

Komplexitätsanalyse des Lawn Mowing Problems und verwandter Probleme

Bachelorarbeit von

Mirco Volk

an der Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Erstgutachter: Ueckerdt, Torsten
Zweitgutachter: Bläsius, Thomas
Betreuende Mitarbeiter: Paul Jungeblut

27.11.2022 – 27.03.2023

Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
Postfach 6980
76128 Karlsruhe

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Änderungen entnommen wurde. Ich versichere ebenfalls die *Satzung zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis am Karlsruher Institut für Technologie*. gelesen und befolgt zu haben.

Karlsruhe, 27.03.2023

.....
(Mirco Volk)

Zusammenfassung

Das **Lawn Mowing Problem (LMP)** stellt die Frage, ob es eine Tour der Länge kleiner oder gleich l gibt, die alle Punkte eines Polygons mäht. Ein Punkt p gilt als gemäht, wenn die Tour maximal den euklidischen Abstand 1 von p hat. Es ist bekannt, dass optimale Lösungen die Form von Streckenzügen haben: Also die Konkatination von Strecken an Knickpunkten sind. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass das immer noch wahr ist, wenn man für die Abstandsbestimmung die Unendlichkeitsnorm, statt der euklidischen Norm verwendet. Außerdem wird in dieser Arbeit das Lawn Mowing Problem mit Knicken (LMPK) eingeführt. Eine Abwandlung des klassischen LMP welches fragt, ob es einen Streckenzug gibt, der aus weniger als k Knicken besteht, der das Polygon mäht. Es wird gezeigt, dass sowohl das LMPK, als auch das klassische LMP in der Komplexitätsklasse $\exists\forall\mathbb{R}$ liegen.

Das **Watchman Route Problem (WRP)** stellt die Frage, ob es eine Tour in einem Polygon der Länge kleiner oder gleich l gibt, die ein Wachmann entlang laufen kann, so dass er alle Punkte des Polygons sieht. Für Polygone ohne Löcher gibt es Algorithmen, die die optimale Lösung in polynomieller Laufzeit bestimmen können. Es ist allerdings bekannt, dass dieses Problem für Polygone mit Löchern NP-Schwer ist. In dieser Arbeit wird das Watchman Route Problem mit Knicken (WRPK) eingeführt, welches die Frage stellt, ob es einen Streckenzug mit maximal k Knicken gibt, der das ganze Polygon sieht. Es wird gezeigt, dass sowohl das WRPK als auch das klassische WRP in $\exists\mathbb{R}$ liegen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Bibliographische Einordnung	7
2.1	Das Lawn Mowing Problem	7
2.2	Das Watchman Route Problem	7
2.3	Verwandte Probleme	8
2.4	Beitrag zur Forschung	8
3	Begriffsdefinitionen	9
3.1	Geometrische Grundlagen	9
3.2	Die Komplexitätstheorie	10
4	Das Lawn Mowing Problem	13
4.1	Die Verschiedenen Problemstellungen	13
4.2	Codierung der Eingabe	14
5	Das Lawn Mowing Problem gehört zu $\exists\forall\mathbb{R}$	17
5.1	Zerlegung des Polygons	17
5.2	Der Abstand zwischen einem Punkt und einer Strecke	19
5.3	Lawn Mowing Problem ist in $\exists\forall\mathbb{R}$	21
6	Änderung der Ausschneidefigur	25
6.1	Vorüberlegungen	25
6.2	Beobachtungen	25
6.2.1	Grundlegende Definitionen	25
6.3	Die optimale Lösung ist ein Streckenzug	27
7	Das Watchman Route Problem ist in $\exists\mathbb{R}$	31
7.1	Das Watchman Problem	31
7.2	Überblick	31
7.3	Einteilung des Streckenzugs in Teilstrecken	32
7.3.1	Komplexität der Einteilung in Teilstrecken	33
7.4	Unterteilung des Polygons	34
7.4.1	Unterteilung des Polygons in Gebiete	34
7.4.2	Eigenschaften von Gebieten	34
7.4.3	Komplexität der Einteilung in Gebiete	35
7.5	Unterteilung von Gebieten in Regionen	35
7.5.1	Unterteilung von Gebieten in Regionen	35
7.5.2	Komplexität der Einteilung in Regionen	37
7.6	Konstruktion einer endlichen Zeugenmenge	37
7.6.1	Es genügt einen Punkt einer Region zu überprüfen	37
7.6.2	Die Zeugenmenge	43

7.6.3	Strecke sieht Punkt	44
7.7	Das Watchman Problem ist in $\exists\mathbb{R}$	46
8	Fazit und Ausblick	49
	Literatur	51

1 Einleitung

Die effiziente Abdeckung einer Fläche ist eine wichtige Aufgabe in vielen praktischen Anwendungen. Ob in der Landwirtschaft, wo Traktoren ganze Felder ernten oder düngen müssen, in der Reinigungsindustrie, wo Putzroboter Etagen sauber halten, oder in der Produktion, wo Spraydosen Objekte mit Farbe besprühen müssen - die Frage nach dem kürzesten Weg, um eine Fläche abzudecken, ist von großer Bedeutung.

In der theoretischen Informatik gibt es ein Problem, welches diese Fragestellung formalisiert: Dieses ist bekannt als das **Lawn Mowing Problem**. Im Jahre 1987 wurde dieses Problem erstmals von Arkin et al. eingeführt. Man kann es sich wie folgt vorstellen:

Gegeben ist eine Grünfläche und eine Tankfüllung. Die Fragestellung ist dann, ob die Tankfüllung reicht, um die Grünfläche vollständig zu mähen.

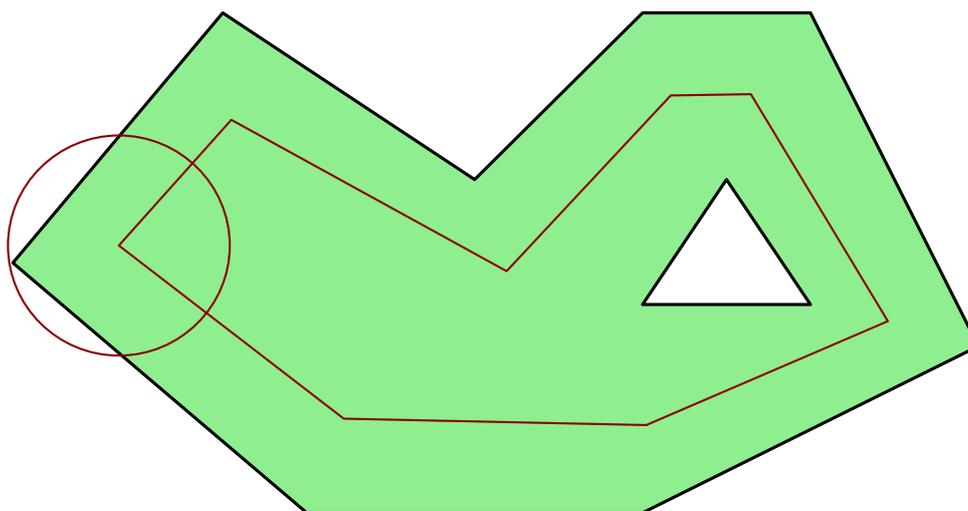


Abbildung 1.1: Dargestellt ist eine Grünfläche. Die rote Linie stellt eine Rasenmähertour da, welche ein Rasenmäher zurücklegt, um die gesamte Grünfläche zu mähen. Der rote Kreis stellt den Bereich dar, den der Rasenmäher an diesem Punkt mäht.

In Abbildung 1.1 ist in grün eine Grünfläche dargestellt. Diese gilt es zu mähen. Die rote Linie beschreibt eine Tour, die ein Rasenmäher entlang fahren kann, so dass die gesamte Grünfläche gemäht ist. Der rote Kreis entspricht dabei der Größe des Rasenmähers. Fährt der Rasenmäher also die rote Linie entlang, so bewegt sich der rote Kreis entlang der Tour und mäht jeden Punkt der Grünfläche mindestens einmal. Damit ein Punkt der Grünfläche also gemäht wird, muss er sich mindestens einmal in dem Mähkreis befinden. Hat der Kreis den Radius 1, so kann das LMP wie folgt interpretiert werden:

LAWN MOWING PROBLEM

Eingabe: Der Grundriss einer Grünfläche P und eine Längenbeschränkung l .

Frage: Gibt es einen Rundweg der Länge kleiner oder gleich l , den ein Rasenmäher entlang fahren kann, um die gesamte Grünfläche zu mähen. Ein Punkt p auf der Grünfläche gilt als gemäht, sofern der Rasenmäher auf seiner Tour maximal den euklidischen Abstand 1 von dem Punkt p hat.

Man kann die Längenbegrenzung wie einen Tank oder eine Batterie betrachten, die der Rasenmäher benötigt, um seine Arbeit zu verrichten. Dabei stellt sich die Frage, ob dieser Tank ausreicht, um den gesamten Rasen zu mähen. Für den Rasenmäher ist es unerheblich, ob es sich um eine zusammenhängende Grünfläche handelt oder diese sogar Löcher hat. Betrachte nun eine weiteres mal Abbildung 1.1. Man kann sich klar machen, dass die rote Linie dieser Abbildung eine Tour darstellt, die die ganze Grünfläche mäht, wenn man sie mit dem Rasenmäher entlang fährt. Für eine vollständige Lawn Mowing Instanz wird zusätzlich eine Längenbeschränkung l benötigt. Die Längenbeschränkung ist dabei die Analogie zum Tank des Rasenmähers. Ist diese Längenbeschränkung größer als der in Abbildung 1.1 zurückgelegte Weg (rote Strecke), so ist die Lawn Mowing Instanz, bestehend aus Polygon und l , eine JA-Instanz. Denn dann gibt es eine Tour, die die Frage des LMP mit Ja beantwortet. Ist die Längenbeschränkung l allerdings größer, als der in Abbildung 1.1 zurückgelegte Weg, so ist nicht direkt klar, ob diese Instanz eine JA-Instanz oder eine NEIN-Instanz des Problems ist. Es besteht die Möglichkeit, dass es eine valide Tour gibt, die kürzer als l ist. In diesem Fall handelt es sich um eine JA-Instanz. Gibt es keine Tour, die kleiner als l ist und den ganzen Rasen mäht, so handelt es sich um eine NEIN-Instanz.

Das Lawn Mowing Problem hat allerdings eine andere Fragestellung. Während in der Praxis häufig nach dem kürzesten Weg gefragt wird, wird beim LMP danach gefragt, ob es einen Weg gibt. Letzteres wird als Entscheidungsproblem bezeichnet, da hier nach einer JA/NEIN Antwort gefragt ist. Das Lawn Mowing Problem hat auch eine große theoretische Bedeutung. Es verallgemeinert das close-enough Traveling Salesman Problem: Gibt es eine Tour der Länge kleiner oder gleich l gibt, die in die Nähe von n Punkten im Raum kommt? Betrachtet man diese einzelnen Punkte als infinitesimale kleine Rasenflächen, so ist dieses Problem eine Teilmenge des Lawn Mowing Problems. Eine abgeänderte Version des Lawn Mowing Problems ist das **Watchman Route Problem**:

WATCHMAN ROUTE PROBLEM

Eingabe: Der Grundriss eines Museums P und eine Längenbeschränkung l .

Frage: Gibt es einen Rundgang der Länge kleiner oder gleich l durch das Museum, den ein Wachmann gehen kann, so dass der Wachmann entlang seinem Rundgang jeden Punkt in dem Museum mindestens einmal sieht.

In Abbildung 1.2 ist in blau der Grundriss eines Museums dargestellt. Die rote Linie stellt den Rundgang des Wachmanns dar. Dabei wird jeder Punkt des Museums mindestens einmal gesehen. Wie schon beim Lawn Mowing Problem benötigt man für eine vollständige Watchman Route Instanz noch eine Längenbeschränkung l . Abhängig von dieser ist der Grundriss des Museums zusammen mit der Längenbeschränkung eine JA-Instanz oder eine NEIN-Instanz.

Das Watchman Route Problem wurde erstmals von Chin und Ntafos in 1986 Jahreszahl eingeführt. Dort wurden verschiedene Versionen des Watchman Route Problems vorgestellt. Sie unterscheiden zwei Versionen, eine Version ohne Löcher im Grundriss und eine Version mit Löcher im Grundriss. Letztere stellen mögliche Ausstellungsstücke dar, die die Sicht des Wachmanns einschränken. In der Version ohne Löcher haben Chin und Ntafos direkt einen polynomiellen Algorithmus bestimmt, der die optimale Lösung berechnet. Dieser Algorithmus wurde über die Jahre stetig verbessert. Für die Watchman Route

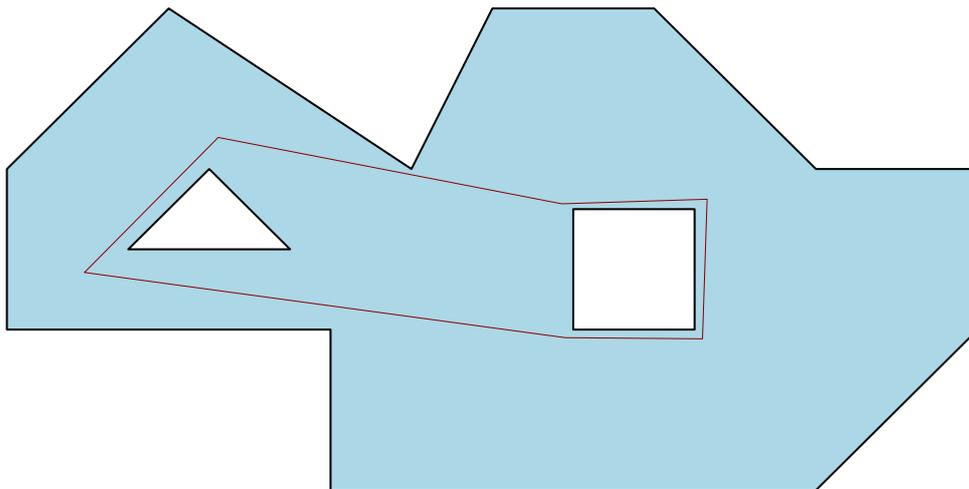


Abbildung 1.2: In hellblau sieht man den Grundriss eines Museums. Die rote Linie zeigt eine Tour durch das Museum, dass das ganze Museum sieht.

Version mit Löchern kann es so einen Algorithmus nicht geben, da diese NP-Schwer ist (für $P \neq NP$). Auch das Watchman Route Problem findet Anwendung in der Praxis, zum Beispiel beim 3D-Scan von Objekten. Hier handelt es sich wieder um ein Optimierungsproblem: Was ist der kürzeste Weg, den eine Kamera entlanglaufen muss, um ein Objekt vollständig zu scannen?

Das Lawn Mowing Problem und das Watchman Route Problem stellen den Schwerpunkt dieser Arbeit dar. Sie werden auf ihre Komplexität untersucht. Es wird gezeigt, dass sich das Lawn Mowing Problem in der Komplexitätsklasse $\exists\forall\mathbb{R}$ befindet (Kapitel 5) und das Watchman Route Problem in der Komplexitätsklasse $\exists\mathbb{R}$ (Kapitel 7). Diese beiden Komplexitätsklassen werden nachfolgend kurz vorgestellt und später genauer definiert.

Die Komplexitätsklasse $\exists\mathbb{R}$ wurde erstmals von Schaefer eingeführt und ist über das Problem EXISTENTIAL THEORY OF THE REALS (ETR) definiert. Dieses ist wie folgt definiert:

EXISTENTIAL THEORY OF THE REALS (ETR)

Eingabe: Eine Formel $\exists X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R} : F(X_1, X_2, \dots)$, bei der F aus Gleichungen und Ungleichungen besteht und diese mit logischen Operatoren verbunden sind.

Frage: Existieren $X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R}$, sodass $F(X_1, X_2, \dots)$ als wahr ausgewertet wird.

Um dieses Problem genau zu verstehen, werden im Folgenden zwei Instanzen des Problems gezeigt. Eine Instanz dieses Problems ist folgende Formel:

$$\exists x, y, z \in \mathbb{R} : x + y = 5 \wedge x \cdot z < y,$$

Das Entscheidungsproblem ETR fragt also, ob diese Formel wahr oder falsch ist. Da die Variablenbelegung $x = 1, y = 4, z = 1$ den Term $x + y = 5 \wedge x \cdot z < y$ zu wahr auswertet, ist diese Instanz des Problems wahr. Eine weitere Instanz des Problems ist die Folgende:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x = 5 \wedge x = 10$$

Diese ist offensichtlich falsch, da $x = 5 \wedge x = 10$ direkt zu einem Widerspruch führt und somit keine reelle Zahl x existiert, die die Formel $x = 5 \wedge x = 10$ zu wahr auswertet.

Über dieses Entscheidungsproblem wird nun die Komplexitätsklasse $\exists\mathbb{R}$ definiert: Nämlich gerade alle Probleme, die sich in polynomieller Zeit auf dieses Problem reduzieren lassen.

Man sieht eine Ähnlichkeit zur Komplexitätsklasse NP. Diese wird über das Problem SAT definiert. Das Problem SAT ist ähnlich zu ETR definiert: Auch dort ist eine Formel aus Klauseln gegeben, die über logische Operatoren miteinander verbunden sind. Der entscheidende Unterschied ist, dass jede Variable aus SAT nur den Wert 0 oder 1 annehmen darf, während bei ETR jede Variable Werte aus \mathbb{R} annehmen darf. Man kann also sagen, dass $\exists\mathbb{R}$ das reelle Äquivalent zu NP ist und ETR das reelle Äquivalent zu SAT ist. Die Klasse $\exists\mathbb{R}$ wurde in den letzten Jahren immer bedeutender. Für immer mehr Probleme wurde $\exists\mathbb{R}$ -Vollständigkeit gezeigt. Dies waren hauptsächlich geometrische Probleme. Eines der bekanntesten Probleme ist das Art Gallery Problem. Bei diesem sind die Grundfläche eines Museums und k Wachmänner gegeben. Das Art Gallery Problem fragt, ob man diese Wachmänner in dem Museum stationär so platzieren kann, dass jeder Punkt des Museums von mindestens einem Wachmann gesehen wird. In der theoretischen Informatik ist es schon sehr lange ein wichtiges Problem. Es wird seit geraumer Zeit als NP-Schwer klassifiziert. Nun wurde gezeigt, dass dieses Problem sogar $\exists\mathbb{R}$ vollständig ist.

Die Komplexitätsklasse $\exists\mathbb{R}$ wird für das Watchman Route Problem von Bedeutung sein. Für das Lawn Mowing Problem wird die Komplexitätsklasse $\exists\forall\mathbb{R}$ untersucht. Letztere ist fast analog zu $\exists\mathbb{R}$ definiert. Bei beiden Komplexitätsklassen wird zunächst ein Problem betrachtet, welches diese dann definiert. Das Problem, welches die Komplexitätsklasse $\exists\forall\mathbb{R}$ definiert trägt den Namen **Existential Universal Theory of the Reals (EUTR)**. Dieses ist wie folgt definiert:

EXISTENTIAL UNIVERSAL THEORY OF THE REALS

Eingabe: Eine Formel $\exists X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R}. \forall Y_1, Y_2, \dots \in \mathbb{R} : F(X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots)$, bei der F aus Gleichungen und Ungleichungen besteht, die mit logischen Operatoren verbunden sind.
Frage: Existieren X_1, X_2, \dots , sodass die Formel F für alle Y_1, Y_2, \dots wahr ist.

Ein Beispiel eine EUTR Instanz ist die folgende Formel:

$$\exists x, y \in \mathbb{R}. \forall a \in \mathbb{R} : x + y > a \vee x - y \leq a$$

Um nun zu entscheiden, ob diese Instanz eine JA-Instanz oder eine NEIN-Instanz ist, muss überprüft werden, ob diese Formel wahr oder falsch ist. Man kann sich klar machen, dass die Variablenbelegung $x = 0$ und $y = 0$ die Formel $\forall a \in \mathbb{R} : x + y > a \vee x - y \leq a$ zu wahr auswertet. Denn dann ist die Formel gerade:

$$\forall a \in \mathbb{R} : 0 + 0 > a \vee 0 - 0 \leq a$$

Da die Aussage $0 + 0 > a \vee 0 - 0 \leq a$ für alle a wahr ist, ist diese Instanz eine JA-Instanz.

Ziel dieser Arbeit ist es nun zu zeigen, dass das Lawn Mowing Problem in der Klasse $\exists\forall\mathbb{R}$ und das Watchman Route Problem in der Klasse $\exists\mathbb{R}$ liegt. Dafür wird in Kapitel 2 ein Überblick über den Stand der Forschung gegeben. Es wird auf das Watchman Route Problem und das Lawn Mowing Problem sowie auf die beiden Komplexitätsklasse $\exists\mathbb{R}$ eingegangen. Anschließend werden in Kapitel 3 allgemeine Begriffe erläutert, die in dieser Arbeit verwendet werden. Dort werden insbesondere die Komplexitätsklassen $\exists\mathbb{R}$ und $\exists\forall\mathbb{R}$ formal eingeführt. In Kapitel 4 wird dann das Lawn Mowing Problem sowie eine abgewandelte Version des Lawn Mowing Problems, nämlich das Lawn Mowing Problem mit Knicken, eingeführt. Die Kodierung der Instanzen wird dort außerdem definiert. Es wird dann in Kapitel 5 gezeigt, dass sowohl

das Lawn Mowing Problem, als auch das Lawn Mowing Problem mit Knicken zur Klasse $\exists\forall\mathbb{R}$ gehören. Kapitel 6 untersucht die Auswirkungen auf das Lawn Mowing Problem, wenn man den Abstandsbegriff verändert. Es wird gezeigt, dass optimale Lösungen trotzdem noch die Form eines Streckenzugs haben. Zum Schluss wird dann noch das Watchman Route Problem untersucht. Auch für dieses wird das Watchman Route Problem mit Knicken eingeführt, welches eine Abwandlung des Watchman Route Problems ist. Für beide diese Probleme wird gezeigt, dass sie sich in $\exists\mathbb{R}$ befinden.

