

Local Page Number und local Queue Number von gerichteten azyklischen Graphen

Bachelorarbeit
von

Tim Groß

An der Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Erstgutachter:	PD Dr. Torsten Ueckerdt
Zweitgutachter:	T.T.-Prof. Dr. Thomas Bläsius
Betreuende Mitarbeiterin:	Laura Merker, M. Sc.

Bearbeitungszeit: 22.06.2021 – 22.10.2021

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde sowie die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben.

Karlsruhe, 22. Oktober 2021

Abstract

A *book embedding* (*queue layout*) of a directed acyclic graph consists of a topological ordering of its vertices and a partition of its edges into subsets called *pages* (*queues*) such that edges in the same page (queue) do not cross (nest). Two edges cross (nest) if their endpoints are ordered in a ABAB (ABBA) pattern. The *local page number* $pn_\ell(G)$ (*local queue number* $qn_\ell(G)$) of a graph G is the smallest number k such that there exists a book embedding (queue layout) for G in which every vertex has incident edges in at most k pages (queues).

We initiate the study of the local page number and the local queue number of directed acyclic graphs. We present a planar graph with local page number 3, as well as one with local queue number 3, with both examples being significantly smaller than previously known undirected graphs with the same parameters. In addition, we construct a planar graph that has local page number 4 for a fixed vertex ordering. For the local page number as well as the local queue number of directed acyclic k -trees, we show an upper bound of $k + 1$ and improve the lower bound from k to $k + 1$. The local page number as well as the local queue number of directed acyclic k -trees is therefore $k + 1$.

Deutsche Zusammenfassung

Ein *Book Embedding* (*Queue Layout*) eines gerichteten azyklischen Graphen besteht aus einer topologischen Ordnung seiner Knoten und einer Partition seiner Kanten in *Seiten* (*Queues*) genannte Teilmengen, sodass sich Kanten in derselben Seite (Queue) nicht kreuzen (verschachteln). Zwei Kanten kreuzen sich (sind verschachtelt), wenn ihre Endpunkte in einem ABAB (ABBA) Muster angeordnet sind. Die *local Page Number* $pn_\ell(G)$ (*local Queue Number* $qn_\ell(G)$) eines Graphen G ist die kleinste Zahl k , sodass es ein Book Embedding (Queue Layout) für G gibt, in welchem jeder Knoten inzidente Kanten in höchstens k Seiten (Queues) hat.

Wir untersuchen erstmals die local Page Number und die local Queue Number von gerichteten azyklischen Graphen. Dabei konstruieren wir je einen planaren Graphen mit local Page Number 3, sowie einen mit local Queue Number 3, wobei beide Beispiele deutlich kleiner sind als bisher bekannte ungerichtete Graphen mit den selben Parametern. Außerdem konstruieren wir einen planaren Graphen, der für eine feste Knotenordnung local Page Number 4 hat. Für die local Page Number sowie die local Queue Number von gerichteten azyklischen k -Bäumen zeigen wir jeweils eine obere Schranke von $k + 1$, und verbessern die untere Schranke jeweils von k auf $k + 1$. Die local Page Number sowie die local Queue Number von gerichteten azyklischen k -Bäumen beträgt somit $k + 1$.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Anwendung	2
1.2	Verwandte Werke	3
1.3	Gliederung	5
1.4	Eigener Beitrag	6
2	Grundlagen	7
2.1	Definitionen	7
2.1.1	Book Embedding und Page Number	8
2.1.2	Queue Layout und Queue Number	10
2.2	Beliebig große Page Number für gerichtete planare Graphen	12
2.3	Beliebig große Queue Number für gerichtete planare Graphen	13
2.4	Zusammenhänge der definierten Parameter und eingeführten Graphklassen	13
3	Planare Graphen	19
3.1	Local Page Number 2	19
3.2	Vergleich zu ungerichteten Graphen	20
3.3	Local Page Number 3	21
3.4	Local Page Number 3 bei beschränkter Seitenanzahl	25
3.5	Local Page Number 4 bei fester Knotenordnung und Dreieck vwx	26
3.6	Local Page Number 4 bei fester Knotenordnung	28
3.7	Obere Schranke für die local Page Number	32
3.8	Local Queue Number 2	33
3.9	Local Queue Number 3	34
3.10	Obere Schranke für die local Queue Number	36
4	k-Bäume	39
4.1	Obere Schranke für die local Page Number	39
4.2	Untere Schranke für die local Page Number	41
4.3	Obere Schranke für die local Queue Number	43
4.4	Untere Schranke für die local Queue Number	43
5	Fazit und offene Fragen	47

