweils die Q-Knoten im SPQR-Baum weggelassen.



### 3 SEFE-Minoren

Für das in Kapitel 1 vorgestellte Problem SIMULTANE EINBETTUNG MIT FESTGELEGTEN KANTEN (SEFE) werden zwei Graphen  $G_1 = (V, E_1)$  und  $G_2 = (V, E_2)$  mit derselben Knotenmenge betrachtet. Damit  $(G_1, G_2)$  eine SEFE  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$  besitzen, dürfen in einer gemeinsamen Einbettung die Kanten aus  $E_1 \cap E_2$  nicht von anderen Kanten gekreuzt werden. Exklusive Kanten des Graphen  $G_1$ , d.h. Kanten aus  $E_1 \setminus E_2$ , dürfen ferner keine anderen exklusiven Kanten von  $G_1$  schneiden. Gleiches gilt für die exklusiven Kanten von  $G_2$ . Exklusive Kanten von  $G_1$  dürfen hingegen exklusive Kanten von  $G_2$  kreuzen und umgekehrt.

In dieser Arbeit werden wir für die beschriebene Ausgangssituation eine äquivalente Formulierung verwenden: Wir vereinigen die Graphen  $G_1$  und  $G_2$  zu einem Graphen  $G = (V, E)$ , der verschiedene Kantentypen besitzt. *Gemeinsame Kanten* sind die Kanten aus  $E_1 \cap E_2$ . Diese bezeichnen wir in Zukunft mit  $E_{1 \cap 2}$  und den gemeinsamen Graphen mit  $G_{1 \cap 2} = (V, E_{1 \cap 2})$ . Kanten, die nur in  $E_1$  bzw. in  $E_2$  vorkommen, nennen wir weiterhin *exklusive Kanten*. Zusätzlich führen wir einen neuen Kantentyp ein, der obige Bedingungen an exklusive Kanten abschwächt: *Transzendente Kanten* dürfen exklusive Kanten aus  $G_1$  und  $G_2$  beliebig schneiden, sowie sich auch gegenseitig kreuzen. Der Schnitt mit gemeinsamen Kanten ist jedoch nicht erlaubt. Ferner darf der Graph  $G$  auch parallele Kanten besitzen, wenn diese von unterschiedlichen Typen sind. Um die verschiedenen Kantentypen besser darstellen zu können, verwenden wir in den Abbildungen folgende Farbkonventionen: Gemeinsame Kanten werden schwarz gezeichnet. Exklusive Kanten für  $G_1$  sind in grün und exklusive Kanten für  $G_2$  in rot dargestellt. Transzendente Kanten sind blau gefärbt.

Nachfolgend arbeiten wir mit dem vereinigten Graphen  $G$  und nicht mehr mit dem Ausgangspaar  $(G_1, G_2)$ . Der Graph  $G$  besitzt eine SEFE, wenn eine Einbettung existiert, bei der die Kanten mit den oben beschriebenen Kreuzungsregeln eingebettet werden können. Somit besitzen die Graphen  $G_1$  und  $G_2$  genau dann eine SEFE, wenn der Graph  $G$  eine SEFE besitzt. Sofern nicht anders angegeben, sind nachfolgend  $G$  und  $G'$  Graphen mit den oben beschriebenen Kantentypen, die zu den Graphenpaaren  $(G_1, G_2)$  bzw.  $(G'_1, G'_2)$  gehören.

#### 3.1 SEFE-Minoren-Operationen

Um Substrukturen von  $G$  zu identifizieren, bedarf es geeigneter Operationen, die wir auf einen Graphen anwenden können, um dessen Teilstrukturen zu erhalten. Die in Abschnitt 2.1 beschriebenen Minoren-Operationen sind allerdings im Bezug auf exklusive Kanten zu mächtig. So kann durch Kontraktion einer exklusiven Kante ein Graph entstehen, der keine SEFE mehr besitzt: Für den in Abbildung 3.1 (a) dargestellten Graphen  $G$  existiert eine SEFE. Kontrahieren wir nun die exklusive Kante  $e$  des Graphen  $G_1$ , so entsteht der Graph  $G'$  aus Abbildung 3.1 (b). Der Graph  $G'_2$  dieser Instanz ist jedoch gerade der Graph  $K_{3,3}$  (Abbildung 3.1 (c)), sodass  $G'_2$  nicht planar ist. Folglich kann  $G'$  keine SEFE besitzen.

Aus diesem Grund verwenden wir nur angepasste Operationen, die wir als *SEFE-Minoren-Operationen* bezeichnen werden. Einen Graphen  $G'$  bezeichnen wir als *SEFE-Minor* von  $G$ , falls  $G'$

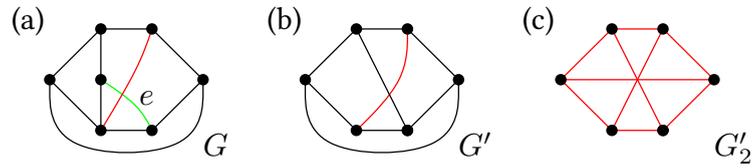
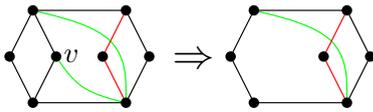


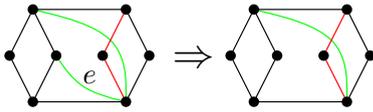
Abbildung 3.1: Ein Graph  $G$ , der eine SEFE besitzt (a). Nach Konstraktion der Kante  $e$  kann keine SEFE mehr konstruiert werden (b), da der Graph  $G'_2$  nicht mehr planar ist (c).

durch Anwendung einer der SEFE-Minoren-Operationen aus  $G$  entsteht. Folgende Operationen sind als SEFE-Minoren-Operationen erlaubt:

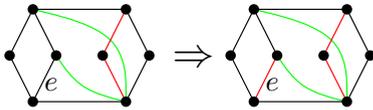
1. Entferne einen Knoten  $v \in V$  und alle adjazenten Kanten aus  $E$ .



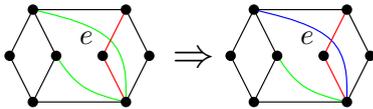
2. Entferne eine Kante  $e \in E$ .



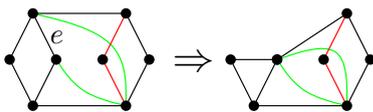
3. Wandle eine gemeinsame Kante in eine exklusive Kante für  $G_1$  oder für  $G_2$  um.



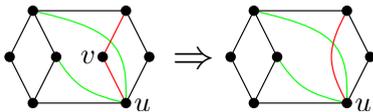
4. Wandle eine exklusive Kante in eine transzendente Kante um.



5. Kontrahiere eine gemeinsame Kante  $e \in E_{1 \cap 2}$ .



6. Kontrahiere die Kante  $e = uv$ , falls alle zu  $v \in V$  inzidenten Kanten vom gleichen Typ sind, d.h. entweder exklusive Kanten von  $G_1$  bzw.  $G_2$  oder transzendente Kanten sind.



Obige Operationen sind so gewählt, dass sie eine SEFE erhalten, wie nachfolgendes Lemma zeigt. Falls daher bei der Anwendung einer Folge von SEFE-Minoren-Operationen ein Graph  $G'$  entsteht, der keine SEFE besitzt, so existiert bereits für den Ausgangsgraphen selbst keine SEFE.

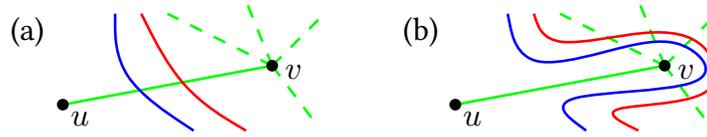


Abbildung 3.2: Situation im Beweis zu Lemma 1, in der eine exklusive Kante  $uv$  von  $G_1$  kontrahiert werden kann (a). Dies ist möglich, da exklusive Kanten von  $G_2$  und transzendenten Kanten auch nicht-kreuzend eingebettet werden können (b).

**Lemma 1:** Seien  $G$  ein Graph, der eine SEFE besitzt, und  $G'$  der Graph, der entsteht, wenn eine der SEFE-Minoren-Operationen auf  $G$  angewendet wird. Dann existiert für  $G'$  ebenfalls eine SEFE.

*Beweis.* Sei  $G$  ein Graph, für den eine SEFE  $\mathcal{E}$  existiert. Wir zeigen für jede der SEFE-Minoren-Operationen, dass der entstehende Graph  $G'$  ebenfalls eine SEFE besitzt.

1. Knoten entfernen:

Sei  $v \in V$  der gemeinsame Knoten, der entfernt werden soll. Durch das Entfernen eines Knotens und aller inzidenten Kanten entstehen keine zusätzlichen Kreuzungen von Kanten in der Einbettung  $\mathcal{E}$ . Folglich kann  $v$  aus  $\mathcal{E}$  entfernt werden und wir erhalten eine SEFE für den resultierenden Graphen  $G'$ .

2. Kante entfernen:

Sei  $e \in E$  die Kante, die entfernt werden soll. Durch das Entfernen einer Kante aus einer Einbettung können keine Kreuzungen von Kanten hinzukommen. Somit kann  $e$  aus  $\mathcal{E}$  entfernt werden. Man erhält eine SEFE für  $G'$ .

3. Gemeinsame Kante umwandeln:

Sei  $e \in E_{1 \cap 2}$  die Kante, die in eine exklusive Kante umgewandelt werden soll. Da  $\mathcal{E}$  eine SEFE ist, schneidet keine andere Kante die gemeinsame Kante  $e$ . Die Einbettung  $\mathcal{E}$  ist somit ebenfalls eine SEFE für den resultierenden Graphen  $G'$ . Für  $G'$  muss lediglich der Typ der Kante geändert werden.

4. Exklusive Kante umwandeln:

Sei o.B.d.A.  $e \in E$  eine exklusive Kante von  $G_1$ , die in eine transzendenten Kante umgewandelt werden soll. Da  $\mathcal{E}$  eine SEFE ist, wird  $e$  höchstens von exklusiven Kanten von  $G_2$  oder von transzendenten Kanten gekreuzt. Insbesondere kreuzt  $e$  keine gemeinsamen Kanten. Die Einbettung  $\mathcal{E}(G)$  ist somit ebenfalls eine SEFE für den resultierenden Graphen  $G'$ . Für  $G'$  muss lediglich der Typ der Kante geändert werden.

5. Gemeinsame Kante kontrahieren:

Sei  $e = uv \in E_{1 \cap 2}$  die Kante, die kontrahiert werden soll. Da  $e$  eine gemeinsame Kante ist und eine SEFE existiert, ist  $e$  in einer SEFE kreuzungsfrei eingebettet. Daher kann  $e$  kontrahiert werden, ohne dass Kreuzungen mit anderen Kanten entstehen. Der kontrahierte Graph  $G'$  besitzt somit ebenfalls eine SEFE.

6. Exklusive oder transzendenten Kante kontrahieren:

Sei  $v \in V$  der Knoten, für den alle inzidenten Kanten vom gleichen Typ sind, und  $e = uv$  die Kante, die kontrahiert werden soll. Falls  $e$  eine exklusive Kante von  $G_1$  ist, schneidet diese in  $\mathcal{E}$  höchstens exklusive Kanten von  $G_2$  oder transzendenten Kanten, da  $\mathcal{E}$  eine SEFE für  $G$  ist. Eine entsprechende Situation ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Die kreuzenden Kanten können nun so umgebettet werden, dass  $e$  keine Kreuzungen mehr besitzt, indem die Kanten alle anderen inzidenten Kanten von  $v$  schneiden (vgl. Abbildung 3.2, Teil (b)).

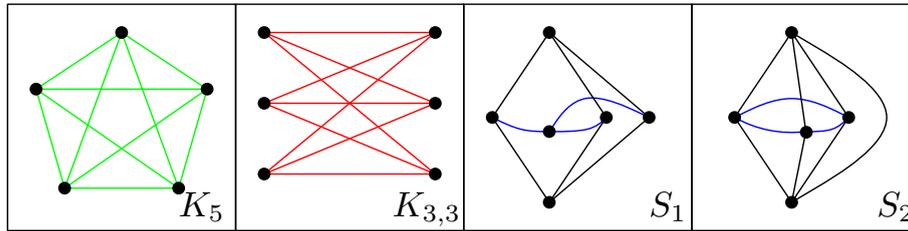


Abbildung 3.3: Die Graphen  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ ,  $S_1$  und  $S_2$  sind verbotene Substrukturen und dürfen nicht als SEFE-Minoren vorkommen.

Da diese vom selben Typ wie die Kante  $e$  sind, sind die neu entstandenen Kreuzungen mit einer SEFE verträglich. In der resultierenden Einbettung ist  $e$  nun kreuzungsfrei und kann kontrahiert werden, ohne dass neue Kreuzungen mit anderen Kanten entstehen. Somit besitzt der kontrahierte Graph  $G'$  ebenfalls eine SEFE. Analog gilt dies für den Fall, dass  $e$  eine exklusive Kante von  $G_2$  oder eine transzendente Kante ist.

Somit ist gezeigt, dass für SEFE-Minoren von Graphen, die eine SEFE besitzen, selbst auch eine SEFE existiert.  $\square$

Mit Hilfe der SEFE-Minoren-Operationen können wir nun die *verbotenen Substrukturen* definieren. Diese sollen minimal bezüglich SEFE-Minorenbildung sein und selbst keine SEFE besitzen. Minimal bedeutet in diesem Kontext, dass die Anwendung einer der SEFE-Minoren-Operationen auf einen der Graphen diesen soweit vereinfacht, dass die resultierende Struktur eine SEFE besitzt. Zu den verbotenen Substrukturen gehören die Graphen  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ ,  $S_1$  und  $S_2$ , die in Abbildung 3.3 dargestellt sind. Dabei können die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sowohl in  $G_1$ , als auch in  $G_2$  als Minor vorkommen. Der Übersichtlichkeit halber ist nur jeweils eine Möglichkeit für diese Graphen aufgeführt.

Zusätzlich ist eine unendliche Klasse von Graphen Teil der verbotenen Substrukturen. Diese werden wir als *alternierende Ketten* bezeichnen. Um die alternierenden Ketten möglichst anschaulich beschreiben zu können, wurde jedoch auf die notwendige Minimalität aller Graphen dieser Klasse verzichtet.

### 3.2 Alternierende Ketten

Ein Graph  $G$  aus der Klasse der *alternierenden Ketten* besteht aus einem Gerüst von gemeinsamen Kanten, die eine Kette bilden, und aus transzendenten und exklusiven Kanten, die auf bestimmte Weise alternieren. Wir beschreiben zuerst, welche Gestalt der gemeinsame Graph  $G_{1 \cap 2}$  einer alternierenden Ketten besitzen muss, und anschließend, wie die transzendenten und exklusiven Kanten hinzugefügt werden müssen.

Sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine zyklische Liste von Knoten für  $n \geq 3$ . Die Knoten  $v_i$  nennen wir *Kreisknoten*. Zwei aufeinander folgende Kreisknoten  $v_i$  und  $v_{i+1}$  verbinden wir entweder durch eine gemeinsame Kante, durch einen Halbdiamanten oder durch einen Diamanten miteinander,  $i = 1, \dots, n$ . Wir identifizieren hierbei  $v_{n+1}$  mit  $v_1$ . Ein *Halbdiamant* besteht aus einer gemeinsamen Kante  $v_i v_{i+1}$  und einem Pfad  $v_i, w_{i,1}, v_{i+1}$  der Länge 2 aus gemeinsamen Kanten. Sind  $v_i$  und  $v_{i+1}$  durch einen *Diamanten* verbunden, so gibt es zwei Pfade aus gemeinsamen Kanten  $v_i, w_{i,1}, v_{i+1}$  und  $v_i, w_{i,2}, v_{i+1}$  mit  $w_{i,1} \neq w_{i,2}$ . Die Knoten  $w_{i,j}$  nennen wir *äußere Knoten* der alternierenden Kette und wir bezeichnen den durch die Knoten  $v_i, v_{i+1}$  und, falls jeweils vorhanden,  $w_{i,1}$  und  $w_{i,2}$  induzierten Subgraphen mit  $D_i$ .

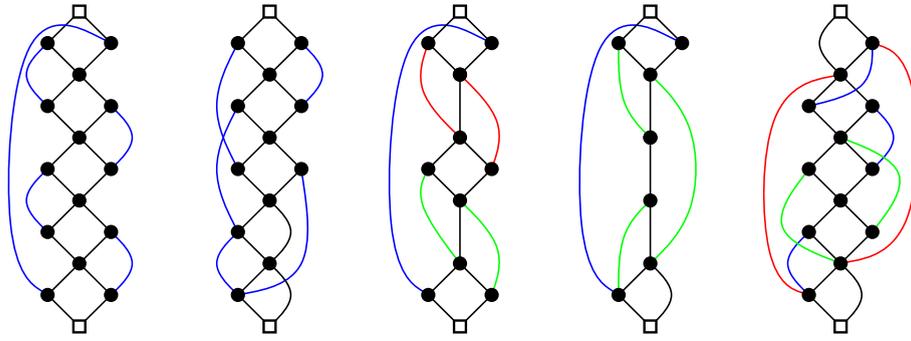


Abbildung 3.4: Beispiele für Graphen der alternierenden Ketten. Um diese besser darstellen zu können, wurden die Ketten jeweils an dem durch ein Quadrat markierten Knoten aufgetrennt.

Wir wollen nun den gemeinsamen Graphen so durch exklusive und transzendente Kanten erweitern, dass jeder der (Halb-)Diamanten mit genau zwei Kanten verbunden ist und jede exklusive Kante mit mindestens einer weiteren Kante alterniert. Eine exklusive Kante  $e_1 = x_1y_1$  alterniert mit einer weiteren exklusiven Kante  $e_2 = x_2y_2$ , falls die Kante  $e_2$  vom gleichen Typ wie  $e_1$  ist und ein einfacher Pfad  $x_1, \dots, x_2, \dots, y_1, \dots, y_2$  im gemeinsamen Graphen  $G_{1 \cap 2}$  existiert. Bei Einbettung in die selbe Facetten würden sich daher zwei alternierende Kanten kreuzen. In Abbildung 3.4 sind beispielhaft verschiedene Graphen der alternierenden Ketten dargestellt.

Bevor wir die Forderungen auflisten, die wir an die transzendenten und exklusiven Kanten stellen werden, benötigen wir einen Hilfsgraphen. Mit  $G_D$  bezeichnen wir den Graphen, der Abhängigkeiten zwischen den (Halb-)Diamanten und den exklusiven Kanten in  $G$  darstellen soll. Dazu besitzt  $G_D$  einen Knoten für jeden Subgraphen  $D_i$ , der ein Halbdiamant oder Diamant ist. Außerdem existiert für jede exklusive oder transzendente Kante  $e$  ein Knoten in  $G_D$ . Wir verbinden die zu  $D_i$  und  $e$  gehörigen Knoten miteinander, falls  $e$  zu einem äußeren Knoten in  $D_i$  inzident ist. Zusätzlich verbinden wir zwei zu exklusiven Kanten gehörige Knoten, wenn die beiden Kanten alternieren.

Damit  $G$  nun eine alternierende Kette ist, müssen die folgenden Eigenschaften erfüllt sein:

1. Jeder äußere Knoten in einem Halbdiamanten ist zu zwei exklusiven oder transzendenten Kanten inzident.
2. Jeder äußere Knoten in einem Diamanten ist genau zu einer exklusiven oder transzendenten Kante inzident.
3. Jede transzendente Kante ist zu zwei äußeren Knoten inzident.
4. Jede exklusive Kante ist zu zwei Kreisknoten oder zu jeweils einem Kreisknoten und einem äußeren Knoten inzident.
5. Zu jeder exklusiven Kante, die zu einem äußeren Knoten inzident ist, existiert genau eine alternierende Kante.
6. Zu jeder exklusiven Kante, die zu zwei Kreisknoten inzident ist, existieren zwei alternierende Kanten.
7. Der Graph  $G_D$  besteht aus genau einer Zusammenhangskomponente.
8. Die Anzahl an transzendenten Kanten, an exklusiven Kanten und an Halbdiamanten in  $G$  ist zusammengerechnet ungerade.

Zusammen mit obiger Konstruktion des gemeinsamen Graphen können wir mit diesen Eigenschaften vollständig charakterisieren, ob ein Graph zur Klasse der alternierenden Ketten gehört. Dass ein solcher Graph keine SEFE besitzt und so zu Recht eine verbotene Substruktur ist, werden wir in Kapitel 5 zeigen.

## 4 SEFE-Algorithmus von Angelini et al.

In diesem Kapitel werden wir den von Angelini et al. [Ang+12a] entwickelten Algorithmus SEFEBICO vorstellen, der für Graphen mit zweifach zusammenhängendem gemeinsamen Graphen eine SEFE berechnet oder entscheidet, dass keine solche existiert. Die Darstellung erfolgt dabei stark angepasst an unsere Situation und die bereits eingeführten Notationen. Der Algorithmus versucht eine planare Einbettung von  $G_{1 \cap 2}$  zu finden, die dann zu einer simulierten Einbettung von  $G = (V, E)$  erweitert wird. Dazu betrachtet er zuerst die Blätter im gewurzelten SPQR-Baum  $\mathcal{T}$  von  $G_{1 \cap 2}$  und führt das Verfahren danach Ebene für Ebene fort (*bottom-up*-Vorgehen). Dabei versucht er, für jeden besuchten Knoten  $\mu$  in  $\mathcal{T}$  eine SEFE für  $G(\mu)$  zu berechnen. Ist dies nicht möglich, so bricht der Algorithmus ab, und der Eingabegraph  $G$  besitzt keine SEFE. Die Korrektheit des Algorithmus soll an dieser Stelle nicht erneut bewiesen werden.

Bevor wir mit der Beschreibung des eigentlichen Algorithmus beginnen, teilen wir die exklusiven Kanten von  $G$  in verschiedene Typen bezüglich eines Knotens  $\mu$  in  $\mathcal{T}$  ein:

- Eine *intrapol Kante* von  $\mu$  ist eine exklusive Kante, deren inzidente Knoten die Pole von  $\mu$  sind.
- Eine *innere Kante* von  $\mu$  ist eine exklusive Kante, deren inzidente Knoten zu  $G(\mu)$  gehören, mindestens einer der Knoten kein Pol von  $\mu$  ist und außerdem kein Kind  $\nu$  von  $\mu$  existiert, für das beide inzidenten Knoten auch in  $G(\nu)$  enthalten sind.
- Eine *äußere Kante* von  $\mu$  ist eine exklusive Kante, für die genau einer der inzidenten Knoten zu  $G(\mu)$  gehört und dieser kein Pol von  $\mu$  ist.

Nach dieser Definition kann somit eine exklusive Kante gleichzeitig äußere Kante für mehrere Knoten des SPQR-Baums sein, jedoch innere Kante für maximal einen Knoten. In Abbildung 4.1 ist für einen P-Knoten  $\mu$  und seine Kinder beispielhaft folgende Situation dargestellt: Die Kante  $e_1$  ist eine äußere Kante für  $\mu$ ,  $\mu_1$  und  $\mu_{1,2}$ . Die Kante  $e_2$  ist eine innere Kante von  $\mu_1$ , aber eine äußere Kante für  $\mu_{1,1}$  und  $\mu_{1,2}$ . Für  $\mu_2$  sind die Kanten  $e_3$  und  $e_4$  innere Kanten, während für das Kind  $\mu_{2,2}$  die Kante  $e_3$  eine intrapol Kante ist und die Kante  $e_4$  für die Kinder  $\mu_{2,1}$  und  $\mu_{2,2}$  eine äußere Kante darstellt. Beide Kanten sind jedoch keine inneren Kanten für den Knoten  $\mu$ . Schließlich sind die Kanten  $e_5$  und  $e_6$  innere Kanten von  $\mu$ , gleichzeitig sind die Kanten  $e_5$  und  $e_6$  äußere Kanten für  $\mu_1$ ,  $\mu_{1,2}$  und  $\mu_2$  bzw. für  $\mu_2$ ,  $\mu_{2,3}$  und  $\mu_3$ .

### 4.1 Funktionsweise des Algorithmus

Die Einbettung von  $\text{skel}(\mu)$  wird eindeutig bis auf Spiegelung (*Flip*) beim Bearbeiten des Knotens  $\mu$  in  $\mathcal{T}$  festgelegt. Die Entscheidung, ob diese Einbettung gespiegelt werden muss, erfolgt jedoch erst beim ersten Vorgänger von  $\mu$ , der kein S-Knoten ist. Daher brauchen wir S-Knoten nicht direkt zu betrachten. Wir bezeichnen als *sichtbare Knoten* eines P-Knotens oder R-Knotens  $\mu$  die Kinder von  $\mu$  und alle Kinder von S-Knoten, die selbst Kinder von  $\mu$  sind. In Abbildung 4.1 sind alle sichtbaren Knoten von  $\mu$  für die obige Situation aufgeführt.

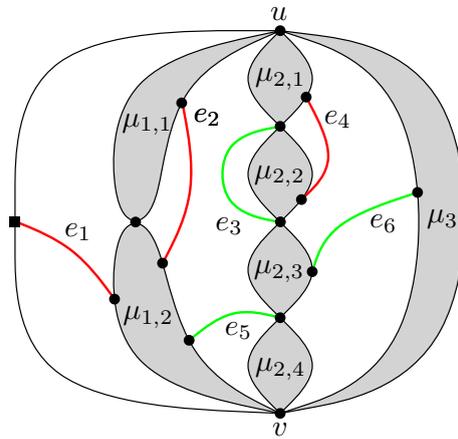


Abbildung 4.1: Ein P-Knoten  $\mu$  mit Kindern  $\mu_1, \mu_2$  und  $\mu_3$ . Die Kinder  $\mu_1$  und  $\mu_2$  sind S-Knoten und besitzen selbst weitere Kinder  $\mu_{1,1}$  und  $\mu_{1,2}$  bzw.  $\mu_{2,1}, \dots, \mu_{2,4}$ .

Für jeden P-Knoten oder R-Knoten  $\mu$  führt der Algorithmus nun zwei Berechnungsschritte durch: Zunächst wird eine kompatible Einbettung von  $\text{skel}(\mu)$  berechnet. Eine Einbettung  $\mathcal{E}$  von  $\text{skel}(\mu)$  bezeichnen wir als *kompatible Einbettung*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Für zwei Kindknoten, die durch eine innere Kante von  $\mu$  miteinander verbunden sind, existiert eine gemeinsame Facette, zu der beide Kindknoten adjazent sind. Ist eine äußere Kante von  $\mu$  inzident zu einem Knoten im Kind  $\nu$ , dann ist  $\nu$  adjazent zur äußeren Facette. Ist die Berechnung einer kompatiblen Einbettung erfolgreich, so berechnet der Algorithmus darauf aufbauend eine erweiterbare SEFE für  $G(\mu)$ , falls diese existiert. Eine SEFE von  $G(\mu)$  heißt *erweiterbare SEFE*, wenn alle Knoten von  $\partial G(\mu)$  auf der äußeren Facette liegen. Mit  $\partial G(\mu)$  bezeichnen wir hierbei alle Knoten aus  $G(\mu)$ , die adjazent zu einem Knoten aus  $G - G(\mu)$  sind. Zusammengefasst ergibt sich somit Algorithmus 1. Wir betrachten nachfolgend die einzelnen Berechnungsschritte des Algorithmus für einen Knoten  $\mu$  genauer.

Beachte hierbei, dass sich der Begriff *kompatible Einbettung* stets auf den Graphen  $\text{skel}(\mu)$  bezieht, während eine *erweiterbare SEFE* für den Graphen  $G(\mu)$  gesucht wird.

---

#### Algorithmus 1 : SEFEBICO

---

**Eingabe** : Graph  $G = (V, E)$

**Ausgabe** : SEFE für  $G$  oder  $\perp$ , falls keine solche existiert.

- 1 Berechne den SPQR-Baum  $\mathcal{T}$  von  $G_{1 \cap 2} = (V, E_{1 \cap 2})$  mit Wurzel  $\rho$ .
  - 2 Berechne für jeden Knoten  $\mu$  von  $\mathcal{T}$  seine inneren, äußeren und intrapol Kanten.
  - 3 **für alle Knoten  $\mu$  in  $\mathcal{T}$  von unten nach oben tue**
  - 4     **wenn  $\mu$  ist Q-Knoten oder S-Knoten dann**
  - 5         | fahre fort.
  - 6     **sonst**
  - 7         | Berechne eine kompatible Einbettung  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  für  $\text{skel}(\mu)$ . Stoppe, falls keine existiert.
  - 8         | Entscheide die Spiegelungen der sichtbaren Knoten von  $\mu$ , um eine erweiterbare SEFE von  $G(\mu)$  zu finden. Stoppe, falls keine existiert.
  - 9 **zurück SEFE von  $G(\rho)$ .**
-

### Berechnung einer kompatiblen Einbettung

Um eine kompatible Einbettung  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  von  $\text{skel}(\mu)$  zu finden, wird getestet, ob eine Einbettung von  $\text{skel}(\mu)$  die Anforderungen erfüllt. Für einen R-Knoten  $\mu$  existiert nur eine Einbettung von  $\text{skel}(\mu)$ , die bis auf Spiegelung eindeutig ist. Diese ist entweder eine kompatible Einbettung oder es existiert keine SEFE für  $G$ . Ist  $\mu$  ein P-Knoten, dann ist eine Einbettung von  $\text{skel}(\mu)$  als zyklische Ordnung der Kanten in  $\text{skel}(\mu)$  gegeben. Wir betrachten hierzu einen Hilfsgraphen  $H$ , der für jede virtuelle Kante von  $\text{skel}(\mu)$  einen Knoten besitzt. Zwei Knoten sind in  $H$  miteinander verbunden, falls die zu den Knoten korrespondierenden Teilgraphen durch eine äußere oder innere Kante in  $G(\mu)$  verbunden sind. Falls  $H$  aus einfachen, disjunkten Pfaden besteht oder ein Kreis auf allen Knoten ist, so existiert eine kompatible Einbettung für  $\text{skel}(\mu)$ . In diesem Fall müssen die virtuellen Kanten, die eine Zusammenhangskomponente in  $H$  bilden, ein Intervall in der zyklischen Ordnung von  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  formen. Kann keine kompatible Einbettung gefunden werden, so besitzt der Graph  $G$  keine SEFE und der Algorithmus bricht die Berechnung ab.