2 Bibliographische Einordnung

2.1 Das Lawn Mowing Problem

Das Lawn Mowing Problem wurde erstmals von Arkin et al. im Journal Computational Geometry eingeführt [MPS93]. In „Approximation algorithms for lawn mowing and milling“ stellten Arkin et al. den aktuell besten Approximationsalgorithmus vor [AFM00]. Dabei wird das Polygon mit Kreisen mit dem Radius 1 überdeckt. Anschließend werden die Mittelpunkte dieser Kreise betrachtet und mittels dem Traveling Salesman Problem der kürzeste Weg zwischen den Mittelpunkten bestimmt. Dieser Algorithmus kann dann in polynomieller Zeit eine Lösung finden, die maximal $2\sqrt{3}\alpha_{TSP}$ mal so lang ist wie die optimale Lösung. Dabei bezeichnet α_{TSP} die Gütegarantie für den Traveling Salesman Algorithmus. Für das Traveling Salesman Problem gibt es für jedes ϵ einen polynomiellen Approximationsalgorithmus mit einer Gütegarantie von $1 + \epsilon$. Der Approximationsalgorithmus für das Lawn Mowing Problem hat also in der Theorie eine Gütegarantie von $2\sqrt{3} + \epsilon$, findet in der Praxis allerdings keine Anwendung.

Arkin et al. führen außerdem das Milling Problem ein: Eine Abwandlung des Lawn Mowing Problems, bei welchem die Mähfigur das Polygon nicht verlassen darf [AFM00]. Für das Milling Problem wird ein Approximationsalgorithmus vorgestellt, der eine Gütegarantie von 2,5 hat. Sowohl für das Lawn Mowing Problem als auch für das Milling Problem wird gezeigt, dass diese NP-Schwer sind.

In „A Closer Cut: Computing Near-Optimal Lawn Mowing Tours“ werden optimale Lösungen des Lawn Mowing Problems untersucht [Fek+22]. Dabei wird gezeigt, dass optimale Lösungen des Lawn Mowing Problems keine Kurven haben können. Das heißt, sie bestehen aus einer Konkatination von Strecken stellen somit einen Streckenzug dar. Weiter wird gezeigt, dass die Anzahl an Strecken nur polynomiell mit der Eingabegröße wachsen kann. Es wird außerdem gezeigt, dass selbst bei einfachen Polygonen der Punkt, an dem zwei Strecken konkatinert werden, auf einer irrationalen Koordinate liegen kann.

In „Circling a Square: The Lawn Mowing Problem Is Algebraically Hard“ werden die möglichen Lösungen noch weiter eingeschränkt. Es wird ein 4×4 Quadrat betrachtet und die optimale Lösung untersucht. Dann wird gezeigt, dass die optimale Lösung Punkte besitzt, die nicht mit elementaren arithmetischen Operationen über dem Körper \mathbb{Q} darstellbar sind. Die Konsequenz daraus ist, dass ein Computer diese Lösung nicht mit den Termen $\{+, -, \cdot, \setminus, \sqrt{\cdot}\}$ über dem Körper \mathbb{Q} darstellen kann.

2.2 Das Watchman Route Problem

Das Watchman Problem wurde erstmals von Chin und Ntafos im Jahr 1986 untersucht [CN86]. Dort wird gezeigt, dass das Watchman Problem für Polygone mit Löchern NP-schwer ist. Dieser Beweis war allerdings nicht vollständig und wurde dann von Dumitrescu vervollständigt [DT12]. Für einfache Polygone ohne Löcher gibt es bereits zahlreiche Algorithmen, deren Laufzeit polynomiell ist [Mit13]. Der aktuell beste Algorithmus für das Watchman Route Problem, bei dem ein Startpunkt vorgegeben

ist, hat eine Laufzeit von $O(n^3 \cdot \log n)$. Für das Watchman Problem ohne vorgegebenen Punkt ist die beste Laufzeit $O(n^4 \cdot \log n)$ [DELM03]. Es wurden wie beim Lawn Mowing Problem optimale untersucht. Auch beim WRP hat die optimale Lösung die Form eines Streckenzugs [Mit13].

Es ist bekannt, dass die Inklusionen $NP \subseteq \exists\mathbb{R} \subseteq PSPACE$ gelten. Man kann leicht zeigen, dass $NP \subseteq \exists\mathbb{R}$ gilt. Die Inklusion $\exists\mathbb{R} \subseteq PSPACE$ ist jedoch deutlich schwerer zu zeigen. Sie wurde von Canny im Jahr 1988 bewiesen [Can88]. In „The Art Gallery Problem is $\exists\mathbb{R}$ -complete“ wird außerdem das Problem ETR-INV eingeführt. Dieses ist eine leichte Abwandlung von ETR, die jedoch immer noch $\exists\mathbb{R}$ -vollständig ist. Dabei hat die aussagenlogische Formel eine einfachere Form, die es erleichtert, für ein Problem $\exists\mathbb{R}$ -Schwere zu zeigen.

2.3 Verwandte Probleme

Das **Close Enough Traveling Salesman Problem (CETSP)**: Das CETSP ist eine Verallgemeinerung des Traveling Salesman Problems. Dort muss man jeden Knoten oder jede Stadt nicht mehr direkt besuchen, sondern man muss lediglich in die Nähe kommen. Dieser Algorithmus wird für eine heuristische Approximation des Lawn Mowing Problems genutzt [Fek+22]. Das **Art Gallery Problem** stellt die Frage, wie viele Wachmänner in einem Museum platziert werden müssen, damit das ganze Museum gesehen wird. Es war lange bekannt, dass das Art Gallery Problem NP-schwer ist. In „The Art Gallery Problem is $\exists\mathbb{R}$ -complete“ wird gezeigt, dass es $\exists\mathbb{R}$ -vollständig ist.

2.4 Beitrag zur Forschung

Da bekannt ist, dass sowohl für das Lawn Mowing Problem, als auch für das Watchman Route Problem optimale Lösungen die Form eines Streckenzugs besitzen, wird für beide Probleme eine Version mit Knicken eingeführt (LMPK und WRPK). Es wird gezeigt, dass sich das LMP und das LMPK in $\exists\forall\mathbb{R}$ befinden. Außerdem wird eine modifizierte Version des Lawn Mowing Problems betrachtet, bei der für den Abstandsbegriff die Unendlichkeitsnorm verwendet wird. Das entspricht der Mähfigur eines Quadrats. Es wird gezeigt, dass selbst in diesem Fall optimale Lösungen stets Streckenzüge sind. Es wird weiter gezeigt, dass sich das WRP und das WRPK in $\exists\mathbb{R}$ befinden.

3 Begriffsdefinitionen

Dieses Kapitel dient dazu, ein gemeinsames Verständnis für die verwendeten Begriffe zu schaffen und Missverständnisse zu vermeiden. Daher werden die zentralen Begriffe in diesem Kapitel klar und präzise definiert und gegebenenfalls voneinander abgegrenzt.

3.1 Geometrische Grundlagen

Da sowohl das Lawn Mowing Problem, als auch das Watchman Route Problem geometrische Probleme sind, werden hier nochmal kurz alle verwendeten Definitionen beziehungsweise Abkürzungen erläutert. Ein Begriff der schon in der Einleitung verwendet wurde, ist der Weg. Formal sei dieser wie folgt definiert:

Definition 3.1: Ein **Weg** ist eine stetige Abbildung von einem reellen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in den \mathbb{R}^n .

Da in dieser Arbeit stets Polygone im \mathbb{R}^2 betrachtet werden, wird die Zielmenge der \mathbb{R}^2 sein.

In dieser Arbeit werden sowohl das Lawn Mowing Problem, als auch das Watchman Route Problem so definiert, dass der gesuchte Weg ein Rundweg sein soll. Also dass der Weg dort endet, wo er anfängt. Ein solcher Weg wird in dieser Arbeit **Tour** genannt. Formal heißt das:

Definition 3.2: Eine **Tour** $t : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $I = [a, b]$ ist ein Weg für den $t(a) = t(b)$ gilt.

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte im Raum wird Strecke genannt.

Definition 3.3: Sei $a, b \in \mathbb{R}^2$. Die **Strecke** ab zwischen diesen beiden Punkten ist definiert als folgende Menge:

$$ab = \{a + t \cdot (b - a) : t \in [0, 1]\}$$

Dabei ist a der **Startpunkt** von ab und b der **Endpunkt** von ab . Die eindeutige Gerade, die durch die Punkte a und b geht, wird mit \overline{ab} abgekürzt. Die Konkatination mehrerer Strecken sei wie folgt definiert:

Definition 3.4: Seien $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^2$. Ein **Streckenzug** der Punkte p_1, p_2, \dots, p_k mit $p_1 = p_k$ ist definiert als folgende Menge:

$$p_1 p_2 \dots p_k = \bigcup_{i=1}^{k-1} p_i p_{i+1}$$

Anschaulich ist das gerade die Konkatination der Strecken $p_i p_{i+1}$ mit $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Die Punkte $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ werden außerdem als **Knickpunkte** des Streckenzugs $p_1 p_2 \dots p_k$ bezeichnet.

Die Begriffe Weg und Tour wurden hier als Abbildung definiert und die Begriffe Strecke und Streckenzug als Menge von Punkten. Diese Definitionen wurden so gewählt, da diese anschaulich und intuitiv sind. In dieser Arbeit wird allerdings ein Weg beziehungsweise eine Tour manchmal auch als Menge interpretiert. Damit ist dann gerade die Bildmenge der Abbildung gemeint. Analog wird eine Strecke beziehungsweise ein Streckenzug als Abbildung interpretiert. Es ist klar, dass eine stetige Abbildung existiert, deren Bildmenge die Strecke ist. In diesem Sinne ist also eine Strecke ein Weg und ein Streckenzug ist eine Tour.

Im Verlauf dieser Arbeit werden für das Lawn Mowing Problem und das Watchman Route Problem die Begriffe valide und optimal verwendet, um eine Tour zu beschreiben. Eine Tour ist genau dann **valide**, wenn sie, mit Ausnahme der Längenvorgabe, das Problem erfüllt. Im Fall des Lawn Mowing Problems ist eine Tour valide, wenn das gesamte Polygon gemäht wird und im Fall des Watchman Problems, wenn das gesamte Polygon gesehen wird. Bei Abwandlungen dieser Probleme werden die Begriffe analog definiert. Eine Tour ist genau dann **optimal**, wenn sie die kürzest mögliche valide Tour ist.

3.2 Die Komplexitätstheorie

Die Komplexitätstheorie ist ein Teilgebiet der Informatik, die sich damit beschäftigt, die Ressourcenkomplexität zu untersuchen, die benötigt wird, um Probleme zu lösen. Dabei wird untersucht, wie sich das Laufzeitverhalten mit steigender Eingabegröße verhält. Probleme mit gleichem Laufzeitverhalten werden in gleiche Klassen eingeteilt. Die beiden bekanntesten Klassen sind P und NP. In P befinden sich alle Probleme, deren Lösung in polynomiell vielen Arbeitsschritten gefunden werden kann. In NP befinden sich alle Probleme, deren Lösung in polynomieller Zeit verifiziert werden kann. In der Einleitung wurden die Klasse $\exists\mathbb{R}$ und deren Konstruktion kurz motiviert. Diese sollen nun formal eingeführt werden. Um dies zu tun, wird zunächst die Menge ETR definiert.

Definition 3.5: Mit ETR wird die Menge aller wahren Aussagen der Form

$$\exists X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R} : F(X_1, \dots, X_n) \quad (3.1)$$

bezeichnet, wobei $F(X_1, \dots, X_n)$ eine all- und existenzquantorfreie Formel ist, in der Gleichungen und Ungleichungen von Polynomen mit Koeffizienten aus \mathbb{Q} vorkommen können.

Diese Menge induziert ein Membership-Problem, welches ebenfalls ETR genannt wird. Dieses wurde in der Einleitung formuliert. Dieses Membership-Problem stellt die Frage, ob eine gegebene Aussage der Form (3.1) in dieser Menge liegt. Also ob die Aussage wahr ist. Über dieses Problem wird nun die Komplexitätsklasse $\exists\mathbb{R}$ definiert.

Definition 3.6: Die Komplexitätsklasse $\exists\mathbb{R}$ ist die Menge aller Probleme, die sich in polynomieller Zeit auf das Membership-Problem ETR reduzieren lassen.

Analog zu der Menge ETR, dessen Membership-Problem und der daraus entstehenden Komplexitätsklasse $\exists\mathbb{R}$, lässt sich die Komplexitätsklasse $\exists\forall\mathbb{R}$ definieren.

Definition 3.7: Mit EUTR wird die Menge aller wahren Aussagen der Form

$$\exists X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}. \forall Y_1, Y_2, \dots, Y_m \in \mathbb{R} : F(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m) \quad (3.2)$$

bezeichnet, wobei $F(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ eine all- und existenzquantorfreie Formel ist, in der Gleichungen und Ungleichungen von Polynomen mit Koeffizienten aus \mathbb{Q} vorkommen können.

Analog wird auch hier das entsprechende Membership-Problem mit EUTR bezeichnet.

Definition 3.8: Die Komplexitätsklasse $\exists\forall\mathbb{R}$ ist die Menge aller Probleme, die sich in polynomieller Zeit auf das Membership-Problem EUTR reduzieren lassen.

Ein weiteres wichtige Konzept ist das der **Zeugenmenge**. Ein Problem, welches später auftreten wird, ist das Überprüfen von überabzählbar vielen Punkten. Damit ist folgendes gemeint: Betrachte dafür das Watchman Route Problem. Um zu überprüfen, ob eine Tour valide ist und somit das ganze Museum sieht, müsste man für jeden einzelnen Punkt im Museum überprüfen, ob er von der Tour gesehen wird.

Man kann zwar für einen Punkt in polynomiell vielen Schritten überprüfen, ob dieser von der Tour gesehen wird, muss man aber nun für überabzählbar viele Punkte überprüfen ob sie von der Tour gesehen werden, so ist das nicht mehr in endlich vielen Schritten möglich. Dafür ist eine Zeugenmenge hilfreich. Diese wird wie folgt definiert:

Definition 3.9: Ist P eine Menge und A eine Aussage, die für alle $p \in P$ ausgewertet werden kann. Eine Menge $Z \subset P$ ist eine **Zeugenmenge**, wenn sie folgende Eigenschaft hat:

$$\forall z \in Z : A(z) \Leftrightarrow \forall p \in P : A(p)$$

4 Das Lawn Mowing Problem

Das Lawn Mowing Problem wurde bereits in der Einleitung definiert. In diesem Kapitel werden veränderte Versionen des LMP eingeführt, die einfacher zu untersuchen ist. In der Einleitung wurde das Lawn Mowing Problem wie folgt definiert:

LMP

Eingabe: Ein Polygon P und ein $l \in \mathbb{Q}$

Frage: Gibt es eine Tour der Länge kleiner oder gleich l , sodass jeder Punkt des Polygons zu einem Zeitpunkt den euklidischen Abstand kleiner oder gleich 1 von der Tour hat.

Der euklidische Abstand von kleiner gleich 1 entspricht gerade der **Ausschneidefigur** des Kreises.

4.1 Die Verschiedenen Problemstellungen

In der Einleitung wurde das Lawn Mowing Problem mit dem Kreis als Mähfigur vorgestellt. Eine andere Fragestellung ergibt sich, wenn man diese Mähfigur ändert. Beispielsweise könnte man die Problemstellung so modifizieren, dass nicht mehr der Kreis als Ausschneidefigur betrachtet wird, sondern beliebige Polygone. Diese Polygone könnten sogar Löcher aufweisen und müssten nicht einmal zusammenhängend sein. In dieser Arbeit werden jedoch lediglich Ausschneidefiguren betrachtet, die wie folgt definiert sind:

Definition 4.1: Eine Figur ist eine zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^2 , die keine Löcher besitzt.

Ändert man die Ausschneidefigur, so kann das Problem im allgemeinen nicht mehr über den euklidischen Abstand definiert werden. Der Kreis hat die Eigenschaft, dass er unabhängig von seiner Orientierung die gleiche Fläche abdeckt. Im Allgemeinen ist das nicht der Fall. Ist die Ausschneidefigur beispielsweise ein Quadrat, so wird eine andere Fläche abgedeckt, wenn dieses Quadrat leicht gedreht wird. In der folgenden Definition des Lawn Mowing Problems wird keine Rotation zugelassen. Das heißt die Orientierung der Ausschneidefigur bleibt immer gleich. Eine hilfreiche Definition ist die Minkowski Summe. Diese ist wie folgt definiert:

Definition 4.2: Sei $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Die **Minkowski Summe** \oplus sei wie folgt definiert:

$$A \oplus B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und w ein Weg mit $w : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann sei die Minkowski Summe:

$$A \oplus w := w \oplus A := A \oplus w(I)$$

Die Minkowski Summe hilft also die gemähte Fläche zu beschreiben. Denn wenn man wissen möchte, welche Fläche eine Figur F an einem Punkt p mäht, so beschreibt Die Minkowski Summe $F \oplus p$ gerade die gemähte Fläche.

Damit kann nun eine allgemeinere Version des Lawn Mowing Problems untersucht werden.

LMP_F

Eingabe: Ein Polygon P und ein $l \in \mathbb{Q}$

Frage: Existiert eine Tour T in \mathbb{R}^2 der Länge kleiner oder gleich l , für die gilt: $T \otimes F \supseteq P$

Dabei beschreibt $T \otimes F$ die Fläche, die gemäht wird, wenn die Ausschneidefigur die Tour entlang fährt.

Eine spezielle Figur, die später in dieser Arbeit genauer untersucht wird, ist das Quadrat. Ist nun Q das Quadrat

$$Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq x, y \leq \frac{1}{2}\},$$

so ist LMP_Q gerade die Frage: Existiert eine Tour T in \mathbb{R}^2 der Länge kleiner oder gleich l mit dem Quadrat Q als Ausschneidefigur, für die gilt:

$$w \otimes Q \supseteq P$$

Das LMP_Q kann nun wie folgt interpretiert werden: Gibt es eine Tour T der Länge kleiner oder gleich l , so dass es für jeden Punkt p des Polygons einen Punkt t auf der Tour gibt, so dass $\|p - t\|_\infty$ kleiner oder gleich l ist. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die Unendlichkeitsnorm.

Ist weiter S der Kreis

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

so ist LMP_S das bisher definierte Lawn Mowing Problem.

Da man bereits weiß, dass optimale Lösungen die Form eines Streckenzugs haben, kann man die Problemstellung auch so ändern, dass man nicht mehr nach einer Tour mit einer kürzeren Länge fragt, sondern dass man Streckenzüge betrachtet und nach der Anzahl an Knicken fragt. Diese abgeänderte Fragestellung wird das **Lawn Mowing Problem mit Knicken (LMPK)** genannt.

LMPK_F

Eingabe: Ein Polygon P und ein $k \in \mathbb{N}$

Frage: Existiert ein Streckenzug, der maximal k Knickpunkte hat, sodass gilt: $w \otimes F \supseteq P$

Ist F im LMP_F nicht näher spezifiziert, so wird von dem Kreis ausgegangen.

4.2 Codierung der Eingabe

Ein Ziel dieser Arbeit wird es sein, Aussagen über die Komplexität dieser Probleme zu treffen. Diese hängen natürlich von der Eingabe und dessen Kodierung ab. Bisher wurde als Eingabe einfach ein Polygon angegeben. Da das überabzählbar viele Punkte sind, muss das Polygon so eingegeben werden, dass es nur endlich viele Punkte sind. Da jedes Polygon eindeutig über seine Eckpunkte definiert ist, wird dies wie folgt gemacht. Sei P ein Polgon und

$$V(P) := \{p \in \mathbb{Q}^2 : p \text{ ist Eckpunkt von } P\}$$

die Eckpunkte des Polygons. Die Eckpunkte dürfen natürlich auch nur eine endliche Länge haben. Es dürfen also keine irrationalen Zahlen sein, da diese schließlich als Eingabeparameter eingegeben werden müssen und die Eingabe endlich sein muss. Das heißt, die Eckpunkte müssen rationale Zahlen sein. Da die Menge $V(P)$ endlich ist, können diese nummeriert werden. Diese sollen mit p_1, \dots, p_n gegen den Uhrzeigersinn nummeriert werden. Ein Polygon darf auch Löcher haben und muss nicht einmal zusammenhängend sein. All diese Punkte sind in $V(P)$.

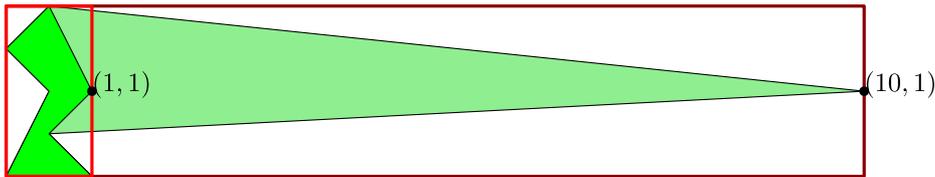


Abbildung 4.1: Diese Grafik zeigt, wie sich die Änderung einer Koordinate auf den Flächeninhalt des umschließenden Rechtecks auswirken kann. In hellgrün sieht man das ursprüngliche Polygon und in dunkelgrün das veränderte Polygon. Dabei wurde die Koordinate $(1, 1)$ zu der Koordinate $(10, 1)$ verändert. In rot sieht man umschließende Rechteck des ursprünglichen Polygons und in dunkelrot sieht man das umschließende Rechteck des veränderten Polygons.