1. Einleitung

Dieser Arbeit zugrunde liegt das Konzept, ein Buch als topologischen Raum zu nutzen. Erste Vorkommen dieser Idee lassen sich beispielsweise in den Arbeiten von Persinger [37] sowie von Atneosen [3] finden. Wir folgen der Definition dieser beiden Autoren für ein Buch. Ein *Buch* ist eine Vereinigung von Halbebenen, sogenannte *Seiten*, die sich alle auf einer Linie, dem sogenannten *Buchrücken* treffen.

Ein solches Buch nutzen wir jetzt, um Graphen darauf darzustellen. Ein *Book Embedding* eines Graphen, auch bekannt als *Stack Layout*, ist die Darstellung seiner Knoten und Kanten auf einem Buch. Dazu werden die Knoten auf dem Buchrücken und die Kanten so auf den Seiten eingebettet, dass sich zwei Kanten auf der gleichen Seite nicht überkreuzen.

Nun möchten wir die Eigenschaft von Graphen, sich in ein Buch einbetten zu lassen, genauer beschreiben. Dafür wurde von Bernhart und Kainen [6] der Begriff *book thickness* eingeführt, dieser ist definiert als die kleinstmögliche Anzahl an Seiten, die ein Graph für ein Book Embedding benötigt. In dieser Arbeit verwenden wir anstatt *book thickness* den synonymen und heute gebräuchlichen Begriff *Page Number*. Weitere alternative Bezeichnungen für diesen Begriff, welche Verwendung in Arbeiten gefunden haben, sind *stack number* sowie *fixed outerthickness* [11] [12].

Eine weitere Möglichkeit, die Qualität von Book Embeddings zu beschreiben, ist die minimale Anzahl der an einzelnen Knoten anliegenden Seiten zu betrachten. Dafür wurde von Merker [29] der Begriff *local Page Number* eingeführt. Eine genaue Definition der *local Page Number* ist in Definition 2.13 zu finden. In diesem Kontext bezeichnet man die *Page Number* auch als *global Page Number*. Diese Arbeit befasst sich hauptsächlich mit der *local Page Number*, an einzelnen Stellen wird jedoch auch die *global Page Number* thematisiert.

Das *Queue Layout* kann als Pendant zum *Book Embedding* betrachtet werden, und ist eine weitere Möglichkeit Graphen darzustellen. Auch diese untersuchen wir, wenn auch nicht im selben Umfang wie *Book Embeddings*. Der wesentliche Unterschied zum *Book Embedding* ist hierbei, dass wir anstatt des Überkreuzens das Verschachteln von Kanten verbieten. Anstatt auf Seiten werden die Kanten hierbei in *Queues* verteilt. Die *Queue Number* eines Graphen ist definiert als die minimale Anzahl an *Queues*, die für ein *Queue Layout* benötigt werden. Diese Konzepte wurden von Heath und Rosenberg [21] eingeführt. In diesem Zusammenhang betrachten wir außerdem die von Merker und Ueckerdt [31] eingeführte *local Queue Number*, welche als die minimale Anzahl der an einem Knoten anliegenden *Queues* definiert ist. Für eine genaue Definition dieser Begriffe siehe Kapitel 2.1.2.

Auch bei der Queue Number untersuchen wir vor allem die lokale Variante.

Book Embeddings und Queue Layouts sind beide *linear Layouts*. Wir befassen uns hier vorrangig mit linear Layouts von gerichteten azyklischen Graphen, also Graphen mit Kantenrichtungen, in welchen es keine gerichteten Kreise gibt. Dabei sind die Kantenrichtungen eine zusätzliche Einschränkung an die Reihenfolge der Knoten im linear Layout. Der Knoten, aus dem eine gerichtete Kante ausgeht soll dabei im linear Layout vor dem Knoten liegen, zu dem die Kante eingeht. Gerichtete Graphen wurden bisher noch nicht in Bezug auf die local Page und local Queue Number untersucht, dies holen wir hier nach. Dabei analysieren wir einige Schranken, die bereits für Klassen von ungerichteten Graphen gefunden wurden, auf ihre Übertragbarkeit auf gerichtete Graphen und geben teilweise neue, einfachere Beweise für bereits bekannte Schranken. Außerdem stellen wir für gerichtete k -Bäume, welche wir in Definition 2.5 definieren, eine neue untere Schranke für die local Page Number und local Queue Number auf. Dabei konstruieren wir einen gerichteten k -Baum, der sowohl die maximal mögliche local Page Number, als auch die maximal mögliche local Queue Number für seine Graphklasse hat.