### Berechnung einer erweiterbaren SEFE

Seien nun  $\mu_1, \dots, \mu_k$  die sichtbaren Knoten von  $\mu$ . Um eine erweiterbare SEFE von  $G(\mu)$  zu finden, werden die zu diesem Zeitpunkt bereits berechneten erweiterbaren SEFE von  $G(\mu_i)$  für  $i = 1, \dots, k$  und die kompatible Einbettung von  $\text{skel}(\mu)$  verwendet. Es muss nun bestimmt werden, ob  $\mathcal{E}(G(\mu_i))$  oder ihre Spiegelung verwendet werden soll. Außerdem müssen für die inneren Kanten von  $\mu$ , die äußeren Kanten von  $\mu$  und die äußeren Kanten von sichtbaren Knoten von  $\mu$  Einbettungen in Facetten von  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  gefunden werden. Wir bezeichnen fortan mit  $\text{skel}'(\mu)$  den Graphen, der aus  $\text{skel}(\mu)$  entsteht, indem alle virtuellen Kanten, die zu einem S-Knoten  $\nu$  gehören, jeweils durch einen einfachen Pfad von virtuellen Kanten ersetzt werden, die den Kindern von  $\nu$  entsprechen. Der Graph  $\text{skel}'(\mu)$  enthält somit für jeden sichtbaren Knoten von  $\mu$  eine korrespondierende, virtuelle Kante. Eine Einbettung  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  induziert folglich eine Einbettung  $\mathcal{E}(\text{skel}'(\mu))$  von  $\text{skel}'(\mu)$ .

Wir versuchen nun für die inneren Kanten von  $\mu$ , die äußeren Kanten von  $\mu$  und die äußeren Kanten von sichtbaren Knoten von  $\mu$  eindeutige Facetten von  $\text{skel}'(\mu)$  zu finden, in die die Kanten eingebettet werden können. Eine Einbettung einer dieser Kanten in eine bestimmte Facette kann bedingen, dass die Einbettung  $\mathcal{E}(G(\mu_i))$  eines zu der Kante inzidenten sichtbaren Knotens  $\mu_i$  oder ihre Spiegelung benutzt werden muss. Andererseits bedingt möglicherweise die Entscheidung, ob  $\mathcal{E}(G(\mu_i))$  oder ihre Spiegelung verwendet werden soll, die Wahl der Facette, in die eine inzidente Kante eingebettet werden muss. Ist somit ein sichtbarer Knoten zu mehreren solchen Kanten inzident, können Bedingungen an die Einbettung gestellt werden, die sich gegenseitig ausschließen. In einem solchen Fall existiert somit keine erweiterbare SEFE für  $\mu$  und der Algorithmus bricht ab. Gleiches gilt, falls für eine Kante keine freie Facette mehr existiert, in die sie eingebettet werden kann.

Zunächst versuchen wir, die äußeren Kanten von  $\mu$  und die inneren Kanten von  $\mu$  einzubetten. Da zu diesem Zeitpunkt bereits eine kompatible Einbettung von  $\text{skel}'(\mu)$  bekannt ist, existiert für jede dieser Kanten eine eindeutige Facette, in die sie eingebettet werden muss. Diese entscheidet außerdem, ob die zu der Kante inzidenten sichtbaren Knoten gespiegelt werden müssen oder nicht. Kann die Einbettung der äußeren und inneren Kanten von  $\mu$  erfolgreich durchgeführt werden, müssen noch die äußeren Kanten von sichtbaren Knoten von  $\mu$  eingebettet werden, die selbst keine inneren Kanten von  $\mu$  sind. Dies sind genau die inneren Kanten von S-Knoten-Kindern von  $\mu$ . Für eine solche Kante ergeben sich möglicherweise weitere Bedingungen, falls für einen der dazugehörigen sichtbaren Knoten bereits eine Spiegelung durch die Einbettung einer inzidenten Kante entschieden wurde. Es ist jedoch auch möglich, dass einige S-Knoten-Kinder nur

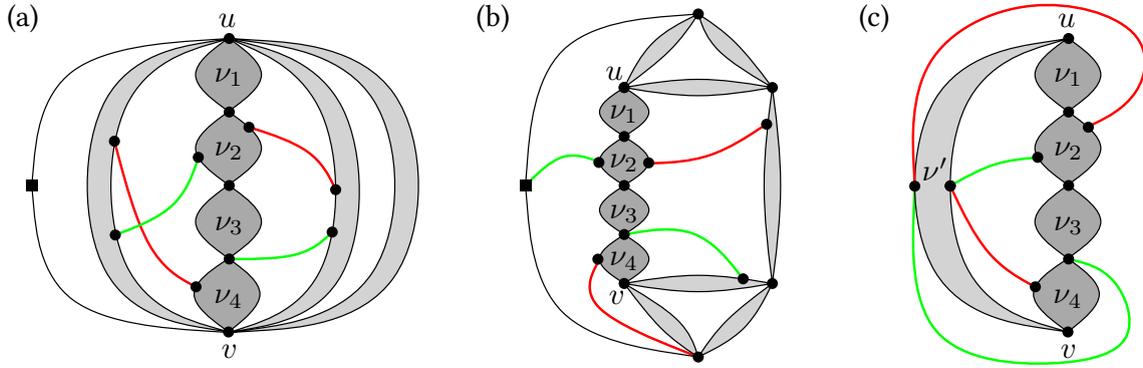


Abbildung 4.2: Ein S-Knoten  $\nu$  mit Kindern (dunkel eingefärbt), der selbst als Kind in einem P-Knoten (a) und in einem R-Knoten auftritt (b). Der Graph  $G - G(\nu)$  kann für die 2SAT-Formel  $\varphi_\nu$  als ein weiteres S-Knoten-Kind  $\nu'$  aufgefasst werden (c).

untereinander verbunden sind und wir so durch die Einbettung der äußeren und inneren Kanten von  $\mu$  keine zusätzlichen Informationen über ihre Einbettung erhalten.

Um beide Möglichkeiten zu behandeln, wird nachfolgend für jedes S-Knoten-Kind  $\nu$  von  $\mu$  eine 2SAT-Formel  $\varphi_\nu$  konstruiert, die genau dann erfüllbar ist, wenn alle inneren Kanten von  $\nu$  passend eingebettet werden können. Auch können die äußeren Kanten von  $\nu$  die Einbettung innerer Kanten beeinflussen, sodass diese Bedingungen auch in der 2SAT-Instanz abgebildet werden. Da allerdings bereits alle äußeren Kanten von  $\nu$  in Facetten von  $\text{skel}'(\mu)$  eingebettet wurden, ist es in der 2SAT-Instanz nicht mehr entscheidend, zu welchem Knoten außerhalb von  $\nu$  eine äußere Kante von  $\nu$  inzident ist. Wir benötigen lediglich die Information, auf welcher Seite von  $G(\nu)$  bezüglich der bereits festgelegten Einbettung  $\mathcal{E}(\text{skel}'(\mu))$  die Kante liegt. Dafür werden wir den Teilgraphen  $G - G(\nu)$  als ein weiteres Kind  $\nu'$  des S-Knotens interpretieren, der mit  $G(\nu)$  zwei gemeinsame Facetten  $f_1$  und  $f_2$  besitzt. Alle äußeren Kanten von  $\nu$  liegen auf genau einer der beiden Seiten von  $G - G(\nu)$  und werden somit immer in der zu dieser Seite adjazenten Facette eingebettet. Das Kind  $\nu'$  kann daher durch zwei Pfade der Länge zwei mit mittleren Knoten  $w_1$  und  $w_2$  dargestellt werden. Alle äußeren Kanten von  $\nu$ , die in der Facette  $f_i$  liegen, sind inzident zum Knoten  $w_i$  in  $G(\nu')$  für  $i = 1, 2$ . Ein Beispiel, wie der zusätzliche Kindknoten  $\nu'$  in einem P-Knoten und einem R-Knoten aussehen würde, ist in Abbildung 4.2 gezeigt.

## 2SAT-Formel für S-Knoten

Die 2SAT-Instanz  $\varphi_\nu$  für einen S-Knoten  $\nu$  enthält eine Variable  $x_{\nu_i}$  für jeden Kindknoten  $\nu_i$  von  $\nu$ , die Variable  $x_{\nu'}$  für  $\nu'$  und für jede äußere oder innere Kante  $e$  von  $\nu$  eine Variable  $x_e$ . Die Variable  $x_{\nu_i}$  ist genau dann wahr, wenn die Einbettung  $\mathcal{E}(G(\nu_i))$  verwendet werden soll und falsch, wenn die Spiegelung von  $\mathcal{E}(G(\nu_i))$  genutzt werden muss. Für  $\nu'$  legen wir eine Referenzeinbettung fest. Soll diese verwendet werden, so ist die Variable  $x_{\nu'}$  mit wahr belegt und falls  $\nu'$  gespiegelt werden soll, erhält die Variable  $x_{\nu'}$  den Wert falsch. Wird eine Kante  $e$  in die Facette  $f_1$  eingebettet, so besitzt die Variable  $x_e$  den Wert wahr. Die Variable wird mit falsch belegt, wenn  $e$  in  $f_2$  eingebettet wird.

Die Klauseln der Instanz bestehen nun aus den Beziehungen zwischen den Kindknoten und den einzubettenden Kanten. Wird eine Kante  $e$  in eine bestimmte Facette eingebettet und bedingt dies das Vorhandensein einer Spiegelung eines Kindknotens  $\xi$ , so wird dies durch die entsprechende Implikation ausgedrückt, z.B.  $x_e \Rightarrow \neg x_\xi$  bzw.  $\neg x_e \vee \neg x_\xi$ . Gleiches gilt für den umgekehrten Fall, dass eine Spiegelung eines Kindes  $\xi$  die Einbettung einer Kante  $e$  in eine bestimmte Facette erfordert. Beide Möglichkeiten treten somit genau dann auf, wenn  $e$  eine äußere Kante von  $\xi$

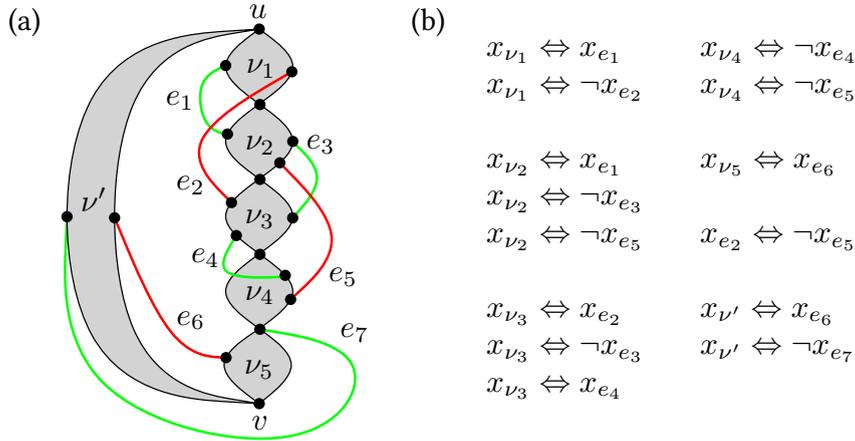


Abbildung 4.3: Ein P-Knoten  $\mu$  mit einem S-Knoten  $\nu$  als Kind, für den die Einbettungen der äußeren Kanten von Kindern von  $\nu$  gefunden werden müssen (a). Die aus den 2SAT-Klauseln resultierenden Äquivalenzen für  $\nu$  (b).

ist. Ferner fügen wir für zwei Kanten, die sich bei Einbettung in eine gleiche Facette schneiden würden und dies nicht dürfen, Klauseln hinzu, sodass mindestens eine der Kanten nicht in diese Facette eingebettet werden darf. Da nach Konstruktion die Klauseln symmetrisch auftreten, lässt sich die 2SAT-Instanz für einen S-Knoten als Menge von Äquivalenzen auffassen.

In Abbildung 4.3 ist beispielhaft ein S-Knoten  $\nu$  zusammen mit den resultierenden Äquivalenzen dargestellt. Die Kindknoten von  $\nu$  sind die Knoten  $\nu_1, \dots, \nu_5$  und  $\nu'$ . Die Kanten  $e_3$  und  $e_5$  erzeugen keine Planaritäts-Klausel, da beide exklusive Kanten von unterschiedlichem Typ sind und sie sich somit in einer SEFE schneiden dürfen. Die Kanten  $e_6$  und  $e_7$  sind äußere Kanten zu verschiedenen Kindern und daher inzident zu unterschiedlichen Seiten von  $G(\nu')$ . Da die Kante  $e_7$  nur inzident zu einem Pol von  $\nu_4$  und  $\nu_5$  ist, ergeben sich keine Bedingungen zwischen  $e_7$  und  $\nu_4$  bzw.  $\nu_5$ . Die dargestellte Instanz ist insgesamt nicht lösbar, wie folgende Äquivalenzkette zeigt:

$$x_{e_2} \Leftrightarrow x_{\nu_3} \Leftrightarrow \neg x_{e_3} \Leftrightarrow x_{\nu_2} \Leftrightarrow x_{e_1} \Leftrightarrow x_{\nu_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$$

Nach dem Lösen der 2SAT-Instanz  $\varphi_\nu$  können wir  $G(\nu')$  wieder aufspalten und die beiden Pfade auf die entsprechenden Seiten von  $\nu$  bezüglich der Einbettung  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  legen. Wir können ferner die gefundenen Spiegelungen für die Kindknoten von  $\nu$  und die Einbettungen der inneren Kanten von  $\nu$  in die Einbettung von  $G(\mu)$  übertragen und schließlich mit dem nächsten S-Knoten, der ein Kind von  $\mu$  ist, fortfahren.

Um die Berechnung einer erweiterbaren SEFE für einen Knoten  $\mu$  abzuschließen, werden nun die intrapol Kanten von  $\mu$  der bis hierhin berechneten Einbettung hinzugefügt. Falls die Pole von  $\mu$  an einer gemeinsamen Facette liegen, kann die intrapol Kante in diese Facette eingebettet werden. Ist dies nicht der Fall, so kann die intrapol Kante nicht eingebettet werden und es existiert keine SEFE für den Eingabegraphen  $G$ .

Der in diesem Kapitel vorgestellte Algorithmus besitzt eine polynomielle Laufzeit. Genauer gesagt kann SEFEBICO in  $O(|V|^3)$  Zeit entscheiden, ob eine SEFE existiert und diese auch in der gleichen Zeit berechnen. Angelini et al. stellen ebenfalls eine optimierte Implementierung dieses Algorithmus vor, die nur lineare Laufzeit benötigt. Für unsere Fragestellung wird diese Detailverbesserungen allerdings nicht benötigt, sodass wir in dieser Arbeit nicht auf die zusätzlichen Ideen des verbesserten Algorithmus eingehen werden.



## 5 Verbotene Substrukturen

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass ein Graph  $G$ , für den keine SEFE existiert, (mindestens) eine der verbotenen Substrukturen aus Kapitel 3 als SEFE-Minor enthält. Zusammen mit der Eigenschaft, dass die SEFE-Minoren-Operationen eine SEFE erhalten und daher keine der verbotenen Substrukturen als SEFE-Minor von  $G$  auftreten kann, liefert dies die gewünschte Charakterisierung für das Problem SEFE. Dabei ist  $G$  stets ein Graph, deren gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2}$  zweifach zusammenhängend ist.

Mit Hilfe des in Kapitel 4 vorgestellten Algorithmus SEFEBICO von Angelini et al. können wir Situationen untersuchen, in denen ein Graph keine SEFE besitzt und der Algorithmus daher abbricht. Für einen Knoten  $\mu$  aus dem SPQR-Baum von  $G_{1 \cap 2}$  bricht die Berechnung in folgenden Situationen ab:

- Das Skelett  $\text{skel}(\mu)$  besitzt keine kompatible Einbettung  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$ .
- Der Graph  $G(\mu)$  besitzt keine erweiterbare SEFE, da äußere und innere Kanten von  $\mu$  nicht kreuzungsfrei eingebettet werden können.
- Die 2SAT-Instanz  $\varphi_\nu$  eines S-Knotens  $\nu$ , der als Kind von  $\mu$  auftritt, ist nicht lösbar.

Weil Q-Knoten und S-Knoten vom Algorithmus übersprungen werden, genügt es, nur P-Knoten und R-Knoten zu betrachten. Wir werden daher in den nachfolgenden Abschnitten die oben genannten Situationen für diese Knotentypen analysieren und zeigen, dass der Graph  $G$  in diesen Fällen eine der verbotenen Substrukturen als SEFE-Minor enthält.

Zunächst betrachten wir den Fall, dass einer der beiden Graphen  $G_1$  oder  $G_2$  nicht planar ist. Dies führt uns direkt zu den Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  als verbotene Substrukturen, wie nachfolgendes Lemma zeigt. Wir können daher in der nachfolgenden Analyse stets annehmen, dass beide Graphen  $G_1$  und  $G_2$  planar sind.

**Lemma 2:** *Sei einer der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  nicht planar. Dann enthält  $G$  eine der verbotenen Substrukturen  $K_3$  und  $K_{5,5}$  als SEFE-Minor.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $G_1$  nicht planar. In dieser Situation kann offensichtlich keine SEFE für  $G$  existieren. Nach dem Satz von Wagner [Wag37] enthält  $G_1$  dann einen der Graphen  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  als Minor. Den Graphen  $G_1$  erhalten wir durch SEFE-Minoren-Operationen aus  $G$ , indem wir alle gemeinsamen Kanten in exklusive Kanten von  $G_1$  umwandeln und alle transzendenten Kanten und alle exklusiven Kanten von  $G_2$  entfernen. Da nun alle Kanten vom gleichen Typ sind, können wir mit SEFE-Minoren-Operationen beliebige Kanten kontrahieren und so alle in Abschnitt 2.1 vorgestellten Minoren-Operationen auf  $G_1$  nachbilden. Damit enthält  $G$  selbst (mindestens) einen der beiden Graphen  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  als SEFE-Minor.  $\square$

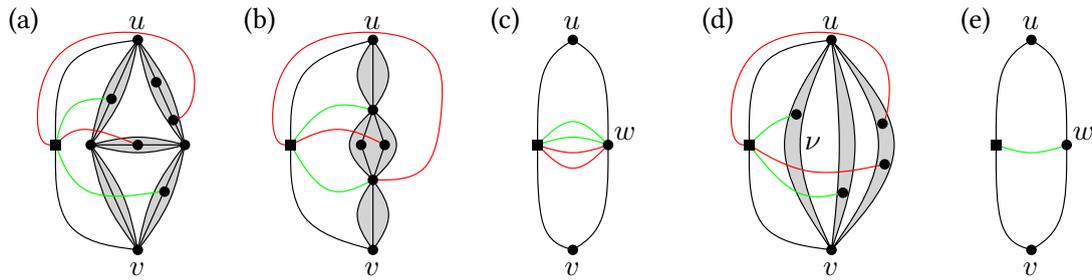


Abbildung 5.1: Ein R-Knoten (a) oder ein S-Knoten (b), kann nach Lemma 3 zu einem Pfad  $u, w, v$  kontrahiert werden, sodass alle äußeren Kanten inzident zum Knoten  $w$  sind (c). Bei einem P-Knoten (d) ist dies gemäß Lemma 4 nur für eine beliebige äußere Kante möglich (e).

## 5.1 Keine kompatible Einbettung

In diesem Abschnitt werden wir die Situationen untersuchen, in denen für einen P-Knoten oder einen R-Knoten des SPQR-Baums von  $G_{1\cap 2}$  der Algorithmus abbricht, wenn für das Skelett keine kompatible Einbettung berechnet werden kann. In den nächsten beiden Lemmata zeigen wir zwei allgemeine Aussagen zur Kontraktion von Knoten des SPQR-Baums, die wir an verschiedenen Stellen in diesem Kapitel benötigen werden.

**Lemma 3:** *Sei  $\mu$  ein R-Knoten, S-Knoten oder Q-Knoten mit Polen  $u$  und  $v$ . Dann kann  $G(\mu)$  durch SEFE-Minoren-Operationen zu der gemeinsamen Kante  $uv$  kontrahiert werden. Besitzt  $\mu$  äußere Kanten, dann kann  $G(\mu)$  auch zu einem Pfad  $u, w, v$  von gemeinsamen Kanten kontrahiert werden, sodass alle äußeren Kanten von  $\mu$  im kontrahierten Pfad inzident zu  $w$  sind.*

*Beweis.* Sei  $\mu$  ein solcher Knoten mit Polen  $u$  und  $v$ . Dann ist  $G(\mu)$  entweder die Kante  $uv$ , falls  $\mu$  ein Q-Knoten ist oder  $G(\mu) - u - v$  ist zusammenhängend und enthält nicht die Kante  $uv$ , wie in Abbildung 5.1 beispielhaft dargestellt ist.

In diesem Fall kontrahieren wir  $G(\mu) - u - v$  zu einem einzigen Knoten  $w$ , in dem alle gemeinsamen Kanten in  $G(\mu) - u - v$  kontrahiert werden und etwaige Doppelkanten gelöscht werden. Da  $G_{1\cap 2}$  zweifach zusammenhängend ist, sind  $G(\mu) - u$  und  $G(\mu) - v$  zusammenhängend und somit existieren die Kanten  $wv$  und  $wu$  im kontrahierten Graphen. Es entsteht folglich ein Pfad  $u, w, v$  von gemeinsamen Kanten, nachdem mögliche Doppelkanten zu  $uw$  und  $wv$  entfernt worden sind. Alle äußeren Kanten von  $\mu$  sind nun inzident zum Knoten  $w$ , da äußere Kanten nach Definition nicht zu einem der Pole inzident sind. Falls keine solche Kanten in  $\mu$  existieren, so kann die gemeinsame Kante  $wv$  ebenfalls kontrahiert werden und es bleibt die Kante  $uv$  übrig.  $\square$

Da P-Knoten keine weiteren P-Knoten als Kinder besitzen, können wir obiges Lemma auf jedes P-Knoten-Kind anwenden. Dies vereinfacht es uns, die SEFE-Minoren eines P-Knotens zu bestimmen. Außerdem können wir mit Hilfe von Lemma 3 eine ähnliche Kontraktionsaussage in Lemma 4 auch für P-Knoten zeigen. Beachte, dass zwischen Lemma 3 und dem nachfolgenden Lemma 4 ein deutlicher Unterschied besteht: Ein P-Knoten kann im Allgemeinen nicht zu einem Pfad  $u, w, v$  kontrahiert werden, sodass alle äußeren Kanten zum Knoten  $w$  inzident sind. Dies ist nur für S-Knoten und R-Knoten möglich.

**Lemma 4:** *Sei  $\mu$  ein P-Knoten mit Polen  $u$  und  $v$ . Dann kann  $G(\mu)$  durch SEFE-Minoren-Operationen zu der gemeinsamen Kante  $uv$  kontrahiert werden. Existiert ferner eine äußere Kante  $e$  von  $\mu$ , so*

kann  $G(\mu)$  außerdem zu einem Pfad  $u, w, v$  von gemeinsamen Kanten kontrahiert werden, sodass  $e$  inzident zu  $w$  ist.

*Beweis.* Sei  $\mu$  der P-Knoten mit Polen  $u$  und  $v$ . Da  $G(\mu)$  zusammenhängend ist, existiert ein Pfad von  $u$  nach  $v$  in  $G$ . Wir entfernen nun alle anderen Kanten aus  $G(\mu)$  und kontrahieren den Pfad  $u, \dots, v$  zu einer einzigen Kante  $uv$ .

Existiert eine äußere Kante  $e$  von  $\mu$ , so ist diese zu einem Knoten in  $G(\mu) - u - v$  inzident und somit auch in  $G(\nu) - u - v$  für ein Kind  $\nu$  von  $\mu$  enthalten, wie in Abbildung 5.1 (d) dargestellt ist. Das Kind  $\nu$  ist ein R-Knoten oder ein S-Knoten, und wir können gemäß Lemma 3 den Graphen  $G(\nu)$  zu einem Pfad  $u, w, v$  kontrahieren, sodass  $e$  zu  $w$  inzident ist. Entfernen wir nun alle Kanten der anderen P-Knoten-Kinder, so erhalten wir direkt die gewünschte Aussage.  $\square$

Wir werden nun die Fälle analysieren, in denen das Skelett  $\text{skel}(\mu)$  eines P-Knotens  $\mu$  keine kompatible Einbettung besitzt. Für einen P-Knoten  $\mu$  legt die Einbettung von  $\text{skel}(\mu)$  die zyklische Ordnung fest, in der Kinder von  $\mu$  eingebettet werden. Unterschiedliche Einbettungen unterscheiden sich daher durch die Reihenfolge der P-Knoten-Kinder.

**Lemma 5:** *Sei  $\mu$  ein P-Knoten des SPQR-Baums von  $G_{1 \cap 2}$ . Falls  $\text{skel}(\mu)$  keine kompatible Einbettung besitzt, so enthält  $G$  eine der verbotenen Substrukturen  $S_1$  oder  $S_2$  als SEFE-Minor.*

*Beweis.* Sei  $\mu$  ein P-Knoten mit Polen  $u$  und  $v$ , für den  $\text{skel}(\mu)$  keine kompatible Einbettung besitzt. Da  $G - G(\mu)$  zusammenhängend und über  $u$  und  $v$  mit  $G(\mu)$  verbunden ist, können wir die Vaterkante  $uv$  in  $\text{skel}(\mu)$  ebenfalls als ein P-Knoten-Kind interpretieren. Äußere Kanten von  $\mu$  verhalten sich somit genauso wie innere Kanten zwischen dem ehemaligen Vater und einem weiteren P-Knoten-Kind. Es genügt daher, den Fall zu betrachten, dass für innere Kanten keine kompatible Einbettung gefunden werden kann. Wir bezeichnen im Folgenden mit  $\mu_1, \dots, \mu_k$  die Kinder (inklusive des ehemaligen Vaters) des P-Knotens  $\mu$ .

Wir betrachten einen Hilfsgraphen  $H$ , der für jedes P-Knoten-Kind  $\mu_i$  einen Knoten enthält. Zwei Knoten werden in  $H$  miteinander verbunden, wenn es in  $\mu$  eine innere Kante zwischen den entsprechenden Kindern gibt, die nicht inzident zu einem der Pole  $u$  und  $v$  ist. Eine SEFE von  $G(\mu)$  legt eine zyklische Reihenfolge der P-Knoten-Kinder fest, in der nur benachbarte Kinder durch eine innere Kante miteinander verbunden sein dürfen. In diesem Fall ist der Graph  $H$  ein Kreis oder  $H$  besteht aus disjunkten, einfachen Pfaden. Besitzt umgekehrt  $H$  diese Gestalt, so erhalten wir direkt eine Reihenfolge zur Einbettung der Kinder von  $\mu$ , bei der die miteinander verbundenen Kinder auch benachbart sind. Insgesamt besitzt der Graph  $G(\mu)$  genau dann eine kompatible Einbettung, wenn sich  $H$  zu einem einfachen Kreis vervollständigen lässt. Da  $G(\mu)$  jedoch keine kompatible Einbettung besitzt, muss in  $H$  ein Knoten  $v$  mit  $\deg(v) \geq 3$  existieren oder  $H$  enthält einen Kreis  $\mathcal{K}$  und mindestens einen weiteren Knoten, der nicht in  $\mathcal{K}$  vorkommt. Dies bedeutet im ersten Fall, dass  $\mu$  ein P-Knoten-Kind besitzt, welches mit mindestens drei anderen Kindern durch innere Kanten verbunden ist. Im zweiten Fall gibt es eine Menge von P-Knoten-Kindern, die durch einen Kreis von exklusiven Kanten in  $G(\mu)$  verbunden sind. Außerdem existiert ein weiteres P-Knoten-Kind, das verhindert, dass der Kreis komplett eingebettet werden kann.