Nun könnte man alle Punkte von $V(P)$ als Eingabeparameter wählen und hätte so das Polygon kodiert. Das bringt allerdings ein Problem mit sich, welches auf den ersten Blick nicht ersichtlich ist. Um dieses Problem zu zeigen seien o.B.d.A für $p = (p_x, p_y) \in V(P)$ alle p_x und p_y größer oder gleich 0. Betrachte nun ein Rechteck, mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(B_x, 0)$, $(0, B_y)$ und (B_x, B_y) , welches das Polygon P ganz einschließt. Man kann sich nun klar machen, dass folgendes $B = (B_x, B_y)$ ein solches Rechteck darstellt:

$$B_x := \max_{(p_x, p_y) \in V(P)} \{p_x\}$$

$$B_y := \max_{(p_x, p_y) \in V(P)} \{p_y\}$$

Der 2-Tupel B hat also gerade die maximale x -Koordinate aller Eckpunkte und die maximale y -Koordinate aller Eckpunkte. Dieses Rechteck hat nun allerdings eine Eigenschaft, die nicht erwünscht ist: Wird die Eingabe des Eckpunktes mit maximalem x -Wert um eine Stelle länger, so wird B_x um einen Faktor 10 größer. Das heißt, während die Eingabe linear erhöht wird, wächst dieses Rechteck exponentiell. Siehe dazu Abbildung 4.1. In dieser Abbildung sieht man das ursprüngliche Polygon in hellgrün und das modifizierte Polygon in dunkelgrün. Während die Eingabegröße nur um 1 größer wurde, da lediglich die Zahl 1 zur Zahl 10 wurde, wurde der Flächeninhalt um die Größenordnung 10 größer. Das zugrundeliegende Phänomen, welches diese Eigenschaft hervorbringt, ist dass die Eckpunkte in Basis 10 kodiert sind. Erhöht man diese um eine Stelle, so ändert sich der Wert um das 10 Fache (es ist nur das 10-Fache, wenn man eine 0 hinten dran hängt).

Diese Eigenschaft ist sehr hinderlich und kann wie folgt vermieden werden: Zusätzlich zu den Eckpunkten $V(P)$, wird der 2-Tupel B mit eingegeben. Dieser ist allerdings unär codiert. Wird dann die Koordinate mit der maximalen x -Koordinate um eine Stelle erhöht, so passiert folgendes: Es wächst sowohl B um einen Faktor 10 und der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Koordinaten $(0, 0)$, $(B_x, 0)$, $(0, B_y)$ und (B_x, B_y) wächst um den Faktor 10.

Dieses Problem kann außerdem mit der Längenbeschränkung bzw. der Knickbeschränkung auftreten. Deshalb wird auch diese unär kodiert.

Zusammenfassend sind also die beiden Probleme wie folgt definiert:

Das Lawn Mowing Problem bezüglich der Anzahl an Knicken:

LMPK_F

Eingabe: Die Eckpunkte $V(P)$, welche in Basis 10 kodiert sind, die Konstante B , sowie welche unär kodiert ist und $k \in \mathbb{N}$, welches die Beschränkung an Knicken angibt. Diese Beschränkung ist ebenfalls unär kodiert.

Frage: Existiert ein Streckenzug, der maximal k Knickpunkte hat, sodass gilt: $T \otimes F \supseteq P$

Das klassische Lawn Mowing Problem bezüglich der Länge:

LMP_F

Eingabe: Die Eckpunkte $V(P)$, welche in Basis 10 kodiert sind, die Konstante B , welche unär kodiert ist und $l \in \mathbb{Q}$, welches die Beschränkung an Knicken angibt. Diese Beschränkung ist ebenfalls unär kodiert.

Frage: Existiert eine Tour T in \mathbb{R}^2 der Länge kleiner oder gleich l , für die gilt: $T \otimes F \supseteq P$

In den folgenden Kapiteln wird diese Kodierung der Übersicht halber weggelassen.

5 Das Lawn Mowing Problem gehört zu $\exists\forall\mathbb{R}$

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass das LMPK zur Komplexitätsklasse $\exists\forall\mathbb{R}$ gehört. Um dies zu erreichen, wird eine beliebige Instanz des LMPK betrachtet. Es werden dann abhängig von dieser Instanz Prädikate gebildet, die nur aus Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen mit Koeffizienten aus \mathbb{Q} bestehen, die über logische Operatoren miteinander Verbunden sind. Die Konstruktion jedes Prädikats wird so gemacht, dass es lediglich polynomiell lang bezüglich der Eingabe ist. Diese Prädikate „überprüfen“ Eigenschaften der Eingabe. Durch Zusammenhängen dieser Prädikate entsteht dann am Ende eine ETR Instanz, welche genau dann wahr ist, falls die LMPK Instanz wahr ist.

5.1 Zerlegung des Polygons

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ nicht kollineare Punkte. Da diese nicht kollinear sind, spannen sie ein Dreieck auf. Für Punkte in diesem Dreieck gilt das folgende Lemma:

Lemma 5.1: Sei $p \in \mathbb{R}^2$ und $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ nicht kollineare Punkte. Dann befindet sich der Punkt p in dem Dreieck aus a, b und c oder auf dem Rand des Dreiecks genau dann, wenn folgendes gilt:

$$\exists s, t \in [0, 1] : (p = a + s \cdot (b - a) + t \cdot (c - a)) \wedge (s + t \leq 1) \quad (5.1)$$

Beweis. Da nach Voraussetzung a, b und c ein Dreieck bilden, sind die Punkte a, b und c nicht kollinear. Daraus folgt direkt, dass die Vektoren $b - a$ und $c - a$ linear unabhängig sind und somit eine Basis des \mathbb{R}^2 bilden. Das heißt, dass das lineare Gleichungssystem

$$p = a + s \cdot (b - a) + t \cdot (c - a)$$

genau eine Lösung besitzt. Die Linearfaktoren s und t geben dann gerade die Koordinaten des Punktes p in den Basisvektoren $(b - a)$ und $(c - a)$ mit dem Ursprung am Punkt a an. In der Darstellung der neuen Basisvektoren und mit dem neuen Ursprung an der Stelle a , befindet sich das Dreieck an den neuen Punkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Um dann zu Prüfen, ob der Punkt p in dem Dreieck ist, muss überprüft werden, ob $s, t \in [0, 1]$ und $(s + t \leq 1)$. In Abbildung 5.1 ist dieser Basiswechsel dargestellt. ■

Das heißt, ein Dreieck kann wie folgt definiert werden:

Definition 5.2: Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ nicht kollineare Punkte. Dann ist das Dreieck $\Delta(a, b, c)$ aus diesen Punkten definiert als:

$$\Delta(a, b, c) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p = a + s \cdot (b - a) + t \cdot (c - a) \wedge s, t \in [0, 1] \wedge s + t \leq 1\}$$

Nun soll ein Prädikat definiert werden, welches wahr ist, falls ein Punkt p in dem Dreieck $\Delta(a, b, c)$ liegt. Dieses sieht wie folgt aus:

$$\text{IMDREIECK}(a, b, c, p) \quad (5.2)$$

Das Lemma 5.1 gibt eine gute Idee, wie das Prädikat definiert werden kann. Um also zu überprüfen, ob ein Punkt p in einem Dreieck $\Delta(a, b, c)$ liegt, muss überprüft werden, ob s und t in $[0, 1]$ existieren, sodass das lineare Gleichungssystem

$$p = a + s \cdot (b - a) + t \cdot (c - a)$$

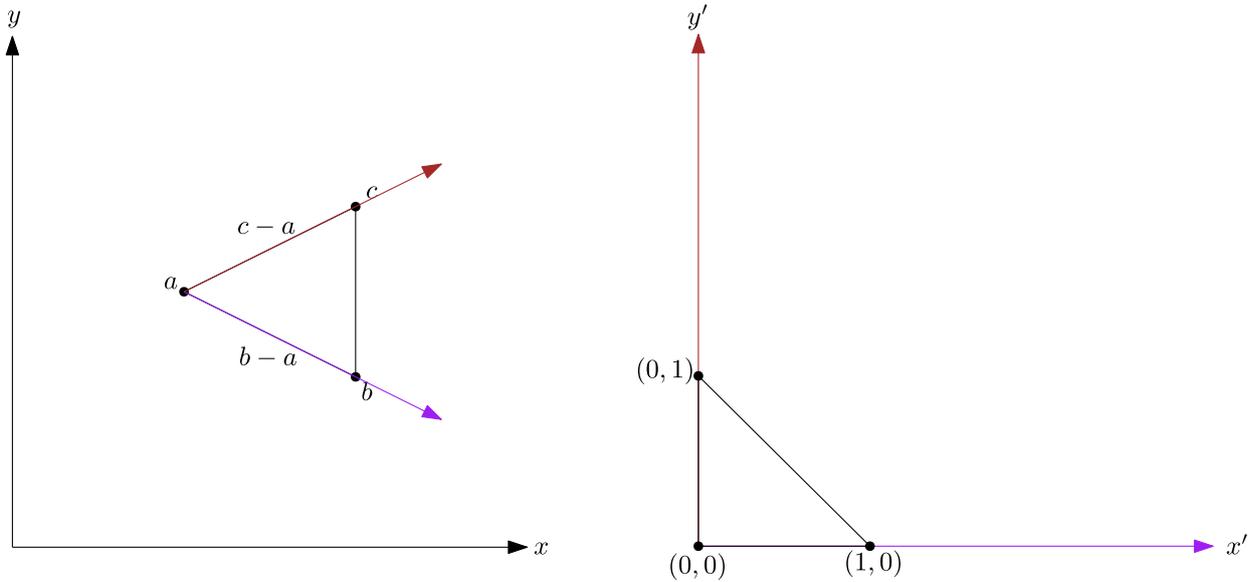


Abbildung 5.1: Diese Grafik zeigt anschaulich den Beweis von Lemma 5.1. Links sieht man das Dreieck im Koordinatensystem mit Basisvektoren x und y und rechts sieht man das Dreieck in der Darstellung der Basisvektoren x' und y' .

wahr ist und zudem $s + t$ kleiner oder gleich 1 ist. Im Beweis für Lemma 5.1 wurde bereits gezeigt, dass das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung hat. Diese kann explizit angegeben werden.

$$\begin{aligned}
 p &= a + s \cdot (b - a) + t \cdot (c - a) \\
 \Leftrightarrow p - a &= s \cdot (b - a) + t \cdot (c - a) \\
 \Leftrightarrow (p - a) &= \begin{pmatrix} b - a & c - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b - a & c - a \end{pmatrix}^{-1} (p - a) &= \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Das heißt es muss nun die inverse der Matrix, mit den neuen Basisvektoren bestimmt werden und diese mit dem Vektor $p - a$ multipliziert werden. Mit $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y)$, $c = (c_x, c_y)$ und $p = (p_x, p_y)$ ist das dann:

$$s = \frac{x_1 \cdot (p_y - y_3) + x_3 \cdot (y_1 - p_y) + p_x \cdot (y_3 - y_1)}{x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)} \quad (5.3)$$

$$t = \frac{x_1 \cdot (p_y - y_2) + x_2 \cdot (y_1 - p_y) + p_x \cdot (x_3 - y_1)}{x_1 \cdot (y_3 - y_2) + x_2 \cdot (y_1 - y_3) + x_3 \cdot (y_2 - y_1)} \quad (5.4)$$

Um dann zu entscheiden, ob der Punkt in dem Dreieck liegt, muss nur noch geprüft werden, ob $s, t \in [0, 1]$, also ob $0 \leq s \leq 1 \wedge 0 \leq t \leq 1$. Also kann $\text{IMDREIECK}(a, b, c, p)$ so definiert werden

$$\text{IMDREIECK}(a, b, c, p) \equiv 0 \leq s \leq 1 \wedge 0 \leq t \leq 1 \wedge s + t \leq 1, \quad (5.5)$$

wobei s und t wie in (5.3) und (5.4) definiert sind. IMDREIECK besteht dann nur aus arithmetischen Operationen und deren logischen Operationen. Außerdem ist die Länge von IMDREIECK konstant.

Nun kann damit begonnen werden ein Prädikat zu konstruieren, welches überprüft, ob sich ein Punkt in dem Polygon befindet. Dazu wird das Polygon zunächst in Dreiecke unterteilt und dann für jedes Dreieck überprüft, ob sich der Punkt in dem Dreieck befindet.

Sei dafür eine Triangulierung wie folgt gegeben: Es seien $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_m, b_m, c_m$ die Eckpunkte der einzelnen Dreiecke der Triangulierung, so dass $\Delta a_i, b_i, c_i$ ein Dreieck der Triangulierung ist. Es gilt dann also:

$$\bigcup_{i=1}^m \Delta_i(a_i, b_i, c_i) = P$$

Sei außerdem $D(P) = \{\Delta(a_i, b_i, c_i) : i = 1, \dots, n\}$ die Menge aller Dreiecke. Eine Triangulierung eines Polygons existiert immer und kann sogar in polynomieller Laufzeit berechnet werden[BCKO08]. Dann beschreibt folgendes Prädikat, ob sich ein Punkt p innerhalb des Polygons P befindet:

$$\text{IMPOLYGON}(P, p) \equiv \bigvee_{\Delta(a,b,c) \in D(P)} \text{IMDREIECK}(a, b, c, p)$$

Nun wurde also ein Prädikat konstruiert, welches prüft, ob sich ein Punkt in einem Polygon befindet (Also welches wahr ist, falls sich ein Punkt in dem Polygon befindet). Würde man in diesem Prädikat alle höherwertigen Funktionen ersetzen, bis man auf der tiefsten Ebene ist, so stünden nur noch Ungleichungen und Gleichungen von Polynomen, welche über aussagenlogischen Formeln verknüpft sind.

5.2 Der Abstand zwischen einem Punkt und einer Strecke

Nun kann damit begonnen werden ein Prädikat zu konstruieren, welches überprüft, ob sich ein Punkt in der „nähe“ des Streckenzugs befindet oder genauer gesagt, ob der Punkt den euklidischen Abstand kleiner oder gleich 1 vom Streckenzug hat. Um das zu prüfen, wird zunächst ein Prädikat konstruiert, welches wahr ist, falls ein Punkt den euklidischen Abstand kleiner oder gleich 1 von einer Strecke hat.

Es seien $a, b, p \in \mathbb{R}^2$ Punkte. Dabei repräsentieren a und b eine Strecke ab mit den Endpunkten a und b . Ziel ist es nun ein Prädikat

$$\text{STRECKEPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(a, b, p)$$

zu definieren, welches angibt ob ein Punkt auf der Strecke ab existiert, dessen euklidischer Abstand zum Punkt p kleiner oder gleich 1 ist.

Führe dazu ein Hilfsprädikat

$$\text{PUNKTPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(a, b)$$

ein, welches angibt, ob ein Punkt a den Abstand kleiner oder gleich 1 von einem anderen Punkt b hat. Der euklidische Abstand zweier Punkte $a, b \in \mathbb{R}^2$ ist definiert als:

$$\|a - b\| = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}$$

Um nun zu prüfen, ob der Abstand zwischen a und b kleiner oder gleich 1 ist, genügt folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 &\leq 1^2 = 1 \end{aligned}$$

Die Ungleichung muss quadriert werden, da eine ETR Instanz keine Wurzel als Bestandteil haben darf. Nun kann das Prädikat, welches den Abstand zweier Punkte überprüft wie folgt definiert werden:

$$\text{PUNKTPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(a, b) \equiv (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 \leq 1^2 = 1$$

Um nun das Prädikat $\text{STRECKEPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(a, b, p)$ einzuführen, wird versucht den Punkt auf ab zu bestimmen, der am nächsten an p liegt. Betrachte dazu die Gerade \overline{ab} . Diese kann wie folgt beschrieben werden:

$$\overline{ab} = a + \mu \cdot (b - a), \mu \in \mathbb{R} \quad (5.6)$$

Betrachte nun die orthogonale Projektion von p auf die Gerade \overline{ab} . Nenne diesen Punkt o . Die Projektion o liegt offensichtlich auf \overline{ab} . Liegt o sogar auf ab , so ist o der nächste Punkt von p . Liegt o nicht auf ab , so ist entweder a oder b der nächste Punkt von p . Um nun o zu bestimmen, betrachte die Vektoren $p - a$ und $b - a$. Sei außerdem

$$\lambda = \frac{(p - a) \cdot (b - a)}{\|b - a\|^2}$$

das bezüglich des Vektors $b - a$ normierte Skalarprodukt dieser beiden Vektoren. Dieses Skalarprodukt hat nun die Eigenschaft, dass es eingesetzt in 5.6 den Punkt o bestimmt. Außerdem gibt λ an, wo sich o befindet. Es gibt dafür folgende drei Fälle, siehe dafür Abbildung 5.2 :

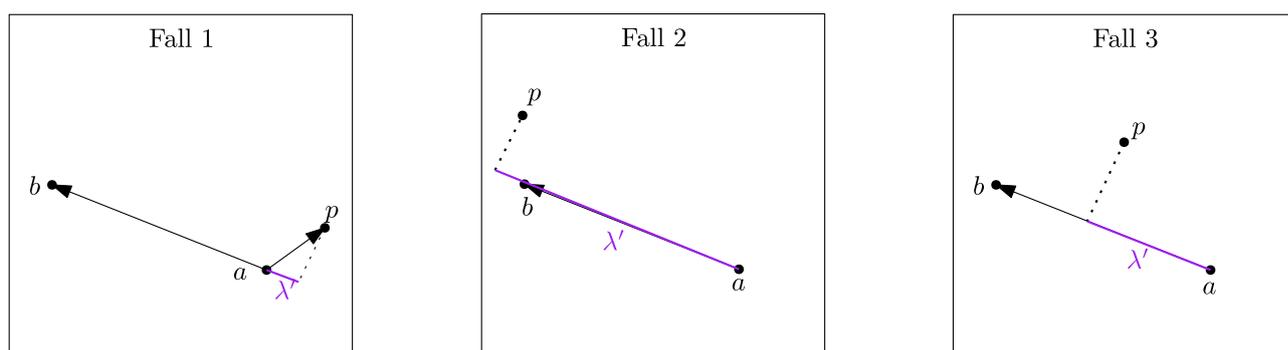


Abbildung 5.2: In dieser Grafik sieht man die drei möglichen Fälle von p . Es entspricht λ' dem nicht skalierten λ . Also ist $\lambda \cdot \|b - a\| = \lambda'$.

- Fall 1: $\lambda < 0$ In diesem Fall liegt o nicht auf ab und a ist der nächste Punkt zu p und der kürzeste Abstand ist gerade die euklidische Distanz zwischen p und a .
- Fall 2: $\lambda > 1$ In diesem Fall liegt o nicht auf ab und b ist der nächste Punkt zu p und der kürzeste Abstand ist gerade die euklidische Distanz zwischen p und b .
- Fall 3: $0 \leq \lambda \leq 1$ In diesem Fall liegt der Punkt o auf der Strecke ab und der kürzeste Abstand ist gerade die euklidische Distanz zwischen o und p .

In Fall 1 und in Fall 2 ist also klar, wie der Abstand überprüft wird. Dafür wurde bereits das Prädikat $\text{PUNKTPUNKTKLEINERGLEICHEINS}$ definiert. Es kann dann einfach der Abstand zwischen a bzw. b und p überprüft werden. In Fall 3 muss nun noch der Punkt o bestimmt werden. Dieser ist gegeben durch

$$o = a + \lambda \cdot (b - a)$$

Um also nun zu überprüfen, ob ein Punkt p den Abstand kleiner oder gleich 1 von einer Strecke ab hat, geht man wie folgt vor: Man bestimmt $\lambda = \frac{(p-a) \cdot (b-a)}{\|b-a\|^2}$ und $o = a + \lambda \cdot (b - a)$. Dann überprüft man, welcher Punkt auf der Strecke ab am nächsten an p liegt und überprüft für diesen Punkt mittels dem Prädikat $\text{PUNKTPUNKTKLEINERGLEICHEINS}$, ob der Abstand kleiner oder gleich 1 ist. Mit dieser Vorgehensweise kann nun das Prädikat $\text{STRECKEPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(a, b, p)$ definiert werden. Dieses ist:

$$\begin{aligned} \text{STRECKEPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(a, b, p) \equiv & \\ & c < 0 \wedge \text{PUNKTPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p, a) \\ & \vee c > 1 \wedge \text{PUNKTPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p, a) \\ & \vee \text{PUNKTPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p, a + \lambda(b - a)) \end{aligned}$$

Nun fehlt noch der letzte Schritt. Es wird ein Prädikat konstruiert, welches genau dann wahr ist, falls ein Punkt p von einem Streckenzug $s_1s_2s_3 \dots s_r$ den maximalen Abstand 1 hat.