1.1 Motivation und Anwendung

In diesem Kapitel geben wir Gründe für die Wahl der Schwerpunkte dieser Arbeit an. Außerdem zeigen wir auf, inwiefern sich Themen dieser Arbeit auf reale Probleme übertragen lassen und welche Anwendungsmöglichkeiten es gibt.

Die Betrachtung der local Page Number und local Queue Number von gerichteten azyklischen Graphen schließt eine Lücke. Für gerichtete Graphen wurden bisher lediglich die jeweils globalen Varianten untersucht [1, 14, 20, 22, 23, 28, 32], während die local Page Number und local Queue Number jeweils nur für ungerichtete Graphen erforscht wurden [29, 30, 31].

In den Bereichen Book Embeddings und Queue Layouts gibt es allgemein eine Vielzahl von offenen Fragen. Eine ist die nach der Page Number von aufwärtsplanaren Graphen, für welche trotz aktueller Forschung zu diesem Thema [14, 23] bisher nicht bekannt ist, ob sie konstant oder abhängig von der Anzahl an Knoten ist. Ebenso offen ist die Queue Number von k -Bäumen, für Arbeiten zu dieser Graphklasse siehe zum Beispiel [2, 21, 36, 38, 40]. Auch die genauen Schranken von local Page Number und local Queue Number verschiedener Graphklassen sind größtenteils unbekannt. Beispielsweise ist nicht bekannt, ob es, egal ob gerichtet oder ungerichtet, planare Graphen mit local Page Number 4 gibt [29, 30]. Wir stellen dazu einen Graphen vor, der bei fixierter Knotenordnung local Page Number 4 hat. Ebenfalls unbekannt ist die local Page Number und die local Queue Number von k -Bäumen [29, 30, 31], in dieser Arbeit finden wir beide Werte für gerichtete k -Bäume.

Neben der Beantwortung offener Fragen ist auch das Lösen realer Probleme eine Motivation. Wir stellen nun einige Anwendungsfelder vor, für welche die Arbeiten zu Book Embeddings und Queue Layouts als Grundlage genutzt werden können.

Book Embeddings und Queue Layouts können beispielsweise in verschiedenster Weise als Abstraktion von Prozessoren genutzt werden. Yannakakis [41] beschrieb die Verbindung zu fehlertoleranten Very Large-Scale Integration (VLSI) Designs. Dazu werden Prozessoren als Knoten, und deren Verbindungen im elektrischen Schaltkreis als Kanten eines Graphen modelliert. Wie bei einem Book Embedding werden die Prozessoren auf einer imaginären Linie angebracht. Parallel zu dieser Linie verlaufen dann die Verbindungen zwischen Prozessoren, wobei mehrere Verbindungen zu einer Bahn zusammengefasst werden. Da Anfragen, die zuletzt eine Bahn betreten haben, diese wieder als erstes verlassen müssen, unterliegen die Bahnen dem Last In - First Out (LIFO) Prinzip. Somit entsprechen die

Bahnen genau den Seiten eines Book Embeddings, da Kanten einer Seite ebenfalls das LIFO Prinzip befolgen. In diesem Sinne kann auch die local Page Number von Bedeutung sein, falls man beispielsweise die Menge der Bahnen limitieren möchte, die an einzelnen Prozessoren anliegen. Dies kann zum Beispiel der Fall sein, falls einzelne Prozessoren nicht genügend Rechenleistung haben, um mehrere verschiedene Verbindungen gleichzeitig aufrecht zu erhalten.

Ferner können mit Book Embeddings ampelgesteuerte Kreuzungen modelliert werden. Eine solche Abstraktion wurde von Kainen [25] beschrieben. Dabei stellen die Knoten die verschiedenen Fahrbahnen und Gehwege dar und Kanten die Übergänge zwischen diesen. Die Seiten eines Book Embeddings stehen dann für die verschiedenen Ampelphasen. Da sich beispielsweise die Wege von Fahrzeugen und Fußgängern nicht kreuzen sollen, entspricht die Page Number der Anzahl der benötigten unterschiedlichen Ampelphasen.