Falls  $H$  einen Knoten  $v$  mit  $\deg(v) \geq 3$  enthält, sei dies o.B.d.A. der zu  $\mu_1$  gehörende Knoten. Dann ist  $\mu_1$  zu mindestens drei weiteren P-Knoten-Kindern  $\mu_2, \dots, \mu_l$  mit  $l \geq 4$  durch innere Kanten verbunden. Diese Situation ist in Abbildung 5.2 (a) dargestellt. Wir werden nun SEFE-Minoren-Operationen anwenden, um die verbotene Substruktur  $S_1$  zu finden. Wir kontrahieren  $\mu_i$  zu einem Pfad  $u, w_i, v$  für  $i = 1, \dots, 4$ , wie in Lemma 3 beschrieben, und entfernen alle Kanten und Knoten aus den anderen P-Knoten-Kindern. Der resultierende Minor ist noch nicht minimal, sodass die Kanten  $uw_1$  und  $w_1v$  außerdem entfernt werden können. Der somit entstehende Graph  $G'$  besitzt nun die exklusiven Kanten  $w_1w_2, w_1w_3$  und  $w_1w_4$ , sodass der Kno-

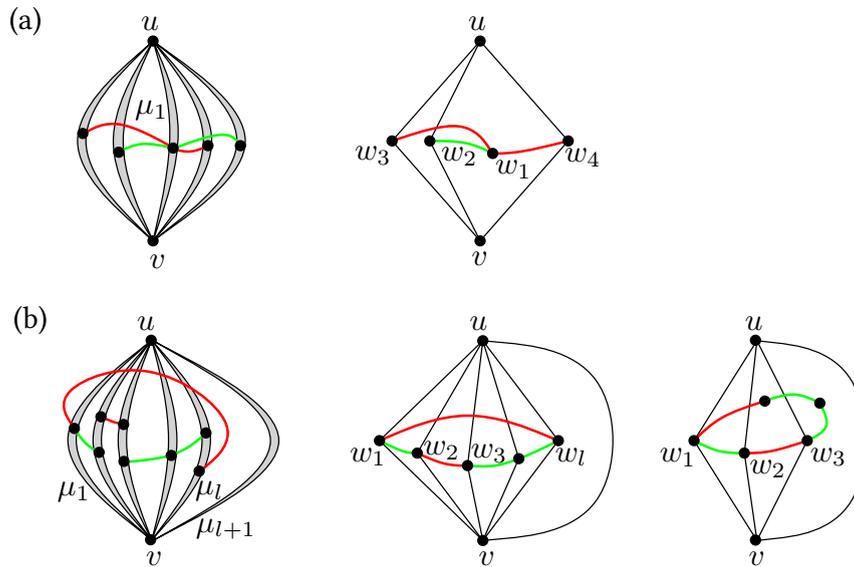


Abbildung 5.2: Situationen im Beweis zu Lemma 5, in denen keine kompatible Einbettung existieren: Ein P-Knoten-Kind ist mit mindestens drei anderen Kindern verbunden (a) oder es existiert ein Kreis aus exklusiven Kanten in  $G(\mu)$  mit einem weiteren P-Knoten-Kind (b).

ten  $w_1$  nur mit exklusiven Kanten verbunden ist (Abbildung 5.2 (a), zweiter Graph). Abschließend werden die exklusiven Kanten in transzendente Kanten umgewandelt. Der so gewonnene SEFE-Minor ist die verbotene Substruktur  $S_1$ .

Falls  $H$  einen Kreis  $\mathcal{K}$  und mindestens einen zusätzlichen Knoten enthält, dann gibt es o.B.d.A. in  $G$  eine Menge von P-Knoten-Kindern  $\mu_1, \dots, \mu_l$ , die durch einen Kreis von exklusiven Kanten verbunden sind und mindestens ein weiteres Kind  $\mu_{l+1}$ . Diese Situation ist in Abbildung 5.2 (b) dargestellt. Wir wenden nun ebenfalls SEFE-Minoren-Operationen an: Wir entfernen alle weiteren P-Knoten-Kinder aus  $G(\mu)$ , indem alle Kanten und Knoten dieser Kinder gelöscht werden. Etwaige innere Kanten dieser Kinder zu den P-Knoten-Kindern  $\mu_1, \dots, \mu_l, \mu_{l+1}$  werden ebenfalls entfernt. Wir kontrahieren die zu  $\mathcal{K}$  inzidenten Kinder  $\mu_i$  zu einem Pfad  $u, w_i, v$  für  $i = 1, \dots, l$ , wie es Lemma 3 ermöglicht, außerdem  $\mu_{l+1}$  zu einer einzigen gemeinsamen Kante  $uv$ . Nun werden alle weiteren exklusiven Kanten, die nicht auf  $\mathcal{K}$  liegen, entfernt. Der resultierende Graph besitzt nun einen Kreis von exklusiven Kanten  $w_1w_2, \dots, w_{l-1}w_l, w_lw_1$  (zweiter Graph in 5.2 (b)). Wir können diesen Kreis auf Länge 3 reduzieren, in dem wir zunächst für  $j \geq 4$  die Kanten  $uw_j$  und  $w_jv$  entfernen. Dieser Graph ist als dritter Graph in Abbildung 5.2 (b) dargestellt. Wir wandeln ebenfalls jede exklusive Kante in eine transzendente Kante um und kontrahieren anschließend die Kanten  $w_4w_5, \dots, w_lw_1$ . Der dadurch entstehende SEFE-Minor ist die verbotene Substruktur  $S_2$ .  $\square$

Sei nun  $\mu$  ein R-Knoten. Dann ist  $\text{skel}(\mu)$  ein dreifach zusammenhängender Graph und besitzt somit nur eine, bis auf Spiegelung eindeutige, planare Einbettung. Da wir am Anfang des Kapitels angenommen haben, dass  $G_1$  und  $G_2$  planar sind, ist diese Einbettung direkt eine kompatible Einbettung, wie Lemma 6 zeigt. Wir brauchen daher für diesen Fall nach keiner verbotenen Substruktur zu suchen.

**Lemma 6:** Sei  $\mu$  ein R-Knoten des SPQR-Baums von  $G_{1 \cap 2}$ . Dann existiert für  $\text{skel}(\mu)$  eine kompatible Einbettung.

*Beweis.* Sei  $\mu$  ein R-Knoten mit Polen  $u$  und  $v$ . Wir nehmen an, es gäbe für das Skelett  $\text{skel}(\mu)$  keine kompatible Einbettung. Ähnlich zum vorherigen Beweis fassen wir die Vaterkante  $uv$  in  $\text{skel}(\mu)$  ebenfalls als ein R-Knoten-Kind auf. Äußere Kanten von  $\mu$  verhalten sich somit genauso wie innere Kanten zwischen dem ehemaligen Vater und einem weiteren Kind. Es genügt daher den Fall zu betrachten, dass eine innere Kante  $e = w_1w_2$  existiert, für die die inzidenten Kinder  $\mu_1$  und  $\mu_2$  nicht an einer gemeinsamen Facette liegen.

Wir reduzieren zunächst den Graphen  $G$  durch SEFE-Minoren-Operationen zu einem einfacheren Graphen  $G'$ . Dazu kontrahieren wir die R-Knoten-Kinder  $\mu_1$  und  $\mu_2$  gemäß Lemma 3 und Lemma 4 zu einem Pfad der Länge zwei, deren mittlerer Knoten der zu  $e$  inzidente Knoten  $w_1$  bzw.  $w_2$  ist. Alle anderen Kinder werden ebenfalls nach Lemmata 3 und 4 zu einer einzelnen Kante kontrahiert. Etwaige parallele Kanten, die nach den Kontraktionen entstehen, werden entfernt und außerdem alle gemeinsamen Kanten in exklusive Kanten vom Typ der Kante  $e$  umgewandelt. Der resultierende Graph  $G'$  besteht nur noch aus exklusiven Kanten von diesem Typ und ist folglich ein SEFE-Minor von  $G_1$  oder von  $G_2$ , der selbst  $\text{skel}(\mu)$  als Minor enthält. Da das Skelett  $\text{skel}(\mu)$  ein dreifach zusammenhängender Graph ist, besitzt  $\text{skel}(\mu)$  nur eine, bis auf Spiegelung eindeutige, planare Einbettung  $\mathcal{E}$ . Folglich müssen wir diese Einbettung auch für  $G'$  verwenden, da sonst  $G'$  nicht planar eingebettet werden kann. In der durch  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  induzierten Einbettung von  $G'$  würden die Knoten  $w_1$  und  $w_2$  allerdings immer noch nicht an einer gemeinsamen Facette liegen, sodass die Kante  $e$  nicht kreuzungsfrei eingebettet werden könnte. Der Graph  $G'$  wäre somit nicht planar. Nach dem Satz von Wagner enthält  $G'$  daher einen der Graphen  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  als Minor. Da  $G'$  ein SEFE-Minor von  $G_1$  und  $G_2$  war, folgt damit, dass einer der beiden Graphen selbst nicht planar wäre. Dies haben wir jedoch am Anfang des Kapitels ausgeschlossen. Somit ist unsere Annahme falsch und  $\text{skel}(\mu)$  besitzt eine kompatible Einbettung.  $\square$

## 5.2 Keine erweiterbare SEFE

Wir betrachten nun die Situationen, in denen für einen P-Knoten oder R-Knoten  $\mu$  die äußeren und inneren Kanten von  $\mu$  nicht kreuzungsfrei eingebettet werden können und der Teilgraph  $G(\mu)$  somit keine erweiterbare SEFE besitzt. Da wir bereits die Fälle untersucht haben, in denen  $\text{skel}(\mu)$  keine kompatible Einbettung besitzt, können wir im Folgenden annehmen, dass eine solche für  $\text{skel}(\mu)$  existiert. Außerdem können wir annehmen, dass alle sichtbaren Knoten von  $\mu$  selbst eine erweiterbare SEFE besitzen. Der zu betrachtende Knoten  $\mu$  ist somit der erste Knoten, für den der Algorithmus SEFEBICO abbrechen würde.

Zuerst beschäftigen wir uns mit dem Fall, dass eine intrapol Kante die Existenz einer erweiterbaren SEFE verhindert. Würde man in dieser Situation alle intrapol Kanten aus dem Graphen entfernen, so gäbe es eine erweiterbare SEFE für  $G(\mu)$ . Nachfolgendes Lemma zeigt, dass diese Situation nicht auftreten kann, da ansonsten einer der Graphen  $G_1$  oder  $G_2$  nicht planar wäre. Dies hatten wir bereits am Anfang des Kapitels ausgeschlossen. Wir können daher bei künftigen Überlegungen annehmen, dass der Knoten  $\mu$  und seine Kinder frei von intrapol Kanten sind. Eine ähnliche Argumentation findet sich auch in der Arbeit von Angelini et al. [Ang+12a, Lemma 6].

**Lemma 7:** *Sei  $\mu$  ein P-Knoten oder ein R-Knoten des SPQR-Baums von  $G_{1 \cap 2}$ , für den  $\text{skel}(\mu)$  eine kompatible Einbettung besitzt. Der Graph  $G(\mu)$  besitze keine erweiterbare SEFE. Falls  $G(\mu)$  nach dem Entfernen aller intrapol Kanten eine erweiterbare SEFE besitzt, dann ist einer der Graphen  $G_1$  oder  $G_2$  nicht planar.*

*Beweis.* Seien  $\mu$  ein P-Knoten oder ein R-Knoten mit Polen  $u$  und  $v$  und  $e$  eine intrapol Kante in  $G(\mu)$ , die eine erweiterbare SEFE von  $G(\mu)$  verhindert. Sei  $\mathcal{E}$  eine erweiterbare SEFE von  $G'(\mu)$ , wobei  $G'$  der Graph ist, aus dem alle intrapol Kanten von  $\mu$  entfernt wurden. Ferner nehmen wir

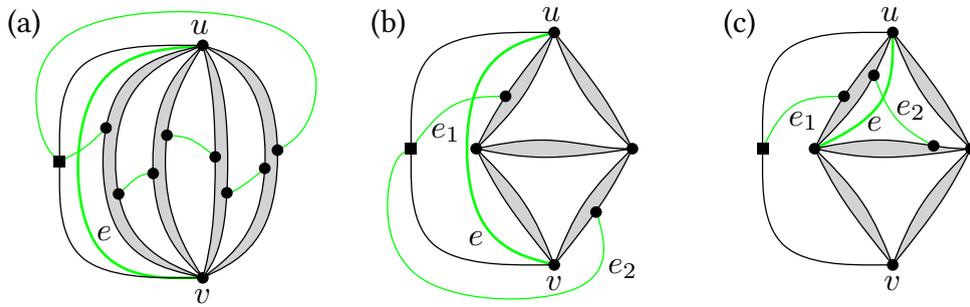


Abbildung 5.3: Situationen, in denen eine intrapol Kante  $e$  eine erweiterbare SEFE von  $G(\mu)$  verhindert: Die Kante  $e$  tritt als intrapol Kante in einem P-Knoten auf (a), als intrapol Kante in einem R-Knoten (b) oder als intrapol Kante in einem Kind eines R-Knotens (c).

an, dass alle bereits betrachteten P-Knoten und R-Knoten eine erweiterbare SEFE besitzen. Somit können wir die intrapol Kanten von S-Knoten-Kindern als bereits eingebettet ansehen. Ist  $\mu$  ein P-Knoten, dann ist  $e$  immer eine intrapol Kante von  $\mu$ , da alle Kinder von  $\mu$  ebenfalls die Pole  $u$  und  $v$  besitzen. Im Falle, dass  $\mu$  ein R-Knoten ist, kann  $e$  zusätzlich als intrapol Kante eines S-Knotens  $\nu$  auftreten, welcher ein Kind von  $\mu$  ist.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass  $\mu$  ein P-Knoten ist. Da  $G(\mu)$  keine erweiterbare SEFE besitzt, existiert für die Pole von  $\mu$  in keiner Einbettung von  $G(\mu)$  eine gemeinsame Facette in  $G(\mu)$ . Andernfalls könnte die intrapol Kante in diese eingebettet werden. Die Kinder von  $\mu$  und der Teilgraph  $G - G(\mu)$  sind daher durch (mindestens) einen Kreis  $\mathcal{K}$  von exklusiven Kanten miteinander verbunden. Da sich exklusive Kanten von  $G_1$  mit exklusiven Kanten von  $G_2$  kreuzen dürfen, sind alle Kanten von  $\mathcal{K}$  und die intrapol Kante  $e$  vom gleichen Typ. Die Situation wird in Abbildung 5.3 (a) dargestellt.

Mit Hilfe des Kreises  $\mathcal{K}$  reduzieren wir  $G(\mu)$  nun auf eine verbotene Substruktur. Dabei gehen wir analog zum Beweis von Lemma 5 vor. Wir entfernen alle exklusiven Kanten aus  $G(\mu)$ , außer  $\mathcal{K}$  und der intrapol Kante  $e$ . Nun kontrahieren wir gemäß Lemma 3 jedes P-Knoten-Kind  $\mu_i$  zu einem Pfad  $u, w_i, v$ , wobei  $w_i$  die zum Kreis inzidenten Knoten sind. Zusätzlich wird der Rest des Graphen zu einem Pfad  $u, w_0, v$  kontrahiert. Ferner können wir den Kreis auf Länge 3 reduzieren. Wir wandeln nun im resultierenden Graph alle gemeinsamen Kanten in exklusive Kanten vom Typ in  $\mathcal{K}$  um. Der so entstehende Minor ist der Graph  $K_5$  vom Typ der exklusiven Kanten. Mit dem Satz von Wagner folgt unmittelbar, dass der Graph  $G_1$  oder  $G_2$  nicht planar ist.

Ist  $\mu$  nun ein R-Knoten, so kann die intrapol Kante  $e$  genau in zwei Facetten eingebettet werden. Da  $G(\mu)$  allerdings keine erweiterbare SEFE besitzt, gibt es zwei exklusive Kanten  $e_1$  und  $e_2$  vom gleichen Typ wie  $e$ , die bereits in diese Facetten eingebettet worden sind und  $e$  schneiden würden. In Abbildung 5.3 sind die beiden möglichen Situationen dargestellt, falls  $e$  eine intrapol Kante von  $\mu$  ist (b) oder  $e$  als intrapol Kante in einem Kind von  $\mu$  auftritt (c). Das Skelett  $\text{skel}(\mu)$  besitzt jedoch nur eine, bis auf Spiegelung eindeutige, planare Einbettung. Somit müssen die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  in die entsprechenden Facetten eingebettet werden. Der Graph  $G(\mu)$  ist folglich nicht planar. Dies ändert sich auch nicht, wenn wir alle gemeinsamen Kanten in exklusive Kanten vom Typ von  $e$  umwandeln. Da der resultierende Graph nun ein Minor des Graphen  $G_1$  oder  $G_2$  ist, folgt direkt, dass  $G_1$  oder  $G_2$  selbst nicht planar sein kann.  $\square$

Mit Hilfe von Lemma 7 können wir uns nun auf die Fälle konzentrieren, in denen  $G(\mu)$  keine intrapol Kanten besitzt und dennoch keine erweiterbare SEFE existiert. Bevor wir jedoch zum eigentlichen Beweis übergehen, zeigen wir zwei Hilfslemmata (Lemma 8 und Lemma 9), die es

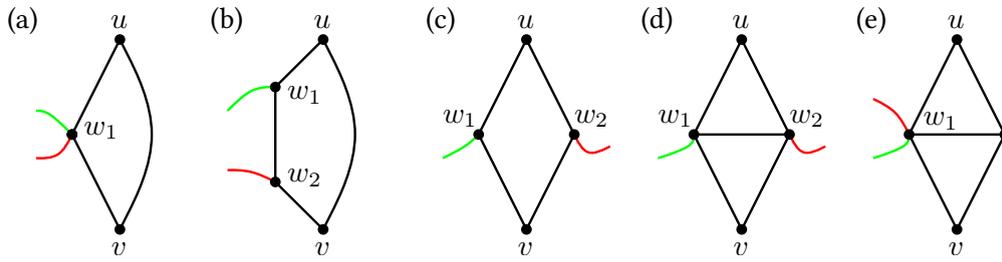


Abbildung 5.4: Ein P-Knoten  $\mu$  mit äußeren Kanten kann durch SEFE-Minoren-Operationen auf einen der Graphen (a), (b) oder (c) reduziert werden. Ist  $\mu$  ein R-Knoten, so kann dieser außerdem zu den Graphen (d) oder (e) kontrahiert werden.

uns nachfolgend erlauben, P-Knoten und R-Knoten, die als Kinder eines S-Knotens auftreten, auf eine einfachere Struktur zurückzuführen.

**Lemma 8:** Sei  $\mu$  ein P-Knoten. Für  $G(\mu)$  existiere eine erweiterbare SEFE. Ferner seien  $w_1$  und  $w_2$  zwei von den Polen  $u, v$  verschiedene Knoten in  $G(\mu)$ , die jeweils inzident zu einer äußeren Kante von  $\mu$  sind. Dann kann  $G(\mu)$  durch SEFE-Minoren-Operationen auf einen der Graphen (a), (b) oder (c) in Abbildung 5.4, bis auf Reihenfolge von  $w_1$  und  $w_2$  und Typ der äußeren Kanten, reduziert werden.

*Beweis.* Sei  $\mu$  ein P-Knoten, der obige Bedingungen erfüllt und  $\mathcal{L}$  die zyklische Liste der Knoten, die den Rand der äußeren Facette von  $G(\mu)$  bilden. Diese Liste enthält neben den Polen  $u$  und  $v$  auch die Knoten  $w_1$  und  $w_2$ .

Liegen beide Knoten auf der gleichen Seite von  $\partial G(\mu)$ , d.h. die Liste  $\mathcal{L}$  enthält o.B.d.A. als Teilliste  $u, \dots, w_1, \dots, w_2, \dots, v$ , so betrachten wir den Pfad von  $u$  nach  $v$ , der durch die Teilliste induziert wird. Dieser Pfad ist gleichzeitig auch Teil des Randes eines P-Knoten-Kinds  $\mu_1$ . Wir kontrahieren nun die Teilpfade von  $u$  nach  $w_1, w_2$  nach  $v$  und, falls  $w_1 \neq w_2$  gilt,  $w_1$  nach  $w_2$  jeweils zu einer einzigen Kante. Da  $\mu$  ein P-Knoten ist, existiert mindestens ein weiteres P-Knoten-Kind  $\mu_2$ . Dieses kontrahieren wir gemäß Lemma 3 zu einer Kante  $uv$ . Abschließend entfernen wir alle anderen P-Knoten-Kinder und etwaige weitere exklusive Kanten. Wir erhalten somit den Graphen (a) aus Abbildung 5.4, falls  $w_1 = w_2$  gilt, und andernfalls den Graphen (b).

Falls die Knoten  $w_1$  und  $w_2$  auf unterschiedlichen Seiten liegen, so gehören die beiden Knoten zu zwei verschiedenen P-Knoten-Kindern  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , da  $\mu$  mindestens zwei Kinder besitzt. Nach Lemma 3 können diese zu einem Pfad  $u, w_1, v$  bzw.  $u, w_2, v$  kontrahiert werden. Nach dem anschließenden Entfernen aller weiteren P-Knoten-Kinder und etwaiger weiterer exklusiver Kanten aus  $G(\mu)$  erhält man direkt den Graphen (c).

Da alle zu kontrahierenden Kanten gemeinsame Kanten von  $G_{1 \cap 2}$  waren, ist dieses Vorgehen auch mit SEFE-Minoren-Operationen verträglich.  $\square$

Analog zu Lemma 8 möchten wir im nächsten Lemma auch für R-Knoten zeigen, wie diese für unsere Zwecke vereinfacht werden können.

**Lemma 9:** Sei  $\mu$  ein R-Knoten. Für  $G(\mu)$  existiere eine erweiterbare SEFE. Ferner seien  $w_1$  und  $w_2$  zwei von den Polen  $u, v$  verschiedene Knoten in  $G(\mu)$ , die jeweils inzident zu einer äußeren Kante von  $\mu$  sind. Dann kann  $G(\mu)$  durch SEFE-Minoren-Operationen auf einen der Graphen (a), (b), (c), (d) oder (e) in Abbildung 5.4, bis auf Reihenfolge von  $w_1$  und  $w_2$  und Typ der äußeren Kanten, reduziert werden.

*Beweis.* Sei  $\mu$  ein R-Knoten, der obige Bedingungen erfüllt. Sei ferner  $\mathcal{L}$  die zyklische Liste der Knoten, die die äußere Facette von  $G(\mu)$  beranden. Diese Liste enthält neben den Polen  $u$  und  $v$  auch die Knoten  $w_1$  und  $w_2$ . Liegen beide Knoten auf der gleichen Seite von  $\partial G(\mu)$ , d.h. die Liste  $\mathcal{L}$  enthält o.B.d.A. als Teilliste  $u, \dots, w_1, \dots, w_2, \dots, v$ , so können wir  $G(\mu)$  wie folgt kontrahieren: Sei  $\mathcal{K}$  der durch  $\mathcal{L}$  induzierte Kreis. Die gemeinsamen Kanten, die von  $u$  nach  $w_1$  führen, werden zu einer einzelnen Kante kontrahiert, ebenso die Kanten von  $w_2$  nach  $v$  und die Kanten von  $w_1$  nach  $w_2$ , falls  $w_1 \neq w_2$  gilt. Der Rest von  $\mathcal{K}$  kann außerdem zu einer Kante  $uv$  kontrahiert werden. Abschließend werden alle übrigen Kanten, bis auf die zu  $w_1$  und  $w_2$  inzidenten exklusiven Kanten, aus  $G(\mu)$  entfernt. Der resultierende Graph ist der Graph (a) aus Abbildung 5.4, falls  $w_1 = w_2$  gilt, und andernfalls der Graph (b) aus dieser Abbildung.

Im Falle, dass die Knoten  $w_1$  und  $w_2$  nicht auf der gleichen Seite von  $\partial G(\mu)$  liegen, gibt es einen Pfad  $P$  von  $w_1$  nach  $w_2$  in  $G(\mu) - u - v$ , der nicht ganz auf dem durch  $\mathcal{L}$  induzierten Kreis  $\mathcal{K}$  liegt. Dieser existiert, da  $\text{skel}(\mu)$  ein dreifach zusammenhängender Graph ist und somit  $G(\mu) - u - v$  zusammenhängend ist. Sei  $P'$  der Teilpfad von  $P$ , sodass die Kanten aus  $P'$  nicht in  $\mathcal{K}$  enthalten sind, und bezeichne die beiden Endknoten von  $P'$  mit  $p$  und  $q$ . Nach Konstruktion von  $P'$  liegen die beiden Knoten  $p$  und  $q$  auf unterschiedlichen Seiten von  $\partial G(\mu)$ . O.B.d.A. nehmen wir an, dass  $\mathcal{L}$  die Teilliste  $u, \dots, w_1, \dots, v, \dots, w_2, \dots, u$  enthält. Wir kontrahieren nun den Pfad von  $u$  nach  $w_1$  in  $\mathcal{K}$  zu einer Kante bzw. zu einem Pfad der Länge zwei, falls einer der Knoten  $p$  oder  $q$  zwischen  $v$  und  $w_1$  liegt. Analog verfahren wir mit den Kanten von  $w_1$  nach  $v$ ,  $v$  nach  $w_2$  und von  $w_2$  nach  $u$ . Durch die Kontraktion der Pfade der Länge zwei zu einer Kante können wir nun erreichen, dass  $w_1$  und  $w_2$  mit den Knoten  $p$  und  $q$  identifiziert werden können. Den Pfad  $P'$  können wir daher anschließend zur gemeinsamen Kante  $w_1 w_2$  kontrahieren. Abschließend werden ebenfalls alle übrigen Kanten, bis auf die zu  $w_1$  und  $w_2$  inzidenten exklusiven Kanten, aus  $G(\mu)$  entfernt. Man erhält den Graphen (d) aus Abbildung 5.4 bzw. nach Entfernung der Kante  $w_1 w_2$  den Graphen (c).

Wir betrachten nun, wie wir den Graphen (e) erhalten, wenn die Knoten  $w_1$  und  $w_2$  auf der gleichen Seite von  $\partial G(\mu)$  liegen. Sei  $\mathcal{K}$  erneut der durch  $\mathcal{L}$  induzierte Kreis. Wir können nach obigen Überlegungen einen Teil des Kreises zu einem Pfad  $u, w_1, w_2, v$  kontrahieren. Da  $\mu$  ein R-Knoten ist, existiert noch ein weiterer Knoten  $w_3$  in  $G(\mu)$ , der auf der anderen Seite von  $\partial G(\mu)$  liegt und somit noch in  $\mathcal{K}$  enthalten ist. Ferner existiert analog zum letzten Fall ein weiterer Pfad von  $w_1$  nach  $w_3$  in  $G(\mu) - u - v$ . Wir kontrahieren nun den Rest von  $\mathcal{K}$  zu einem Pfad  $u, w_3, v$ . Außerdem kontrahieren wir die Kante  $w_1 w_2$ , falls  $w_1 \neq w_2$  gilt, und identifizieren dadurch  $w_1$  mit  $w_2$ . Die Knoten  $w_1$  und  $w_3$  sind noch immer durch einen weiteren Pfad verbunden, den wir zu einer einzigen Kante  $w_1 w_3$  kontrahieren können. Schließlich werden die übrigen Kanten, bis auf die beiden zu  $w_1$  inzidenten exklusiven Kanten, aus  $G(\mu)$  entfernt. Wir erhalten schließlich den Graphen (e) aus Abbildung 5.4.

In allen Fällen waren die zu kontrahierenden Kanten gemeinsame Kanten von  $G_1 \cap G_2$ . Daher kann die gesamte Kontraktion mit SEFE-Minoren-Operationen durchgeführt werden.  $\square$

Der Algorithmus SEFEBICO versucht, durch mögliches Spiegeln der sichtbaren Knoten eines P-Knotens oder R-Knotens  $\mu$  eine erweiterbare SEFE für  $G(\mu)$  zu konstruieren. Die Festlegung einer Spiegelung eines sichtbaren Knotens von  $\mu$  legt gleichzeitig fest, in welche Facette die inzidenten inneren und äußeren Kanten eingebettet werden. Die dadurch festgelegte Einbettung einer solchen Kante bedingt selbst wiederum eine mögliche Spiegelung des anderen zu der Kante inzidenten sichtbaren Knotens. Existiert nun keine SEFE, gibt es hierfür zwei mögliche Gründe: Entweder müssen zwei exklusive Kanten vom gleichen Typ in dieselbe Facette eingebettet werden und schneiden sich dort. Oder zwei Kanten bedingen, dass ein sichtbarer Knoten gleichzeitig gespiegelt und nicht gespiegelt werden muss.

Mit den bereits bewiesenen Aussagen nehmen wir an, dass in  $G(\mu)$  keine intrapol Kanten existieren und für  $\text{skel}(\mu)$  eine kompatible Einbettung  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  existiert. Wir betrachten nun die

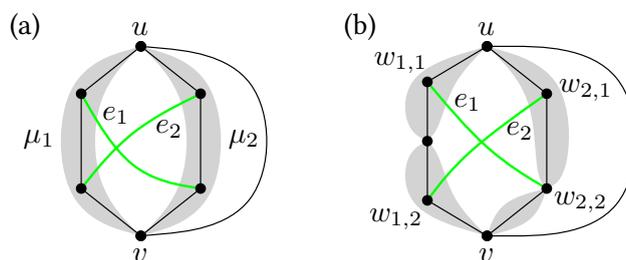


Abbildung 5.5: Die SEFE-Minoren, die als Zwischenschritte in Fall 1 von Lemma 10 auftreten. Die Teilgraphen  $G(\mu_1)$  und  $G(\mu_2)$  sind hellgrau hinterlegt.