Seien nun $p_0, p_1, \dots, p_k, p_k \in \mathbb{R}^2$ Punkte und $p_0p_1 \dots p_k$ der daraus entstehende Streckenzug. Um zu prüfen, ob ein Punkt den Abstand kleiner oder gleich 1 hat, genügt es für jede Teilstrecke des Streckenzugs das Prädikat $\text{STRECKEPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(a, b, p)$ anzuwenden. Diese Prädikat sei also wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \text{STRECKENZUGPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p_0, p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, p) \\ \equiv \bigvee_{i=0}^k \text{STRECKEPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p_i, p_{i+1}, p) \end{aligned}$$

Dieses gibt an, ob ein Punkt p den Abstand kleiner oder gleich 1 von einem Streckenzug hat. Dieses besteht auf der untersten Ebene wieder nur aus Gleichungen und Ungleichungen, die über aussagenlogische Formeln verknüpft sind.

5.3 Lawn Mowing Problem ist in $\exists\forall\mathbb{R}$

Theorem 5.3: *Das LMPK liegt in $\exists\forall\mathbb{R}$*

Beweis. Sei dafür eine Instanz des LMPK gegeben. Also sei P ein Polygon mit den Eckpunkten $V(P) = n$ und $k \in \mathbb{N}$. Konstruiere nun folgende ETR Instanz:

$$\exists p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^2. \forall p \in \mathbb{R}^2 : \text{IMPOLYGON}(P, p) \Rightarrow \text{STRECKENZUGPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p_1, \dots, p_k, p)$$

In dieser Formel kommt noch „ \Rightarrow “ vor und das ist in einer ETR Instanz nicht erlaubt ist. Es kann allerdings durch $A \Rightarrow B \equiv A \vee \neg B$ ersetzt werden. Außerdem befinden sich in dieser Formel noch 2-Tupel. Diese sind auch nicht erlaubt. Allerdings kann man die 2-Tupel durch ihre X- und Y-Koordinaten ersetzen und die entsprechenden Prädikate erweitern. Dadurch wird die Formel maximal um den Faktor 2 länger.

Nun muss noch gezeigt werden, dass diese Konstruktion JA-Instanzen des auf JA Instanzen von ETR abbildet und NEIN-Instanzen des auf NEIN-Instanzen von ETR. Das folgt direkt aus der Konstruktion der Prädikate: Für eine JA-Instanz des existieren p_1, \dots, p_n , so dass der entsprechende Streckenzug $p_1 \dots p_n$ das ganze Polygon mäht. Diese Punkte erfüllen dann aber auch die Formel $\text{IMPOLYGON}(P, p) \Rightarrow$

$\text{STRECKENZUGPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p_1, \dots, p_n, p)$, da jeder Punkt, der sich im Polygon befindet den Abstand kleiner oder gleich vom Streckenzug hat. Analag werden NEIN-Instanzen auf NEIN-Instanzen abgebildet.

Als letzter Schritt muss noch gezeigt werden, dass die Konstruierte Instanz nur polynomiell groß bezüglich der Eingabe ist. Dafür werden hier nochmal alle Definitionen aufgelistet und kurz die Länge der Prädikate angegeben:

$$\text{IMDREIECK}(a, b, c, p) \equiv 0 \leq s \leq 1 \wedge 0 \leq t \leq 1 \wedge s + t \leq 1,$$

Dieses Prädikat hat eine konstante Länge, da t und s konstant sind.

$$\text{IMPOLYGON}(P, p) \equiv \bigvee_{\Delta(a,b,c) \in D(P)} \text{IMDREIECK}(a, b, c, p)$$

Dieses Prädikat hat die Länge $O(n)$, wobei n die Anzahl an Eckpunkten des Polygons ist. Denn jedes Polygon mit n Ecken kann in $O(n)$ Schritten in $O(n)$ Dreiecke trianguliert werden.

$$\text{PUNKTPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(a, b) \equiv (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 \leq 1^2 = 1$$

Dieses Prädikat hat eine konstante Länge.

$$\begin{aligned} \text{STRECKEPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(a, b, p) \equiv \\ c < 0 \wedge \text{PUNKTPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p, a) \\ \vee c > 1 \wedge \text{PUNKTPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p, a) \\ \vee \text{PUNKTPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p, a + \lambda(b - a)) \end{aligned}$$

Dieses Prädikat hat auch eine konstante Länge, da λ konstant ist.

$$\begin{aligned} \text{STRECKENZUGPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p_0, p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, p) \\ \equiv \bigvee_{i=0}^k \text{STRECKEPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p_i, p_{i+1}, p) \end{aligned}$$

Dieses Prädikat hat eine Länge von $O(k)$

Insgesamt hat die ETR Instanz also eine Länge von $O(n + k)$. Somit ist die Konstruktion also nur polynomiell größer als die LMPK Instanz und somit folgt das Theorem. \blacksquare

Theorem 5.4: *Das LMP liegt in $\exists\forall\mathbb{R}$*

Beweis. Sei eine LMP Instanz gegeben. Also ein Polygon P und ein $l \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es einen optimalen Weg, der die Form eines Streckenzuges hat und mit $\|V(P)\| = n$ maximal $O(n^2)$ Knickpunkte hat [Fek+22]. Insbesondere existiert also ein polynomiell großes $\eta(n)$, welches eine obere Schranke der Knickpunkte angibt.

Konstruiere für diesen Beweis zunächst ein weiteres Prädikat, welches wahr ist, falls die Länge eines Streckenzugs kleiner oder gleich l ist. Die Länge eines Streckenzugs $p_1 p_2 \dots p_k$ ist

$$D(p_1 p_2 \dots p_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{(p_{i,x} - p_{i+1,x})^2 + (p_{i,y} - p_{i-1,y})^2}$$

$$\Leftrightarrow D(p_1 p_2 \dots p_k)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{(p_{i,x} - p_{i+1,x})^2 + (p_{i,y} - p_{i-1,y})^2} \right)^2.$$

Diese Formel enthält Wurzeln, welche sich nicht einfach durch quadrieren entfernen lassen. Eine Möglichkeit, diese Überprüfung durchzuführen ist die folgende:

$$\exists l_1, l_2 \dots l_{k-1} \in \mathbb{R} : \bigwedge_{i=1}^{k-1} \left(l_i = (p_{i,x} - p_{i+1,x})^2 + (p_{i,y} - p_{i-1,y})^2 \right)$$

$$\wedge \sum_{i=1}^{k-1} l_i \leq l$$

Das heißt, sind $l_1, \dots, l_{k-1} \in \mathbb{R}$, so ist folgendes Prädikat wahr, genau dann wenn die Länge des Streckenzugs $p_1 p_2 \dots p_k$ kleiner oder gleich l ist:

$$\text{LÄNGESTRECKENZUGKLEINER}(p_1, p_2, \dots, p_k, l_1, l_2, \dots, l_{k-1}, l) \equiv$$

$$\bigwedge_{i=1}^{k-1} \left(l_i = (p_{i,x} - p_{i+1,x})^2 + (p_{i,y} - p_{i-1,y})^2 \right)$$

$$\wedge \sum_{i=1}^{k-1} l_i \leq l$$

Dann kann die folgende ETR Instanz konstruiert werden:

$$\exists p_1, p_2, \dots, p_\eta \in \mathbb{R}^2, l_1, \dots, l_{\eta-1} \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{R}^2 :$$

$$\text{IMPOLYGON}(P, p) \Rightarrow$$

$$\text{STRECKENZUGPUNKTKLEINERGLEICHEINS}(p_1, \dots, p_\eta, p)$$

$$\wedge \text{LÄNGESTRECKENZUGKLEINER}(p_1, p_2, \dots, p_\eta, l_1, l_2, \dots, l_{\eta-1}, l)$$

Analog zum Beweis von Theorem (5.3), ist diese Konstruktion nur polynomiell größer, als die WRP Instanz. Es kommt nämlich nur das Prädikat LÄNGESTRECKENZUGKLEINER hinzu. Außerdem werden wieder JA-Instanzen auf JA-Instanzen abgebildet und NEIN-Instanzen auf NEIN-Instanzen. \blacksquare

6 Änderung der Ausschneidefigur

Bisher wurde das Lawn Mowing Problem mit dem Kreis als Ausschneidefigur betrachtet. Dafür wurde gezeigt, dass ein optimaler Weg ein Streckenzug ist [Fek+22]. In diesem Kapitel wird untersucht, ob das auch für andere Figuren gilt.

6.1 Vorüberlegungen

Im nächsten Abschnitt, soll das Quadrat als Ausschneidefigur betrachtet werden. Dafür sind die folgenden Definitionen hilfreich:

Definition 6.1: Sei w ein Weg und F eine Figur. Die **Abdeckung** $S_F(w)$ sei definiert mit

$$S_F(w) := w \otimes F$$

Definition 6.2: Eine Funktion, also insbesondere auch ein Weg, heißt **konvex**, wenn ihr Graph unterhalb jeder Strecke zweier seiner Punkte liegt.

Eine Funktion heißt **konkav**, wenn ihr Graph oberhalb jeder Strecke zweier seiner Punkte liegt.

6.2 Beobachtungen

In diesem Abschnitt wird das Quadrat als Ausschneidefigur betrachtet. Es wird gezeigt, dass ein optimaler Weg ein Streckenzug ist. Der Beweis orientiert sich an „A Closer Cut: Computing Near-Optimal Lawn Mowing Tours“ [Fek+22].

6.2.1 Grundlegende Definitionen

Zunächst kann man beobachten, dass jede Tour $T : I \rightarrow R^2$ in Teilwege t_0, t_1, \dots, t_{k-1} zerlegt werden kann, so dass folgendes gilt:

- Der Endpunkt von t_i ist der Startpunkt von $t_{i+1 \bmod k}$ für $i \in \{0, \dots, k-1\}$.
- Jeder Teilweg hat eine der folgenden Eigenschaften:
 - Konvex und streng monoton wachsend.
 - Konvex und streng monoton fallend.
 - Konkav und streng monoton wachsend.
 - Konkav und streng monoton fallend.
 - Ist eine Strecke.

Definition 6.3: Diese Teilwege werden **Komponenten** genannt.

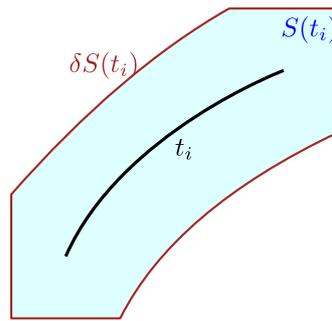


Abbildung 6.1: In dieser Grafik sieht man in schwarz eine streng monoton fallende und konkave Komponente t_i . In hellblau sieht man dessen Abdeckung $S(t_i)$ und in dunkelbraun sieht man den Rand der Abdeckung $\delta S(t_i)$.

In Abbildung ist eine streng monoton fallende und konkave Komponente t_i und dessen Abdeckung $S(t_i)$ zu sehen.

Sei nun t eine konkave, streng monoton fallende Komponente, $S(t)$ dessen Abdeckung und es bezeichne $\delta S(t)$ den Rand von $S(t)$. Dieser Rand kann in vier Wege zerlegt werden: W_1 , W_2 , W_3 und W_4 . Siehe dazu Abbildung 6.1. Anschaulich sind W_2 und W_4 die gekrümmten Wege, die „über“ beziehungsweise „unter“ t liegen. W_1 und W_3 sind jeweils die Konkatenation aus zwei Strecken, die vom Start- beziehungsweise Endpunkt entstehen. Diese anschauliche Unterteilung soll nun präzise definiert werden. Beim LMP S wird diese Unterteilung durchgeführt, indem jedem Punkt von $\delta S(t)$ ein Punkt von t zugeordnet wird. Diese Zuordnung ist der geringste Abstand. Es werden dann alle Punkte auf $\delta S(t)$ betrachtet, denen der Start- oder Endpunkt zugeordnet wird und diese bilden dann W_1 oder W_3 . Die Punkte, die weder Start- noch Endpunkt zugeordnet werden, bilden W_2 und W_4 [Fek+22]. Beim LMP Q leistet diese Methode nicht das gewünschte. Das kann man sich leicht überlegen, indem man Abbildung 6.2 betrachtet. Würde man die Unterteilung wie beim LMP S durchführen, so würde ein Teil von W_4 zu W_1 gehören und W_1 wäre keine Konkatenation aus Strecken. Es sei t eine konkave, streng monoton steigende Komponente mit s als Startpunkt und e als Endpunkt. Die Wege seien dann wie folgt definiert:

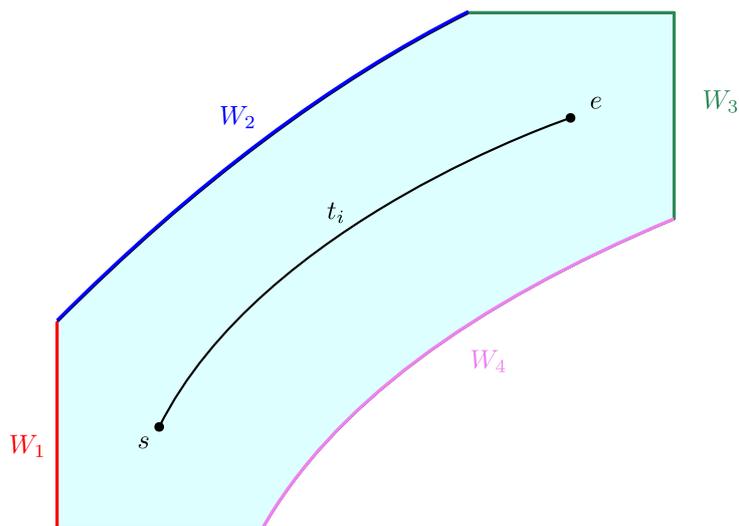


Abbildung 6.2: In dieser Grafik sieht man die Unterteilung des Randes von t_i .

- W_1 : Startpunkt bei $s + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und Endpunkt bei $s + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- W_2 : Startpunkt bei $s + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und Endpunkt bei $e + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- W_3 : Startpunkt bei $e + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und Endpunkt bei $e + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
- W_4 : Startpunkt bei $e + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und Endpunkt bei $s + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Definition 6.4: Sei t eine konkave, streng monoton steigende Komponente. W_2 heißt $S^+(t)$ und W_4 heißt $S^-(t)$.

Läuft man $\delta S(t)$ im Uhrzeigersinn ab, so hat $S^+(t)$ positive Krümmung und $S^-(t)$ negative Krümmung.

6.3 Die optimale Lösung ist ein Streckenzug

Mit diesen Definitionen kann nun der Beweis geführt werden. Da dieser sehr technisch ist wird dieser kurz skizziert.

In Lemma 6.5 wird gezeigt, dass es in der optimalen Lösung Punkte in der Abdeckung von $S(t)$ gibt, die nur einmal abgedeckt werden dürfen. In Lemma 6.6 wird dann weiter gezeigt, dass es zu jeder streng monoton wachsenden, konkaven Komponente eine weitere Komponente gibt, so dass die Abdeckungen „Rand an Rand“ anliegen. Durch Hintereinanderausführung dieses Lemmas kann in Lemma 6.7 gezeigt werden, dass die optimale Lösung keine konkave, streng monoton wachsende Komponente beinhaltet. Danach wird in Lemma 6.8 gezeigt, dass daraus folgt, dass eine optimale Lösung allgemein keine kurvige Komponente hat und abschließend wird in Theorem 6.9 gezeigt, dass der optimale Weg ein Streckenzug ist.

Lemma 6.5: Sei T eine valide Tour, t eine konkave, streng monoton steigende Komponente von T und a, b Punkte auf $S^+(t)$. Es bezeichne ab die Strecke zwischen a und b . Wird ein Punkt zwischen $S^+(t)$ und ab von einer weiteren Komponente abgedeckt, so ist T nicht optimal.

Beweis. Sei T eine valide Tour, t eine konkave, streng monoton wachsende Komponente von T und a, b Punkte auf $S^+(t)$. Es sei außerdem p ein Punkt zwischen ab und $S^+(t)$, der noch von einer anderen Komponente t^* abgedeckt wird. Damit p von t^* abgedeckt werden kann, muss t^* den Punkt $p + (i, j)$ mit $-\frac{1}{2} \leq i, j \leq \frac{1}{2}$ durchlaufen haben. Es gibt nun verschiedene Fälle, wie dies passieren kann. Es bezeichnet δQ den Rand von Q .

Fall 1: Siehe hierfür Abbildung 6.3. An dem Zeitpunkt, an dem p von t^* abgedeckt wird, schneidet δQ mit Mittelpunkt $p + (i, j)$ den Weg $S^+(t)$ in zwei Punkten. Bezeichne diese mit p_1 und p_2 . Definiere nun die Punkte q_1 und q_2 . Dabei ist $q_1 = p_1 + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und $q_2 = p_2 + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Diese beiden Punkte liegen auf t , denn sie sind gerade die Punkte, von denen aus p_1 und p_2 von t abgedeckt werden. Definiere jetzt den Weg $t_{kürzer}$ wie folgt: $t_{kürzer}$ beginnt mit dem Startpunkt von t . $t_{kürzer}$ ist zwischen dem Startpunkt von t und dem Punkt q_1 identisch mit t . Von dort aus wird die Strecke von q_1 und q_2 gebildet. Ab q_2 , bis zum Endpunkt von t ist $t_{kürzer}$ wieder identisch mit t . Also ist $t_{kürzer}$, bis auf die Strecke zwischen q_1 und q_2 identisch mit t . Offensichtlich ist $t_{kürzer}$ kürzer als t , da sich die beiden Wege nur zwischen q_1 und q_2 unterscheiden und in diesem Bereich $t_{kürzer}$ den kürzesten Weg, nämlich die Strecke, geht. Nun muss noch gezeigt werden, dass $S(t^*) \cup S(t) \subseteq S(t^*) \cup S(t_{kürzer})$, also dass durch die Abkürzung zwischen q_1 und q_2 nicht weniger Fläche abgedeckt wird. Untersuche dafür $S(t) \setminus S(t_{kürzer})$. Das ist die Menge, die durch die Abkürzung nicht mehr abgedeckt wird. Die Wege $t_{kürzer}$ und t unterscheiden sich nur zwischen q_1 und q_2 . Dort befindet sich t oberhalb von $t_{kürzer}$. Das heißt $S(t) \setminus S(t_{kürzer})$ ist gerade der Einschluss von $S^+(t)$ und $p_1 p_2$, wobei $p_1 p_2$ die Strecke zwischen p_1 und p_2 beschreibt. Da t^* außerdem

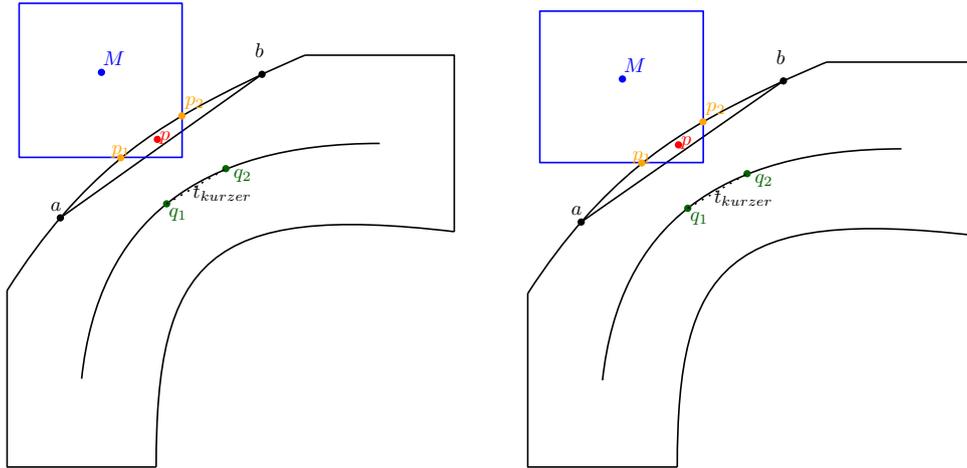


Abbildung 6.3: In dieser Grafik sieht man Fall 1 des Beweises für Lemma (6.5)

den Punkt $p + (i, j)$ passiert, als er p abdeckt und nach Definition in diesem Punkt p_1 und p_2 geschnitten werden, deckt t^* diese eingeschlossene Menge ab. Es ist also $S(t) \setminus S(t_{\text{kürzer}}) \subseteq S(t^*)$ und somit auch $S(t) \subseteq S(t^*) \cup S(t_{\text{kürzer}})$. Nun gilt $S(t^*) \cup S(t) \subseteq S(t^*) \cup S(t^*) \cup S(t_{\text{kürzer}}) = S(t^*) \cup S(t_{\text{kürzer}})$. Die valide Tour T kann also durch eine Tour T^* ersetzt werden, welche bis auf t die gleichen Komponenten hat und t durch $t_{\text{kürzer}}$ ersetzt. Die Tour T^* ist dann valide und kürzer als T . Das heißt T war nicht optimal.

Fall 2: An dem Zeitpunkt, an dem p von t^* abgedeckt wird, schneidet δQ mit Mittelpunkt $p + (i, j)$ den Weg $S^+(t)$ in keinem Punkt. In diesem Fall muss δQ mit Mittelpunkt $p + (i, j)$ den Weg $S^-(t)$ in zwei Punkten schneiden. Dieser Fall ist nun Analog zu Fall 1. Ersetze hierfür $S^+(t)$ mit $S^-(t)$ und es kann eine kürzere valide Tour T^* konstruiert werden.