Auch Einbettungen mit fester Knotenordnung haben reale Anwendungsmöglichkeiten. Ein Beispiel ist die Untersuchung der Struktur von RNS Molekülen. Dabei werden die Basen der RNS-Sequenz als Knoten, und die Basenpaare als Kanten dargestellt. Haslinger und Stadler [18] konnten beispielsweise obere Schranken für die Parameter bestimmte Strukturen herausfinden.

Eine weitere Anwendung ist die Abstraktion der Ablaufplanung von parallelen Prozessoren. So beschrieben Papadimitriou und Yannakakis [34] die Möglichkeit, einzelne Prozesse als Knoten, und deren Abhängigkeiten untereinander als gerichtete Kanten darzustellen. Somit entsteht ein gerichteter azyklischer Graph. Von Heath et al. [19] wurde dieses Konzept dann auf Queue Layouts übertragen. Die einzelnen Prozesse werden in Prozessor Queues (PQs) geladen, welche dem First In - First Out (FIFO) Prinzip folgen. Die PQs können somit als Queues eines Queue Layouts abstrahiert werden. Die Queue Number eines solchen gerichteten Graphen entspricht dann der notwendigen Anzahl an PQs. Die local Queue Number steht dann für die minimale Anzahl an PQs, mit denen ein einzelner Prozess in der Lage sein muss zu kommunizieren.

In der Komplexitätstheorie finden Book Embeddings ebenfalls Anwendung [15, 16, 26, 35]. Dort gibt es scheinbar Zusammenhänge zwischen gerichteten Graphen mit bestimmter Page Number und der Komplexität des jeweiligen Erreichbarkeitsproblems. So fanden Pavan et al. [35] heraus, dass sich die Erreichbarkeit von gerichteten Graphen mit Page Number 2 mit logarithmischem Platz lösen lässt, bei Graphen mit Page Number 3 wird nichtdeterministisch logarithmischer Platz benötigt.

1.2 Verwandte Werke

Wir geben nun eine Auswahl der wichtigsten Arbeiten zum Thema Book Embeddings und Queue Layouts an und erläutern einige der wichtigsten Erkenntnisse kurz.

Von Bernhart und Kainen [6] wurde das Konzept der *Page Number*, damals noch *book thickness* genannt, eingeführt. Außerdem wurden dort bereits einige Schranken an die Page Number für bestimmte Graphklassen aufgestellt. So wurde gezeigt, dass sich genau alle außenplanaren Graphen mit nur einer Seite einbetten lassen. Graphen die sich mit zwei Seiten einbetten lassen sind genau die Subgraphen von Graphen mit Hamiltonpfad.

Book Embeddings und die global Page Number wurden bereits von einer Vielzahl von Autoren untersucht. Beispielsweise hat Malitz [27] gezeigt, dass die Änderung der Page Number durch die Wurzel der Änderung der Kantenanzahl eines Graphs beschränkt ist.

Für viele Graphklassen wurden bereits Schranken an die global Page Number gefunden. So hat Yannakakis [41] einen Algorithmus vorgestellt, mit welchem sich jeder planare Graph

auf vier Seiten einbetten lässt. Da außerdem von Yannakakis [42] sowie von Bekos et al. [4] jeweils ein planarer Graph gefunden wurde, der sich nicht mit drei Seiten einbetten lässt, steht 4 als scharfe obere Schranke für die global Page Number von planaren Graphen fest.

Eine weitere Graphklasse, deren Page Number bereits umfänglich untersucht wurde, sind *k-Bäume*. Dabei sind *k*-Bäume ein Oberbegriff für Bäume, jedoch werden neu hinzugefügte Knoten mit *k* anstatt nur mit einem Knoten verbunden. Eine genaue Definition für *k*-Bäume ist in 2.5 angegeben. Für diese Graphklasse haben Ganley und Heath [17] eine obere Schranke von $k + 1$ für die Page Number angegeben. Außerdem konnten Vandenbussche et al. [39] für $k \geq 3$ zeigen, dass es *k*-Bäume gibt, welche sich nicht mit *k* Seiten einbetten lassen, somit ist $k + 1$ dort eine scharfe obere Schranke. Außerdem lassen sich 2-Bäume mit zwei Seiten einbetten, wie von Rengarajan und Veni Madhavan [38] gezeigt wurde. Der Vollständigkeit halber ist zu erwähnen, dass sich 1-Bäume mit einer Seite einbetten lassen, da sie außenplanar sind.