Situation, dass die äußeren Kanten von  $\mu$  und inneren Kanten von  $\mu$  nicht in eine eindeutigen Facetten von  $\mathcal{E}$  eingebettet werden können und dadurch keine erweiterbare SEFE für  $G(\mu)$  existiert. Mit dem nächsten Lemma können wir für einen P-Knoten  $\mu$  in diesem Fall die bereits bekannten Graphen  $S_1$  und  $S_2$  als verbotene Substrukturen extrahieren.

**Lemma 10:** Sei  $\mu$  ein P-Knoten ohne intrapol Kanten, für den  $\text{skel}(\mu)$  eine kompatible Einbettung  $\mathcal{E}$  besitzt. Falls nicht alle äußeren Kanten und inneren Kanten von  $\mu$  kreuzungsfrei in die Facetten von  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  eingebettet werden können, so enthält  $G$  eine der verbotenen Substrukturen  $S_1$  oder  $S_2$  als SEFE-Minor.

*Beweis.* Sei  $\mu$  der P-Knoten mit Polen  $u$  und  $v$ , für den nicht alle äußeren und inneren Kanten kreuzungsfrei in die Facetten von  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  eingebettet werden können. Es gibt daher zwei exklusive Kanten  $e_1$  und  $e_2$ , die den Abbruch des Algorithmus verursachen. Da  $e_1$  und  $e_2$  innere Kanten von  $\mu$  oder äußere Kanten von  $\mu$  sind, sind die Kanten insbesondere nicht inzident zu den Polen  $u$  und  $v$  von  $\mu$ . Ansonsten wären sie innere Kanten eines Kindes von  $\mu$  oder des Vaters von  $\mu$ . Nach obigen Überlegungen können wir für  $e_1$  und  $e_2$  die beiden Fälle unterscheiden, dass in jeder kompatiblen Einbettung  $\mathcal{E}$  von  $\text{skel}(\mu)$  zwei exklusive Kanten vom gleichen Typ in die gleiche Facette eingebettet werden (Fall 1) oder dass in jeder solchen Einbettung zwei Kanten unterschiedliche Spiegelungen eines sichtbaren Knotens bedingen (Fall 2). In letzterem Fall ist ferner zu differenzieren, ob die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  zu verschiedenen P-Knoten-Kindern (Fall 2a) oder zum gleichen P-Knoten-Kind inzident sind (Fall 2b).

Analog zum Beweis von Lemma 5 werden wir nachfolgend den Teilgraphen  $G - G(\mu)$  ebenfalls als ein P-Knoten-Kind interpretieren. Wir können daher  $G - G(\mu)$  gemäß Lemma 3 zu einem Pfad der Länge zwei von gemeinsamen Kanten kontrahieren, sodass alle äußeren Kanten von  $\mu$  inzident zum mittleren Knoten sind. Mit dieser Auffassung besitzt  $\mu$  folglich mindestens drei Kinder.

**Fall 1:** Sei  $\mathcal{E}$  eine kompatible Einbettung von  $\text{skel}(\mu)$ . Dann gibt es zwei exklusive Kanten  $e_1$  und  $e_2$  vom selben Typ, die kreuzend in die gleiche Facette  $f$  von  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  eingebettet wurden. Die Kanten verbinden somit jeweils die zu  $f$  adjazenten P-Knoten-Kinder  $\mu_1$  und  $\mu_2$  miteinander. Seien  $w_{i,1}$  und  $w_{i,2}$  die zu  $e_1$  bzw.  $e_2$  inzidenten Knoten in  $G(\mu_i)$ , für  $i = 1, 2$ . Da sich  $e_1$  und  $e_2$  in  $f$  kreuzen, muss  $w_{i,1} \neq w_{i,2}$  für  $i = 1, 2$  gelten. Folglich muss  $G(\mu_i)$  mindestens die vier Knoten  $u, w_{i,1}, w_{i,2}$  und  $v$  enthalten. Wir kontrahieren zunächst die Kindknoten  $\mu_i$  zu einer einfacheren Struktur: Falls  $\mu_i$  ein R-Knoten ist, wird  $G(\mu_i)$  zum Graphen (b) aus Abbildung 5.4 kontrahiert, was laut Lemma 9 möglich ist. Wir entfernen anschließend die durch die Kontraktion neu entstandene Kante  $uv$ . Ein entsprechender Graph ist in Abbildung 5.5 (a) dargestellt.

Falls  $w_{i,1}$  und  $w_{i,2}$  zum gleichen Kind eines S-Knotens  $\mu_i$  gehören und keiner der Knoten ein Pol von  $\mu_i$  ist, dann verfahren wir ebenso mit  $\mu_i$ . Ist andernfalls der Knoten  $w_{i,j}$  für  $j = 1, 2$  kein Pol eines S-Knoten-Kinds, so können wir das zu  $w_{i,j}$  gehörige Kind, gemäß Lemma 3 und

Lemma 4, zu einem Pfad der Länge zwei kontrahieren, dessen mittlerer Knoten gerade  $w_{i,j}$  ist. Falls  $w_{i,j}$  jedoch ein Pol eines S-Knotens ist, so fahren wir direkt fort. Bei jeder der drei Möglichkeiten kontrahieren wir anschließend alle anderen Kinder von  $\mu_i$  zu einer einzigen Kante, sodass aus  $G(\mu_i)$  nun ein Pfad von gemeinsamen Kanten entsteht, auf dem  $w_{i,1}$  und  $w_{i,2}$  liegen. Beispielhaft ist ein solcher Graph in Abbildung 5.5 (b) dargestellt. Durch weitere Kontraktionen können wir schließlich den Pfad auf  $u, w_{i,1}, w_{i,2}, v$  oder  $u, w_{i,2}, w_{i,1}, v$  reduzieren.

In jeder Situation können wir anschließend ein weiteres P-Knoten-Kind zu einer einzigen gemeinsamen Kante  $uv$  kontrahieren (vgl. Lemma 3) und etwaige weitere Kinder von  $\mu$  und alle übrigen exklusiven Kanten aus  $G$  entfernen. Wandelt man abschließend alle gemeinsamen Kanten in exklusive Kanten vom Typ von  $e_1$  und  $e_2$  um, so erhält man den Graphen  $K_{3,3}$  als SEFE-Minor. Folglich ist einer der beiden Graphen  $G_1$  oder  $G_2$  nicht planar, was wir jedoch bereits am Anfang dieses Kapitels ausgeschlossen haben.

**Fall 2:** Betrachten wir nun diejenigen Situationen, in denen in jeder kompatiblen Einbettung  $\mathcal{E}$  zwei Kanten an die Spiegelung eines sichtbaren Knotens  $\nu$  von  $\mu$  sich gegenseitig ausschließende Anforderungen stellen. Dann sind die beiden Kanten  $e_1$  und  $e_2$  äußere Kanten von  $G(\nu)$  und somit zu keinem Pol von  $G(\nu)$  inzident. Seien nachfolgend  $w_1$  und  $w_2$  die zu  $e_1$  bzw.  $e_2$  inzidenten Knoten in  $G(\nu)$ .

**Fall 2a:** Sind die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  inzident zu verschiedenen Kindern von  $\mu$ , so müssen in diesem Fall die Knoten  $w_1$  und  $w_2$  auf der gleichen Seite von  $\partial G(\nu)$  liegen, da ansonsten beide Kanten die gleiche Spiegelung von  $\nu$  bedingen würden. Falls  $\nu$  selbst schon ein Kind von  $\mu$  ist, dann ist  $\nu$  ein R-Knoten und wir können ihn in dieser Situation zum Graphen (e) in Abbildung 5.4 reduzieren. Die anderen zu den Kanten  $e_1$  und  $e_2$  inzidenten P-Knoten-Kinder kontrahieren wir gemäß Lemma 3 zu einem Pfad der Länge zwei. Alle anderen Kinder von  $\mu$  und etwaige weitere exklusive Kanten können wir nun entfernen. Wir erhalten einen Graphen, der in Abbildung 5.6 (a) dargestellt ist. Wir können anschließend die Kanten  $uw_1$  und  $w_1v$  entfernen und die beiden Kanten  $e_1$  und  $e_2$  in transzendente Kanten umwandeln. Die weitere zu  $w_1$  inzidente Kante kann ebenfalls in eine transzendente Kante transformiert werden und es entsteht somit die verbotene Substruktur  $S_1$  als SEFE-Minor.

In dem Fall, dass  $\nu$  ein Kind eines S-Knotens war, ist  $\nu$  ein P-Knoten oder ein R-Knoten und wir kontrahieren  $G(\nu)$  nach Lemma 8 bzw. 9 zum Graphen (a) oder zum Graphen (b) aus Abbildung 5.4, je nachdem, ob  $w_1 = w_2$  gilt. Im Fall  $w_1 \neq w_2$  kontrahieren wir außerdem die gemeinsame Kante  $w_1w_2$ . Die zu den Kanten  $e_1$  und  $e_2$  inzidenten P-Knoten-Kinder kontrahieren wir abermals zu einem Pfad der Länge zwei. Abschließend entfernen wir nun alle weiteren P-Knoten-Kinder und etwaige weitere exklusive Kanten. Der resultierende Graph ist Graph (b) aus Abbildung 5.6. Dieser Graph ist ebenfalls nicht minimal bezüglich SEFE-Minoren-Operationen. Wir können die Kante  $uw_1$  entfernen und anschließend die Kanten  $e_1, e_2$  und die weitere zu  $w_1$  inzidente Kante in transzendente Kanten umwandeln. Der gefundene SEFE-Minor ist ebenfalls die verbotene Substruktur  $S_1$ .

**Fall 2b:** Falls die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  inzident zum gleichen P-Knoten-Kind sind, so liegen  $w_1$  und  $w_2$  auf unterschiedlichen Seiten von  $\partial G(\nu)$ , da ansonsten beide Kanten wieder die gleiche Spiegelung von  $\nu$  bedingen würden. Wir können  $G(\nu)$  daher zum Graphen (d) in Abbildung 5.4 reduzieren, falls  $\nu$  ein Kind von  $\mu$  und somit ein R-Knoten ist. Das andere inzidente P-Knoten-Kind kontrahieren wir nach Lemma 3 zu einem Pfad  $u, w_3, v$ . Die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  sind somit inzident zum Knoten  $w_3$ . Ein weiteres P-Knoten-Kind wird zur Kante  $uv$  kontrahiert und alle anderen P-Knoten-Kinder und etwaige weitere exklusive Kanten entfernt. Wir erhalten so den Graphen (c) aus Abbildung 5.6. Wir wandeln nun die beiden Kanten  $e_1$  und  $e_2$  und zusätzlich die gemeinsame Kante  $w_1w_2$  in transzendente Kanten um. Der resultierende Graph ist genau die verbotene Substruktur  $S_2$ .

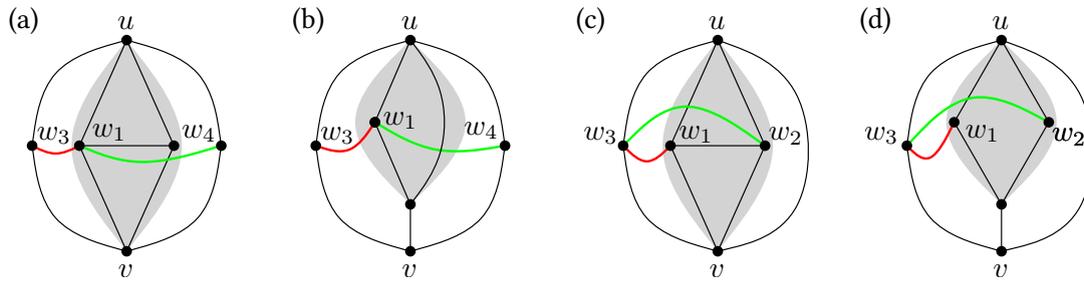


Abbildung 5.6: Die SEFE-Minoren, die als Zwischenschritte in Fall 2 von Lemma 10 auftreten. Der Teilgraph  $G(v)$  ist hellgrau hinterlegt. Die Färbung der exklusiven Kanten ist hierbei lediglich beispielhaft.

War  $\nu$  hingegangen ein Kind eines S-Knotens, so reduzieren wir  $G(\nu)$  nach Lemma 8 und Lemma 9 zum Graphen (c) in Abbildung 5.4. Da mindestens ein weiteres S-Knoten-Kind  $\nu_2$  existiert, können wir dieses nach Lemma 3 und Lemma 4 zu einer einzelnen Kante kontrahieren. Mögliche andere S-Knoten-Kinder werden komplett kontrahiert. Wir verfahren analog zu eben, indem wir das andere P-Knoten-Kind zu einem Pfad  $u, w_3, v$  kontrahieren, ein weiteres Kind zu der Kante  $uv$  und schließlich alle weiteren Kanten entfernen. Der resultierende Graph ist in Abbildung 5.6 (d) dargestellt. Dieser ist jedoch noch nicht minimal, sodass wir die gemeinsame Kante  $uw_3$  entfernen können. Anschließend wandeln wir die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  und zusätzlich die Kante  $w_3v$  in transzendente Kanten um. Wir erhalten in diesem Fall abermals die verbotene Substruktur  $S_1$  als SEFE-Minor.  $\square$

Betrachten wir nun die Situation, wenn  $\mu$  ein R-Knoten ist und seine äußeren Kanten und inneren Kanten nicht kreuzungsfrei in eine Facette von  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  eingebettet werden können. Das nachfolgende Lemma besagt, dass dann  $G$  ebenfalls die verbotenen Substrukturen  $S_1$  und  $S_2$  enthalten muss.

**Lemma 11:** Sei  $\mu$  ein R-Knoten ohne intrapol Kanten, für den  $\text{skel}(\mu)$  eine kompatible Einbettung  $\mathcal{E}$  besitzt. Falls nicht alle äußeren Kanten und inneren Kanten von  $\mu$  kreuzungsfrei in die Facetten von  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  eingebettet werden können, so enthält  $G$  eine der verbotenen Substrukturen  $S_1$  oder  $S_2$  als SEFE-Minor.

*Beweis.* Sei  $\mu$  ein R-Knoten, für den nicht alle äußeren und inneren Kanten kreuzungsfrei in die Facetten von  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  eingebettet werden können. Es gibt daher in jeder kompatiblen Einbettung  $\mathcal{E}$  von  $\text{skel}(\mu)$  zwei exklusive Kanten  $e_1$  und  $e_2$ , die den Abbruch des Algorithmus verursachen. Genau wie im vorherigen Lemma sind die beiden Kanten entweder vom gleichen Typ und werden kreuzend in die gleiche Facette von  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  eingebettet oder die beiden Kanten bedingen unterschiedliche Spiegelungen eines sichtbaren Knotens von  $\mu$ . In beiden Fällen betrachten wir den Teilgraphen  $G - G(\mu)$  als ein weiteres R-Knoten-Kind.

Betrachten wir zuerst den Fall, dass die Kanten  $e_1 = w_{1,1}w_{1,2}$  und  $e_2 = w_{2,1}w_{2,2}$  exklusive Kanten vom gleichen Typ sind und kreuzend in die gleiche Facette  $f$  von  $\mathcal{E}$  eingebettet worden sind. Wir gehen dabei analog zum Beweis von Lemma 6 vor und kontrahieren die R-Knoten-Kinder gemäß Lemmata 3 und 4 wie folgt: Wir kontrahieren das zu  $w_{i,j}$  gehörige R-Knoten-Kind zu einem Pfad der Länge zwei, falls  $w_{i,j}$  kein Pol des R-Knoten-Kinds ist ( $i, j = 1, 2$ ). Der mittlere Knoten ist dann gerade  $w_{i,j}$ . Alle anderen Kinder werden anschließend zu einer einzelnen Kante kontrahiert. Weitere exklusive Kanten und etwaige parallele Kanten, die nach den Kontraktionen entstehen, werden entfernt. Abschließend werden alle gemeinsamen Kanten in exklusive Kanten vom Typ der Kanten  $e_1$  und  $e_2$  umgewandelt. Der resultierende Graph  $G'$

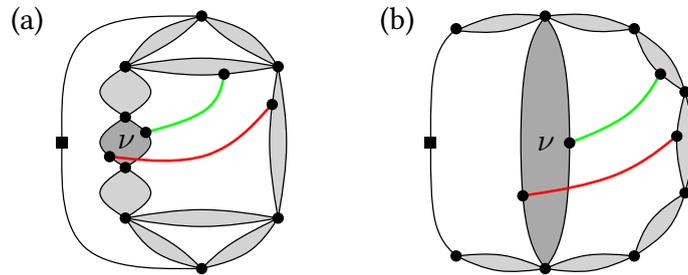


Abbildung 5.7: Ein R-Knoten  $\mu$  (a), den wir bezüglich seines sichtbaren Knotens  $\nu$  im Beweis zu Lemma 11 als einen P-Knoten interpretieren können (b).

besteht somit nur noch aus exklusiven Kanten dieses Typs. Da das Skelett  $\text{skel}(\mu)$  ein dreifach zusammenhängender Graph ist und dieser als Minor in  $G'$  auftritt, gibt es für  $G' - e_1 - e_2$  nur eine, bis auf Spiegelung eindeutige, planare Einbettung. Die Kante  $e_1$  muss folglich in die Facette  $f$  eingebettet werden und induziert eine, bis auf Spiegelung eindeutige, planare Einbettung für  $G - e_2$ . Die Kante  $e_2$  kann jedoch nicht mehr kreuzungsfrei eingebettet werden, sodass der Graph  $G'$  selbst nicht planar ist. Da  $G'$  ein SEFE-Minor von  $G_1$  und  $G_2$  war, folgt damit, dass einer der beiden Graphen selbst nicht planar ist. Diesen Fall haben wir jedoch bereits am Anfang des Kapitels ausgeschlossen und er kann somit in der jetzigen Situation nicht mehr auftreten.

Im Fall, dass die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  in der Einbettung  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$  unterschiedliche Spiegelungen eines sichtbaren Knotens  $\nu$  bedingen, werden wir den Graphen  $G$  durch SEFE-Minoren-Operationen auf einen vereinfachten Graphen zurückführen, der strukturell ein P-Knoten ist. Auf diesen können wir dann Lemma 10 anwenden. Der sichtbare Knoten  $\nu$  ist adjazent zu zwei Facetten  $f_1$  und  $f_2$  in  $\mathcal{E}(\text{skel}(\mu))$ . Somit sind die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  äußere Kanten von  $\nu$ , die in  $f_1$  oder  $f_2$  liegen. Sei ferner  $\mathcal{L}_j$  die zyklische Liste der sichtbaren Knoten von  $\mu$ , die adjazent zu der Facette  $f_j$  liegen für  $j = 1, 2$ . Wir entfernen nun alle anderen sichtbaren Knoten von  $\mu$ , die nicht in  $\mathcal{L}_1$  oder  $\mathcal{L}_2$  enthalten sind. Den resultierenden Graphen können wir als P-Knoten interpretieren. Dieser besitzt drei P-Knoten-Kinder, indem wir  $\nu$  als Kind ansehen, sowie  $\mathcal{L}_1 \setminus \{\nu\}$  und  $\mathcal{L}_2 \setminus \{\nu\}$  jeweils als die Kinder eines S-Knotens auffassen, der selbst als Kind im P-Knoten auftritt. In Abbildung 5.7 ist für einen sichtbaren Knoten  $\nu$  von  $\mu$  beispielhaft dargestellt, welche Form der resultierende P-Knoten besitzt. Mit Fall 2 des Beweises von Lemma 10 erhalten wir schließlich die angegebenen Substrukturen.  $\square$

### 5.3 Nicht-lösbare 2SAT-Instanz

Um die Suche nach verbotenen Substrukturen abzuschließen, müssen wir noch die Situationen betrachten, in denen ein P-Knoten oder R-Knoten einen S-Knoten  $\nu$  als Kind besitzt, für den die konstruierte 2SAT-Formel  $\varphi_\nu$  nicht erfüllbar ist. Folglich existiert dann keine erweiterbare 2SAT-Instanz für  $G(\mu)$ . Da dieser Schritt des Algorithmus für P-Knoten und R-Knoten gleich abläuft (siehe Kapitel 4), können wir beide Knotentypen gemeinsam behandeln und müssen nicht unterscheiden, welcher Knotentyp der Vater von  $\nu$  ist. Den in Kapitel 4 konstruierten Knoten  $\nu'$ , der den Graphen  $G - G(\nu)$  repräsentiert, fassen wir dabei erneut als ein S-Knoten-Kind auf.

Am Anfang des Kapitels 5 haben wir bereits den Fall untersucht, dass einer der beiden Graphen  $G_1$  und  $G_2$  nicht planar ist und diesen im weiteren Verlauf ausgeschlossen. Daher können die beiden nachfolgenden Situationen nicht auftreten, da sie direkt zu einem  $K_{3,3}$  als Minor und damit zur Nichtplanarität einer der Ausgangsgraphen führen würden.

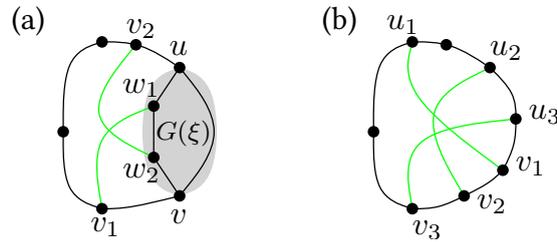


Abbildung 5.8: Situationen, die in einer 2SAT-Instanz direkt zu einem  $K_{3,3}$  als Minor führen: Zwei äußere Kanten eines Kinds  $\xi$  liegen auf der gleichen Seite und kreuzen sich (a). Drei exklusive Kanten vom gleichen Typ alternieren paarweise miteinander (b).

1. Es existieren zwei äußere Kanten  $e_1$  und  $e_2$ , die beide adjazent zum gleichen Kind  $\xi$  sind und für die eine Äquivalenz  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  in  $\varphi_\nu$  enthalten ist. Dann sind  $e_1$  und  $e_2$  exklusive Kanten vom gleichen Typ, die sich bei Einbettung in die gleiche Facette schneiden würden, und sind folglich zur selben Seite von  $\xi$  adjazent.

Sei o.B.d.A.  $e_i = v_i w_i$  zum Knoten  $w_i$  in  $G(\xi)$  inzident. Insbesondere gilt also  $w_1 \neq w_2$ , da sich sonst  $e_1$  und  $e_2$  nicht schneiden würden. Zunächst entfernen wir außer  $e_1$  und  $e_2$  alle exklusiven Kanten aus  $G$ . Nach Lemmata 8 und 9 können wir  $G(\xi)$  zum Graphen in Abbildung 5.4 (b) kontrahieren, bestehend aus dem Pfad  $u, w_1, w_2, v$  und der Kante  $uv$ . Gemäß Lemma 3 und Lemma 4 kontrahieren wir die Kinder von  $v$ , für die  $e_1$  oder  $e_2$  eine äußere Kante darstellen, zu einem Pfad der Länge zwei. Alle anderen Kinder kontrahieren wir ebenfalls gemäß dieser Lemmata zu einer einzigen Kante. Der Teilgraph  $G - G(\xi)$  besteht folglich aus einem Pfad  $u, \dots, v_2, \dots, v_1, \dots, v$  von gemeinsamen Kanten. Dies ist in Abbildung 5.8 (a) beispielhaft dargestellt. Wir kontrahieren weitere gemeinsame Kanten des Pfads so, dass dieser zum Pfad  $u, v_2, v_1, v$  wird. Die einzigen verbliebenen exklusiven Kanten sind gerade  $e_1$  und  $e_2$ , sodass wir durch Umwandeln aller gemeinsamer Kanten in exklusive Kanten vom Typ von  $e_1$  und  $e_2$  direkt den Graphen  $K_{3,3}$  dieses Typs erhalten.

2. Es gibt  $k$  exklusive Kanten  $e_1, \dots, e_k$  mit  $k \geq 3$ , für die die Äquivalenzen  $x_{e_i} \Leftrightarrow \neg x_{e_j}$  in der 2SAT-Formel  $\varphi_\nu$  enthalten sind,  $i, j = 1, \dots, k$  und  $i \neq j$ . Dann sind die Kanten vom gleichen Typ und würden sich paarweise bei Einbettung in die gleiche Facette schneiden.

Zunächst entfernen wir alle exklusiven Kanten außer  $e_1, e_2$  und  $e_3$  aus dem Graphen  $G$ . Wir kontrahieren nun gemäß Lemmata 3 und 4 alle Kinder von  $v$  zu einer Kante oder zu einem Pfad der Länge zwei, je nachdem ob eine der Kanten  $e_1, e_2$  oder  $e_3$  eine äußere Kante eines Kindes ist. Wir erhalten insgesamt einen Kreis von gemeinsamen Kanten, auf dem die inzidenten Knoten der exklusiven Kanten  $e_1 = u_1 v_1, e_2 = u_2 v_2$  und  $e_3 = u_3 v_3$  liegen. Da sich diese drei Kanten bei Einbettung in die gleiche Facette schneiden würden, alternieren ihre Endpunkte, wie in Abbildung 5.8 (b) dargestellt ist. Wir entfernen nun durch Kontraktion von gemeinsamen Kanten alle Knoten, die nicht inzident zu einer der exklusiven Kanten  $e_1, e_2$  oder  $e_3$  sind. Wandeln wir abschließend alle gemeinsamen Kanten in exklusive Kanten vom Typ der Kanten  $e_1, e_2$  und  $e_3$  um, so ergibt sich der Graph  $K_{3,3}$  dieses Typs als SEFE-Minor von  $G$ .

Wir betrachten nun den Konfliktgraphen zu der 2SAT-Instanz  $\varphi_\nu$ . Zur kompakteren Darstellung verwenden wir für eine Variable  $x$  nachfolgend die Schreibweise  $\hat{x}$  als Platzhalter für entweder  $x$  oder  $\neg x$ . Der Konfliktgraph enthält für jedes in  $\varphi_\nu$  vorkommende Literal einen Knoten. Zwei Literale  $\hat{x}_1$  und  $\hat{x}_2$  sind genau dann durch eine Kante miteinander verbunden, wenn in der konstruierten 2SAT-Formel  $\varphi_\nu$  die Äquivalenz  $\hat{x}_1 \Leftrightarrow \hat{x}_2$  oder die logisch äquivalente Beziehung

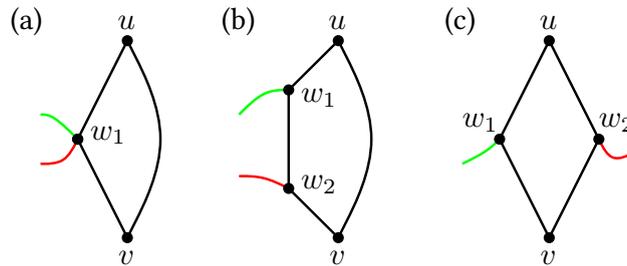


Abbildung 5.9: Die Graphen (a), (b) und (c) aus Abbildung 5.4, zu denen gemäß Lemma 8 und Lemma 9 jedes S-Knoten-Kind kontrahiert werden kann.

$\neg\hat{x}_1 \Leftrightarrow \neg\hat{x}_2$  enthalten ist. Da  $\varphi_\nu$  nicht erfüllbar ist, existiert im Konfliktgraphen ein kürzester Pfad  $P_1$  von einer Variable  $x$  zu ihrer Negation  $\neg x$ . Es gibt ferner einen weiteren Pfad  $P_2$  von  $x$  nach  $\neg x$ , auf dem genau die Negationen der Literale aus  $P_1$  liegen. Wir erhalten somit einen kürzesten Kreis  $\mathcal{K}$ , auf dem zu jeder auftretenden Variable auch ihre Negation enthalten ist. Wir können  $\mathcal{K}$  je nach Situation auch als Äquivalenzkette von einer beliebigen Variable auf  $\mathcal{K}$  zu ihrer Negation benutzen. Mit  $E_{\mathcal{K}}$  bezeichnen wir die Menge der exklusiven Kanten von  $G$ , für die eine zugehörige Variable in  $\mathcal{K}$  enthalten ist.

Wir vereinfachen nun den Ausgangsgraphen  $G$  so, dass dabei für den resultierenden Graphen keine SEFE entsteht. Hierfür betrachten wir Folgen von SEFE-Minoren-Operationen, für die der resultierende Graph  $G'$  ebenfalls eine nicht lösbare 2SAT-Instanz besitzt. Im gemeinsamen Graphen von  $G'$  müssen daher genau zwei Facetten existieren, in die exklusive und transzendenten Kanten eingebettet werden können, und dieser muss folglich eine Kette aus gemeinsamen Kanten beinhalten. Ferner muss der Konfliktgraph zur 2SAT-Instanz von  $G'$  einen Kreis enthalten, auf dem Variablen und ihre Negationen liegen.

Solche Operationen bezeichnen wir als *Reduzierungs-Operationen*. Wir reduzieren in einem ersten Schritt den Graphen  $G$  zu einem Graphen aus der Graphenklasse der alternierenden Ketten, die in Kapitel 3 beschrieben wurde. Da diese nicht notwendigerweise minimal bezüglich SEFE-Minoren-Operationen sind, können wir anschließend durch weitere Reduzierungs-Operationen die alternierenden Ketten weiter vereinfachen.