Fall 3: An dem Zeitpunkt, an dem p von t^* abgedeckt wird, schneidet δQ mit Mittelpunkt $p + (i, j)$ den Weg $S^+(t)$ in einem Punkt. In diesem Fall muss der Mittelpunkt von δQ auf t liegen. Lläuft man nun die Komponente t^* ab, so gibt es nur eine von zwei Möglichkeiten. Entweder die Komponente t^* verlässt t und es kann Fall 1 oder Fall 2 betrachtet werden, oder sie ist identisch mit t . Ist sie identisch mit t , so kann t^* mit der Strecke aus Start- und Endpunkt von t ersetzt werden und die daraus entstehende Tour T^* ist offensichtlich kürzer und immer noch valide. Da δQ den Weg $S^+(t)$ nur kein, ein oder zwei mal schneide kann, sind alle Fälle abgedeckt und in jedem Fall ist die Tour T nicht optimal. ■

Lemma 6.6: Sei T eine Tour und t eine konkave, streng monoton wachsende Komponente von T . Ist T optimal, so existiert eine konkave, streng monoton wachsende Komponente t^* von T , so dass $S^+(t) = S^-(t^*)$ gilt.

Beweis. Sei T eine optimale Tour und t eine konvexe, streng monoton wachsende Komponente von T . Betrachte einen Punkt p auf $S^+(t)$. Es bezeichne $K_\epsilon(p)$ den ϵ -Umkreis um p . Im folgenden sei ϵ hinreichend klein. Da T eine optimale Tour und damit insbesondere eine valide Tour ist, gibt es für jeden Punkt in $K_\epsilon(p)$ eine Komponente, die diesen Punkt abdeckt. Der Kreis $K_\epsilon(p)$ kann nun in folgende zwei Teile zerlegt werden: In $K_\epsilon(p) \cap S(t)$ und in $K_\epsilon(p) \setminus S(t)$. Da T optimal ist, wird nach Lemma (6.5) die Menge $K_\epsilon(p) \cap S(t)$ nur von t abgedeckt. Betrachte nun $K_\epsilon(p) \setminus S(t)$. Sei $q = (x_1, y_1) \in K_\epsilon(p) \setminus S(t)$ und t^* eine Komponente, die q abdeckt. Damit t^* den Punkt q abdeckt, muss diese den Punkt $r = (x_2, y_2)$ mit $x_1 - x_2 \leq \frac{1}{2}$ und $y_2 - y_1 \leq \frac{1}{2}$ durchlaufen. Nach Lemma ?? darf $S(t^*)$ den Weg $S^+(t)$ nicht schneiden.

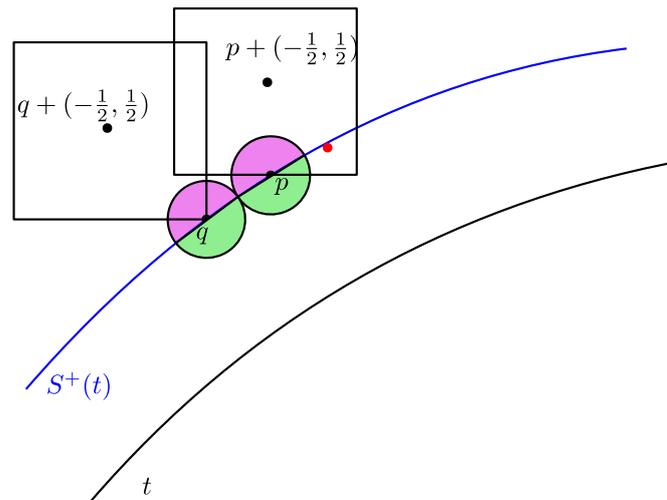


Abbildung 6.4: In dieser Grafik sieht man anschaulich den Beweis für Lemma (6.6). In violett sieht man die Menge $K_\epsilon(p) \setminus S(t)$ und in grün sieht man die Menge $K_\epsilon(p) \cap S(t)$. Die violette Menge wird von den Quadraten mit Mittelpunkten $p + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $q + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ abgedeckt. Man sieht, dass das Quadrat um $p + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ einen roten Punkt hat, der in $S(t)$ ragt.

Wird nun ϵ beliebig klein, so nähert sich r dem Punkt $p + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ an. Da p beliebig gewählt wurde, muss dies für alle Punkte auf $S^+(t)$ gelten. Somit gibt es eine konkave, streng monoton wachsende Komponente t^* , für die $S^+(t) = S^-(t^*)$ gilt. ■

Lemma 6.7: Sei T eine optimale Tour. Dann besitzt T keine konkave, streng monoton wachsende Komponente.

Beweis. Sei T eine optimale Tour und t_0, t_1, \dots, t_{k-1} ist die Zerlegung in ihre Komponenten. Sei nun t eine konkave, streng monoton wachsende Komponente. Nach Lemma 6.6 gibt es nun eine Komponente t^2 , für die $S^-(t^2)$ identisch ist mit $S^+(t)$. Außerdem ist t^2 wieder konkav und streng monoton wachsend. Nun kann dieses Lemma so oft angewendet werden, bis zu einer Komponente t^{n-1} , für die gilt: $S^+(t^{n-1})$ ist ganz im Polygon und $S^+(t^n)$ geht über das Polygon hinaus. Betrachte nun die Schnittpunkte von $S^+(t^n)$ mit dem Polygon. Bezeichne diese mit p_1 und p_2 . Werden diese orthogonal auf t^k projiziert, so bekommt man die Punkte $O(p_1)$ und $O(p_2)$. Nun kann bei der Komponente t^n über die Punkte $O(p_1)$ und $O(p_2)$ abgekürzt werden. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass T optimal ist. Also gibt es keine konkaven, streng monoton wachsenden Komponenten. ■

Lemma 6.8: Sei T eine optimale Tour. Hat T keine konkave, streng monoton wachsende Komponente, so hat T keine konvexe und keine konkave Komponente.

Beweis. Sei T eine optimale Tour. Seien $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ die zugrundeliegenden Basisvektoren. Definiere nun neue Basisvektoren e_1^* und e_2^* wie folgt:

- Falls T eine streng monoton fallende, konkave Komponente hat: Definiere $e_1^* = (-1, 0)$ und $e_2^* = (0, 1)$
- Falls T eine streng monoton fallende, konvexe Komponente hat: Definiere $e_1^* = (1, 0)$ und $e_2^* = (0, -1)$
- Falls T eine streng monoton wachsende, konvexe Komponente hat: Definiere $e_1^* = (-1, 0)$ und $e_2^* = (0, -1)$

Durch diese Basiswechsel können alle verschiedenen Komponententypen, bis auf die Strecke, in eine streng monoton wachsende, konkave Komponente umgewandelt werden. Beachte, dass dieser Basiswechsel die optimale Lösung, bis auf Spiegelung, nicht verändert. Gäbe es also eine dieser drei Komponententypen, so wäre nach Lemma 6.7 die Spiegelung T^* nicht optimal und somit wäre auch T nicht optimal. Also kann es diese Komponententypen bei einer optimalen Lösung nicht geben. Da außerdem eine konvexe, beziehungsweise konkave Komponente aus einer streng monoton steigenden und streng monoton fallenden konvexen, beziehungsweise konkaven Komponente besteht, kann es keine konvexe, beziehungsweise konkave Komponente geben. ■

Theorem 6.9: *Sei T eine optimale Tour. T besteht aus der Konkatenation von Strecken.*

Beweis. Sei T eine optimale Tour. Nach Lemma 6.8 hat T keine konkaven und keine konvexen Komponenten. Da Komponenten nur konkav, konvex oder eine Strecke sein können, müssen alle Komponenten Strecken sein und somit ist T ein Streckenzug. ■

7 Das Watchman Route Problem ist in $\exists\mathbb{R}$

In diesem Kapitel wird die Komplexität des Watchman Route Problems untersucht.

7.1 Das Watchman Problem

In der Einleitung wurde das Watchman Route Problem abstrakt eingeführt. Dieses soll hier noch einmal präziser definiert werden. Dafür wird zunächst definiert, was „sehen“ heißt:

Definition 7.1: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon mit polygonalen Löchern und $a, b \in \mathbb{R}^2$. Es gilt: a **sieht** b , genau dann wenn $ab \subset P$. Ist $C \subset \mathbb{R}^2$, dann gilt: a sieht C , genau dann wenn jedes $c \in C$ a sieht.

Wie beim Lawn Mowing Problem werden auch hier wieder zwei Versionen des Problems definiert. Einmal wird die Anzahl an Knicken betrachtet und einmal die Länge der Tour.

Das Watchman Route Problem bezüglich der Anzahl an Knicken ist dann wie folgt definiert:

DAS WATCHMAN ROUTE PROBLEM MIT KNICKEN (WRPK)

Eingabe: Ein Polygon P mit polygonalen Löchern und ein $k \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es einen Streckenzug S mit maximal k Knicken in P , so dass gilt: $\forall p \in P. \exists s \in S. : ps \subset P$

Das Watchman Route Problem bezüglich der Länge ist wie folgt definiert:

WATCHMAN ROUTE PROBLEM (WRP)

Eingabe: Ein Polygon P mit polygonalen Löchern und ein $l \in \mathbb{Q}$

Frage: Gibt es eine Tour T mit maximaler Länge l in P , so dass gilt: $\forall p \in P. \exists t \in T. : pt \subset P$

In diesem Kapitel ist P immer ein Polygon, welches polygonale Löcher haben kann.

7.2 Überblick

Zunächst soll kurz ein Überblick über dieses Kapitel gegeben werden. Das Ziel soll es sein eine Instanz des WRPK in eine Instanz von ETR zu transformieren. Die Instanz von ETR sieht am Ende so aus:

$$\exists p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^2 : F(p_1, \dots, p_k)$$

Die entsprechende Konstruktion muss natürlich JA-Instanzen auf JA-Instanzen und NEIN-Instanzen auf NEIN-Instanzen übertragen. Die Idee ist also folgende: Die Variablen p_1, \dots, p_k entsprechen den Knickpunkten des Streckenzugs und die Formel F überprüft dann, ob der Streckenzug $p_1 \dots p_k$ alle Punkte des Polygons sieht. Um dies zu überprüfen, müsste allerdings jeder Punkt des Polygons überprüft werden, also überabzählbar viele Punkte. Dann wäre die ETR Instanz natürlich nicht mehr polynomiell groß. Um das zu umgehen, wird eine Zeugenmenge konstruiert. Diese Menge hat nur polynomiell viele Punkte und die Eigenschaft, dass genau dann wenn alle Punkte aus der Zeugenmenge gesehen werden,

wird auch das ganze Polygon gesehen. Es wird eine polynomiell große Zeugenmenge konstruiert. Die Formel F überprüft dann, ob der entstehende Streckenzug $p_1 \dots p_k$ jeden Punkt der polynomiell großen Zeugenmenge sieht. Das kann in polynomieller Länge überprüft werden. Es werden dann immer noch JA-Instanzen auf JA-Instanzen und NEIN-Instanzen auf NEIN-Instanzen übertragen.

Die Konstruktion und der Beweis einer solchen Zeugenmenge ist allerdings sehr technisch und sehr aufwändig.

7.3 Einteilung des Streckenzugs in Teilstrecken

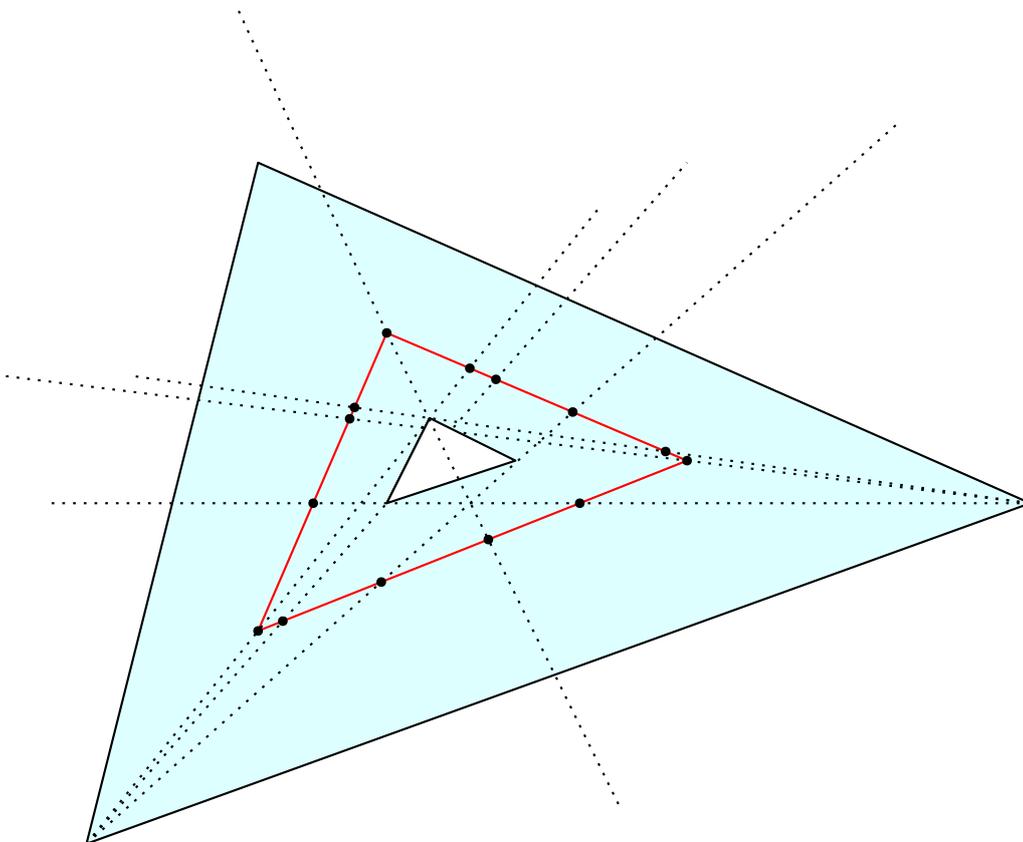


Abbildung 7.1: In dieser Grafik sieht man die Einteilung in Teilstrecken. In hellblau ist das Polygon gegeben und die gepunkteten Striche sind die Geraden in $L(P, S)$. Der Übersicht halber, wurden nicht alle Geraden eingezeichnet. Die schwarzen Punkte sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Streckenzug (rot).

Sei P ein Polygon und $V(P)$ die Menge aller Ecken des Polygons und der Löcher des Polygons. Außerdem sei S ein Streckenzug in P mit $S = s_1 s_2 \dots s_k$. Definiere nun folgende Menge aus Geraden:

$$L(P, S) := \{\overline{ab} : a, b \in (V(P) \cup \{s_1, \dots, s_k\}) \wedge a \neq b\}$$

Diese Menge an Geraden wird gebildet, indem von jedem Eckpunkt zu jedem anderen Eckpunkt eine Gerade gezogen wird. Der Eckpunkt kann dabei von einer Tour, vom Polygon oder einem Loch im Polygon sein. Siehe dazu Abbildung 7.1. Diese Geraden liegen alle im \mathbb{R}^2 . Betrachte nun die Geraden

$L(P, S)$ zusammen mit dem Streckenzug S . Die Geraden aus $L(P, S)$ schneiden diesen Streckenzug und unterteilen somit alle Strecken $s_1s_2, s_2s_3, \dots, s_{k-1}s_k$ des Streckenzugs in kleinere Teilstrecken. Dabei gibt es drei Möglichkeiten. Sei dazu g eine Gerade aus $L(P, S)$

- Die Gerade g schneidet die Strecke $s_i s_{i+1}$ in genau einem Punkt s^* . Dann wird die Strecke aufgeteilt in den Streckenzug $s_i s^* s_{i+1}$.
- Die Gerade g schneidet die Strecke $s_i s_{i+1}$ nicht. Dann wird diese nicht weiter aufgeteilt.
- Die Gerade g liegt parallel zur Strecke $s_i s_{i+1}$. In diesem Fall wird die Strecke auch nicht weiter aufgeteilt.

Ist also $s_i s_{i+1}$ eine Strecke, so wurde dies nach Ausführung dieser Unterteilung in mehrere **Teilstrecken** unterteilt. Es wurden also Zwischenpunkte auf der Strecke $s_i s_{i+1}$ eingefügt. Diese werden nun benannt. Ist $s_i s_{i+1}$ eine Strecke, so seien s^1, s^2, \dots, s^μ diese Zwischenpunkte. Die Strecke $s_i s_{i+1}$ kann also geschrieben werden als $s_i s^1 s^2 \dots s^\mu s_{i+1}$, wobei $s_1 s^1, s^1 s^2, \dots, s^{\mu-1}, s^\mu, s^\mu s_{i+1}$ Teilstrecken sind. Da diese Unterteilung sehr technisch ist, wird sie nochmal kurz zusammengefasst. Der Streckenzug S besteht aus Strecken mit den Eckpunkten s_1, s_2, \dots, s_k . Diese Eckpunkte bilden zusammen mit den Eckpunkten des Polygons die Geraden $L(P, S)$. Diese Geraden schneiden die Strecken des Streckenzuges und unterteilen somit jede Strecke in Teilstrecken. Die Start- und Endpunkte dieser Teilstrecken werden mit s^1, \dots, s^μ bezeichnet. Dabei ist das μ abhängig von der Strecke, denn nicht jede Strecke wird in gleich viele Teilstrecken eingeteilt. Außerdem sind die s^1, \dots, s^μ von s_i abhängig. Da das aber sehr unübersichtlich ist, wird das hier weggelassen. Zur Vollständigkeit wird hier einmal die komplette Unterteilung aufgezeigt:

$$\begin{aligned}
 S = & s_1 s_1^1 s_1^2 s_1^3 \dots s_1^{\mu_1-1} s_1^{\mu_1} s_2 \\
 & s_2 s_2^1 s_2^2 s_2^3 \dots s_2^{\mu_2-1} s_2^{\mu_2} s_3 \\
 & s_3 s_3^1 s_3^2 s_3^3 \dots s_3^{\mu_3-1} s_3^{\mu_3} s_4 \\
 & \dots \\
 & s_{k-1} s_{k-1}^1 s_{k-1}^2 s_{k-1}^3 \dots s_{k-1}^{\mu_{k-1}-1} s_{k-1}^{\mu_{k-1}} s_k
 \end{aligned}$$

Weiter sei $U(P, S)$ die Menge aller Start- und Endpunkte der Teilstrecken. Also gerade alle Zwischenpunkte, die hier aufgelistet wurden. Diese werden nun neu durchnummeriert und im folgenden mit der Variable t bezeichnet. Es ist also $U(P, S) = \{t_1, t_2, \dots, t_\lambda\}$, so dass $S = t_1 t_2 \dots t_\lambda$ und $t_i t_{i+1}$ ist ein Teilstrecke von S für alle $i \in \{1, 2, \dots, \lambda - 1\}$.

7.3.1 Komplexität der Einteilung in Teilstrecken

Es gibt n Eckpunkte des Polygons und k Knickpunkte des Streckenzugs. Diese $n + k$ Punkte müssen für die Konstruktion von $L(P, S)$ paarweise zu einer Gerade erweitert werden. Das heißt die Mächtigkeit von $L(P, S)$ ist $O((k + n)^2)$. Um nun die Unterteilung der Strecken in Teilstrecken durchzuführen, muss zwischen jeder Gerade aus $L(P, S)$ und jeder Strecke $s_i s_{i+1}$ ein Schnittpunkt berechnet werden. Das heißt, es gibt insgesamt $O((k + n)^2 \cdot k)$ Teilstrecken und somit ist λ nur polynomiell groß.

7.4 Unterteilung des Polygons

Gerade wurde der Streckenzug S in Teilstrecken mit den Start- bzw. Endpunkten $U(S)$ unterteilt. Nun soll das Polygon unterteilt werden. Dies geschieht in zwei Schritten. Zunächst wird das Polygon in **Gebiete** unterteilt. Das geschieht mit der Menge $L(P, S)$ an Geraden. Dann wird jedes Gebiete ein weiteres mal unterteilt. Diese weitere Unterteilung geschieht mit einer weiteren Menge an Geraden, die noch definiert wird. Diese teilt dann jedes Gebiet in mehrere **Regionen** ein.

7.4.1 Unterteilung des Polygons in Gebiete

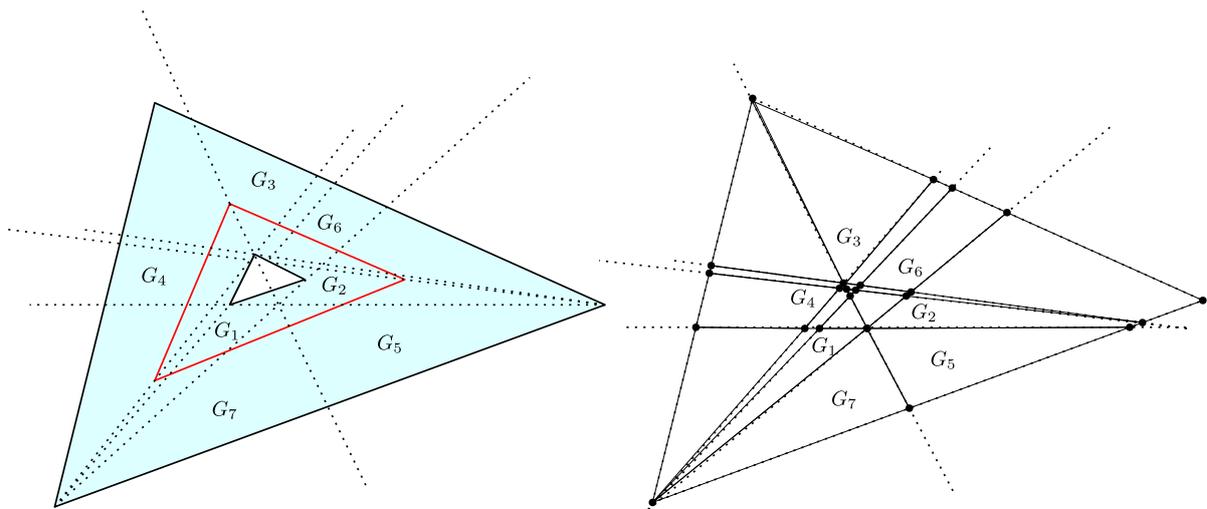


Abbildung 7.2: In dieser Grafik sieht man die Unterteilung des \mathbb{R}^2 in Gebiete. Es wurden nicht alle Gebiete eingezeichnet.