Im Gegensatz dazu ist die local Page Number ein relativ wenig untersuchtes Konzept. Von Merker und Ueckerdt [30] wurde unter anderem gezeigt, dass es planare Graphen mit local Page Number 3 gibt. Klar ist, dass die local Page Number eines Graphen immer kleiner seiner global Page Number ist, doch bisher ist es nicht bekannt, ob es auch planare Graphen mit local Page Number 4 gibt. Felsner et al. [13] haben linear Layouts von vollständigen Graphen untersucht, und unter anderem herausgefunden, dass die local Page Number eines vollständigen Graphen K_n über *n* Knoten $n/3 \pm \mathcal{O}(1)$ ist.

Auch gerichtete azyklische Graphen wurden im Bezug auf Book Embeddings bereits erforscht. Dabei geben die Kantenrichtungen eine zusätzliche Einschränkung an die Knotenordnung eines Book Embeddings, was wir im Zuge von Definition 2.14 genauer erklären. Diese Idee wurde erstmals von Nowakowski und Parker [32] aufgebracht, die außerdem zeigen konnten, dass gerichtete Bäume Page Number 1 haben. Ausgiebig untersucht wurde die Page Number von gerichteten azyklischen Graphen erstmals von Heath et al. [20, 22]. Beispielsweise wurde gezeigt, dass jeder gerichtete Graph mit genau einem Kreis Page Number höchstens 2 hat. Außerdem wurde erwähnt, dass planare gerichtete azyklische Graphen im Allgemeinen beliebig große Page Number haben, wie wir auch in Kapitel 2.2 zeigen. Weiterhin wurde von Nowakowski und Parker [32] sowie von Heath et al. [20, 22] die Frage aufgestellt, inwiefern die Page Number von *aufwärtsplanaren gerichteten azyklischen Graphen* beschränkt ist. Aufwärtsplanare Graphen sind gerichtete Graphen, die sich so planar zeichnen lassen, dass jede Kante nach oben zeigt, für eine genauere Erklärung siehe Definition 2.2. Die Klasse der aufwärtsplanaren Graphen war seitdem Gegenstand vieler Arbeiten, dennoch ist noch nicht bekannt, ob die Page Number durch eine Konstante, oder in Abhängigkeit von den Knotenanzahl beschränkt ist. Die zur Zeit beste obere Schranke wurde von Jungeblut et al. [23] gefunden und beträgt $\mathcal{O}(n^{2/3} \log(n)^{2/3})$, wobei *n* für die Anzahl an Knoten steht. Dies ist dabei die erste Schranke, die langsamer als linear in Abhängigkeit von der Knotenanzahl wächst. Außerdem wurde dort erstmals ein aufwärtsplanarer Graph gefunden, der Page Number mindestens 5 hat. Weiterhin untersuchten beispielsweise Frati et al. [14] die Page Number von aufwärtsplanaren Triangulationen, also Graphen bei denen jede Facette von einem Dreieck eingegrenzt wird. Im Bezug auf local Page Number wurden gerichtete Graphen allerdings bisher noch nicht untersucht.

Als Pendant zum Book Embedding wurde von Heath und Rosenberg [21] das Queue Layout eingeführt. Im wesentlichen Unterschied zu Book Embeddings sind bei Queue Layouts Verschachtlungen anstatt Überkreuzungen verboten, außerdem werden die Kanten auf Queues und nicht auf Seiten verteilt. In [21] werden 1-Queue Graphen klassifiziert, sowie gezeigt, dass deren Erkennung ein NP-vollständiges Problem darstellt. Queue Layouts wurden seitdem intensiv erforscht. Besonders in den letzten Jahren konnten wichtige