### Reduktion zu einer alternierenden Kette

Zunächst werden aus  $G$  alle exklusiven Kanten entfernt, die nicht in  $E_{\mathcal{K}}$  vorkommen. Existiert für eine exklusive Kante  $e$  und ein Kind  $\xi$  von  $\nu$  die Äquivalenz  $x_\xi \Leftrightarrow \hat{x}_e$  in  $\mathcal{K}$ , so ist nach Konstruktion von  $\varphi_\nu$  die Kante  $e$  genau eine äußere Kante von  $\xi$ . Daher können für jedes S-Knoten-Kind  $\xi$  höchstens zwei äußere Kanten existieren, die durch eine Äquivalenz in  $\mathcal{K}$  zu  $\xi$  in Beziehung stehen und in  $E_{\mathcal{K}}$  enthalten sind. Ansonsten wäre  $\mathcal{K}$  kein Kreis mehr. Aus demselben Grund existieren für jedes Kind von  $\nu$ , für das ein Literal in  $\mathcal{K}$  vorkommt, genau zwei adjazente äußere Kanten in  $E_{\mathcal{K}}$ . Daher ist jedes S-Knoten-Kind von  $\nu$  nun zu höchstens zwei äußeren Kanten adjazent. Wir kontrahieren die S-Knoten-Kinder abhängig davon, wie viele äußere Kanten sie noch besitzen:

- Für ein Kind  $\xi$ , das zwei äußere Kanten besitzt, die zur gleichen Seite von  $\xi$  adjazent sind, kontrahieren wir  $G(\xi)$  gemäß Lemmata 8 und 9 zum Graphen aus Abbildung 5.9 (a) oder 5.9 (b), je nachdem, ob die äußeren Kanten zum gleichen Knoten in  $G(\xi)$  adjazent sind. Ist dies nicht der Fall, dann kann außerdem die gemeinsame Kante, die zwischen den zu den äußeren Kanten inzidenten Knoten verläuft, kontrahiert werden. Denn wir konnten bereits ausschließen, dass sich äußere Kanten eines S-Knoten-Kindes gegenseitig kreuzen

würden, wenn sie vom gleichen Typ sind. Den auf diese Weise aus  $G(\xi)$  resultierenden Teilgraphen nennen wir einen *Halbdiamanten*.

- Für ein Kind  $\xi$ , das zwei äußere Kanten besitzt, die zu unterschiedlichen Seiten von  $\xi$  adjazent sind, kontrahieren wir  $G(\xi)$  nach Lemmata 8 und 9 zum Graphen aus Abbildung 5.9 (c). Wir bezeichnen den aus  $G(\xi)$  resultierenden Graphen als einen *Diamanten*.
- Für ein Kind  $\xi$  mit einer äußeren Kante kontrahieren wir gemäß Lemma 3 und Lemma 4 den Graphen  $G(\xi)$  zu einem Pfad der Länge zwei, sodass die äußere Kante zum mittleren Knoten inzident ist.
- Alle übrigen S-Knoten-Kinder von  $\nu$ , d.h. Kinder ohne äußere Kanten, werden nach Lemmata 3 und 4 zu einer einzigen Kante kontrahiert.

Den auf diese Weise konstruierten Graphen bezeichnen wir zunächst mit  $G'$ . Die in Kapitel 3 eingeführten Terminologien sollen dabei weiter verwendet werden. So nennen wir die zu den äußeren Kanten inzidenten Knoten eines Halbdiamanten oder Diamanten auch *äußere Knoten*. Die anderen Knoten bezeichnen wir als *Kreisknoten*. Zwei exklusive Kanten gleichen Typs  $e_1 = u_1v_1$  und  $e_2 = u_2v_2$  schneiden sich genau dann in einer Facette  $f$  des gemeinsamen Graphen von  $G'$ , wenn ein einfacher Pfad  $u_1, \dots, u_2, \dots, v_1, \dots, v_2$  aus gemeinsamen Kanten existiert, der auf dem Rand von  $f$  verläuft. Wir sagen dazu, dass die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  *alternieren*.

Mit der bereits getätigten Betrachtung können wir ausschließen, dass drei oder mehr exklusive Kanten paarweise miteinander alternieren, da ansonsten einer der beiden Graphen  $G_1$  und  $G_2$  nicht planar wäre. Außerdem alterniert jede exklusive Kante  $e$  mit höchstens zwei weiteren Kanten aus  $E_{\mathcal{K}}$ . Andernfalls hätte der zu  $x_e$  gehörige Knoten  $v$  in  $\mathcal{K}$  den Grad  $\deg(v) \geq 3$  und somit wäre  $\mathcal{K}$  kein Kreis mehr. Alterniert  $e$  nur mit einer anderen Kante, so muss folglich  $e$  außerdem zu einem Halbdiamanten oder Diamanten inzident sein.

Wir stellen nun für  $G'$  eine 2SAT-Formel auf. Der gemeinsame Graph von  $G'$  besteht aus einer geschlossenen Kette von gemeinsamen Kanten, somit existieren für die Einbettung der adjazenten transzendenten oder exklusiven Kanten nur zwei Facetten  $f_1$  und  $f_2$  in  $G'_{1 \cap 2}$ . Diese beiden Facetten können wir als Seite der Kette ansehen, auf der diese Kanten verlaufen müssen. Bestimmen wir die Facette, zu der ein äußerer Knoten eines Halbdiamanten oder Diamanten adjazent sein soll, so legt dies bereits die komplette Einbettung dieses Teilgraphen fest. Wir werden daher analog zur Konstruktion von  $\varphi_\nu$  eine 2SAT-Formel für  $G'$  konstruieren können. Für jeden Halbdiamanten oder Diamanten legen wir eine Referenzeinbettung fest und führen eine Variable ein, die mit *wahr* belegt werden soll, wenn die Referenzeinbettung benutzt werden soll und mit *falsch*, wenn die Referenzeinbettung gespiegelt werden soll. Zusätzlich führen wir für jede exklusive oder transzendente Kante in  $G'$  eine eigene Variable ein. Diese besitzt den Wert *wahr*, wenn die Kante bzw. der Pfad in  $f_1$  eingebettet wird. Die Variable wird mit *falsch* belegt, wenn die Einbettung in die Facette  $f_2$  gewählt wird. Ist eine transzendente oder exklusive Kante  $e$  mit einem (Halb-)Diamanten  $D$  verbunden, so bedingt die Einbettung von  $e$  in eine Facette die Spiegelung von  $D$  und umgekehrt. Wir fügen daher für die dazugehörigen Variablen die entsprechende Äquivalenz  $x_e \Leftrightarrow \hat{x}_D$  der 2SAT-Instanz hinzu. Alternieren zwei exklusive Kanten  $e_1$  und  $e_2$  miteinander, so dürfen beide nicht in dieselbe Facette eingebettet werden, sodass wir die Äquivalenz  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  erhalten.

Mit dem nächsten Lemma zeigen wir, dass die 2SAT-Instanz von  $G'$  einer einfachen, nicht lösbaeren Äquivalenzkette entspricht und  $G'$  daher keine SEFE besitzt.

**Lemma 12:** *Sei  $\nu$  ein S-Knoten, für den die 2SAT-Instanz  $\varphi_\nu$  nicht lösbar ist. Dann ist obige Konstruktion von  $G'$  eine Reduzierungs-Operation.*

*Beweis.* Sei  $\nu$  ein solcher S-Knoten und  $G'$  der gemäß unserer Beschreibung konstruierte Graph. Mit  $\mathcal{K}$  bezeichnen wir abermals den kürzesten Kreis im Konfliktgraphen zu  $\varphi_\nu$ , auf dem eine Variable  $x$  und ihre Negation  $\neg x$  vorkommen. Die Menge  $E_{\mathcal{K}}$  enthalte alle exklusiven Kanten von  $G$ , für die eine zugehörige Variable in  $\mathcal{K}$  existiert. Wir werden zeigen, dass die 2SAT-Instanz von  $G'$  genau die Äquivalenzen aus  $\mathcal{K}$  repräsentiert und somit nicht lösbar ist.

Ist eine exklusive Kante  $e$  zu einem äußeren Knoten von  $D_i$  inzident, so enthält die 2SAT-Instanz folglich die Äquivalenz  $x_{D_i} \Leftrightarrow \hat{x}_e$ . Jedes S-Knoten-Kind  $\xi$  von  $\nu$ , für das ein Literal in  $\mathcal{K}$  vorkommt, wird in  $G'$  durch einen (Halb-)Diamanten  $D(\xi)$  repräsentiert, deren äußere Knoten genau zu zwei Kanten aus  $E_{\mathcal{K}}$  inzident sind. Da ferner alle Kanten aus  $E_{\mathcal{K}}$  ebenfalls in  $G'$  enthalten sind, existiert in  $G'$  genau dann die Äquivalenz  $x_{D(\xi)} \Leftrightarrow \hat{x}_e$ , wenn  $x_\xi \Leftrightarrow \hat{x}_e$  in  $\mathcal{K}$  enthalten ist. Betrachten wir nun den Fall, dass  $\mathcal{K}$  die Äquivalenz  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  für zwei exklusive Kanten  $e_1 = u_1u_3$  und  $e_2 = u_2u_4$  enthält und die beiden Kanten folglich alternieren. Es existiert daher ein einfacher Pfad  $u_1, \dots, u_2, \dots, u_3, \dots, u_4$  aus gemeinsamen Kanten in  $G(\nu)$ . Da in  $G'$  jedes S-Knoten-Kind  $\xi$  so kontrahiert wurde, dass die Pole von  $\xi$  nicht miteinander identifiziert werden und dass alle äußeren Kanten von  $\xi$  nicht zu einem Pol inzident sind, existiert in  $G'$  zwischen  $u_j$  und  $u_{j+1}$  mindestens eine Kante, für  $j = 1, \dots, 4$  mit  $u_5 = u_1$ . Ansonsten wären  $u_j$  und  $u_{j+1}$  bereits in  $G$  gleich, sodass  $e_1$  und  $e_2$  nicht alternieren würden, oder die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  wären äußere Kanten des gleichen S-Knoten-Kinds. Dies haben wir jedoch bereits während der Konstruktion von  $G'$  ausgeschlossen. Der Graph  $G'$  ist außerdem zweifach zusammenhängend, sodass es in ihm folglich auch einen einfachen Pfad  $u_1, \dots, u_2, \dots, u_3, \dots, u_4$  geben muss. Die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  alternieren ebenfalls in  $G'$ , sodass wir die Äquivalenz  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  für die 2SAT-Instanz von  $G'$  erhalten.

Da ferner in  $G'$  genau die exklusiven Kanten aus  $E_{\mathcal{K}}$  enthalten sind, erhalten wir für jede Äquivalenz aus  $\mathcal{K}$  eine äquivalente Relation für den reduzierten Graphen  $G'$ . Die 2SAT-Formel von  $G'$  ist daher äquivalent zum Kreis  $\mathcal{K}$ . Mit der Nicht-Lösbarkeit von  $\mathcal{K}$  folgt somit auch, dass die 2SAT-Formel von  $G'$  nicht gelöst werden kann und der Graph  $G'$  daher keine SEFE besitzt.  $\square$

Die Reduzierung des Graphen  $G$  schließen wir ab, indem wir in  $G'$  alle exklusiven Kanten, die nicht alternieren, in transzendente Kanten umwandeln. Dass diese Umwandlung auch eine Reduzierungs-Operation ist, zeigt das nachfolgende Lemma.

**Lemma 13:** *Sei  $G'$  wie oben konstruiert und  $e$  eine exklusive Kante in  $G'$ , die mit keiner anderen exklusiven Kante alterniert. Dann ist das Umwandeln all dieser Kanten in transzendente Kanten eine Reduzierungs-Operation.*

*Beweis.* Sei  $e$  eine exklusive Kante in  $G'$ , die mit keiner anderen Kante alterniert. Dann verbindet  $e$  zwei (Halb-)Diamanten  $D_1$  und  $D_2$  miteinander und es existieren die Äquivalenzen  $x_e \Leftrightarrow \hat{x}_{D_1}$  und  $x_e \Leftrightarrow \hat{x}_{D_2}$  in der 2SAT-Formel von  $G'$ . Wandeln wir die Kante  $e$  nun in eine transzendente Kante um, so bleiben diese Relationen weiter bestehen und keine Äquivalenzen fallen weg. Wir können daher alle solche Kanten in transzendente Kanten umwandeln, sodass der resultierende Graph  $G''$  die gleiche 2SAT-Formel wie  $G'$  besitzt.  $\square$

Der gemäß Lemmata 12 und 13 konstruierte Graph  $G''$  besitzt keine SEFE. Wir zeigen im nachfolgenden Lemma, dass dieser eine alternierende Kette ist und erhalten somit die alternierenden Ketten als verbotene Substrukturen.

**Lemma 14:** *Sei  $\mu$  ein P-Knoten oder R-Knoten ohne intrapol Kanten, für den  $\text{skel}(\mu)$  eine kompatible Einbettung besitzt. Falls ein Kind  $\nu$  von  $\mu$  mit nicht-lösbarer 2SAT-Instanz  $\varphi_\nu$  existiert, so enthält  $G$  einen Graphen aus der Klasse der alternierenden Ketten als verbotene Substruktur.*

*Beweis.* Sei  $\nu$  ein Kind des Knotens  $\mu$ , das eine nicht-lösbare 2SAT-Instanz  $\varphi_\nu$  besitzt. Wir konstruieren nach Lemma 12 und Lemma 13 den Graphen  $G''$ . Da Reduzierungs-Operationen Folgen von SEFE-Minoren-Operationen sind, ist  $G''$  ein SEFE-Minor von  $G$ . Nach Konstruktion entspricht die 2SAT-Instanz dieses Graphen außerdem einem nicht-lösbaren, einfachen Kreis, so dass  $G''$  selbst keine SEFE besitzt. Wir müssen nun noch zeigen, dass  $G''$  alle Eigenschaften einer alternierenden Kette aus Kapitel 3 erfüllt.

Der gemeinsame Graph des Graphen  $G''$  besteht aus einer Kette von Kreisknoten, die durch eine gemeinsame Kante, einen Halbdiamanten oder Diamanten verbunden sind. Damit entspricht dieser dem gemeinsamen Graphen einer alternierenden Kette. Jeder Halbdiamant und Diamant in  $G''$  besitzt ferner genau zwei exklusive oder transzendente Kanten, die zu den äußeren Knoten inzident sind (Eigenschaft 1 und 2). Dabei verbindet eine Kante genau dann zwei (Halb-)Diamanten miteinander, wenn sie eine transzendente Kante ist (Eigenschaft 3). Jede exklusive Kante ist zu mindestens einem Kreisknoten inzident (Eigenschaft 4) und besitzt genau eine alternierende Kante, wenn sie zusätzlich zu einem Halbdiamanten oder Diamanten adjazent ist (Eigenschaft 5). Ist eine exklusive Kante zu keinem (Halb-)Diamanten adjazent, so alterniert die Kante mit genau zwei Kanten (Eigenschaft 6), da andernfalls unsere 2SAT-Instanz keinem einfachen Kreis entsprechen würde.

Betrachten wir nun den Hilfsgraphen  $G''_D$ . Dieser enthält für jeden (Halb-)Diamanten und für jede transzendente oder exklusive Kante einen Knoten. Zwei Knoten werden miteinander verbunden, falls ein (Halb-)Diamant und eine Kante adjazent sind oder zwei Kanten alternieren. Jede dieser Abhängigkeiten wird ebenfalls im Konfliktgraphen der 2SAT-Formel von  $G''$  abgebildet. Zwei Knoten aus  $G''_D$  sind daher genau dann adjazent, wenn eine entsprechende Äquivalenz in der 2SAT-Instanz vorhanden ist. Daher ist insbesondere die Anzahl an Zusammenhangskomponenten in  $G''_D$  und im Konfliktgraphen der 2SAT-Instanz gleich. Da die 2SAT-Formel von  $G''$  einem einfachen Kreis entspricht, besitzt  $G''_D$  genau eine Komponente (Eigenschaft 7).

Noch zu zeigen ist, dass die Anzahl an transzendenten Kanten, an exklusiven Kanten und an Halbdiamanten in  $G''$  zusammengerechnet ungerade ist. Sei  $e$  eine transzendente oder exklusive Kante in  $G''$ . Wir können somit die 2SAT-Formel von  $G''$  auch als Äquivalenzkette von der Variablen  $x_e$  zu ihrer Negation  $\neg x_e$  betrachten. Mit  $e_0 = e, e_1, \dots, e_k = e$  nummerieren wir die transzendenten und exklusiven Kanten von  $G''$  in der Reihenfolge durch, wie ihre Literale in der Äquivalenzkette von  $x_e$  nach  $\neg x_e$  auftreten. Zwei aufeinanderfolgende Kanten  $e_i$  und  $e_{i+1}$  können folgendermaßen in Verbindung stehen:

- Die beiden Kanten alternieren, dann enthält die Kette die Äquivalenz  $x_{e_i} \Leftrightarrow \neg x_{e_{i+1}}$  bzw.  $\neg x_{e_i} \Leftrightarrow x_{e_{i+1}}$ .
- Die beiden Kanten sind über einen Diamanten miteinander verbunden, dann gibt es die Äquivalenzen  $x_{e_i} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow \neg x_{e_{i+1}}$  bzw.  $\neg x_{e_i} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow x_{e_{i+1}}$ .
- Die beiden Kanten sind zu einem Halbdiamanten adjazent, dann existieren die Äquivalenzen  $x_{e_i} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow x_{e_{i+1}}$  bzw.  $\neg x_{e_i} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow \neg x_{e_{i+1}}$ .

Zwischen zwei Kanten  $e_i$  und  $e_{i+1}$  existiert daher genau dann eine Äquivalenz der Form  $x \Leftrightarrow \neg y$ , wenn diese nicht über einen Halbdiamanten miteinander verbunden sind, und ansonsten bestehen keine oder zwei Äquivalenzen dieser Form. Zählen wir folglich zur Gesamtanzahl an transzendenten und exklusiven Kanten auch die Anzahl der Halbdiamanten hinzu, so ist diese Zahl genau dann ungerade, wenn die Anzahl an Äquivalenzen  $x \Leftrightarrow \neg y$  ungerade ist. Da ferner die 2SAT-Instanz von  $G''$  nicht lösbar ist, enthält die Äquivalenzkette von  $x_e$  nach  $\neg x_e$  eine ungerade Anzahl an Äquivalenzen  $x \Leftrightarrow \neg y$ . Insgesamt ist somit die Anzahl an transzendenten Kanten, an exklusiven Kanten und an Halbdiamanten ungerade (Eigenschaft 8). Der Graph  $G''$  ist folglich eine alternierende Kette.  $\square$

Wir haben somit in allen Situationen, in denen der Algorithmus SEFEBICO abbrechen kann, verbotene Substrukturen identifizieren können. Die Ergebnisse aus den Lemmata 2, 5, 6, 10, 11 und 14 liefern uns insgesamt die nachfolgende Charakterisierung für Instanzen, deren gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2}$  zweifach zusammenhängend ist.

**Theorem 1:** *Seien  $(G_1, G_2)$  zwei Graphen, deren gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2}$  zweifach zusammenhängend ist. Dann existiert genau dann eine SEFE für  $(G_1, G_2)$ , wenn der vereinigte Graph  $G$  keine der verbotenen Substrukturen  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ ,  $S_1$  oder  $S_2$  oder einen Graph der alternierenden Ketten als SEFE-Minor enthält.*

Die anschauliche Beschreibung der alternierenden Ketten aus Kapitel 3 birgt die Schwäche, dass Graphen dieser Klasse nicht zwangsläufig minimal bezüglich SEFE-Minoren-Operationen sind. Durch weitere Vereinfachungen der alternierenden Ketten gelangen wir zu einer stärkeren Charakterisierung.

### Weitere Reduzierungs-Operationen

Wir vereinfachen nun die alternierenden Ketten durch weitere Reduzierungs-Operationen. Die 2SAT-Instanz eines Graphen der alternierenden Ketten entspricht genau einer einfachen, nicht lösbaren Äquivalenzkette. Diese Eigenschaft soll durch die nachfolgenden Operationen ebenfalls erhalten bleiben. Wir wenden diese Reduzierungs-Operationen daher auf eine alternierende Kette und ihre SEFE-Minoren an, die selbst durch Reduzierungs-Operationen entstanden sind. Vereinfachend nennen wir diese Graphen im Folgenden ebenfalls alternierende Ketten. Jeder dieser Graphen soll insbesondere genau zwei Facetten  $f_1$  und  $f_2$  des gemeinsamen Graphen besitzen, in die exklusive und transzendente Kanten eingebettet werden können.

Durch die neuen Reduzierungs-Operationen können in einer alternierenden Kette  $G$  neue Teilstrukturen entstehen, die wir in den 2SAT-Instanzen ebenfalls abbilden müssen. Eine *Brücke* ist eine gemeinsame Kante  $uw$ , sodass der Knoten  $u$  ein Schnittknoten des gemeinsamen Graphen ist. Dieser liegt somit auf der Kette von gemeinsamen Kanten. Den Knoten  $w$  nennen wir *äußeren Knoten* der Brücke. Da nun auch Brücken im gemeinsamen Graphen auftreten können, müssen wir bei den alternierenden Kanten unterscheiden, ob diese zu Brücken adjazent sind. Zwei exklusive Kanten gleichen Typs  $e_1 = u_1v_1$  und  $e_2 = u_2v_2$ , die nicht zu einer Brücke adjazent sind, alternieren, wenn ein einfacher Pfad  $u_1, \dots, u_2, \dots, v_1, \dots, v_2$  aus gemeinsamen Kanten existiert. Da  $e_1$  und  $e_2$  nicht zu einer Brücke adjazent sind, enthält dieser Pfad insbesondere keine Brücke. Ist  $e_1 = u_1w$  hingegen zu einer Brücke  $wv_1$  adjazent, so alterniert  $e_1$  mit einer exklusiven Kante gleichen Typs  $e_2 = u_2v_2$ , wenn ein einfacher Pfad  $u_1, \dots, u_2, \dots, v_1, \dots, v_2$  aus gemeinsamen Kanten zwischen Kreisknoten existiert. Sprechen wir im Nachfolgenden davon, dass zwei alternierende Kanten  $e_1$  und  $e_2$  zu einer gemeinsamen Kante  $e$  adjazent sind, so erlauben wir dabei auch, dass eine exklusive Kante nicht direkt zu  $e$  adjazent sein muss, sondern auch zu einer Brücke adjazent sein kann, die selbst zu  $e$  adjazent ist.

Wir erweitern das Konzept der alternierenden Kanten außerdem auf exklusive Pfade: Ein *exklusiver Pfad* von  $u$  nach  $v$  ist ein Pfad  $u, w, v$  aus exklusiven Kanten gleichen Typs, sodass zu  $w$  keine gemeinsamen Kanten inzident sind. Beide Kanten des exklusiven Pfads müssen daher stets in die gleiche Facette des gemeinsamen Graphen  $G_{1 \cap 2}$  eingebettet werden. Ein exklusiver Pfad von  $u_1$  nach  $v_1$  alterniert mit einer exklusiven Kante  $u_2v_2$ , wenn beide vom gleichen Typ sind und ein einfacher Pfad  $u_1, \dots, u_2, \dots, v_1, \dots, v_2$  in  $G_{1 \cap 2}$  existiert, der keine Brücke beinhaltet. Analog gilt dies für eine exklusive Kante  $u_2w$ , die zu einer Brücke  $wv_2$  adjazent ist, oder für einen exklusiven Pfad von  $u_2$  nach  $v_2$ .

Für jede Brücke legen wir eine Referenzeinbettung fest und führen für sie eine Variable ein, die mit wahr belegt werden soll, wenn die Referenzeinbettung benutzt wird, ansonsten mit falsch.

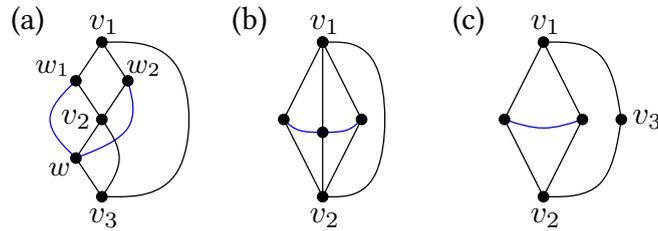


Abbildung 5.10: Auf den Graphen  $S$  (a) dürfen bestimmte Operationen nicht angewendet werden: Würden wir nach Lemma 15 die Kante  $v_3v_1$  kontrahieren, so existiert für den resultierenden Graphen eine SEFE (b). Gleiches gilt, wenn wir gemäß Lemma 18 den Pfad von gemeinsamen Kanten zwischen  $v_2$  und  $v_3$  entfernen (c).

Zusätzlich fügen wir der 2SAT-Instanz für jeden exklusiven Pfad in  $G$  eine eigene Variable hinzu. Diese besitzt den Wert wahr, wenn der Pfad in  $f_1$  eingebettet wird und den Wert falsch, wenn die Einbettung in  $f_2$  gewählt wird. Für die beiden exklusiven Kanten, die einen exklusiven Pfad bilden, entfernen wir die entsprechenden Variablen und Relationen aus der Instanz. Analog zu den bisher eingeführten Äquivalenzen, enthält die 2SAT-Instanz für eine exklusive oder transzendente Kante  $e$ , die zu einer Brücke  $B$  adjazent ist, die entsprechende Äquivalenz  $x_e \Leftrightarrow \hat{x}_B$ . Ein exklusiver Pfad  $P$ , der zu einer Brücke  $B$  oder zu einem (Halb-)Diamanten  $D$  adjazent ist, führt ferner zur Äquivalenz  $x_P \Leftrightarrow \hat{x}_B$  bzw.  $x_P \Leftrightarrow \hat{x}_D$ . Alterniert ein exklusiver Pfad  $P_1$  mit einem anderen Pfad  $P_2$  oder einer exklusiven Kante gleichen Typs  $e$ , so erhalten wir die Äquivalenzen  $x_{P_1} \Leftrightarrow \neg x_{P_2}$  bzw.  $x_{P_1} \Leftrightarrow \neg x_e$ . Neu hinzu kommt die Möglichkeit, dass eine transzendente oder exklusive Kante  $e$  oder ein exklusiver Pfad  $P_1$  zum mittleren Knoten eines exklusiven Pfades  $P_2$  inzident ist. Dann müssen  $e$  und  $P_2$  bzw.  $P_1$  und  $P_2$  stets in die gleiche Facette von  $G_{1 \cap 2}$  eingebettet werden und wir bilden dies durch die Äquivalenz  $x_e \Leftrightarrow x_{P_2}$  bzw.  $x_{P_1} \Leftrightarrow x_{P_2}$  in der 2SAT-Instanz ab.

Ziel ist es nun, die in den folgenden Lemmata aufgeführten Reduzierungs-Operationen erschöpfend anzuwenden und so schließlich eine vereinfachte Substruktur von  $G$  zu erhalten. Wir werden dabei zeigen, dass der resultierende Graph noch immer eine unlösbare 2SAT-Instanz ist, die einem einfachen Kreis entspricht. Insbesondere müssen wir dabei sicher stellen, dass die Halbdiamanten und Diamanten binäre Variablen darstellen und die transzendenten und exklusiven Kanten nicht in das Innere eines Halbdiamanten oder Diamanten eingebettet werden können. Dies kann genau dann auftreten, wenn zwei (Halb-)Diamanten dieselben Pole besitzen würden oder wenn eine transzendente oder exklusive Kante inzident zu den beiden äußeren Knoten eines Diamanten wäre. Mit den nachfolgenden Reduzierungs-Operationen ist dies nur bei Lemma 15 und Lemma 18 möglich.

Daher muss folgender Spezialfall beachtet werden: Mit  $S$  bezeichnen wir die alternierende Kette, deren gemeinsamer Graph aus einem Diamanten, einem Halbdiamanten und einer gemeinsamen Kante besteht (siehe Abbildung 5.10 (a)). Zwei zu den äußeren Knoten adjazente transzendente Kanten verbinden in  $S$  den Diamanten und den Halbdiamanten miteinander. Auf den Graphen  $S$  dürfen aus oben genannten Gründen die Reduzierungs-Operationen aus Lemma 15 und Lemma 18 nicht angewendet werden, da der resultierende Graph sonst eine SEFE besitzen würde, wie in Abbildung 5.10 (b) und (c) dargestellt ist. Entsteht daher nach der Anwendung einer Reduzierungs-Operation der Graph  $S$ , so wenden wir auf  $S$  keine weitere solche Operation an. Wir können stattdessen  $S$  auf die bereits bekannte verbotene Substruktur  $S_1$  reduzieren. Wir bezeichnen dazu in  $S$  die Knoten des Diamanten mit  $v_1, w_1, w_2, v_2$ , die des Halbdiamanten mit  $v_2, w, v_3$  und die gemeinsame Kante mit  $v_3v_1$ . Die transzendenten Kanten  $e_1 = w_1w$  und  $e_2 = w_2w$  verbinden den Diamanten und den Halbdiamanten miteinander. Entfernen wir

nun die gemeinsame Kante  $v_2w$  und wandeln die Kante  $wv_3$  in eine transzendente Kante um, so ist der resultierende Graph gerade die verbotene Substruktur  $S_1$ .

Beachte in den nachfolgenden Lemmata, dass gemäß Lemma 13 bereits jede exklusive Kante, die mit keiner anderen Kante alterniert, in eine transzendente Kante umgewandelt wurde. Somit verbindet eine transzendente Kante in einer alternierenden Kette stets zwei (Halb-)Diamanten miteinander, während eine exklusive Kante zu höchstens einem (Halb-)Diamanten adjazent ist. Ansonsten würde die exklusive Kante mit keiner anderen Kante alternieren können, da die 2SAT-Instanz genau einem Kreis aus Äquivalenzen entspricht. Aus dem gleichen Grund kann keine exklusive Kante zu einer Brücke und gleichzeitig zu einem Halbdiamanten oder Diamanten adjazent sein. Mit den nachfolgenden Operationen können Brücken nur aus Diamanten entstehen, sodass die exklusive Kante vorher zu zwei (Halb-)Diamanten hätte adjazent sein müssen.