Betrachte die Menge $L(P, S)$. Diese Menge an Geraden liegt im \mathbb{R}^2 und unterteilt diesen in verschiedene **Gebiete**. Siehe dazu Abbildung **TODO**. Ein Gebiet ist eine zusammenhängende Menge an Punkten, die von Geraden aus $L(P, S)$ eingeschlossen ist. Zu einem Gebiet soll auch sein Rand gehören. Die Anzahl an Gebieten ist endlich, da die Anzahl an erzeugenden Geraden $|L(P, S)| = O((k+n)^2)$ endlich ist. Es bezeichne nun $G^*(P, S) = \{G_1, G_2, \dots, G_\xi\}$ diese Menge Gebieten.

7.4.2 Eigenschaften von Gebieten

Sei $E(P)$ die Menge aller Kanten von P . Nun kann man folgendes feststellen:

$$\{\bar{k} : k \in K(P)\} \subset L(P, T)$$

Das heißt, die Verlängerung aller Kanten ist eine Teilmenge von $L(P, T)$. Das ist klar, da eine Kante gerade die Verbindung zweier Ecken ist.

Es gilt außerdem:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^{\xi} G_i$$

Das heißt, die Vereinigung aller Gebiete bildet den \mathbb{R}^2 .

Dadurch kann folgende Menge definiert werden:

Definition 7.2: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon mit Löchern und $G^*(P, T) = G_1, \dots, G_\xi$ dessen Unterteilung in Gebiete. Dann ist

$$G(P, S) := \{G \in G^*(P, T) : G \subset P\}.$$

Das ist also gerade die Menge an Gebieten, welche sich innerhalb des Polygons befinden. Es ist klar, dass gilt:

$$\bigcup_{G \in G(P, S)} G = P$$

Da ein Gebiet außerdem aus dem Schnitt von Geraden entsteht, ist jedes Gebiet konvex.

7.4.3 Komplexität der Einteilung in Gebiete

Diese Konstruktion von Gebieten wird später für die Reduktion einer Watchman Route Instanz zu einer ETR Instanz genutzt. Dafür muss die Konstruktion in polynomieller Zeit durchführbar sein. Es ist $|V(P)| = n$ die Anzahl an Ecken des Polygons und dessen Löcher und k die Anzahl an Knickpunkten des Streckenzugs. Die Menge $L(P, S)$ hat $O((n + j)^2)$ Geraden.

Nun muss noch die Anzahl an Gebieten bestimmt werden, die durch $L(P, T)$ erzeugt werden. Es ist nicht offensichtlich, dass die Anzahl an Gebieten nicht exponentiell mit der Anzahl an Geraden wächst. In „Computational Geometry“ wurde diese Unterteilung untersucht [BCKO08]. Es wird gezeigt, dass die Anzahl an Gebieten quadratisch mit der Anzahl an Geraden wächst. Das heißt, es gibt insgesamt $O((n + j)^4)$ Gebiete.

7.5 Unterteilung von Gebieten in Regionen

Da diese Gebiete noch nicht alle Eigenschaften besitzen, die für die Konstruktion einer ETR Instanz benötigt werden, müssen diese ein weiteres mal unterteilt werden.

7.5.1 Unterteilung von Gebieten in Regionen

Sei P ein Polygon mit Löchern und S ein Streckenzug in P mit den Eckpunkten p_1, \dots, p_k . Außerdem sei $G(P, T)$ die Unterteilung von P in Gebiete und $U(P, S)$ die Unterteilung von S in Teilstrecken. Die Gebiete werden nun ein weiteres mal unterteilt. Betrachte dazu folgende Menge an Geraden:

$$L^2(P, S) := \{\overline{te} : t \in U(P, S), e \in V(P)\}$$

Diese Menge an Geraden entsteht, indem von jedem Start- bzw. Endpunkt einer Teilstrecke zu jedem Eckpunkt des Polygons eine Gerade gezogen wird. Die Geraden dieser Menge schneiden nun die Gebiete $G(P, T)$ und unterteilen diese somit ein weiteres mal in **Regionen**. Bezeichne diese mit $R(P, S)$. Wie bei den Gebieten, gehört auch hier der Rand zu der Region. Diese Unterteilung ist sehr technisch und wird selbst bei kleinen Beispielen sehr groß. Deshalb ist es schwierig dafür ein Beispiel zu finden. Es wird hier nochmal zusammengefasst, wie eine Region entsteht. Dafür ist ein Polygon P und ein Streckenzug S gegeben:

- Zunächst wird die Menge $L(P, S)$ an Geraden gebildet. Diese wird gebildet, indem von jedem Eck- und Knickpunkt zu jedem weiteren Eck- und Knickpunkt eine Gerade gebildet wird.
- Die Geraden dieser Menge schneiden nun den Streckenzug S . Die Punkte, in denen dieser Streckenzug geschnitten wird, sowie die Knickpunkte des Streckenzugs werden mit $U(P, S)$ bezeichnet.

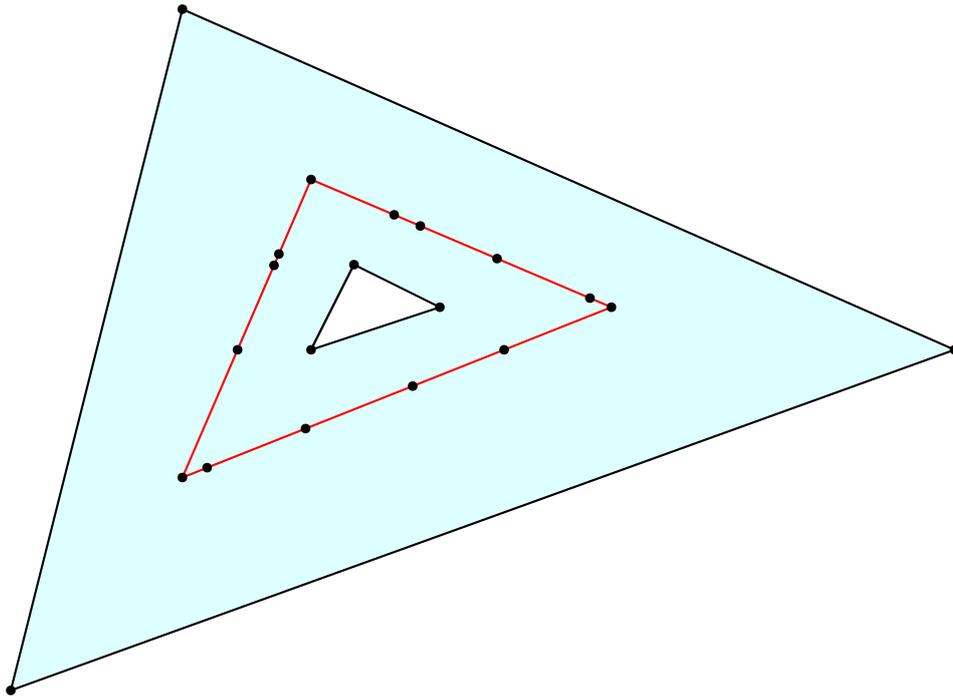


Abbildung 7.3: Diese Abbildung zeigt die Konstruktion von Regionen. Es gibt leider zu viele Regionen, um diese anschaulich darzustellen. Verbindet man alle schwarzen Punkte in dieser Grafik paarweise miteinander, so bekommt man $L^2(P, S)$ und somit auch alle Regionen $R(P, S)$.

- Nun wird außerdem das Polygon zerteilt. Dieses wird zunächst in Gebiete unterteilt. Diese entstehen, indem man nochmals die Menge $L(P, S)$ betrachtet. Diese Menge unterteilt den \mathbb{R}^2 in Gebiete. Diejenigen Gebiete, die im Polygon liegen werden mit $G(P, S)$ bezeichnet.
- Als nächstes wird jedes Gebiet in Regionen zerteilt. Dies geschieht wie folgt: Es wird zunächst die Menge $L^2(P, S)$ konstruiert. Diese entsteht, indem von jedem Zwischenpunkt des Streckenzugs $U(P, S)$ zu jedem Eckpunkt $V(P)$ des Polygons eine Gerade gebildet wird. Die Geraden dieser Menge schneiden nun die Gebiete und unterteilen diese in Regionen. Diese werden mit $R(P, S)$ bezeichnet.

Diese Konstruktion ist sehr technisch, allerdings kann auf keine dieser Unterteilungen verzichtet werden, da jede Unterteilung eine Eigenschaft mit sich bringt die später im wichtigsten Lemma dieses Kapitels benötigt wird.

Lemma 7.3: Sei P ein Polygon und S ein Streckenzug. Dann gilt:

$$\bigcup_{R \in R(P, S)} R = P$$

Beweis. Für die Menge aller Gebiete gilt $\bigcup_{G \in G(P, S)} G = P$. Da jedes Gebiet weiter in Regionen unterteilt wurde, existiert außerdem zu jedem Gebiet $G \in G(P, S)$ eine Menge an Regionen $\{R_1, R_2, R_3, \dots, R_k\}$ für die gilt: $\bigcup_{i=1}^k R_i = G$. Da das für jedes G in P gilt und die Vereinigung aller G das Polygon P bilden, folgt die Behauptung. ■

7.5.2 Komplexität der Einteilung in Regionen

Um ein Gebiet in eine Region einzuteilen muss zunächst die Kardinalität von $L^2(P, S)$ bestimmt werden. Für $L^2(P, S)$ wurden alle Zwischenpunkte aus $U(S)$ mit allen Eckpunkten $V(P)$ zu einer Geraden erweitert. Die Anzahl an Zwischenpunkten $\|U(S)\|$ ist $O((k+n)^2 \cdot k)$. Die Anzahl an Eckpunkten $V(P)$ ist n . Das heißt die Kardinalität von $\|L^2(P, S)\|$ ist $O((k+n)^2 \cdot k \cdot n) = O(nk^3 + 2 \cdot n^2k^2 + n^3k)$. Die Gerade dieser Menge schneiden nun alle Gebiete und bilden so Regionen. Das kann man auch interpretieren, als die entstehenden Regionen aus den Geraden $L(P, S) \cup L^2(P, S)$. Diese Menge hat die Kardinalität $L(P, S) \cup L^2(P, S) = O((k+n)^2 \cdot k \cdot n)$ und somit kann wieder mit [BCKO08] die Anzahl an Regionen bestimmt werden. Denn diese wächst dann nur quadratisch mit der Anzahl an Geraden. Also ist die Anzahl an Regionen $\|R(P, S)\|$ gleich $O(((k+n)^2 \cdot k \cdot n)^2)$. Insbesondere also polynomiell bezüglich n und k .

7.6 Konstruktion einer endlichen Zeugenmenge

In diesem Abschnitt wird ein Lemma bewiesen, welches hilft eine Zeugenmenge zu konstruieren. Die Zeugenmenge, die konstruiert wird, besteht aus den Mittelpunkten aller Regionen. Da die Anzahl an Regionen polynomiell mit der Eingabegröße wächst, ist die Zeugenmenge polynomiell groß.

Zunächst wird der Begriff „sehen“ erweitert.

Definition 7.4: Sei P ein Polygon. Eine Strecke t in P **sieht** einen Punkt p in P , genau dann wenn ein t^* auf t existiert, sodass t^* den Punkt p sieht. Sei weiter R eine Region. Die Strecke t **sieht** R genau dann wenn t alle $r \in R$ sieht.

7.6.1 Es genügt einen Punkt einer Region zu überprüfen

Lemma 7.5: Sei P ein Polygon mit Löchern, S ein Streckenzug mit der Unterteilung in die Zwischenpunkte $U(P, S)$ und die Unterteilung in die Regionen $R(P, S)$. Dann gilt für $R \in R(P, S)$ und einer Teilstrecke $t = t_1t_2$ mit $t_1, t_2 \in U(P, S)$:

$$\forall r \in R : (t \text{ sieht } r \Rightarrow t \text{ sieht } R)$$

Dieser Satz besagt, dass wenn eine Teilstrecke einen Punkt einer Region sieht, dann wird die ganze Region gesehen. Der Satz besagt weiterhin, dass es nicht nur einen Punkt gibt, der diese Eigenschaft hat, sondern dass das für jeden beliebigen Punkt der Region gilt. Das heißt, um später zu überprüfen, ob eine Teilstrecke eine Region sieht, genügt es zu überprüfen, ob eine Teilstrecke einen Punkt, etwa den Mittelpunkt der Region, sieht. Denn aus diesem Lemma folgt außerdem, dass eine Region ganz oder gar nicht gesehen wird. Der Beweis für diesen Satz ist sehr technisch und sehr lang und beinhaltet viele Fallunterscheidungen. Deshalb wird er in verschiedene Abschnitte unterteilt.

Beweis. Das Bild malen:

Für diesen Beweis werden mehrere n -Ecke konstruiert. Es bezeichnet Δ_{abc} das Dreieck mit den Eckpunkten a, b und c und $\square_{abcd\dots}$ bezeichnet das n -Eck mit den Eckpunkten a, b, c, d, \dots . Es seien t_1 und t_2 der Anfangs bzw. Endpunkt von t . Es wird nun die Region R und die Teilstrecke t betrachtet. Man kann direkt feststellen: Die Region R kann nicht so liegen, dass die Gerade \bar{t} die Region R schneidet. Siehe dazu Abbildung 7.4. Denn läge die Region R so, dass die Gerade \bar{t} diese schneidet, so führt das direkt zum Widerspruch:

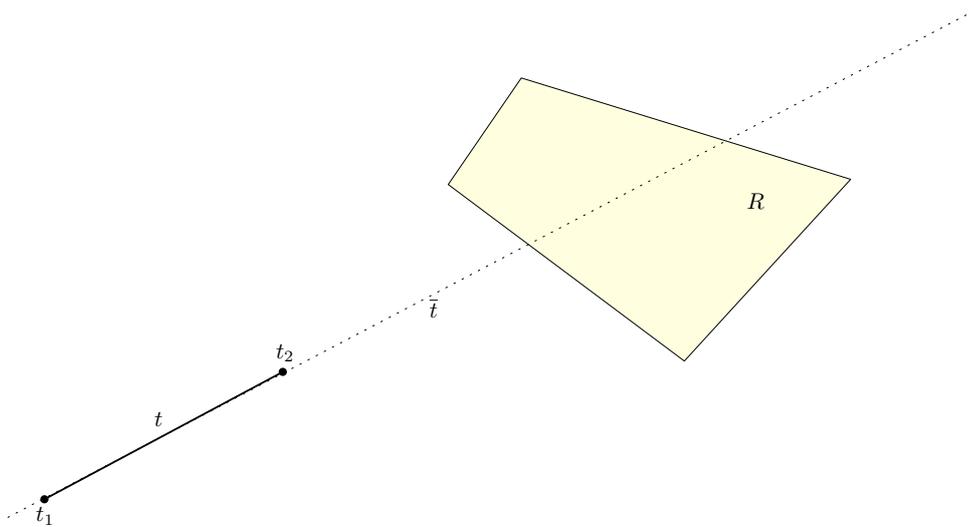


Abbildung 7.4: In dieser Abbildung sieht man, wie eine Region und eine Teilstrecke nicht liegen können.

s Zur Teilstrecke t gehört eine Überliegende Strecke $s = s_1s_2$, für die gilt: $t \subseteq s$. Die Gerade \bar{s} ist identisch mit der Geraden \bar{t} . Diese Gerade liegt in $L(P, S)$ und kann somit die Region R nicht schneiden. Das heißt die Region R kann in diesem Sinne nicht „über“ der Teilstrecke t liegen. Sie kann also links oder rechts der Teilstrecke liegen. O.B.d.A wird angenommen, dass R rechts von t liegt. Das Koordinatensystem kann immer so gedreht werden, dass die Teilstrecke t parallel zur Y-Achse liegt. Siehe dazu Abbildung 7.4.

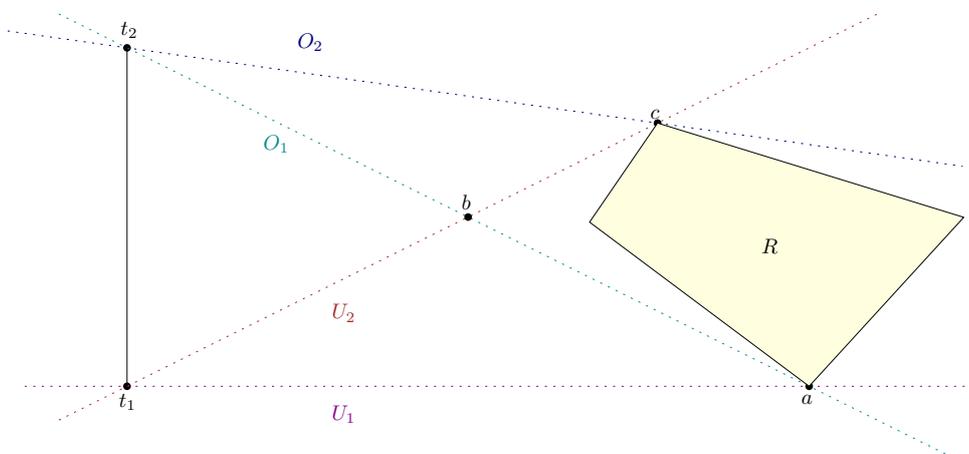


Abbildung 7.5: In dieser Abbildung sieht man, wie die Geraden O_1, O_2, U_1 und U_2 konstruiert sind. Außerdem sieht man die Schnittpunkte a, b und c .

Im folgenden werden die Geraden O_1, O_2 und U_1, U_2 konstruiert. In Abbildung 7.5 sind diese abgebildet. Anschaulich sind U_1 und U_2 gerade diejenigen Geraden, die vom Punkt t_1 aus die Region R „gerade so“ einschließen und O_1 und O_2 sind gerade diejenigen Geraden, die vom Punkt t_2 aus die Region R „gerade so“ einschließen. Diese werden nun formal definiert. Betrachte nun den Punkt t_2 . Betrachte nun alle Geraden mit den folgenden Eigenschaften:

- 1 Die Gerade geht durch den Punkt t_2

2 Die Gerade geht durch genau einen Punkt in R oder die Gerade verlängert eine Kante von R .

Man kann sich klar machen, dass es genau zwei Geraden gibt, die diese Eigenschaften erfüllen. Bezeichne diejenige mit der größeren Steigung mit O_2 und diejenige mit der geringeren Steigung als O_1 . Mache diese Konstruktion analog mit dem Punkt t_1 und bezeichne die Gerade mit der geringeren Steigung als U_1 und die Gerade mit der höheren Steigung als U_2 .

Bezeichnung der Schnittpunkte Bezeichne nun die Schnittpunkte der sich schneidenden Geraden. Es bezeichne $X \oplus Y$ den Schnittpunkt zweier Geraden. Es sei $U_1 \oplus O_1 = a$, $U_2 \oplus O_1 = b$ und $O_1 \oplus O_2 = c$. Diese Zerlegung ist in Abbildung 7.5 dargestellt.

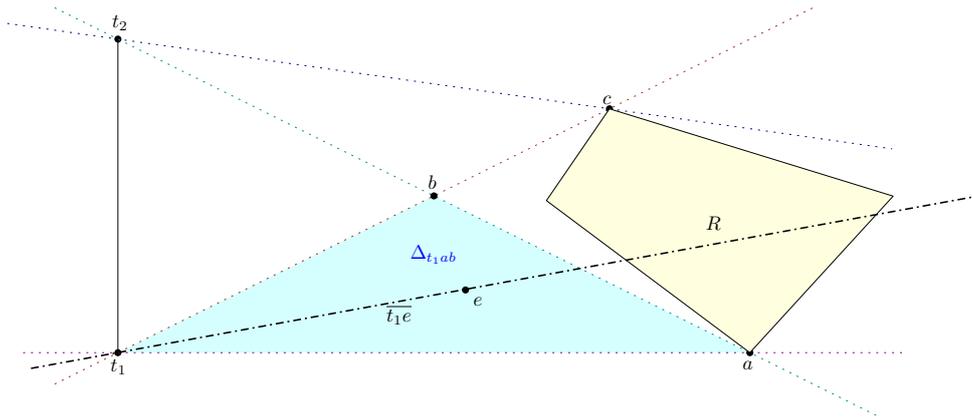


Abbildung 7.6: Diese Abbildung veranschaulicht, dass sich kein Eckpunkt in dem hellblauen Dreieck befinden kann, da ansonsten die Region R geschnitten würde.

Eckpunkte können sich nur in einem Dreieck aufhalten

Betrachte die Dreiecke Δ_{t_1ab} , Δ_{t_2bc} und Δ_{abc} . In diesen Dreiecken kann sich kein Eckpunkt aus $V(P)$ befinden. Denn befände sich ein Eckpunkt $e \in V(P)$ in Δ_{t_1ab} , so würde die Gerade $\overline{t_1e}$ die Region R schneiden. Siehe Abbildung 7.6. Die Gerade $\overline{t_1e}$ befindet sich in $L^2(P, T)$. Da Regionen allerdings so konstruiert wurden, dass die Gerade aus $L^2(P, T)$ nur Teil vom Rand einer Region sein können, führt dies zu einem Widerspruch. Analog gilt dieses Argument für das Dreieck Δ_{t_2bc} mit Punkt t_2 und der Gerade $\overline{t_2e}$. In dem Dreieck Δ_{abc} kann sich auch kein Eckpunkt $e \in V(P)$ befinden, denn dann würde sowohl die Gerade $\overline{t_2e}$, als auch die Gerade $\overline{t_1e}$ die Region R schneiden.