**Lemma 15:** *Sei  $G$  eine alternierende Kette, die nicht der Graph  $S$  ist. Ferner sei  $e$  eine gemeinsame Kante, die nicht Teil einer Brücke oder eines (Halb-)Diamanten ist. Ferner seien zu  $e$  keine zwei exklusive Kanten oder exklusive Pfade adjazent, die alternieren. Dann ist die Kontraktion der Kante  $e$  eine Reduzierungs-Operation.*

*Beweis.* Sei  $e$  eine gemeinsame Kante in einer alternierenden Kette  $G$ , die nicht Teil eines Diamanten oder einer Brücke ist und zu der keine zwei alternierenden exklusiven Kanten oder Pfade adjazent sind. Durch die Kontraktion von  $e$  bleibt im resultierenden Graphen  $G'$  eine geschlossene Kette von gemeinsamen Kanten bestehen. Diese Kontraktion beeinflusst nur dann die Äquivalenzen von (Halb-)Diamanten, wenn der resultierende Graph  $G'$  nur noch aus zwei solchen Teilgraphen bestehen würde, sodass beide dieselben Pole besitzen. In diesem Fall könnten die adjazenten exklusiven und transzendenten Kanten in mehr als zwei Facetten eingebettet werden. Dies wäre jedoch nur möglich, wenn  $G$  dem Graphen  $S$  entspricht. Ferner ist die Kante  $e$  keine Brücke, sodass ihre Kontraktion keine Äquivalenzen zwischen Brücken und ihren adjazenten Kanten beeinflusst.

Seien nun  $P_1$  und  $P_2$  zwei exklusive Kanten oder exklusive Pfade vom gleichen Typ von  $u_1$  nach  $v_1$  bzw. von  $u_2$  nach  $v_2$ , die sich bei Einbettung in die gleiche Facette von  $G_{1 \cap 2}$  schneiden würden. Es existiert daher ein Pfad  $u_1, \dots, u_2, \dots, v_1, \dots, v_2$  von gemeinsamen Kanten in  $G$ . Würde nun das Kontrahieren der Kante  $e$  diesen alternierenden Pfad zerstören, so bedeutet dies, dass durch die Kontraktion je ein Endpunkt von  $P_1$  und  $P_2$  miteinander identifiziert würden. Die Kante  $e$  wäre daher zu  $P_1$  und  $P_2$  adjazent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit beeinflusst das Kontrahieren von  $e$  keine Äquivalenzen in der 2SAT-Instanz, die durch alternierende Kanten und Pfade entstehen. Analog gilt dies, wenn eine der alternierenden Kanten zu einer Brücke adjazent ist.

Insgesamt bleibt die gesamte 2SAT-Formel von  $G$  auch für  $G'$  erhalten und da  $G$  eine alternierende Kette war, entspricht diese einem einfachen, nicht-lösbaren Kreis.  $\square$

**Lemma 16:** *Sei  $G$  eine alternierende Kette, in der ein Halbdiamant  $u_1, w, u_2$  existiert, für den eine transzendente Kante  $e_1$  und eine exklusive Kante  $e_2$  inzident zum äußeren Knoten  $w$  sind. Ferner sei zu  $u_1$  keine Kante inzident, die mit  $e_2$  alterniert. Dann ist das Umwandeln der Kante  $u_1w$  in eine exklusive Kante vom Typ von  $e_2$  und das Entfernen der Kante  $u_2w$  eine Reduzierungs-Operation (siehe Abbildung 5.11 (a)).*

*Beweis.* Sei  $D$  der Halbdiamant, zu dem eine transzendente Kante  $e_1$  und eine exklusive Kante  $e_2$  im äußeren Knoten  $w$  adjazent sind, und  $u_1$  sei zu keiner Kante inzident, die mit  $e_2$  alterniert. Die 2SAT-Instanz von  $G$  enthält die Äquivalenzen  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D$  und  $x_{e_2} \Leftrightarrow \hat{x}_D$  und es gilt folglich auch  $x_{e_1} \Leftrightarrow x_{e_2}$ , da beide Kanten in die gleiche Facette eingebettet werden müssen. Entfernen

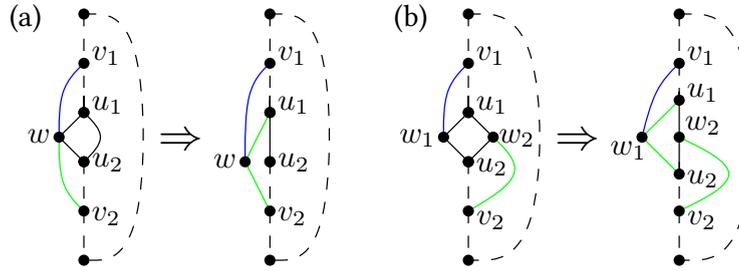


Abbildung 5.11: Ein Halbdiamant mit einer transzendenten und einer exklusiven Kante kann gemäß Lemma 16 vereinfacht (a) und ein Diamant mit einer transzendenten und einer exklusiven Kante kann gemäß Lemma 17 vereinfacht werden (b). Die Typen der exklusiven Kanten sind hierbei beispielhaft dargestellt.

wir nun die Kante  $wu_2$  und wandeln die Kante  $wu_1$  in eine exklusive Kante vom Typ von  $e_2$  um, so wird der Halbdiamant  $D$  zerstört. Die Kanten  $e_2 = v_2w$  und  $wu_1$  bilden einen exklusiven Pfad  $P$ , dessen mittlerer Knoten  $w$  inzident zur transzendenten Kante  $e_1$  ist. Der Pfad  $P$  und die Kante  $e_1$  müssen in die gleiche Facette eingebettet werden. Wir führen für  $P$  die Variable  $x_P$  ein, für die wir die Äquivalenz  $x_P \Leftrightarrow x_{e_1}$  erhalten. Diese ersetzt im resultierenden Graphen  $G'$  die Teilkette  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow x_{e_2}$  in der 2SAT-Formel.

Wir müssen noch verifizieren, ob die Verbindung zur restlichen Äquivalenzkette erhalten bleibt. Die transzendente Kante  $e_1$  verläuft in  $G$  zwischen dem Halbdiamanten  $D$  und einem weiteren (Halb-)Diamanten  $D_2$ . Die Verbindung zu  $D_2$  bleibt auch im resultierenden Graphen bestehen, sodass wir weiterhin eine Äquivalenz zwischen  $e_1$  und  $D_2$  erhalten. Alterniert die exklusive Kante  $e_2$  mit einer weiteren Kante gleichen Typs  $e_3 = xy$ , so ist eine Äquivalenz  $x_{e_2} \Leftrightarrow \neg x_{e_3}$  in der 2SAT-Instanz zu  $G$  enthalten. Es gibt einen einfachen Pfad  $w, u_2, \dots, x, \dots, v_2, \dots, y$  in  $G_{1 \cap 2}$ , der nicht durch  $u_1$  verläuft, da der Knoten  $u_1$  nach Voraussetzung nicht adjazent zu  $e_3$  ist. Diesen können wir zum Pfad  $u_1, u_2, \dots, x, \dots, v_2, \dots, y$  erweitern. Die Knotenpaare  $\{u_1, v_2\}$  und  $\{x, y\}$  alternieren somit ebenfalls miteinander. Da letztgenannter Pfad in  $G'_{1 \cap 2}$  vorhanden ist und da  $P$  genau die Knoten  $u_1$  und  $v_2$  miteinander verbindet, alternieren  $P$  und  $e_3$ . Wir erhalten folglich die Äquivalenz  $x_P \Leftrightarrow \neg x_{e_3}$  in der 2SAT-Instanz von  $G'$ . Analog gilt dies, wenn die Kante  $e_2$  mit einer exklusiven Kante alterniert, die adjazent zu einer Brücke ist, oder mit einem exklusiven Pfad alterniert.

Insgesamt bleibt die Verbindung zum Rest der Äquivalenzkette erhalten, sodass die resultierende 2SAT-Formel noch immer einem einfachen, nicht-lösbaren Kreis entspricht.  $\square$

**Lemma 17:** *In einer alternierenden Kette  $G$  existiere ein Diamant mit Knoten  $u_1, w_1, w_2, u_2$  so, dass eine transzendente Kante  $e_1 = v_1w_1$  und eine exklusive Kante  $e_2 = v_2w_2$  inzident zu den äußeren Knoten sind. Dann ist das Umwandeln der Kanten  $u_1w_1$  und  $w_1u_2$  in exklusive Kanten vom Typ von  $e_2$  eine Reduzierungs-Operation (siehe Abbildung 5.11 (b)).*

*Beweis.* Sei  $D$  der Diamant, für den eine transzendente Kante  $e_1 = v_1w_1$  und eine exklusive Kante  $e_2 = v_2w_2$  adjazent sind. Dann existieren in der 2SAT-Instanz von  $G$  die Äquivalenzen  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D$  und  $x_{e_2} \Leftrightarrow \neg \hat{x}_D$ , da die beiden Kanten zu unterschiedlichen Seiten von  $D$  adjazent sind und daher auch in unterschiedliche Facetten eingebettet werden müssen. Es gilt folglich die Äquivalenz  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$ .

Wandeln wir die beiden Kanten  $u_1w_1$  und  $w_1u_2$  in exklusive Kanten vom Typ von  $e_2$  um, so wird der Diamant  $D$  aufgelöst und es entsteht ein exklusiver Pfad  $P$ , dessen mittlerer Knoten zur transzendenten Kante  $e_1$  inzident ist. Der exklusive Pfad  $P$  und die Kante  $e_1$  müssen daher in die gleiche Facette eingebettet werden. Zusätzlich alterniert  $P$  mit der exklusiven Kante  $e_2$ . Führen

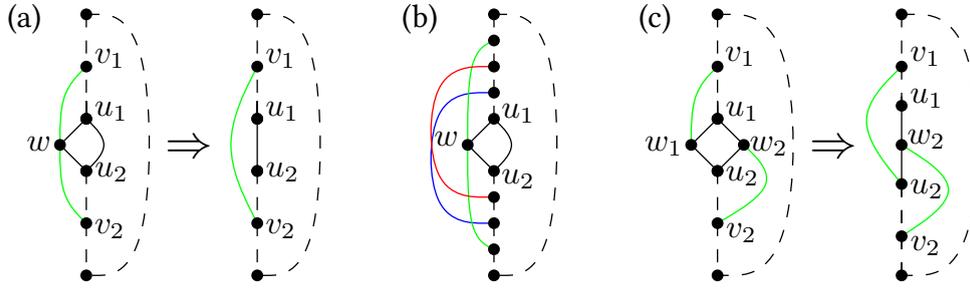


Abbildung 5.12: Ein Halbdiamant mit zwei transzendenten Kanten oder exklusiven Kanten gleichen Typs kann gemäß Lemma 18 vereinfacht werden (a). Kanten anderen Typs können in beide Facette eingebettet werden, ohne dass die Kanten  $u_1w$  und  $wu_2$  entfernt werden müssen (b). Ein Diamant mit zwei exklusiven Kanten gleichen Typs kann gemäß Lemma 19 vereinfacht werden (c). Die Typen der Kanten sind hierbei beispielhaft dargestellt.

wir für den exklusiven Pfad die Variable  $x_P$  ein, so erhalten wir die Äquivalenzen  $x_P \Leftrightarrow x_{e_1}$  und  $x_P \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$ . Diese ersetzen in der 2SAT-Formel des resultierenden Graphen  $G'$  gerade die Teilkette  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  aus der 2SAT-Instanz von  $G$ .

Im Graphen  $G$  verbindet die transzendente Kante  $e_1$  den Diamanten  $D$  mit einem weiteren Halbdiamanten oder Diamanten  $D_2$ , da transzendente Kanten stets zwei (Halb-)Diamanten in der 2SAT-Formel in Beziehung setzen. Die Verbindung zu  $D_2$  bleibt auch im resultierenden Graphen bestehen, sodass wir weiterhin eine Äquivalenz zwischen  $e_1$  und  $D_1$  erhalten. Alterniert die Kante  $e_2$  mit einer weiteren exklusiven Kante gleichen Typs  $e_3$ , so kann nach Konstruktion von  $G$  die Kante  $e_3$  nicht zum Knoten  $w_1$  in  $D$  inzident sein. Der in  $G$  existierende alternierende Pfad von  $e_2$  und  $e_3$  bleibt folglich auch in  $G'$  bestehen, sodass die beiden Kanten  $e_2$  und  $e_3$  noch immer alternieren. Analog gilt dies, wenn  $e_2$  mit einem exklusiven Pfad gleichen Typs alterniert.

Insgesamt bleibt daher die Verbindung zum Rest der ursprünglichen Äquivalenzkette ebenfalls erhalten, sodass die 2SAT-Formel von  $G'$  noch immer einem einfachen, nicht-lösbaren Kreis entspricht.  $\square$

**Lemma 18:** Sei  $G$  eine alternierende Kette, die nicht der Graph  $S$  ist. Ferner existiere ein Halbdiamant mit Knoten  $u_1, w, u_2$  so, dass die zum äußeren Knoten  $w$  inzidenten Kanten  $e_1$  und  $e_2$  beide transzendente oder exklusive Kanten gleichen Typs sind. Dann ist das Entfernen der gemeinsamen Kanten  $u_1w$  und  $wu_2$  und die anschließende Kontraktion einer der beiden Kanten  $e_1$  oder  $e_2$  eine Reduzierungs-Operation (siehe Abbildung 5.12 (a)).

*Beweis.* Seien  $e_1 = ww_1$  und  $e_2 = ww_2$  die beiden äußeren Kanten des Halbdiamanten  $D$ , die beide transzendente oder exklusive Kanten gleichen Typs sind. Die 2SAT-Instanz von  $G$  enthält daher die Äquivalenzen  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D$  und  $x_{e_2} \Leftrightarrow \hat{x}_D$ . Da beide Kanten immer in die gleiche Facette eingebettet werden müssen, gilt auch  $x_{e_1} \Leftrightarrow x_{e_2}$ . In  $G$  existiert ferner keine Kante  $e_3$ , die mit  $e_1$  und  $e_2$  alterniert, da wir ansonsten die Äquivalenzen  $\hat{x}_D \Leftrightarrow x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_3} \Leftrightarrow x_{e_2} \Leftrightarrow \hat{x}_D$  in der 2SAT-Instanz zu  $G$  auffinden würden. Dann wäre diese jedoch kein einfacher, nicht-lösbare Kreis mehr. Wir können die gemeinsamen Kanten  $u_1w$  und  $wu_2$  entfernen, da es folglich keine exklusive Kante  $e_3$  vom gleichen Typ wie  $e_1$  und  $e_2$  gibt, die nun in die andere Facette des gemeinsamen Graphen eingebettet werden könnte. Eine transzendente Kante, exklusive Kante oder exklusiver Pfad anderen Typs hätte auch vorher schon auf diese Seite eingebettet werden können, da diese die exklusiven Kanten  $e_1$  und  $e_2$  kreuzen dürfen. In Abbildung 5.12 (b) ist diese Situation beispielhaft dargestellt.

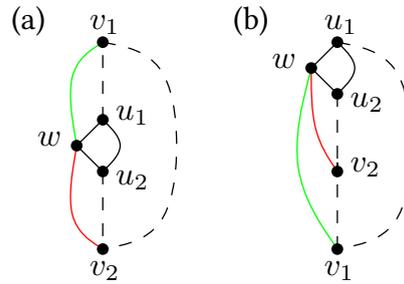


Abbildung 5.13: Ein Halbdiamant  $u_1, w, u_2$  mit äußeren Kanten  $e_1 = v_1w$  und  $e_2 = v_2w$ . Der zu  $e_1$  benachbarte Pol ist der Knoten  $u_1$ , der zu  $e_2$  benachbarte Pol ist  $u_2$  (a). Die benachbarten Pole bleiben erhalten, wenn man die äußeren Kanten anders zeichnet (b).

Der Knoten  $w$  ist nach dem Entfernen der beiden gemeinsamen Kanten nur noch zu den Kanten  $e_1$  und  $e_2$  inzident, sodass wir diesen durch Kontraktion der Kante  $e_1$  oder  $e_2$  entfernen können. Da  $G$  nicht dem Graphen  $S$  entspricht, ist die neu entstandene Kante  $e = w_1w_2$  nicht zu den äußeren Knoten desselben Diamanten inzident und muss somit in eine der beiden Facetten  $f_1$  und  $f_2$  eingebettet werden. Die Variable  $x_e$  ersetzt daher in der 2SAT-Formel des resultierenden Graphen  $G'$  die Relationen  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow x_{e_2}$ . Da jedoch bereits  $x_{e_1} \Leftrightarrow x_{e_2}$  in  $G$  galt, bleibt die 2SAT-Instanz von  $G'$  nicht lösbar und entspricht noch immer einem einfachen Kreis.  $\square$

Zur Formulierung der nächsten Reduzierungs-Operationen benötigen wir eine weitere Definition: Sei  $D$  ein Halbdiamant  $u_1, w, u_2$  mit äußerem Knoten  $w$  oder ein Diamant  $u_1, w_1, w_2, u_2$  mit äußeren Knoten  $w_1$  und  $w_2$ . Zu  $D$  seien die exklusiven oder transzendenten Kanten  $e_1 = ww_1$  und  $e_2 = ww_2$  bzw.  $e_1 = w_1v_1$  und  $e_2 = w_2v_2$  adjazent. Dann existiert ein einfacher Pfad gemeinsamer Kanten  $v_1, \dots, u_i, \dots, u_{i'}, \dots, v_2$  in einer alternierenden Kette  $G$  mit  $i, i' \in \{1, 2\}$  und  $i \neq i'$ . Den Knoten  $u_i$  nennen wir den zur Kante  $e_1$  benachbarten Pol. Beachte, dass in diesem Fall der Knoten  $u_{i'}$  der benachbarte Pol von  $e_2$  ist. Beispielfhaft sind die benachbarten Pole für einen Halbdiamanten in Abbildung 5.13 dargestellt.

**Lemma 19:** *In einer alternierenden Kette  $G$  existiere ein Diamant mit Knoten  $u_1, w_1, w_2, u_2$  so, dass die zu den äußeren Knoten inzidenten Kanten  $e_1 = v_1w_1$  und  $e_2 = v_2w_2$  beide exklusive Kanten gleichen Typs sind. Ferner sei  $u_1$  der zu  $e_1$  benachbarte und  $u_2$  der zu  $e_2$  benachbarte Pol. Dann ist das Entfernen der Kante  $u_1w_1$  und das Kontrahieren der gemeinsamen Kante  $u_2w_1$  eine Reduzierungs-Operation (siehe Abbildung 5.12 (c)).*

*Beweis.* Sei  $D$  der Diamant, für den die adjazenten Kanten  $e_1 = v_1w_1$  und  $e_2 = v_2w_2$  exklusive Kanten vom gleichen Typ sind und  $u_i$  der benachbarte Pole zu  $e_i$ , für  $i = 1, 2$ . In der 2SAT-Instanz von  $G$  existieren die Äquivalenzen  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D$  und  $x_{e_2} \Leftrightarrow \neg\hat{x}_D$ , da die beiden Kanten zu unterschiedlichen Seiten von  $D$  adjazent sind und daher auch in unterschiedliche Facetten eingebettet werden müssen. Es gilt daher ebenfalls  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$ .

Entfernen wir die Kante  $u_1w_1$  und kontrahieren anschließend die gemeinsame Kante  $w_1u_2$ , so wird der Diamant  $D$  zerstört und die Kante  $e_1$  verläuft nun zwischen den Knoten  $v_1$  und  $u_2$ . Es gibt noch immer einen einfachen Pfad  $u_1, \dots, v_1, \dots, v_2, \dots, u_2$  aus gemeinsamen Kanten, da  $u_1$  der benachbarte Pole von  $e_1$  ist. Somit existiert nach Konstruktion von  $G$  im resultierenden Graphen  $G'$  ebenfalls ein einfacher Pfad  $v_1, \dots, u_1, w_2, u_2, \dots, v_2$ . Folglich alternieren die beiden Kanten  $e_1 = v_1u_2$  und  $e_2 = w_2v_2$  in  $G'$ , sodass wir die Äquivalenz  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  erhalten. Diese ersetzt die Äquivalenzen  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  aus der 2SAT-Instanz von  $G$ . Analog zum Beweis von Lemma 17 bleibt für die exklusiven Kanten  $e_1$  und  $e_2$  der Rest der ursprünglichen Äqui-

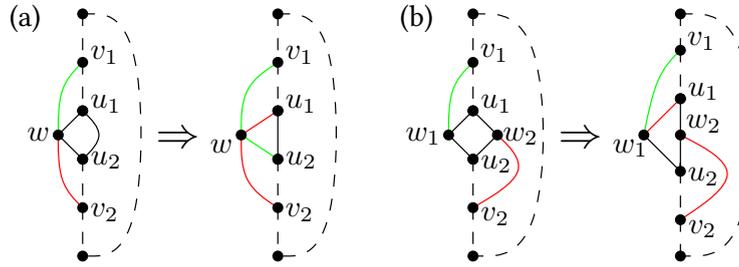


Abbildung 5.14: Ein Halbdiamant mit zwei exklusiven Kanten unterschiedlichen Typs kann gemäß Lemma 20 vereinfacht (a) und ein Diamant mit zwei exklusiven Kanten unterschiedlichen Typs kann gemäß Lemma 21 vereinfacht werden (b). Die Typen der exklusiven Kanten sind hierbei beispielhaft dargestellt.

valenzkette erhalten, sodass die 2SAT-Formel von  $G'$  ebenfalls einem einfachen, nicht-lösbaren Kreis entspricht.  $\square$

**Lemma 20:** *In einer alternierenden Kette  $G$  existiere ein Halbdiamant mit Knoten  $u_1, w, u_2$  so, dass die zum äußeren Knoten inzidenten Kanten  $e_1 = v_1w$  und  $e_2 = v_2w$  exklusive Kanten unterschiedlichen Typs sind und  $u_1$  der zu  $e_1$  benachbarte Pol ist. Dann ist das Umwandeln der Kante  $wu_1$  in eine exklusive Kante vom Typ von  $e_2$  und das Umwandeln der Kante  $wu_2$  in eine exklusive Kante vom Typ von  $e_1$  eine Reduzierungs-Operation (siehe Abbildung 5.14 (a)).*

*Beweis.* Sei  $D$  der Halbdiamant mit zum äußeren Knoten  $w$  adjazenten Kanten  $e_1$  und  $e_2$ , die exklusive Kanten unterschiedlichen Typs sind. Ferner sei  $u_1$  der benachbarte Pol von  $e_1$ . Die 2SAT-Instanz von  $G$  enthält die Äquivalenzen  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D$  und  $x_{e_2} \Leftrightarrow \hat{x}_D$ , da beide Kanten in die gleiche Facette eingebettet werden müssen. Es gilt daher auch  $x_{e_1} \Leftrightarrow x_{e_2}$ .

Wandeln wir nun die gemeinsame Kanten  $wu_1$  und  $wu_2$ , wie oben beschrieben, in exklusive Kanten um, so wird der Halbdiamant  $D$  aufgelöst. Die Kanten  $e_1 = v_1w$  und  $wu_2$  bilden einen exklusiven Pfad  $P_1$  vom Typ von  $e_1$ . Ein exklusiver Pfad  $P_2$  vom Typ von  $e_2$  wird von den Kanten  $e_2 = v_2w$  und  $wu_1$  gebildet. Beide Pfade treffen sich im Knoten  $w$  und müssen somit stets in die gleiche Facette eingebettet werden. Mit den Variablen  $x_{P_1}$  und  $x_{P_2}$  für  $P_1$  und  $P_2$  erhalten wir somit die Äquivalenz  $x_{P_1} \Leftrightarrow x_{P_2}$ . Diese ersetzt in der 2SAT-Formel des resultierenden Graphen  $G'$  die Teilkette  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow x_{e_2}$ .

Wir werden nun analog zum Beweis von Lemma 16 zeigen, dass die Verbindung zur restlichen Äquivalenzkette erhalten bleibt. Alterniert  $e_1$  mit einer weiteren exklusiven Kante gleichen Typs  $e_3 = xy$ , so existiert ein einfacher Pfad aus gemeinsamen Kanten  $w, u_1, \dots, x, \dots, v_1, \dots, y$  in  $G$ . Die Kante  $e_3$  ist außerdem nicht inzident zum Knoten  $u_2$ , da ansonsten  $e_1$  und  $e_3$  nicht alternieren würden. Wir können daher diesen Pfad zum einfachen Pfad  $u_2, w, u_1, \dots, x, \dots, v_1, \dots, y$  erweitern. Die Knotenpaare  $\{u_2, v_1\}$  und  $\{x, y\}$  alternieren somit ebenfalls miteinander. Da letztgenannter Pfad im gemeinsamen Graphen von  $G'$  vorhanden ist und da  $P_1$  gerade die Knoten  $u_2$  und  $v_1$  miteinander verbindet, alternieren  $P_1$  und  $e_3$  in  $G'$ , sodass wir die Äquivalenz  $x_{P_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_3}$  für unseren resultierenden Graphen erhalten. Diese ersetzt die Äquivalenz  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_3}$  in der 2SAT-Instanz von  $G$ . Gleiches gilt, wenn  $e_1$  mit einer exklusiven Kante  $e_3 = xw'$ , die zu einer Brücke  $w'y$  adjazent ist, oder mit einem exklusiven Pfad gleichen Typs alterniert. Analog lässt sich diese Argumentation auch auf die Kante  $e_2$  und den Pfad  $P_2$  anwenden. Insgesamt bleibt daher die Verbindung zum Rest der Äquivalenzkette erhalten, sodass die 2SAT-Formel von  $G'$  einem einfachen, nicht-lösbaren Kreis entspricht.  $\square$

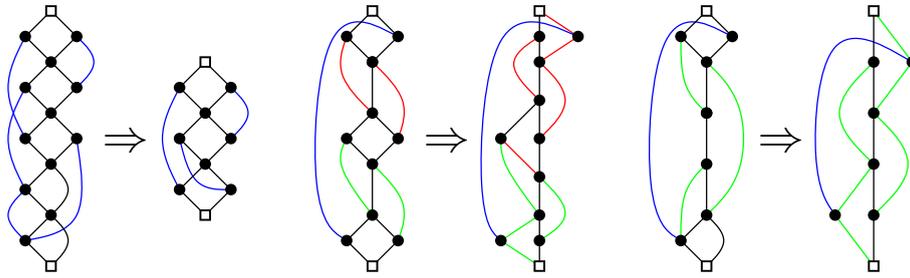


Abbildung 5.15: Die alternierenden Ketten aus Abbildung 3.4 und die nach Anwendung aller Reduzierungs-Operationen resultierenden reduzierten Ketten.

**Lemma 21:** *In einer alternierenden Kette  $G$  existiere ein Diamant mit Knoten  $u_1, w_1, w_2, u_2$  so, dass die zu den äußeren Knoten inzidenten Kanten  $e_1 = v_1w_1$  und  $e_2 = v_2w_2$  exklusive Kanten unterschiedlichen Typs sind. Ferner sei  $u_i$  der zu  $e_i$  benachbarte Pol, für  $i \in \{1, 2\}$ . Dann ist das Umwandeln der Kante  $w_1u_1$  in eine exklusive Kante vom Typ von  $e_2$  eine Reduzierungs-Operation (siehe Abbildung 5.14 (b)).*

*Beweis.* Sei  $D$  der Diamant, für den die adjazenten Kanten  $e_1 = v_1w_1$  und  $e_2 = v_2w_2$  exklusive Kanten unterschiedlichen Typs sind. Der Knoten  $u_1$  sei der zu  $e_1$  und der Knoten  $u_2$  der zu  $e_2$  benachbarte Pol. In der 2SAT-Instanz von  $G$  existieren die beiden Äquivalenzen  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D$  und  $x_{e_2} \Leftrightarrow \neg\hat{x}_D$ , da beide Kanten zu unterschiedlichen Seiten von  $D$  adjazent sind und es gilt daher auch  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$ .

Wandeln wir die Kante  $e_3 = u_1w_1$  in eine exklusive Kante vom Typ von  $e_2$  um, so wird der Diamant  $D$  aufgelöst und es entsteht eine Brücke  $w_1u_2$  im gemeinsamen Graphen. Wird diese in eine bestimmte Facette eingebettet, so impliziert dies die Einbettung der zu  $w_1$  adjazenten exklusiven Kanten und umgekehrt. Führen wir für die Brücke die Variable  $x_B$  ein, so erhalten wir folglich im resultierenden Graphen  $G'$  die Äquivalenzen  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_B$  und  $x_{e_3} \Leftrightarrow \hat{x}_B$ . Ferner existiert im gemeinsamen Graphen von  $G'$  noch immer eine Kette aus gemeinsamen Kanten, zu der die Brücke  $B$  adjazent ist. Es gibt daher in  $G'_{1 \cap 2}$  einen einfachen Pfad  $u_1, w_2, u_2, \dots, v_2$ , sodass die Kante  $e_2 = w_2v_2$  mit der Kante  $e_3 = u_1w_1$  alterniert, die zur Brücke  $w_1u_2$  adjazent ist. Die 2SAT-Instanz von  $G'$  enthält folglich auch die Äquivalenz  $x_{e_2} \Leftrightarrow \neg x_{e_3}$ . Die Äquivalenzen  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  in  $G$  werden somit durch  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_B \Leftrightarrow x_{e_3} \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  in der 2SAT-Formel von  $G'$  ersetzt.