Mögliche Anordnung von Löchern Betrachte nun das verbleibende Dreieck $\Delta_{S_1S_2B}$. In diesem können sich Eckpunkte von mehreren Löchern befinden. Es können sich auch ganze Löcher in diesem Dreieck befinden. Allerdings ist nicht jede Anordnung von Löchern möglich. Im folgenden wird bewiesen, dass in jeder möglichen Anordnung von Löchern die Region R noch ganz von t gesehen wird. Dafür werden Fallunterscheidungen bezüglich dem Viereck $\square_{t_1t_2ac}$ getroffen.

Fall 1: Kein Loch schneidet das Viereck $\square_{S_1S_2AC}$ (Siehe Abbildung ??): In diesem Fall sieht jeder Punkt von t jeden Punkt von R und das Lemma ist offensichtlich wahr. In den folgenden Fällen werden also nur Löcher betrachtet, die $\square_{t_1t_2ac}$ auch schneiden.

Fall 2: Die Kante K eines Loches L schneidet sowohl t_1a , als auch t_2c . Siehe Abbildung 7.7. In diesem Fall existiert kein Punkt auf t , der einen Punkt in R sieht. Sei dazu $t^* \in t$ und $r^* \in R$. Betrachte nun die allgemeine Strecke t^*r^* . Jede dieser Strecken schneidet die Kante K . Also gibt es keinen Punkt auf t , der einen Punkt in r sieht. Somit ist die Voraussetzung des Lemmas falsch und das Lemma somit korrekt.

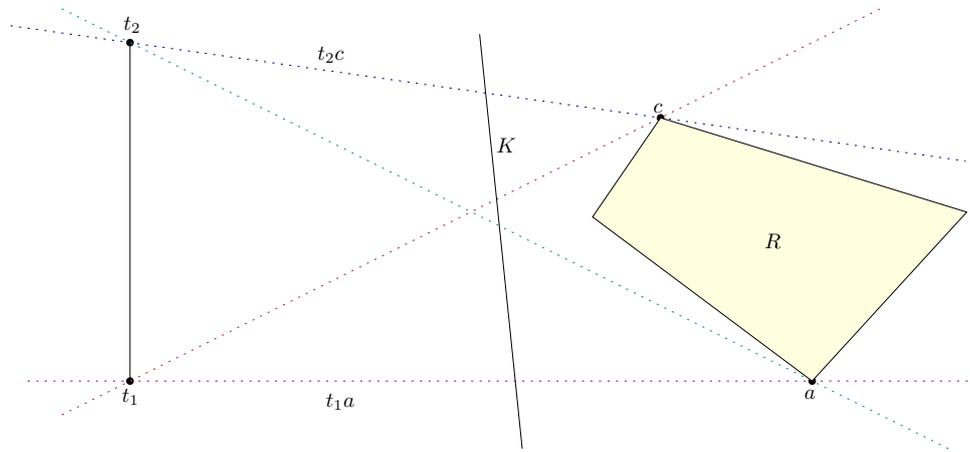


Abbildung 7.7: Diese Abbildung zeigt Fall 2. Dabei ist K eine Kante, die die „Sicht“ von t auf R versperrt.

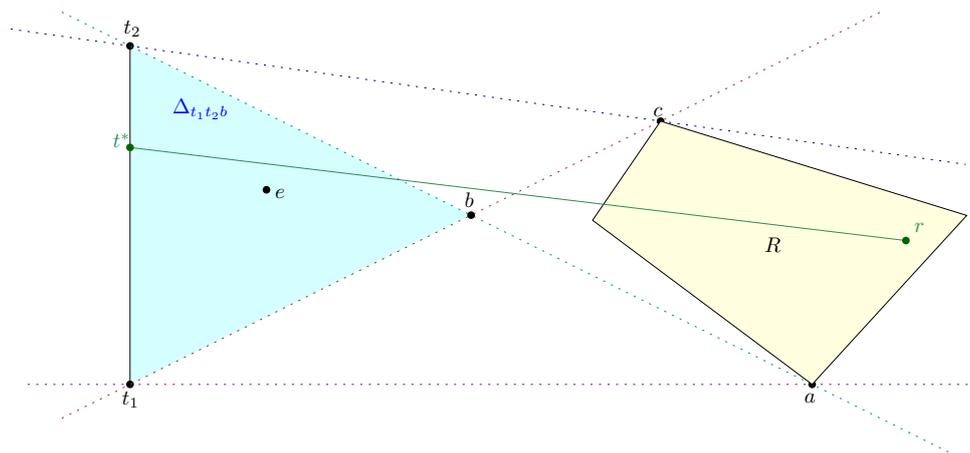


Abbildung 7.8: Diese Abbildung zeigt Fall 3. Dabei ist die dunkelgrüne Strecke eine Sichtlinie und e der Eckpunkt, der unter der Sichtlinie liegt.

Fall 3: Es befindet sich mindestens ein Eckpunkt von $V(P)$ in $\square_{t_1 t_2 a c}$. Es wurde bereits festgestellt, dass sich kein Eckpunkt in den Dreiecken $\Delta_{t_1 a b}$, $\Delta_{t_2 b c}$ und $\Delta_{a b c}$ befinden kann. Das heißt alle Eckpunkte befinden sich in dem Dreieck $\Delta_{t_1 t_2 b}$. Nach Voraussetzung existiert ein r in R , dass von einem t^* in t gesehen wird. Betrachte nun die Strecke rt^* . Diese Strecke schneidet offensichtlich kein Loch. Betrachte nun den Eckpunkt, der dieser Strecke am nächsten ist und sich außerdem im Dreieck $\Delta_{t_1 t_2 b}$ befindet. „Am nächsten“ ist dabei wie folgt definiert: Verschiebe die Strecke rt^* entlang der Y-Achse, entweder hoch oder runter, bis ein Eckpunkt gefunden wird. O.B.d.A ist der nächste Eckpunkt unter der Strecke rt^* . Befindet sich der Eckpunkt über der Strecke rt^* , so kann man das ganze Koordinatensystem an der X-Achse spiegeln und dann befindet sich der Eckpunkt unter der Strecke. Nenne diesen Eckpunkt e . Siehe hierfür Abbildung 7.8. Betrachte nun folgende Geraden $\overline{t_2 e}$ und $\overline{t_1 e}$. Diese Geraden unterteilen das Dreieck $\Delta_{t_1 t_2 b}$ in vier Teile. Siehe dazu Abbildung 7.9. Benenne dafür folgende Schnittpunkte $\overline{t_2 e} \oplus t_1 c = f$ und $\overline{t_1 e} \oplus t_2 a = g$. Diese Schnittpunkte existieren immer, da sich der Punkt e in dem Dreieck $\Delta_{t_1 t_2 b}$ befindet. Nun können die vier Teile benannt werden. Diese sind die Dreiecke $\Delta_{t_1 t_2 e}$, $\Delta_{t_1 e f}$, $\Delta_{t_2 e g}$, sowie das Viereck $\square_{e g b f}$.

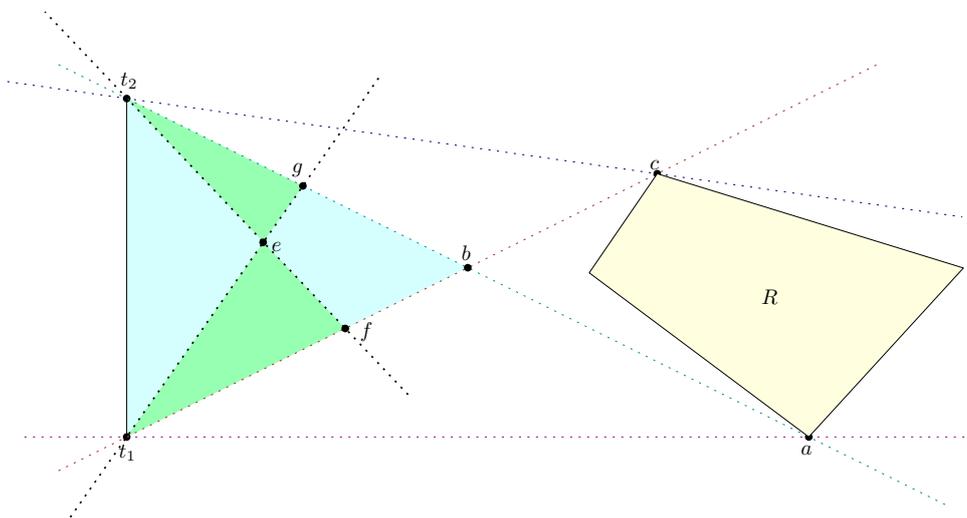


Abbildung 7.9: Diese Abbildung zeigt die weitere Unterteilung des Dreiecks $\Delta_{t_1 t_2 b}$.

Nun kann man Beobachtungen feststellen. So kann zum Beispiel kein weiterer Eckpunkt e^* in dem Dreieck $\Delta_{t_1 t_2 e}$ liegen, denn dann würde die Gerade $\overline{e^* e}$ die Teilstrecke t schneiden. Die Teilstrecken wurden aber so konstruiert, dass keine Gerade aus Eckpunkten von $V(P)$ diese schneiden. Analog gilt das für das Viereck $\square_{e g b f}$. Befände sich in dort ein Eckpunkt e^* , so würde die Gerade $\overline{e^* e}$ die Teilstrecke t schneiden. Siehe dafür Abbildung 7.10

Eine weitere Beobachtung ist die folgende, der Eckpunkt e hat zwei Kanten, die von ihm weg gehen. Sei k eine solche Kante. Für k muss folgendes gelten. Die Kante k kann nicht das Dreieck $\Delta_{t_1 t_2 c}$ schneiden. Denn dann würde wieder die Gerade \overline{k} die Teilstrecke t schneiden. Die Kante k kann außerdem nicht das Viereck $\square_{e g b f}$ schneiden. Auch dann würde die Gerade \overline{k} die Teilstrecke t schneiden. Die Teilstrecken waren aber so konstruiert, dass sie nicht mehr von einer Geraden aus zwei Eckpunkten geschnitten werden können. Betrachte weiter die Kante k . Befände sich diese im Dreieck $\Delta_{t_2 g e}$, so führt das wie folgt zum Widerspruch: Entweder die Kante k schneidet die Strecke rt^* , was gerade die Sichtlinie von t^* zu r ist oder die Kante endet, bevor sie die Sichtlinie schneidet. Endet die Kante bevor sie die Sichtlinie schneidet, so gibt es einen Eckpunkt, der zwischen der Strecke rt^* und e liegt. Nach Voraussetzung

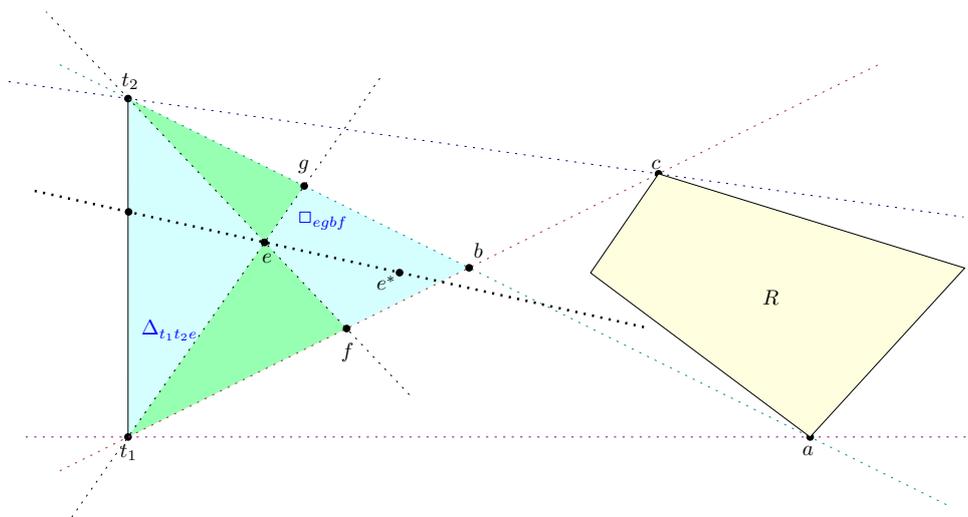


Abbildung 7.10: In dieser Abbildung sieht man, dass sich kein weiterer Eckpunkt e^* in den türkisen Dreiecken befinden kann.

war aber e der Eckpunkt, der am nächsten an der Strecke rt^* liegt. Das hast beide diese Fälle führen zu einem Widerspruch. Also müssen die beiden Kanten von e durch das Dreieck $\Delta_{t_2t_1e}$ verlaufen. Siehe dazu Abbildung 7.11.

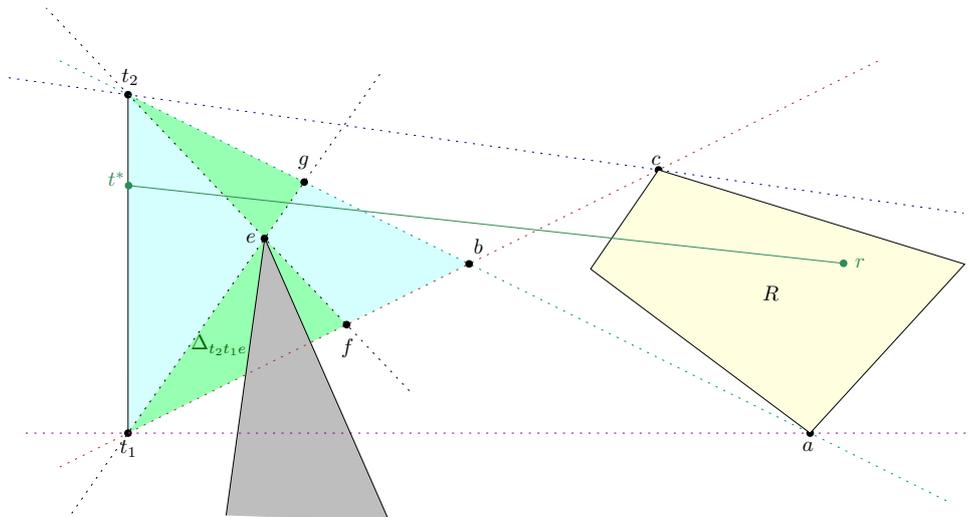


Abbildung 7.11: Diese Abbildung zeigt, wie sich die Kanten des Eckpunktes von e verhalten. In grau sieht man das Loch.

Zusammenfassend ist also folgende Situation gegeben:

Nach Voraussetzung gibt es eine Sichtlinie zwischen $t^* \in t$ und $r \in R$. Dann wurde der Eckpunkten betrachtet, der am nächsten an dieser Sichtlinie liegt. O.B.d.A liegt dieser Punkt unter der Sichtlinie. Dann wurde festgestellt, dass sich kein weiterer Eckpunkt in dem Dreieck $\Delta_{t_1t_2e}$, sowie dem Viereck \square_{efgb} befinden kann. Es wurden dann die Kanten k betrachtet, die von dem Eckpunkt e weg gehen. Diese müssen durch das Dreieck Δ_{t_1fe} verlaufen. Das heißt, weitere Eckpunkte können sich nur in dem Dreieck Δ_{t_2eg} und Δ_{t_1ef} aufhalten. Mit diesen Informationen kann man nun den letzten Fall beweisen. Siehe dafür Abbildung 7.12.

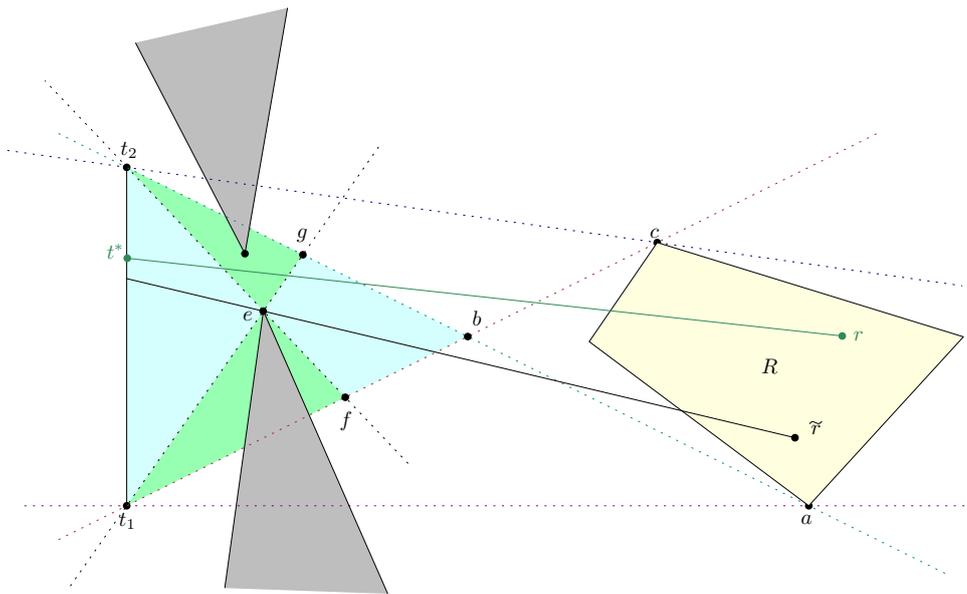


Abbildung 7.12: Diese Abbildung zeigt, wie ein weiteres Loch liegen kann.

Sei nun \tilde{r} ein Punkt der Region R . Dieser Punkt befindet sich also in dem von den beiden Geraden \overline{bc} und \overline{ba} eingeschlossenen Bereich, der außerdem die Region R beinhaltet. Betrachte nun die Strecke $\tilde{r}e$. Diese Strecke muss vollständig in P liegen. Denn in Δabc , $\Delta t_1 ab$, $\Delta t_2 bc$ und \square_{efgb} können keine Eckpunkte liegen, also kann es auch keine Kante geben, die $\tilde{r}e$ schneidet. Denn mögliche Kanten können nur die Dreiecke $\Delta_{t_1 ef}$ und $\Delta_{t_2 eg}$ schneiden. Da zwischen diesen Dreiecken allerdings ein Bereich ist, durch welchen gesehen werden kann, schneidet die Erweiterung der Strecke $\tilde{r}e$ die Teilstrecke t in einem Punkt \tilde{t} , sodass der Punkt \tilde{t} den Punkt \tilde{r} sieht. Damit ist Fall 3 abgeschlossen und somit folgt die Behauptung. ■

7.6.1.1 Folgerung des Lemmas

Durch Kontraposition, folgt aus Lemma 7.5 folgendes: Wird ein Punkt einer Region von einer Teilstrecke nicht gesehen, so wird die ganze Region nicht gesehen. Um also zu überprüfen, ob eine Teilstrecke eine Region sieht, genügt es für einen beliebigen Punkt aus dieser Region zu überprüfen, ob die Teilstrecke diese sieht. Möchte man weiter überprüfen, ob die Region vom ganzen Streckenzug gesehen wird, so muss die Tour in Teilstrecken zerlegt werden und dann von jeder Teilstrecke überprüft werden, ob ein beliebiger Punkt dieser Region gesehen wird. Um weiter zu überprüfen, ob das ganze Polygon von dem Streckenzug gesehen wird, so muss dieser Schritt für alle Regionen durchgeführt werden.

7.6.2 Die Zeugenmenge

Um nun eine endliche Zeugenmenge zu konstruieren, wird ein Punkt aus jeder Region gewählt. Der Einfachheit halber sei dies der Mittelpunkt jeder Region. Sei also P ein Polygon mit Löchern und S ein Streckenzug im Polygon. Sei außerdem $U(P, S)$ die Unterteilung in Teilstrecken und $R(P, S)$ die Unterteilung von P in Regionen. Die **Zeugenmenge** $Z(P, S)$ ist dann

$$Z(P, S) := \left\{ \frac{e_1 + \dots + e_h}{h} : R \in R(P, S) \wedge e_1, \dots, e_h \text{ sind alle Eckpunkte von } R \right\}$$

Die Mächtigkeit von $Z(P, S)$ entspricht dann der Anzahl an Regionen. Diese ist mit n Eckpunkten des Polygons und k Knickpunkten der Tour gerade $O(((k+n)^2 \cdot k \cdot n)^2)$.

7.6.3 Strecke sieht Punkt

Nun muss noch ein Weg gefunden werden, wie mit polynomiellm Zeitaufwand überprüft werden kann, ob eine Strecke einen Punkt sieht. Das ist zunächst nicht klar, denn eine Strecke hat überabzählbar viele Punkte, die potentiell überprüft werden müssen. Allerdings kann man diese überabzählbar vielen Punkt reduzieren und es wird gezeigt, dass es genügt polynomiell viele Punkte zu überprüfen. Im Beweis des letzten Lemmas konnte man schon sehen, welcher Bereich der Strecke angibt, ob ein Punkt gesehen wird. Dies soll nun konkret angegeben werden. Konstruiere dafür ein Prädikat, welches überprüft, ob eine Strecke s im Polygon P einen Punkt p sieht. Dieses soll nur aus dem Alphabet $\{\wedge, \vee, \leq, =, (,) +, -, x_1, x_2, \dots\}$ bestehen und polynomiell lang bezüglich P sein. Definiere dafür folgende Hilfsprädikate:

Das Hilfsprädikat $\text{SCHNEIDET}(a, b, c, d)$ ist wahr, wenn die Strecke ab die Strecke cd schneidet. Es sei $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y)$, $c = (c_x, c_y)$, $d = (d_x, d_y)$. Definiere nun das Skalarprodukt

$$N := (b_x - a_x) \cdot (d_y - c_y) - (b_y - a_y) \cdot (d_x - c_x)$$

der Vektoren $b - a$ und $d - c$. Und für $N \neq 0$

$$s := \frac{(c_x - a_x) \cdot (d_y - c_y) - (c_y - a_y) \cdot (d_x - c_x)}{N}$$

und weiter

$$t := \frac{a_x - c_x + s \cdot (b_x - a_x)}{d_x - c_x}$$

Mit diesen Hilfsvariablen gilt folgendes: ab und cd sind parallel, genau dann wenn $N = 0$ und sie schneiden sich genau dann, wenn $0 \leq t, s \leq 1$. Das heißt das Prädikat kann so definiert werden:

$$\text{SCHNEIDETSTRECKESTRECKE}(a, b, c, d) \equiv \neg(N = 0) \wedge 0 \leq t \leq 1 \wedge 0 \leq s \leq 1$$

Die Länge dieses Prädikates ist konstant.