Alterniert die exklusive Kante  $e_1$  mit einer weiteren Kante gleichen Typs  $e_4 = xy$ , so gibt es einen einfachen Pfad  $w_1, \dots, x, \dots, v_1, \dots, y$  im gemeinsamen Graphen von  $G$ . Da  $e_1 = w_1v_1$  in  $G'$  zur Brücke  $w_1u_2$  adjazent ist, existiert der Pfad  $u_2, w_2, u_1, \dots, x, \dots, v_1, \dots, y$  in  $G'_{1 \cap 2}$ , sodass die Kanten  $e_1$  und  $e_4$  auch in  $G'$  alternieren und wir die Äquivalenz  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_4}$  erhalten. Gleiches gilt, falls  $e_1$  mit einer zu einer Brücke adjazenten, exklusiven Kante oder mit einem exklusiven Pfad gleichen Typs alterniert. Analog lässt sich diese Argumentation auch auf die Kante  $e_2$  anwenden. Insgesamt bleibt daher die Verbindung zum Rest der Äquivalenzkette erhalten, sodass die 2SAT-Formel von  $G'$  noch immer ein einfacher, nicht-lösbarer Kreis ist.  $\square$

Durch die in Lemma 15 bis Lemma 21 beschriebenen Reduzierungs-Operationen wurde die ursprüngliche alternierende Kette  $G$  stark vereinfacht. Eine alternierende Kette, auf die diese Operationen erschöpfend angewendet worden sind und die nicht dem Graphen  $S$  entspricht, bezeichnen wir auch als *reduzierte Kette*. Dabei unterscheidet sich eine reduzierte Kette teilweise deutlich von ihrer zugrundeliegenden alternierenden Kette. In Abbildung 5.15 sind dafür beispielhaft drei der alternierenden Ketten aus Abbildung 3.4 zusammen mit den entstandenen reduzierten Ketten dargestellt.

## Eigenschaften reduzierter Ketten

Mit den strukturellen Veränderungen der Reduzierungs-Operationen und den Kriterien für eine alternierende Kette aus Kapitel 3 lässt sich eine reduzierte Kette  $G$  wie folgt klassifizieren:

1. Der gemeinsame Graph  $G_{1 \cap 2}$  besteht aus einer Kette von Kreisknoten  $(v_1, \dots, v_n)$ , die durch eine gemeinsame Kante oder einen Diamanten miteinander verbunden sind. Zu einem Kreisknoten  $v_i$  kann eine Brücke  $v_i w$  inzident sein. Zusätzlich existieren isolierte Knoten im gemeinsamen Graphen.

*Denn:* Der gemeinsame Graph einer alternierenden Ketten besteht gemäß Kapitel 3 aus einer Kette von Kreisknoten, die durch eine gemeinsame Kante, einen Halbdiamanten oder einen Diamanten miteinander verbunden sind. Durch die Reduzierungs-Operationen entstehen zusätzlich Brücken und exklusive Pfade, deren mittlerer Knoten als isolierter Knoten im gemeinsamen Graphen  $G_{1 \cap 2}$  auftritt. Da durch die Reduzierungs-Operationen aus den Lemmata 16, 18 und 20 alle Halbdiamanten umgewandelt werden, treten keine Halbdiamanten mehr in  $G_{1 \cap 2}$  auf.

2. Exklusive Kanten treten entweder als Kante zwischen zwei Kreisknoten, einem Kreis- und Brückenknoten oder als Teil eines exklusiven Pfads zwischen zwei Kreisknoten auf.

*Denn:* Nach Eigenschaft 4 einer alternierenden Kette sind die exklusiven Kanten entweder zu zwei Kreisknoten inzident oder zu einem Kreisknoten inzident und zu einem (Halb-)Diamanten adjazent. Durch die Reduzierungs-Operationen werden die zu einer exklusiven Kante adjazenten (Halb-)Diamanten umgewandelt, sodass die exklusive Kante einen exklusiven Pfad bildet (Lemmata 16, 17 und 20), zu zwei Kreisknoten adjazent (Lemmata 18 und 19) oder zu einer Brücke adjazent ist (Lemma 21). Außerdem existieren keine exklusiven Kanten, die zu mehreren Brücken adjazent, oder exklusive Pfade, die zu Brücken adjazent sind. Wäre dies der Fall, so müsste eine solche Kante zu zwei (Halb-)Diamanten adjazent sein, was nach Konstruktion der alternierenden Ketten nicht möglich ist.

3. Jeder exklusive Pfad besitzt Länge zwei.

*Denn:* Ein exklusiver Pfad entsteht immer dann, wenn eine transzendente Kante und eine exklusive Kante zu einem Halbdiamanten oder Diamanten (Lemma 16 und Lemma 17) oder wenn zwei exklusive Kanten unterschiedlichen Typs zu einem Halbdiamanten (Lemma 20) adjazent sind. Da die exklusiven Kanten zu keinem weiteren Halbdiamanten oder Diamanten inzident sein können, besitzen exklusive Pfade stets Länge zwei.

4. Transzendente Kanten sind immer zu einem äußeren Knoten eines Diamanten oder zum mittleren Knoten eines exklusiven Pfads adjazent.

*Denn:* Nach Eigenschaft 3 einer alternierenden Kette ist jede transzendente Kante in einem solchen Graphen zu zwei äußeren Knoten eines Halbdiamanten oder Diamanten inzident. Nach Lemmata 16 und 17 wird jeder (Halb-)Diamant, zu dem eine transzendente und eine exklusive Kante adjazent sind, so umgewandelt, dass die transzendente Kante nun zum mittleren Knoten eines exklusiven Pfads adjazent ist. Sind zwei transzendente Kanten zu einem Halbdiamanten adjazent, wird dieser gemäß Lemma 18 zerstört und eine der transzendenten Kanten kontrahiert. Lediglich Diamanten, die zu zwei transzendenten Kanten adjazent sind, bleiben unberührt.

5. Jeder äußere Knoten in einem Diamanten ist zu genau einer transzendenten Kante inzident.

*Denn:* Durch die Reduzierungs-Operationen aus Lemmata 17, 19 und 21 sind von den Diamanten der ursprünglichen, alternierenden Kette nur diejenigen Diamanten übrig geblieben, die zu zwei transzendenten Kanten adjazent sind.

6. Jeder äußere Knoten einer Brücke ist zu jeweils einer exklusiven Kante von  $G_1$  und  $G_2$  inzident.

*Denn:* Eine Brücke entsteht genau dann, wenn zwei exklusive Kanten unterschiedlichen Typs zu einem gemeinsamen Diamanten adjazent sind (Lemma 21). Aus diesem Grund entstehen keine Brücken, zu denen transzendente Kanten oder nur eine exklusive Kante adjazent sind.

7. Jeder isolierte Knoten ist mittlerer Knoten eines exklusiven Pfads und inzident zu einer transzendenten Kante oder mittlerer Knoten zweier exklusiver Pfade unterschiedlichen Typs.

*Denn:* Gemäß der Reduzierungs-Operationen treten isolierte Knoten nur als mittlerer Knoten eines exklusiven Pfads auf. Dieser ist entweder zu einer transzendenten Kante (Lemma 16 und Lemma 17) oder zu zwei exklusiven Kanten anderen Typs inzident, die einen exklusiven Pfad bilden (Lemma 20).

8. Jede gemeinsame Kante zwischen zwei Kreisknoten ist zu zwei alternierenden Kanten bzw. Pfaden adjazent.

*Denn:* Nach Lemma 15 kann jede gemeinsame Kante zwischen zwei Kreisknoten, d.h. die nicht Teil einer Brücke oder eines (Halb-)Diamanten ist, kontrahiert werden, wenn sie nicht adjazent zu einem Paar alternierender Kanten oder Pfaden ist. Somit ist nach erschöpfender Anwendung aller Reduzierungs-Operationen jede gemeinsame Kante zwischen Kreisknoten zu zwei alternierenden Kanten oder Pfaden adjazent.

9. Jede exklusive Kante zwischen zwei Kreisknoten besitzt zwei Kanten bzw. Pfade, mit denen sie alterniert.

*Denn:* Mit Eigenschaft 6 der alternierenden Ketten gilt dies für einen solchen Graphen. Dies überträgt sich auch auf die reduzierten Ketten, da deren 2SAT-Instanz ebenfalls einem nicht-lösbaren, einfachen Kreis entspricht. Würde eine exklusive Kante zwischen Kreisknoten mehr als zwei alternierende Kanten oder Pfade besitzen, so wäre die 2SAT-Instanz kein Kreis mehr. Gleiches gilt, wenn diese Kante nur mit einer Kante alternieren würde, da eine solche Kante zu keinem (Halb-)Diamanten oder zu keiner Brücke adjazent ist.

10. Jede exklusive Kante, die zu einer Brücke adjazent ist, alterniert mit genau einer exklusiven Kante oder einem exklusiven Pfad.

*Denn:* Ist eine exklusive Kante  $e$  zu einer Brücke  $B$  adjazent, so existiert die Äquivalenz  $x_e \Leftrightarrow \hat{x}_B$  in der 2SAT-Formel der reduzierten Kette, und  $e$  ist außerdem zu einem Kreisknoten inzident. Da die 2SAT-Instanz einem nicht-lösbaren, einfachen Kreis entspricht, muss  $e$  mit genau einer alternierenden Kante in Verbindung stehen. Andernfalls wäre die 2SAT-Instanz kein Kreis mehr.

11. Jeder exklusive Pfad alterniert mit genau einer exklusiven Kante oder einem exklusiven Pfad.

*Denn:* Wie bereits gezeigt, ist zum mittleren Knoten eines solchen Pfads  $P$  eine transzendente Kante  $e$  oder ein weiterer exklusiver Pfad  $P_2$  anderen Typs adjazent. Die 2SAT-Formel der reduzierten Kette enthält folglich die Äquivalenz  $x_P \Leftrightarrow x_e$  bzw.  $x_P \Leftrightarrow x_{P_2}$ . Da die 2SAT-Instanz einem einfachen Kreis entspricht und  $P$  zwischen Kreisknoten verläuft, muss es folglich genau eine exklusive Kante oder einen exklusiven Pfad vom gleichen Typ wie  $P$  geben, mit der der Pfad  $P$  alterniert. Andernfalls wäre die 2SAT-Instanz kein einfacher Kreis mehr.

12. Der Graph  $G_D$  besteht aus genau einer Zusammenhangskomponente.

*Denn:* Wir erweitern zunächst den Graphen  $G_D$  folgendermaßen: Für jeden exklusiven Pfad und jede Brücke fügen wir einen neuen Knoten hinzu. Für die beiden exklusiven Kanten, die einen exklusiven Pfad bilden, entfernen wir die entsprechenden Knoten aus  $G_D$ . Wir verbinden einen zu einem Diamanten oder zu einer Brücke gehörigen Knoten mit dem Knoten einer Kante, falls diese adjazent zum Diamanten oder zur Brücke ist. Ist eine Kante inzident zum mittleren Knoten eines exklusiven Pfads, werden die entsprechenden Knoten ebenfalls miteinander verbunden. Zusätzlich verbinden wir zwei Knoten, wenn die dazugehörigen exklusiven Kanten oder exklusiven Pfade alternieren.

Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Lemma 14 sind zwei Knoten in  $G_D$  genau dann adjazent, wenn eine entsprechende Äquivalenz in der 2SAT-Instanz vorhanden ist. Daher ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in  $G_D$  und im Konfliktgraphen der 2SAT-Instanz von  $G$  gleich. Da diese einem einfachen Kreis entspricht, besteht  $G_D$  aus genau einer Komponente.

13. Die Anzahl an transzendenten Kanten, an exklusiven Kanten, an exklusiven Pfaden, an isolierten Knoten und an Brücken in  $G$  ist zusammengerechnet ungerade.

*Denn:* Sei nachfolgend  $N(G)$  die Anzahl an transzendenten Kanten, an exklusiven Kanten, an exklusiven Pfaden, an isolierten Knoten und an Brücken eines Graphen  $G$ . Ferner seien  $H$  eine alternierende Kette und  $H'$  der Graph, der durch eine der Reduzierungsoperationen gemäß Lemma 15 bis Lemma 21 aus  $H$  entsteht. Wir betrachten nun, wie die Anwendung einer Reduzierungs-Operation die Anzahl  $N(H)$  verändert.

- Bei Lemma 15 werden weder Teilstrukturen entfernt, noch hinzugefügt, die  $N(H)$  beeinflussen.
- In Lemma 16 werden ein Halbdiamant und eine exklusive Kante entfernt, zusätzlich jedoch ein exklusiver Pfad und damit auch ein isolierter Knoten hinzugefügt. Es gilt daher  $N(H') = N(H)$ .
- Gemäß Lemma 17 wird ein Diamant entfernt, dieser beeinflusst jedoch  $N(H')$  nicht. Ferner werden ein exklusiver Pfad und ein isolierter Knoten in  $H'$  hinzugefügt, sodass wir  $N(H') = N(H) + 2$  erhalten.
- Mit Lemma 18 werden ein Halbdiamant und eine exklusive Kante aus  $H$  entfernt und keine relevanten Teilstrukturen hinzugefügt, sodass  $N(H') = N(H) - 2$  gilt.
- Bei Lemma 19 wird lediglich ein Diamant entfernt und keine Teilstruktur hinzugefügt. Daher verändert sich  $N(H)$  nicht.
- In Lemma 20 werden ein Halbdiamant und zwei exklusive Kanten aus  $G$  entfernt. Allerdings werden zwei exklusive Pfade hinzugefügt, die einen gemeinsamen, isolierten Knoten besitzen. Es gilt daher auch  $N(H') = N(H)$ .
- Schließlich wird in Lemma 21 ein Diamant entfernt, der  $N(H)$  nicht beeinflusst, und eine Brücke und eine exklusive Kante werden hinzugefügt. Folglich gilt in diesem Fall  $N(H') = N(H) + 2$ .

Die Anzahl  $N(H')$  ist somit genau dann ungerade, wenn  $N(H)$  ungerade ist. Für einen gemäß Lemmata 12 und 13 konstruierten Graphen  $G'$  gilt nach Eigenschaft 8 der alternierenden Ketten, dass die Anzahl an transzendenten Kanten, an exklusiven Kanten und an Halbdiamanten ungerade ist. Da  $G'$  jedoch keine Brücken, exklusive Pfade oder isolierte Knoten enthält, ist daher auch  $N(G')$  ungerade. Die reduzierte Kette  $G$  ist ferner durch Reduzierungsoperationen aus einem solchen Graphen entstanden, sodass insgesamt die Anzahl  $N(G)$  ebenfalls ungerade ist.

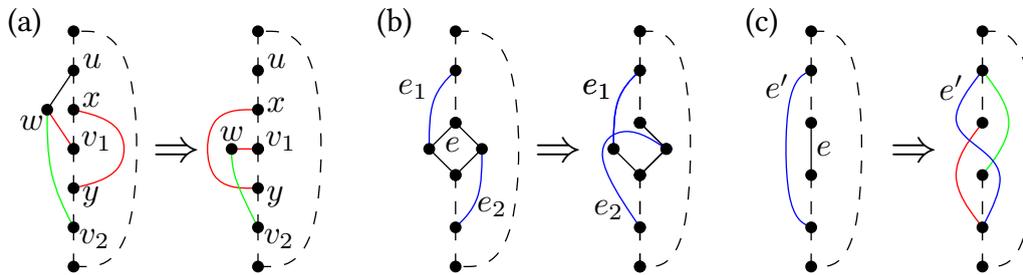


Abbildung 5.16: Durch das Entfernen einer Brücke kann eine alternierende Kante in beide Facetten eingebettet werden (a). Das Entfernen einer gemeinsamen Kante in einem Diamanten erlaubt es einer transzendenten Kante die Seite der Kette zu wechseln (b). Dies ist auch dann möglich, wenn eine gemeinsame Kanten zwischen zwei Kreisknoten entfernt wird. (c).

Im Vergleich zu den alternierenden Ketten sind die reduzierten Ketten minimal bezüglich der definierten SEFE-Minoren-Operationen unter allen Graphen, deren gemeinsame Graphen zyklisch sind. Dies bedeutet, dass jeder Graph, der durch Anwendung einer SEFE-Minoren-Operation aus einer reduzierten Kette entsteht, entweder eine SEFE besitzt oder sein gemeinsamer Graph azyklisch ist. Diese wichtige Eigenschaft zeigen wir im nachfolgenden Lemma. Dabei beeinflusst die Einschränkung auf zyklische Graphen jedoch nicht die Korrektheit unserer Charakterisierung. Alle betrachteten Ausgangsgraphen besitzen einen zweifach zusammenhängenden gemeinsamen Graphen, der folglich mindestens einen Kreis enthält.

**Lemma 22:** *Sei  $G$  eine reduzierte Kette. Dann ist  $G$  minimal bezüglich SEFE-Minoren-Operationen unter den Graphen, deren gemeinsame Graphen zyklisch sind.*

*Beweis.* Sei  $G$  eine alternierende Kette, auf die die Reduzierungs-Operationen erschöpfend angewendet worden sind. Durch die Eigenschaften der Reduzierungsoperationen aus Lemma 15 bis Lemma 21 wissen wir bereits, dass der Graph  $G$  keine SEFE besitzt und dass seine 2SAT-Instanz einem einfachen, nicht-lösbaren Kreis entspricht. Wir zeigen nun mit Hilfe der erarbeiteten Charakterisierung für reduzierte Ketten, dass durch Anwendung einer SEFE-Minoren-Operation im entstehenden Graphen  $G'$  mindestens eine der Äquivalenzen aus der 2SAT-Formel nicht mehr gilt oder der gemeinsame Graph  $G'_{1 \cap 2}$  kreisfrei ist.

1. Knoten entfernen:

Wird ein Knoten  $v$  aus  $G$  entfernt, so werden auch alle zu  $v$  inzidenten Kanten aus  $G$  gelöscht. Würde nach dem Entfernen einer zu  $v$  inzidenten Kante aus  $G$  bereits eine SEFE für  $G'$  bestehen, so besitzt dieser auch nach dem Löschen von  $v$  eine SEFE. In der nachfolgenden Operation zeigen wir, dass dies der Fall ist.

2. Kante entfernen:

Wir unterscheiden nachfolgend, welchen Typ die aus  $G$  zu entfernende Kante  $e$  besitzt.

Ist  $e$  eine gemeinsame Kante, so kann  $e$  nach Eigenschaft 1 als Brücke, in einem Diamanten oder als Kante zwischen zwei Kreisknoten auftreten. Sei  $e = uw$  zunächst eine Brücke. Dann sind nach Eigenschaft 6 zwei exklusive Kanten  $e_1 = wv_1$  und  $e_2 = wv_2$  unterschiedlichen Typs zu  $w$  inzident. Nach Eigenschaft 10 alterniert die Kante  $e_1$  mit einer weiteren exklusiven Kante  $e_3 = xy$ , einer exklusiven Kante  $e_3 = xw'$ , die zu einer weiteren Brücke  $w'y$  adjazent ist, oder einem exklusiven Pfad  $P$  gleichen Typs von  $x$  nach  $y$ . Es existiert also die Äquivalenz  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_3}$  bzw.  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_P$  in der 2SAT-Instanz von  $G$  und somit

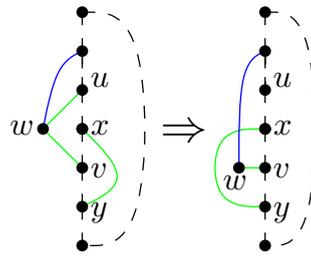


Abbildung 5.17: Wird in einer reduzierten Kette eine Kante aus einem exklusiven Pfad entfernt, so kann eine dazu alternierende Kante ebenfalls die Seite wechseln.

o.B.d.A. der Pfad  $u, \dots, x, \dots, v, \dots, y$  in  $G_{1 \cap 2}$ . Entfernen wir nun die Kante  $e = uw$ , so können wir  $e_3$  bzw.  $P$  auch in die gleiche Facette wie  $e_1$  einbetten. Die möglicherweise dabei entstehende Kreuzung mit  $e_2$  ist jedoch erlaubt, wie in Abbildung 5.16 (a) dargestellt wird, da  $e_2$  eine exklusive Kante anderen Typs ist. Die Äquivalenz  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_3}$  bzw.  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_P$  gilt somit nicht mehr.

Tritt die Kante  $e$  hingegen in einem Diamanten  $D$  auf, so sind nach Eigenschaft 5 zwei transzendenten Kanten zu  $D$  adjazent. Mit  $e_1$  bezeichnen wir die zu  $e$  adjazente transzendenten Kante und mit  $e_2$  die andere transzendenten Kante. In der 2SAT-Instanz existiert folglich die Teilkette  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$ . Entfernen wir die gemeinsame Kante  $e$ , so wird der Diamant  $D$  zerstört und es entsteht eine Brücke, zu der die Kante  $e_1$  adjazent ist. Die Kante  $e_2$  ist hingegen nicht zu dieser Brücke adjazent, sondern könnte nun auch in die gleiche Facette wie  $e_1$  eingebettet werden. Dies ist in Abbildung 5.16 (b) dargestellt. Die erwähnten Äquivalenzen gehen daher verloren.

Falls die Kante  $e$  zwischen zwei Kreisknoten verläuft, so wird durch das Entfernen von  $e$  die zusammenhängende Kette von gemeinsamen Kanten zerstört. Existiert in  $G$  eine transzendenten Kante  $e'$ , so kann diese die Seite wechseln, da sie exklusive und weitere transzendenten Kanten schneiden darf (siehe Abbildung 5.16 (c)). Nach Eigenschaft 4 ist  $e'$  ferner zu Diamanten oder exklusiven Pfaden adjazent. Wechselt  $e'$  nun die Seite, so geht eine Äquivalenz  $x_{e'} \Leftrightarrow \hat{x}_D$  für einen zur Kante  $e'$  adjazenten Diamanten bzw.  $x_{e'} \Leftrightarrow \hat{x}_P$  für einen zu  $e'$  adjazenten exklusiven Pfad  $P$  verloren. Besitzt der Graph  $G$  hingegen keine transzendenten Kanten, so enthält  $G$  nach Eigenschaft 5 ebenfalls keine Diamanten. Durch das Entfernen der Kante  $e$  enthält der gemeinsame Graph  $G'_{1 \cap 2}$  somit keinen Kreis mehr. Folglich ist  $G$  in diesem Fall minimal unter den Graphen, deren gemeinsame Graphen zyklisch sind.

Falls  $e$  eine exklusive Kante ist, so alterniert  $e$  nach Eigenschaft 9 und 10 mit (mindestens) einer weiteren exklusiven Kante bzw. einem exklusiven Pfad oder die Kante  $e$  ist nach Eigenschaft 2 Teil eines exklusiven Pfads. Alterniert  $e$  mit einer exklusiven Kante  $e_2$  oder mit einem exklusiven Pfad  $P$  gleichen Typs, so enthält die 2SAT-Instanz von  $G$  die Äquivalenz  $x_e \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  bzw.  $x_e \Leftrightarrow \neg x_P$ . Diese geht beim Entfernen von  $e$  verloren.

Falls die Kante  $e = uw$  selbst Teil eines exklusiven Pfads  $P$  ist, gibt es eine weitere Kante  $e' = vw$ , die mit  $e$  zusammen den Pfad bildet. Außerdem muss eine Kante  $e_2 = xy$ , eine Kante  $e_2 = xw_2$ , die zu einer Brücke  $w_2y$  adjazent ist, oder ein Pfad  $P_2$  von  $x$  nach  $y$  gleichen Typs existieren, mit dem der Pfad  $u, w, v$  alterniert. Es gibt folglich o.B.d.A. einen einfachen Pfad  $u, \dots, x, \dots, v, \dots, y$  im gemeinsamen Graphen  $G_{1 \cap 2}$  und die Äquivalenz  $x_P \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  bzw.  $x_P \Leftrightarrow \neg x_{P_2}$  in der 2SAT-Instanz von  $G$ . Nach dem Entfernen von  $e$  kann  $e_2$  bzw.  $P_2$  auch in die gleiche Facette wie  $e'$  eingebettet werden, da zum Knoten  $w$  nach Konstruktion nur transzendenten Kanten oder exklusive Kanten anderen Typs inzident sein können (siehe Abbildung 5.17). Diese dürfen  $e_2$  bzw.  $P_2$  jedoch kreuzen, sodass die Äquivalenz  $x_P \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  bzw.  $x_P \Leftrightarrow \neg x_{P_2}$  verloren geht und keine neue hinzukommt.

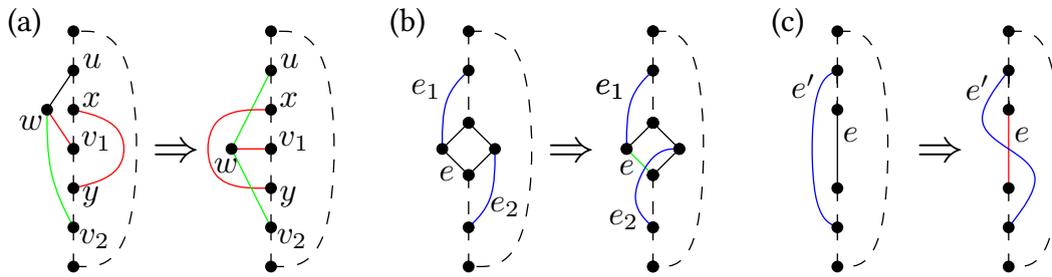


Abbildung 5.18: Durch das Umwandeln einer Brücke in eine exklusive Kante kann eine alternierende Kante die Facette wechseln (a). Wird eine Kante eines Diamanten in eine exklusive Kante umgewandelt, so kann eine der transzendenten Kanten die Seite der Kette wechseln (b). Dies ist auch dann möglich, wenn eine gemeinsame Kante zwischen zwei Kreisknoten umgewandelt wird (c).

Ist  $e = uv$  eine transzendente Kante, so ist  $u$  nach Eigenschaft 4 äußerer Knoten eines Diamanten  $D_1$  oder mittlerer Knoten in einem exklusiven Pfad  $P_1$ . Gleiches gilt für den Knoten  $v$  bezüglich  $D_2$  und  $P_2$ . In der 2SAT-Instanz von  $G$  gibt es daher die Äquivalenzen  $x_e \Leftrightarrow \hat{x}_{D_i}$  bzw.  $x_e \Leftrightarrow \hat{x}_{P_i}$  für  $i = 1, 2$ . Nach dem Entfernen von  $e$  sind die beiden Teilstrukturen nicht mehr miteinander verbunden und die besagten Äquivalenzen entfallen in der 2SAT-Instanz.

### 3. Gemeinsame Kante umwandeln:

Wir betrachten die verschiedenen Fälle, in denen nach Eigenschaft 1 eine gemeinsame Kante auftreten kann. Falls  $e = uv$  eine Brücke ist, dann sind nach Eigenschaft 6 zwei exklusive Kanten  $e_1 = wv_1$  und  $e_2 = wv_2$  unterschiedlichen Typs zum äußeren Knoten  $w$  inzident. Dabei alterniert die Kante  $e_1$  nach Eigenschaft 10 mit einer weiteren exklusiven Kante  $e_3 = xy$ , einer Kante  $e_3 = xw'$ , die selbst zu einer Brücke  $w'y$  adjazent ist, oder einem exklusiven Pfad  $P$  gleichen Typs von  $x$  nach  $y$ . Es gibt daher o.B.d.A. den einfachen Pfad  $u, \dots, x, \dots, v_1, \dots, y$  in  $G_{1 \cap 2}$ . Wird nun die Kante  $e$  in eine exklusive Kante vom Typ von  $e_2$  umgewandelt, so kann  $e_3$  bzw.  $P$  auch in die gleiche Facette wie  $e_1$  eingebettet werden. Dies ist möglich, da  $e_3$  bzw.  $P$  die Kanten  $e$  und  $e_2$  schneiden darf, da diese exklusive Kanten eines anderen Typs sind. Dies ist beispielhaft in Abbildung 5.18 (a) dargestellt. Die Äquivalenz  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_{e_3}$  bzw.  $x_{e_1} \Leftrightarrow \neg x_P$  geht somit verloren. Falls die Kante  $e$  in eine exklusive Kante vom Typ von  $e_1$  umgewandelt wird, so gilt diese Argumentation analog bezüglich der Kante  $e_2$ .

Ist die Kante  $e$  Teil eines Diamanten  $D$ , so sind nach Eigenschaft 5 zwei transzendente Kanten zu  $D$  adjazent. Mit  $e_1$  bezeichnen wir die zu  $e$  adjazente transzendente Kante und mit  $e_2$  die andere transzendente Kante. In der 2SAT-Instanz existiert folglich die Teilkette  $x_{e_1} \Leftrightarrow \hat{x}_D \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$ . Wandeln wir die Kante  $e$  in eine exklusive Kante um, so entsteht eine Brücke, zu der die Kante  $e_1$  adjazent ist. Die Kante  $e_2$  ist hingegen nicht zu dieser Brücke adjazent, sondern kann nun auch in die gleiche Facette wie  $e_1$  eingebettet werden (siehe Abbildung 5.18 (b)), da sie beliebige exklusive und transzendente Kanten schneiden darf. Die erwähnten Äquivalenzen gehen folglich verloren.