Nun kann das Prädikat $\text{SIEHPUNKTPUNKT}(P, p_1, p_2)$ konstruiert werden. Dieses überprüft, ob p_1 den Punkt p_2 im Polygon P sieht. Seien k_1, \dots, k_n die Menge an Kanten in P und $\text{Start}(k_i)$ gibt den Startpunkt und $\text{Ende}(k_i)$ den Endpunkt der Strecke an. Dann ist $\text{SIEHT}(P, p_1, p_2)$ gerade:

$$\text{SIEHPUNKTPUNKT}(P, p_1, p_2) \equiv \bigwedge_{f=1}^n \neg \text{SCHNEIDETSTRECKESTRECKE}(p_1, p_2, \text{Start}(k_f), \text{Ende}(k_f))$$

Die Länge dieses Prädikates ist gerade die Länge des Prädikates $\text{SCHNEIDETSTRECKESTRECKE}$ multipliziert mit der Anzahl an Kanten n . Da die Länge des Prädikates $\text{SCHNEIDETSTRECKESTRECKE}$ konstant ist, ist die Länge von SIEHPUNKTPUNKT gerade $O(n)$

Um das Prädikat SIEHTSTRECKEPUNKT zu definieren wird folgendes Lemma gezeigt:

Lemma 7.6: Sei P ein Polygon mit Löchern, s eine Strecke mit s_1 Startpunkt und s_2 Endpunkt in P und p ein Punkt in P . Dann gilt:

$$s \text{ sieht } p \Leftrightarrow s_1 \text{ sieht } p \vee s_2 \text{ sieht } p \vee \exists e \in E(P) : \overline{pe} \text{ schneidet } s \text{ in } x \wedge x \text{ sieht } p$$

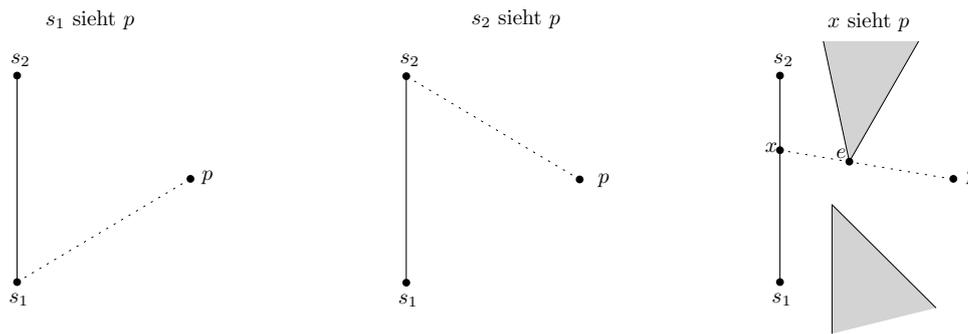


Abbildung 7.13: In dieser Abbildung sieht man die drei Fälle, wie überprüft wird, ob ein Punkt von einer Strecke gesehen wird.

Beweis. Gelte zunächst die rechte Seite, also s_1 sieht p oder s_2 sieht p oder es existiert eine Ecke $e \in V(P)$ für die gilt, dass die Gerade \overline{pe} einen Punkte x auf s schneidet und dieser Punkt p sieht. Dann gibt es zwei Fälle:

Fall 1: s_1 oder s_2 sehen den Punkt p . Dann sieht per Definition s den Punkt p .

Fall 2: s_1 und s_2 sehen den Punkt p nicht. Damit dann die rechte Seite wahr ist, muss ein Punkt e in $V(P)$ existieren, sodass \overline{pe} schneidet s in $x \wedge x$ sieht p . Dann sieht $x \in s$ den Punkt p .

Gelte nun die linke Seite, also s sieht p : Da s nach Voraussetzung den Punkt p sieht, existiert ein $p^* \in s$, sodass p^* den Punkt p sieht. Läuft man nun die Strecke s in Richtung s_1 stetig ab und der Punkt p wird zu jedem Zeitpunkt gesehen, so sieht s_1 den Punkt p und die Aussage ist wahr. Ist dies nicht der Fall, so muss es einen Punkt \hat{p} geben, ab dem \hat{p} den Punkt p gerade noch sieht und für jedes ϵ weiter in Richtung s_1 der Punkt \hat{p} den Punkt p nicht mehr sieht. Betrachte die Strecke $\hat{p}p$. Damit \hat{p} den Punkt p gerade noch sieht, muss die Gerade $\overline{\hat{p}p}$ eine Ecke schneiden oder zumindest berühren. Dann sieht \hat{p} den Punkt p nach Konstruktion. Da dieses Argument Analog für s_2 geführt werden kann, folgt die Aussage in die rechte Richtung und somit stimmt die Aussage. ■

Das heißt um zu prüfen, ob eine Strecke s_1s_2 einen Punkt p sieht, genügt es endlich viele Schnittpunkte zu überprüfen. Genauer muss also geprüft werden, ob s_1 den Punkt p sieht oder ob s_2 den Punkt p sieht, oder ob eine Gerade aus p und einem Eckpunkt die Strecke s schneidet und diesen Schnittpunkt auch sieht. Sei $\text{SCHNEIDETSTRECKEGERADE}(a, b, c, d)$ wie folgt definiert:

$$\text{SCHNEIDETSTRECKEGERADE}(a, b, c, d) \equiv \neg(N = 0) \wedge 0 \leq t \leq 1$$

Diese Prädikat ist wahr, falls ein Schnittpunkt zwischen der Strecke ab und der Geraden \overline{cd} existieren. Die Länge dieses Prädikates ist $O(n)$. Sei $\oplus(a, b, c, d)$ eine Funktion, die den Schnittpunkt aus einer Geraden ab und einer Gerade cd angibt. Diese kann man wie folgt definieren:

$$\oplus(a, b, c, d) = A + s \cdot (B - A)$$

Dabei ist s wie folgt definiert:

$$N := (b_x - a_x) \cdot (d_y - c_y) - (b_y - a_y) \cdot (d_x - c_x)$$

der Vektoren $b - a$ und $d - c$. Und für $N \neq 0$

$$s := \frac{(c_x - a_x) \cdot (d_y - c_y) - (c_y - a_y) \cdot (d_x - c_x)}{N}$$

Jetzt kann also das Prädikat $\text{SIEHTSTRECKEPUNKT}(P, s_1, s_2, p)$ definiert werden. Seien e_1, \dots, e_n alle Eckpunkte des Polygons. Dann ist:

$$\begin{aligned} \text{SIEHTSTRECKEPUNKT}(P, s_1, s_2, p) \equiv & \\ \text{SIEHPUNKTPUNKT}(P, s_1, p) \vee \text{SIEHPUNKTPUNKT}(P, s_2, p) & \\ \vee \bigvee_{i=1}^{i=n} \text{SCHNEIDETSTRECKEGERADE}(s_1, s_2, p, e_i) \Rightarrow \text{SIEHPUNKTPUNKT}(P, \oplus(s_1, s_2, p, e_i), p) & \end{aligned}$$

Nun wird die Länge dieses Prädikats überprüft. Insgesamt gibt es $n+2$ mal das Prädikat SIEHPUNKTPUNKT . Zwei mal um den Start und Endpunkt zu überprüfen und für die n Eckpunkte jeweils noch einmal. Dieses hat eine Länge von $O(n)$. Die Berechnung des Schnittpunktes erfolgt außerdem in konstanter Zeit. Das heißt die Länge aller SIEHPUNKTPUNKT Prädikate ist $O(n^2)$. Außerdem gibt es n mal das Prädikat $\text{SCHNEIDETSTRECKEGERADE}(s_1, s_2, p, e_i)$. Dieses hat eine Konstante Länge, also ist die Länge aller $\text{SCHNEIDETSTRECKEGERADE}(s_1, s_2, p, e_i)$ gerade $O(n)$. Somit ist die gesamte Länge von $\text{SIEHTSTRECKEPUNKT}(P, s_1, s_2, p)$ gerade $O(n^2)$.

Als nächstes wird ein Prädikat konstruiert, welches wahr ist, falls ein Streckenzug $p_1p_2 \dots p_k$ im Polygon P eine Region R mit Mittelpunkt z sieht. Seien dafür $t_1, t_2, \dots, t_\lambda$ die Unterteilung von $p_1p_2 \dots p_k$ in Teilstrecken. Dann ist folgendes Prädikat wahr, falls die Strecke S die Region R sieht:

$$\text{SIEHTSTRECKENZUGREGION}(P, p_1, \dots, p_k, z) \equiv \bigvee_{i=1}^{\lambda-1} \text{SIEHTSTRECKEPUNKT}(P, t_i, t_{i+1}, z)$$

Streng genommen ist das keine erlaubte Form einer ETR Instanz, denn die Zerlegung des Streckenzuges $p_1p_2 \dots p_k$ in die Teilstrecken $t_1, t_2, \dots, t_\lambda$ müsste in diesem Prädikat auch noch vorkommen. Das wurde hier einfach als gegeben angenommen. Es wurde allerdings bereits gezeigt, dass die Anzahl an Teilstrecken nur polynomiell groß bezüglich n und p ist und außerdem wurde bereits die Funktion \oplus definiert, welche den Schnittpunkt von zwei Geraden bestimmen kann. Um dieses Prädikat also sauber und auf unterster Ebene zu definieren, müsste man polynomiell viele Schnittpunkte ausrechnen. Es ist klar, dass das mit einem Prädikat mit polynomieller Länge darstellbar ist.

Nun fehlt noch das letzte Prädikat, welches genau dann wahr ist, falls ein Streckenzug das ganze Polygon sieht. Seien z_1, z_2, \dots, z_μ alle Punkte der Zeugenmenge. Definiere nun das Prädikat:

$$\text{SIEHTSTRECKENZUGPOLYGON}(P, p_1, \dots, p_k) \equiv \bigwedge_{j=1}^{\mu} \text{SIEHTSTRECKENZUGREGION}(P, p_1, \dots, z_j)$$

7.7 Das Watchman Problem ist in $\exists\mathbb{R}$

Um nun zu zeigen, dass sowohl das WRP als auch das WRPK in $\exists\mathbb{R}$ liegen, wird ein letztes Prädikat benötigt. Dieses soll überprüfen, ob sich ein Streckenzug in dem Polygon befindet. Das Prädikat

$$\text{STRECKENZUGINPOLYGON}(P, p_1, \dots, p_k) \equiv \bigwedge_{i=1}^k \text{IMPOLYGON}(P, p_i) \wedge \text{SIEHPUNKTPUNKT}(P, p_i, p_{i+1 \bmod k})$$

überprüft, ob sich alle Punkte des Streckenzugs im Polygon befinden und ob der Punkt p_i den Punkt p_{i+1} sieht. Es ist klar, dass wenn sich diese Punkte sehen, die Strecke $p_i p_{i+1}$ das Polygon nicht schneidet. Somit überprüft dieses Prädikat, ob sich ein Streckenzug im Polygon befindet. Dieses Prädikat hat außerdem polynomielle Größe bezüglich der Eingabe.

Theorem 7.7: Das Watchman Route Problem mit Knicken ist in $\exists\mathbb{R}$.

Beweis. Sei eine WRPK Instanz gegeben, also ein Polygon P und ein $k \in \mathbb{N}$. Konstruiere die folgende ETR Instanz:

$$\exists p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^2 : \text{STRECKENZUGINPOLYGON}(P, p_1, \dots, p_k) \Rightarrow \text{SIEHTSTRECKENZUGPOLYGON}(P, p_1, \dots, p_k)$$

Nun muss gezeigt werden, dass diese ETR Instanz wahr ist, genau dann wenn die WRPK Instanz wahr ist. Ist die WRPK Instanz wahr, so gibt es also einen Streckenzug, der maximal k Knicke hat und das ganze Polygon sieht. Dann ist aber auch die ETR Instanz wahr, denn dann können die k Knickpunkte erfüllen sowohl das Prädikat $\text{STRECKENZUGINPOLYGON}$, als auch das Prädikat $\text{SIEHTSTRECKENZUGPOLYGON}$ und somit ist die ETR Instanz wahr. Ist die WRPK Instanz falsch, so kann es keine Variablenbelegung $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^2$ geben, so dass die beiden Prädikate wahr sind. Denn dann wäre die Variablenbelegung eine Lösung der WRPK Instanz. Außerdem ist die ETR Instanz nur polynomiell länger, als die WRPK Instanz. Somit wurde das WRPK auf ETR reduziert und somit ist das WRPK in $\exists\mathbb{R}$. ■

Theorem 7.8: Das Watchman Route Problem ist in $\exists\mathbb{R}$

Beweis. Sei eine LMP Instanz gegeben. Also ein Polygon P und ein $l \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es einen optimalen Weg, der die Form eines Streckenzuges hat und mit $\|V(P)\| = n$ maximal n^2 Knickpunkte hat. Insbesondere existiert also ein polynomiell großes $\eta(n)$, welches eine obere Schranke der Knickpunkte angibt. Dann kann folgende ETR Instanz konstruiert werden. Es ist $\text{LÄNGESTRECKENZUGKLEINER}(p_1, \dots, \eta, l_1, \dots, l_{\eta-1}, l)$ das in Kapitel 5 definierte Prädikat, welches wahr ist, falls der Streckenzug die Länge kleiner oder gleich l hat. Definiere dann folgende ETR Instanz

$$\begin{aligned} \exists p_1, \dots, p_\eta \in \mathbb{R}^2, l_1, \dots, l_{\eta-1} \in \mathbb{R} : \\ & \text{STRECKENZUGINPOLYGON}(P, p_1, \dots, p_\eta) \\ & \wedge \text{LAENGESTRECKENZUGKLEINER}(p_1, \dots, p_\eta, l_1, \dots, l_{\eta-1}, l) \\ & \Rightarrow \text{SIEHTSTRECKENZUGPOLYGON}(P, p_1, \dots, p_\eta) \end{aligned}$$

Diese ETR Instanz ist nur polynomiell länger, als die Eingabe der WRP Instanz. Außerdem werden analog zu dem Beweis von Theorem (7.7) JA-Instanzen auf JA-Instanzen und NEIN-Instanzen auf NEIN-Instanzen abgebildet. Somit folgt direkt die Behauptung. ■

8 Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit wurden das Lawn Mowing Problem und das Watchman Route Problem auf ihre Komplexität untersucht. Für das Lawn Mowing Problem wurden modifizierte Versionen betrachtet. Bei einer dieser Versionen wurde die Ausschneidefigur von einem Kreis zu einem Quadrat geändert. Dabei wurde festgestellt, dass optimale Lösungen immer noch die Form eines Streckenzugs besitzen. Dieser Beweis lässt sich ohne große Einschränkungen auf regelmäßige Polygone übertragen. Es ist allerdings nicht klar, ob diese Eigenschaft auch für Ausschneidefiguren gilt, die eventuell Löcher haben oder nicht einmal zusammenhängend sind. Eine offene Frage, die also untersucht werden kann ist die folgende:

- Hat das Lawn Mowing Problem auch bei Polygonen mit Löchern als Ausschneidefigur einen Streckenzug als Lösung?

Es wurde außerdem das Lawn Mowing Problem mit Knicken eingeführt. Es wurde gezeigt, dass sich dieses in der Komplexitätsklasse $\exists\forall\mathbb{R}$ befindet. Das legt direkt die folgenden Fragen für zukünftige Arbeit nahe:

- Ist das LMPK in $\exists\mathbb{R}$?
- Oder ist das LMPK $\exists\forall\mathbb{R}$ -Schwer?

Mithilfe des Lawn Mowing Problems mit Knicken wurde dann gezeigt, dass das klassische Lawn Mowing Problem in $\exists\forall\mathbb{R}$ liegt. Zeigt man eine dieser beiden Fragen für das LMPK, so kann man es wie in dieser Arbeit direkt auf das LMP übertragen. Also bleibt auch für das LMP die Frage offen:

- Ist das LMP in $\exists\mathbb{R}$?
- Oder ist das LMP $\exists\forall\mathbb{R}$ -Schwer?

Zum Schluss wurde das Watchman Route Problem untersucht. Hier wurde das Watchman Route Problem mit Knicken eingeführt, welches wie beim Lawn Mowing Problem mit Knicken die Anzahl an Knicken betrachtet. Um zu zeigen, dass dieses in $\exists\mathbb{R}$ liegt, musste zunächst eine Zeugenmenge konstruiert werden. Dafür musste das Polygon in Gebiete und Regionen unterteilt werden und der Streckenzug in Teilstrecken. Es konnte dann gezeigt werden, dass das WRPK in $\exists\mathbb{R}$ liegt. Dadurch konnte, mit dem selben Argument wie beim LMP, darauf geschlossen werden, dass auch das WRP in $\exists\mathbb{R}$ liegt. Damit stellen sich die folgenden Fragen:

- Ist das WRPK $\exists\mathbb{R}$ -Schwer?
- Ist das WRP $\exists\mathbb{R}$ -Schwer?

Für zwei Probleme, die sowohl in der Theorie als auch in der Praxis wichtig sind, wurden neue Obergrenzen bezüglich ihrer Komplexität bestimmt. Die neuen Obergrenzen stellen einen wichtigen Beitrag zum Verständnis und zur Lösung dieser Probleme dar und können möglicherweise dazu beitragen, ihre Anwendung in der Praxis zu verbessern. Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, dass die Komplexität dieser Probleme begrenzt ist und dass weitere Forschung auf diesem Gebiet vielversprechend sein kann.

Literatur

- [AAM22] Mikkel Abrahamsen, Anna Adamaszek und Tillmann Miltzow. „The Art Gallery Problem is $\exists\mathbb{R}$ -complete“. In: *Journal of the ACM* (2022). DOI: 10.1145/3486220.
- [AFM00] Esther M. Arkin, Sándor P. Fekete und Joseph S. B. Mitchell. „Approximation algorithms for lawn mowing and milling“. In: *computational geometry* (2000). DOI: 10.1016/S0925-7721(00)00015-8.
- [BCKO08] M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld und M. Overmars. *Computational Geometry*. Springer, 2008. ISBN: 9783540779735.
- [Can88] John Canny. „Some Algebraic and Geometric Computations in PSPACE“. In: *Proceedings of the Twentieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. Chicago, Illinois, USA: Association for Computing Machinery, 1988, S. 460–467. ISBN: 0897912640. DOI: 10.1145/62212.62257.
- [CN86] Wei-Pang Chin und Simeon Ntafos. „Optimum watchman routes“. In: *Computational Geometry* (1986). DOI: 10.1145/10515.10518.
- [DELM03] Moshe Dror, Alon Efrat, Anna Lubiw und Joseph S. B. Mitchell. „Touring a Sequence of Polygons“. In: *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. San Diego, CA, USA: Association for Computing Machinery, 2003, S. 473–482. ISBN: 1581136749. DOI: 10.1145/780542.780612.
- [DT12] Adrian Dumitrescu und Csaba D. Tóth. „Watchman tours for polygons with holes“. In: *Computational Geometry Jg. 45* (2012), S. 326–333. ISSN: 0925-7721. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2012.02.001>.
- [EHM20] Jeff Erickson, Ivor van der Hoog und Tillmann Miltzow. „Smoothing the Gap Between NP and $\exists\mathbb{R}$ “. In: *SIAM Journal on Computing* (2020). DOI: 10.1137/20M1385287.
- [Fek+22] Sandor P. Fekete, Dominik Krupke, Michael Perk, Christian Rieck und Christian Scheffer. „A Closer Cut: Computing Near-Optimal Lawn Mowing Tours“. In: *ALENEX* (2022). DOI: 10.1137/1.9781611977561.ch1.
- [Mit13] Joseph S. B. Mitchell. „Approximating Watchman Routes“. In: *Journal of the ACM* (2013). DOI: 10.1137/1.9781611973105.60.
- [MPS93] Esther M. Arkin, Sándor P. Fekete und Joseph S. B. Mitchell. „The Lawnmower Problem“. In: *Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG)* (1993).
- [Nta92] Simeon Ntafos. „Watchman routes under limited visibility“. In: *Computational Geometry* (1992). DOI: 10.1016/0925-7721(92)90014-j.
- [Sch09] Marcus Schaefer. „Complexity of Some Geometric and Topological Problems“. In: *Graph Drawing* (2009). DOI: 10.1007/978-3-642-11805-0_32.
- [Tan] Xuehou Tan. „Fast computation of shortest watchman routes in simple polygons“. In: *Information Processing Letters Jg. 77* (), S. 27–33. ISSN: 0020-0190. DOI: 10.1016/S0020-0190(00)00146-0.