Falls die Kante  $e$  zwischen zwei Kreisknoten verläuft, so wird durch das Umwandeln von  $e$  in eine exklusive Kante die zusammenhängende Kette von gemeinsamen Kanten zerstört. Existiert in  $G$  eine transzendente Kante  $e'$ , so kann diese die Seite wechseln, da sie die Kante  $e$  nun kreuzen darf, wie in Abbildung 5.18 (c) dargestellt ist. Nach Eigenschaft 4 ist  $e'$  ferner zu Diamanten oder exklusiven Pfaden adjazent. Wechselt  $e'$  nun die Seite, so geht eine Äquivalenz  $x_{e'} \Leftrightarrow \hat{x}_D$  für einen zur Kante  $e'$  adjazenten Diamanten bzw.  $x_{e'} \Leftrightarrow \hat{x}_P$

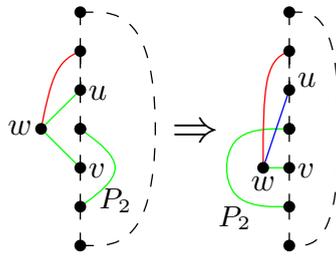


Abbildung 5.19: Wird in einer reduzierten Kette eine Kante aus einem exklusiven Pfad in eine transzendente Kante umgewandelt, so kann eine dazu alternierende Kante ebenfalls die Seite wechseln.

für einen zu  $e'$  adjazenten exklusiven Pfad  $P$  verloren. Besitzt der Graph  $G$  hingegen keine transzendente Kante, so enthält  $G$  nach Eigenschaft 5 ebenfalls keine Diamanten. Durch das Umwandeln der Kante  $e$  enthält der gemeinsame Graph  $G'_{1 \cap 2}$  somit keinen Kreis mehr. Folglich ist  $G$  in diesem Fall bereits minimal unter den Graphen, deren gemeinsame Graphen zyklisch sind.

#### 4. Exklusive Kante umwandeln:

Wandeln wir eine exklusive Kante  $e$  in eine transzendente Kante um, so darf diese nun exklusive Kanten schneiden. Nach Eigenschaft 2 verläuft  $e$  zwischen zwei Kreisknoten bzw. einem Kreis- und Brückenknoten oder ist Teil eines exklusiven Pfads. Im ersten Fall alterniert  $e$  mit einer exklusiven Kante  $e_2$  oder einem exklusiven Pfad  $P$ , sodass nun  $e$  und  $e_2$  bzw.  $e$  und  $P$  in die gleiche Facette des gemeinsamen Graphen eingebettet werden können. Die in der 2SAT-Instanz von  $G$  existierende Äquivalenz  $x_e \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  bzw.  $x_e \Leftrightarrow \neg x_P$  ist nicht mehr gegeben.

Ist die exklusive Kante  $e = uw$  hingegen Teil eines exklusiven Pfads  $P$ , so gehen wir analog zum Fall vor, in dem eine Kante aus einem exklusiven Pfad entfernt wird. Es gibt eine Kante  $e' = wv$ , die mit  $e$  zusammen den Pfad  $P$  bildet, und eine exklusive Kante  $e_2$  oder einen exklusiven Pfad  $P_2$ , die mit  $P$  alternieren. Nach dem Umwandeln von  $e$  in eine transzendente Kante kann  $e_2$  bzw.  $P_2$  in die gleiche Facette wie  $e'$  eingebettet werden, da zum Knoten  $w$  nur transzendente oder exklusive Kanten inzident sind (siehe Abbildung 5.19). Die Äquivalenz  $x_P \Leftrightarrow \neg x_{e_2}$  bzw.  $x_P \Leftrightarrow \neg x_{P_2}$  geht somit verloren.

#### 5. Gemeinsame Kante kontrahieren:

Wir betrachten die verschiedenen Fälle, in denen nach Eigenschaft 1 eine gemeinsame Kante auftreten kann. Ist die gemeinsame Kante  $e = uw$  eine Brücke, so sind nach Eigenschaft 6 zwei exklusive Kanten  $e_1$  und  $e_2$  unterschiedlichen Typs zu  $e$  adjazent. In der 2SAT-Instanz von  $G$  existieren die Äquivalenzen  $\hat{x}_e \Leftrightarrow x_{e_1}$  und  $\hat{x}_e \Leftrightarrow x_{e_2}$ . Insbesondere müssen die beiden Kanten  $e_1$  und  $e_2$  in die gleiche Facette von  $G_{1 \cap 2}$  eingebettet werden. Kontrahieren wir nun die Kante  $e$ , so gehen zunächst obige Äquivalenzen verloren. Außerdem sind  $e_1$  und  $e_2$  nun zum Kreisknoten  $u$  inzident. Die Kanten können nun unabhängig voneinander in die beiden Facetten eingebettet werden (siehe Abbildung 5.20 (a)), sodass für die 2SAT-Formel des resultierenden Graphen  $G'$  keine neue Äquivalenz hinzukommt und die Äquivalenzkette zerbricht.

Falls  $e$  als gemeinsame Kante in einem Diamanten  $D$  auftritt, so ist nach Eigenschaft 5 eine transzendente Kante  $e'$  zu  $e$  adjazent. Es existiert somit die Äquivalenz  $x_{e'} \Leftrightarrow \hat{x}_D$  in der 2SAT-Instanz. Kontrahieren wir nun die Kante  $e$ , so wird  $D$  zu einem Halbdiamanten und die transzendente Kante  $e'$  ist zu einem Kreisknoten inzident. Folglich beeinflusst die Einbettung des Halbdiamanten  $D$  nicht mehr die Einbettung der Kante  $e'$ , sodass die erwähnte

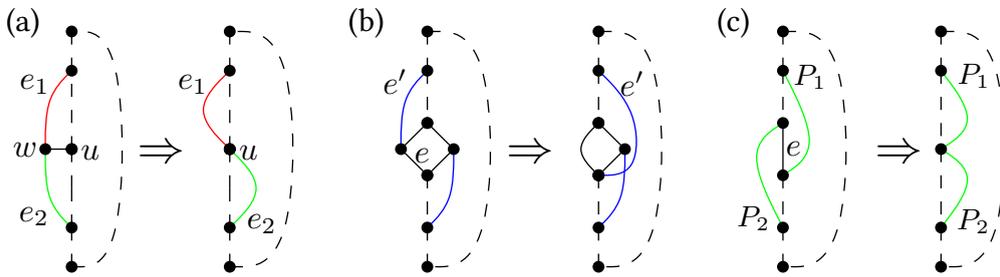


Abbildung 5.20: Durch die Kontraktion einer Brücke können die adjazenten exklusiven Kanten unabhängig voneinander die Seite wechseln. (a). Wird eine Kante eines Diamanten kontrahiert, so kann eine transzendentale Kante die Seite der Kette wechseln (b). Durch die Kontraktion einer gemeinsamen Kante zwischen zwei Kreisknoten alternieren die adjazenten exklusiven Kanten nicht mehr (c).

Äquivalenz verloren geht. Dies ist in Abbildung 5.20 (b) dargestellt.

Betrachten wir schließlich den Fall, dass  $e$  zwischen zwei Kreisknoten verläuft. Dann ist  $e$  nach Eigenschaft 8 zu zwei alternierenden exklusiven Kanten bzw. Pfaden  $P_1$  und  $P_2$  adjazent, wie in Abbildung 5.20 (C) dargestellt ist. Kontrahieren wir nun die Kante  $e$ , geht die Äquivalenz  $x_{P_1} \Leftrightarrow \neg x_{P_2}$  in der 2SAT-Instanz verloren, da  $P_1$  und  $P_2$  nun zum gleichen Knoten inzident sind und somit nicht mehr alternieren.

#### 6. Exklusive oder transzendentale Kante kontrahieren:

Eine exklusive oder transzendentale Kante  $e = uv$  darf nur kontrahiert werden, wenn einer der beiden Knoten  $u$  oder  $v$  nur inzident zu Kanten des gleichen Typs von  $e$  ist. Nach Eigenschaft 2 einer reduzierten Kette  $G$  ist jede exklusive Kante zu mindestens einem Kreisknoten inzident und somit zu einer gemeinsamen Kante adjazent. Ist einer der inzidenten Knoten von  $e$  kein Kreisknoten, dann ist dieser Knoten nach Eigenschaft 2 der mittlere Knoten eines exklusiven Pfades. Der Knoten ist daher ein isolierter Knoten im gemeinsamen Graphen und nach Eigenschaft 7 entweder zu einer transzendenten Kante oder zu zwei exklusiven Kanten anderen Typs inzident. Ferner sind transzendentale Kanten nach Eigenschaft 4 nur zu Diamanten oder zu exklusiven Pfaden adjazent. In beiden Fällen sind die Knoten  $u$  und  $v$  zu Kanten anderen Typs inzident und wir können diese Operation nicht auf die alternierende Kette  $G$  anwenden.

Insgesamt entsteht durch jede auf eine alternierende Kette anwendbare SEFE-Minoren-Operation ein Graph  $G'$ , für den eine SEFE existiert oder dessen gemeinsamer Graph keinen Kreis mehr enthält. Da  $G$  selbst jedoch keine SEFE besitzt, ist  $G$  minimal bezüglich SEFE-Minoren-Operationen unter den Graphen, deren gemeinsame Graphen zyklisch sind.  $\square$

Gemäß Theorem 1 und Lemma 22 können wir die Existenz einer SEFE für Graphenpaare, deren gemeinsamer Graph zweifach zusammenhängend ist, auch durch eine Menge an verbotenen Substrukturen charakterisieren, die möglichst minimal bezüglich SEFE-Minoren-Operationen ist. Wir beenden daher die Untersuchung auf verbotene Substrukturen mit dem folgenden Theorem:

**Theorem 2:** Seien  $(G_1, G_2)$  zwei Graphen, deren gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2}$  zweifach zusammenhängend ist. Dann existiert genau dann eine SEFE für  $(G_1, G_2)$ , wenn der vereinigte Graph  $G$  keine der verbotenen Substrukturen  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ ,  $S_1$  oder  $S_2$  oder einen Graph der reduzierten Ketten als SEFE-Minor enthält. Jeder dieser Graphen ist minimal bezüglich SEFE-Minoren-Operationen unter den Graphen, deren gemeinsame Graphen zyklisch sind.



## 6 Fazit und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war die Charakterisierung der lösbaren Instanzen des Problems SIMULTANE EINBETTUNG MIT FESTGELEGTE KANTEN (SEFE) mittels verbotener Substrukturen für Instanzen, deren gemeinsamer Graph zweifach zusammenhängend ist. Zwei Graphen  $G_1 = (V, E_1)$  und  $G_2 = (V, E_2)$  mit der selben Knotenmenge besitzen dabei eine SEFE, wenn es planare Einbettungen gibt, sodass die Knoten in beiden Einbettungen auf dieselben Punkte und die Kanten, die in beiden Graphen vorkommen, auf dieselben Kurven abgebildet werden.

Um Substrukturen von  $(G_1, G_2)$  klassifizieren zu können, vereinigten wir zunächst die beiden Graphen zu einem Graphen  $G$ , der verschiedene Kantentypen besitzt. *Gemeinsame Kanten* entsprechen den Kanten aus  $E_1 \cap E_2$ . *Exklusive Kanten von  $G_1$*  sind die Kanten aus  $E_1 \setminus E_2$  und *exklusive Kanten von  $G_2$*  die aus  $E_2 \setminus E_1$ . Exklusive Kanten aus  $E_1$  dürfen dabei in einer SEFE von  $G$  die exklusiven Kanten aus  $G_2$  schneiden und umgekehrt. Es erwies sich außerdem als nützlich, *transzendente Kanten* einzuführen, die eine Verallgemeinerung der exklusiven Kanten darstellen. So dürfen transzendente Kanten beliebige exklusive und andere transzendente Kanten kreuzen. Der Schnitt mit gemeinsamen Kanten bleibt hingegen verboten.

Da die üblichen Minoren-Operationen im Bezug auf exklusive Kanten zu stark waren, entwickelten wir eine Menge von erlaubten Operationen für den vereinigten Graphen  $G$ , die wir als *SEFE-Minoren-Operationen* bezeichneten. Diese wurden so gewählt, dass sie eine SEFE erhalten. Entsteht ein Graph  $G'$  durch SEFE-Minoren-Operationen aus  $G$ , so nennen wir  $G'$  einen *SEFE-Minor* von  $G$ . Eine *verbotene Substruktur* ist mit dieser Auffassung ein SEFE-Minor von  $G$ , der selbst keine SEFE besitzt. Damit ließ sich das Problem SEFE folgendermaßen charakterisieren: Ein Graphenpaar  $(G_1, G_2)$  besitzt genau dann eine SEFE, wenn der vereinigte Graph  $G$  keine der verbotenen Substrukturen als SEFE-Minor enthält. Existiert für das Paar  $(G_1, G_2)$  eine SEFE, so überträgt sich dies auch auf  $G$ . Da die gewählten SEFE-Minoren-Operationen eine SEFE erhalten, gibt es folglich für jeden SEFE-Minor von  $G$  eine SEFE. Keine der verbotenen Substrukturen kann in diesem Fall als SEFE-Minor von  $G$  auftreten.

Der Hauptteil dieser Arbeit bestand nun darin, eine möglichst minimale Menge an verbotenen Substrukturen zu ermitteln, durch die obige Charakterisierung erfüllt wird. Dafür verwendeten wir als Hilfsmittel den Algorithmus SEFEBICO von Angelini et al. [Ang+12a] Dieser berechnet in Linearzeit eine SEFE für Instanzen, deren gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2}$  zweifach zusammenhängend ist, oder entscheidet, dass keine solche existiert. Dazu wird zunächst der SPQR-Baum von  $G_{1 \cap 2}$  aufgestellt. Anschließend wird in einem bottom-up-Vorgehen für jeden P-Knoten und R-Knoten  $\mu$  des SPQR-Baums eine SEFE von  $G(\mu)$  berechnet, in die daraufhin die exklusiven Kanten eingefügt werden. Ist dies nicht möglich, so bricht der Algorithmus ab und der Ausgangsgraph besitzt keine SEFE. Im Einzelnen existiert keine SEFE, wenn für das Skelett eines Knotens  $\mu$  im SPQR-Baum keine kompatible Einbettung existiert, der Graph  $G(\mu)$  keine erweiterbare SEFE besitzt oder die zu einem Kind von  $\mu$  gehörige 2SAT-Instanz nicht lösbar ist.

In den ersten beiden Situationen ließen sich durch geeignete Anwendung der SEFE-Minoren-Operationen insgesamt vier Graphen als verbotene Substrukturen identifizieren. Diese beinhalten die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  aus exklusiven Kanten, die bereits durch die Charakterisierung planarer Graphen von Kuratowski und Wagner bekannt sind. Die beiden anderen Substruktu-

ren  $S_1$  und  $S_2$  bestanden aus gemeinsamen und transzendenten Kanten. Die Analyse im Fall der nicht-lösbaren 2SAT-Instanz führte uns zu einer unendlichen Graphenklasse. In einem ersten Schritt konnten wir den Ausgangsgraphen  $G$  auf einen Graphen der *alternierenden Ketten* reduzieren. Die Klasse der alternierenden Ketten besitzt dabei eine kompakte, übersichtliche Beschreibung. Allerdings waren die Graphen dieser Klasse nicht minimal bezüglich der SEFE-Minoren-Operationen und ließen sich noch stark vereinfachen. Dazu führten wir Folgen von SEFE-Minoren-Operationen ein, die zusätzlich auch die Nicht-Existenz einer SEFE erhalten. Mit Hilfe dieser *Reduzierungs-Operationen* erhielten wir die Klasse der *reduzierten Ketten*. Die Graphen dieser Klasse sind minimal bezüglich SEFE-Minoren-Operationen unter den Instanzen, deren gemeinsamer Graph  $G_{1 \cap 2}$  zyklisch ist. Diese Einschränkung ändert jedoch nicht die Korrektheit unserer Charakterisierung, da wir nur Graphen betrachteten, für die  $G_{1 \cap 2}$  zweifach zusammenhängend ist und somit einen Kreis enthält. Insgesamt ließ sich daher das Problem SEFE durch die verbotenen Substrukturen  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  und die Graphen aus der Klasse der reduzierten Ketten charakterisieren.

Abschließend möchten wir auf einige Details eingehen, die zu weiteren Fragestellungen im Bereich der Ergebnisse dieser Arbeit führen.

Die Minimalität bezüglich SEFE-Minoren-Operationen wurde nur für Graphen untersucht, deren gemeinsamer Graph zyklisch ist. An diesem Punkt könnte man weiter forschen und auch kreisfreie Graphen untersuchen. Enthält man dabei z.B. eine Instanz, deren gemeinsamer Graph nur eine mögliche Einbettung besitzt, so ließe sich die Charakterisierung des Problems PARTIALLY EMBEDDED PLANARITY von Jelínek, Kratochvíl und Rutter [JKR13] anwenden. Für die entsprechenden Situationen enthält diese allerdings noch immer zwölf verschiedene Graphen, die als verbotene Substrukturen vorkommen können. Eine vollständige Analyse unter Einbeziehung der azyklischen Graphen könnte daher sehr umfangreich werden.

Eine andere Bearbeitungsmöglichkeit bestünde in der Veränderung der gewählten Minoren-Operationen. Man könnte weitere Operationen hinzufügen, die bestimmte Teilgraphen kontrahieren können, sodass die Anzahl an verbotenen Substrukturen für unser betrachtetes Problem möglicherweise endlich wird. Dann ließe sich auch einfacher verifizieren, ob die (endliche) Menge minimal bezüglich der gewählten Operationen ist. In dieser Arbeit haben wir uns dafür entschieden, möglichst wenige und einfache SEFE-Minoren-Operationen zu verwenden, die stark mit den normalen Minoren-Operationen „Knoten entfernen“, „Kante entfernen“ und „Kante kontrahieren“ zusammenhängen. Dies führt zu einer stärkeren Charakterisierung für das Ausgangsproblem SEFE.

Der von Bläsius, Karrer und Rutter [BKR14] vorgestellte SEFE-Algorithmus für Instanzen, deren gemeinsamer Graph aus zweifach zusammenhängenden Komponenten besteht, basiert auf dem in dieser Arbeit verwendeten Algorithmus SEFEBICO. Dabei müssen zusätzliche Bedingungen erfüllt sein, damit eine SEFE existiert. Mit einem ähnlichen Vorgehen wie in dieser Arbeit könnte man nun diese Situationen nach verbotenen Substrukturen untersuchen. Damit wäre es möglich die Charakterisierung mittels verbotener Substrukturen auch auf die Fälle weiterzuführen, in denen der gemeinsame Graph zweifach zusammenhängende Komponenten besitzt.

Für die allgemeine Situation, in der für zwei beliebige Graphen die Existenz einer SEFE entschieden werden soll, wäre eine Charakterisierung mittels verbotener Substrukturen sehr wünschenswert. Dann wüsste man, dass das Problem SEFE in der Klasse  $\mathcal{NP}$  und auch in der Klasse  $\text{co-}\mathcal{NP}$  liegt. Man könnte dann stark vermuten, dass SEFE kein  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem ist. Dies wäre zumindest ein Indiz für die Zeitkomplexität, da diese immer noch offen ist. Leider lässt sich das in dieser Arbeit beschriebene Vorgehen nicht direkt auf den allgemeinen Fall übertragen, da die Konstruktion eines SPQR-Baums im Allgemeinen nicht möglich ist. Auch gibt es für diesen Fall noch keine algorithmischen Ansätze, anhand derer sich verbotene Substrukturen extrahieren ließen.

## **Danksagung**

Ich möchte mich an dieser Stelle bei den Menschen bedanken, die zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben.

Mein Dank gilt Frau Prof. Dr. Dorothea Wagner dafür, dass ich diese Diplomarbeit an ihrem Lehrstuhl am Institut für Theoretische Informatik anfertigen durfte.

Meinen Betreuern Ignaz Rutter und Thomas Bläsius danke ich für die tolle Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit. Sie haben mir nicht nur ein spannendes Themengebiet näher gebracht, sondern waren auch stets für mich da, wenn ich ihre Hilfe gebraucht habe. Danke auch für die anregenden Diskussionen, die anschaulichen Skizzen am Whiteboard und allgemein für die viele Zeit, die sie mir und meiner Arbeit erübrigt haben.

Ich bedanke mich bei meinen Freunden, die mich während meines Studiums an verschiedenen Stellen fachlich und menschlich unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt Katharina Hörenberg dafür, dass sie Teile dieser Arbeit Korrektur gelesen hat und mir geduldig zugehört hat, wenn ich wieder länger von meiner Diplomarbeit erzählt habe.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mich stets unterstützt hat und auf die ich mich immer verlassen konnte.



## Literatur

- [ADF11] Patrizio Angelini, Giuseppe Di Battista und Fabrizio Frati. „Simultaneous Embedding of Embedded Planar Graphs“. In: *Algorithms and Computation*. Hrsg. von Takao Asano, Shin-ichi Nakano, Yoshio Okamoto und Osamu Watanabe. Bd. 7074. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2011, S. 271–280.
- [Ang+10] Patrizio Angelini, Giuseppe Di Battista, Fabrizio Frati u. a. „Testing Planarity of Partially Embedded Graphs“. In: *Proceedings of the Twenty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2010*. Society for Industrial und Applied Mathematics, 2010, S. 202–221.
- [Ang+12a] Patrizio Angelini, Giuseppe Di Battista, Fabrizio Frati, Maurizio Patrignani und Ignaz Rutter. „Testing the simultaneous embeddability of two graphs whose intersection is a biconnected or a connected graph“. In: *Journal of Discrete Algorithms* 14 (2012), S. 150–172.
- [Ang+12b] Patrizio Angelini, Markus Geyer, Michael Kaufmann und Daniel Neuwirth. „On a Tree and a Path with no Geometric Simultaneous Embedding“. In: *Journal of Graph Algorithms and Applications* 16.1 (2012), S. 37–83.
- [BKR13] Thomas Bläsius, Stephan G. Kobourov und Ignaz Rutter. „Simultaneous Embedding of Planar Graphs“. In: *Handbook of Graph Drawing and Visualization*. Hrsg. von Roberto Tamassia. CRC Press, 2013, S. 349–381.
- [BKR14] Thomas Bläsius, Annette Karrer und Ignaz Rutter. „Simultaneous Embedding: Edge Orderings, Relative Positions, Cutvertices“. In: *Proceedings of the 21st International Symposium on Graph Drawing (GD’13)*. Lecture Notes in Computer Science. To appear. Springer, 2014.
- [BR13a] Thomas Bläsius und Ignaz Rutter. „Disconnectivity and Relative Positions in Simultaneous Embeddings“. In: *Graph Drawing*. Hrsg. von Walter Didimo und Maurizio Patrignani. Bd. 7704. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2013, S. 31–42.
- [BR13b] Thomas Bläsius und Ignaz Rutter. „Simultaneous PQ-Ordering with Applications to Constrained Embedding Problems“. In: *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2013*. Hrsg. von Sanjeev Khanna. Society for Industrial und Applied Mathematics, 2013, S. 1030–1043.
- [Bra+07] Peter Brass, Eowyn Cenek, Cristian A. Duncan u. a. „On simultaneous planar graph embeddings“. In: *Computational Geometry* 36.2 (2007), S. 117–130.
- [Die10] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. 4. Auflage. Graduate texts in mathematics ; 173. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [DL07] Emilio Di Giacomo und Giuseppe Liotta. „Simultaneous Embedding of Outerplanar Graphs, Paths, and Cycles“. In: *International Journal of Computational Geometry & Applications* 17.02 (2007), S. 139–160.

- [DT96a] Giuseppe Di Battista und Roberto Tamassia. „On-Line Maintenance of Triconnected Components with SPQR-Trees“. In: *Algorithmica* 15 (1996), S. 302–318.
- [DT96b] Giuseppe Di Battista und Roberto Tamassia. „On-line Planarity Testing“. In: *SIAM Journal on Computing* 25.5 (1996), S. 956–997.
- [EK05] Cesim Erten und Stephen G. Kobourov. „Simultaneous Embedding of Planar Graphs with Few Bends“. In: *Graph Drawing*. Hrsg. von János Pach. Bd. 3383. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2005, S. 195–205.
- [Eri10] Jeff Erickson. „Maximum flows and parametric shortest paths in planar graphs“. In: *Proceedings of the Twenty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2010*. Society for Industrial und Applied Mathematics, 2010, S. 794–804.
- [Fow+09] J. Joseph Fowler, Carsten Gutwenger, Michael Jünger, Petra Mutzel und Michael Schulz. „An SPQR-Tree Approach to Decide Special Cases of Simultaneous Embedding with Fixed Edges“. In: *Graph Drawing*. Hrsg. von Ioannis G. Tollis und Maurizio Patrignani. Bd. 5417. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2009, S. 157–168.
- [Fow+11] J. Joseph Fowler, Michael Jünger, Stephen G. Kobourov und Michael Schulz. „Characterizations of restricted pairs of planar graphs allowing simultaneous embedding with fixed edges“. In: *Computational Geometry* 44.8 (2011), S. 385–398.
- [Fra07] Fabrizio Frati. „Embedding Graphs Simultaneously with Fixed Edges“. In: *Graph Drawing*. Hrsg. von Michael Kaufmann und Dorothea Wagner. Bd. 4372. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2007, S. 108–113.
- [Gas+06] Elisabeth Gassner, Michael Jünger, Merijam Percan, Marcus Schaefer und Michael Schulz. „Simultaneous Graph Embeddings with Fixed Edges“. In: *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*. Hrsg. von Fedor V. Fomin. Bd. 4271. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2006, S. 325–335.
- [GKV09] Markus Geyer, Michael Kaufmann und Imrich Vrt’o. „Two trees which are self-intersecting when drawn simultaneously“. In: *Discrete Mathematics* 309.7 (2009), S. 1909–1916.
- [GM01] Carsten Gutwenger und Petra Mutzel. „A Linear Time Implementation of SPQR-Trees“. In: *Graph Drawing*. Hrsg. von Joe Marks. Bd. 1984. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2001, S. 77–90.
- [Han34] Chaim Chojnacki (Haim Hanani). „Über wesentlich unplättbare Kurven im dreidimensionalen Raume“. In: *Fundamenta Mathematicae* 23 (1934), S. 135–142.
- [HJL10] Bernhard Haeupler, Krishnam Raju Jampani und Anna Lubiw. „Testing Simultaneous Planarity When the Common Graph Is 2-Connected“. In: *Algorithms and Computation*. Hrsg. von Otfried Cheong, Kyung-Yong Chwa und Kunsoo Park. Bd. 6507. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2010, S. 410–421.
- [HT08] Bernhard Haeupler und Robert E. Tarjan. „Planarity Algorithms via PQ-Trees (Extended Abstract)“. In: *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 31 (2008). The International Conference on Topological and Geometric Graph Theory, S. 143–149.
- [HT74] John Hopcroft und Robert E. Tarjan. „Efficient Planarity Testing“. In: *Journal of the ACM* 21.4 (1974), S. 549–568.
- [JKR13] Vít Jelínek, Jan Kratochvíl und Ignaz Rutter. „A Kuratowski-type theorem for planarity of partially embedded graphs“. In: *Computational Geometry* 46.4 (2013). 27th Annual Symposium on Computational Geometry (SoCG 2011), S. 466–492.

- 
- [JS09] Michael Jünger und Michael Schulz. „Intersection Graphs in Simultaneous Embedding with Fixed Edges“. In: *Journal of Graph Algorithms and Applications* 13.2 (2009), S. 205–218.
- [Kur30] Kazimierz Kuratowski. „Sur le problème des courbes gauches en topologie“. In: *Fundamenta Mathematicae* 15 (1930), S. 271–283.
- [Men27] Karl Menger. „Zur allgemeinen Kurventheorie“. In: *Fundamenta Mathematicae* 10.1 (1927), S. 96–115.
- [MS08] Kurt Mehlhorn und Peter Sanders. *Algorithms and data structures : The basic toolbox*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [PW98] János Pach und Rephael Wenger. „Embedding Planar Graphs at Fixed Vertex Locations“. In: *Graph Drawing*. Hrsg. von Sue H. Whitesides. Bd. 1547. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 1998, S. 263–274.
- [Rut11] Ignaz Rutter. „The many faces of planarity : matching, augmentation, and embedding algorithms for planar graphs“. Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Diss. 2011.
- [Sch13] Marcus Schaefer. „Toward a Theory of Planarity: Hanani-Tutte and Planarity Variants“. In: *Graph Drawing*. Hrsg. von Walter Didimo und Maurizio Patrignani. Bd. 7704. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2013, S. 162–173.
- [Tut70] W. T. Tutte. „Toward a theory of crossing numbers“. In: *Journal of Combinatorial Theory* 8.1 (1970), S. 45–53.
- [Wag37] Klaus Wagner. „Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe“. In: *Mathematische Annalen* 114.1 (1937), S. 570–590.
- [Whi32] Hassler Whitney. „Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs“. In: *American Journal of Mathematics* 54.1 (1932), S. 150–168.