Erkenntnisse gesammelt werden, wir stellen hier eine Auswahl der wichtigsten Erkenntnisse vor. Von Heath et al. [19] wurden 1992 Zusammenhänge zwischen Queue und Page Number untersucht, unter anderem wurde herausgefunden, dass sich alle Graphen mit Page Number 1 mit zwei Queues und alle Graphen mit Queue Number 1 mit zwei Seiten darstellen lassen. Außerdem wurde in dieser Arbeit die Vermutung aufgestellt, dass die Queue Number für planare Graphen durch eine konstante Zahl beschränkt ist. Diese relevante Vermutung konnte erst 28 Jahre später von Dujmović et al. [9] bestätigt und bewiesen werden. Konkret wurde ein Algorithmus vorgestellt, der jeden planaren Graphen mit höchstens 49 Queues einbettet. Bekos et al. [5] konnten diese obere Schranke von 49 auf 42 verbessern. Die untere Grenze für die Queue Number von planaren Graphen liegt aktuell bei 4, ein Graph mit mindestens dieser Queue Number wurde von Alam et al. [2] gefunden. Weiterhin fanden Dujmović et al. [8] heraus, dass die Page Number von Graphen allgemein nicht durch deren Queue Number beschränkt ist, indem eine Familie von Graphen mit Queue Number höchstens 4 gefunden wurde, deren Page Number unbeschränkt groß werden kann. Dies führt zu dem Schluss, dass Book Embeddings kein mächtigeres Werkzeug zur Darstellung von Graphen sind, als Queue Layouts.

Ganley und Heath [17] stellten die Vermutung auf, dass die Queue Number von Graphen durch eine Funktion der Baumweite beschränkt ist. Diese These wurde von Dujmović et al. [10] verifiziert. Wiechert [40] konnte diese Schranke dann konkretisieren, sein Ergebnis war, dass Graphen mit Baumweite k höchstens Queue Number $2^k - 1$ haben. Besonders interessant war die obere Schranke von 3 für 2-Bäume, welche aus der Formel folgt. Die sich ebenfalls daraus ergebende obere Schranke von 7 für planare 3-Bäume konnten Alam et al. [2] auf 5 verbessern, außerdem konnten dort planare 3-Bäume konstruiert werden, die sich nicht mit 3 Queues darstellen lassen. Somit ist die maximale Queue Number von planaren 3-Bäumen entweder 4 oder 5.

Die local Queue Number wurde von Merker und Ueckerdt [31] eingeführt. Dort wurde gezeigt, dass Graphen mit Baumweite k höchstens local Queue Number $k + 1$ haben, als untere Schranke für die maximale Queue Number wurde $\lceil k/2 \rceil + 1$ angegeben. Für $k = 2$ wurde bewiesen, dass 3 eine scharfe obere Schranke ist, das heißt es gibt 2-Bäume mit local Queue Number 3. Außerdem konnte gezeigt werden, dass jeder planare Graph ein 4-lokales Queue Layout besitzt. Daraus folgt, dass maximale local Queue Number für planare Graphen entweder 3 oder 4 ist. Felsner et al. [13] untersuchten unter anderem die local Queue Number von vollständigen Graphen und konnten diese auf $(1 - 1/\sqrt{n})n \pm \mathcal{O}(1)$ festlegen, wobei n für die Anzahl an Knoten eines vollständigen Graphs K_n steht.

Die Klasse der gerichteten Graphen wurde ebenfalls auf ihre Queue Number untersucht, erstmalig von Heath et al. [22]. Dort wurde unter anderem gezeigt, dass jeder Baum Queue Number höchstens 2 hat, planare (und sogar aufwärts-außenplanare) Graphen im Allgemeinen jedoch unbegrenzt hohe Queue Number haben. Letztere Erkenntnis wird in Kapitel 2.3 veranschaulicht. Auf local Queue Number wurden gerichtete azyklische Graphen bisher nicht untersucht.

1.3 Gliederung

Wir definieren und erklären in Kapitel 2 zunächst einige Begriffe aus der Graphentheorie sowie Graphklassen, die im Laufe der Arbeit von Bedeutung sind. Anschließend geben wir Definitionen für die Begriffe Book Embedding und Queue Layout sowie den dazu gehörenden Parametern. Außerdem erklären wir die Schreibweisen und Begriffe, die wir in dieser Arbeit nutzen. Wir stellen zusätzlich einige wichtige bisher bekannte Erkenntnisse vor, die zum Teil auch in dieser Arbeit verwendet werden. Im Abschnitt 2.4 zeigen wir außerdem relevante Zusammenhänge der eingeführten Parameter und Graphklassen. Viele dieser Zusammenhänge sind Grundlage für spätere Untersuchungen in dieser Arbeit.

In Kapitel 3 befassen wir uns mit der local Page Number und der local Queue Number von planaren gerichteten azyklischen Graphen. Dazu finden wir zunächst kleine Beispiele mit local Page Number 2 bzw. 3 sowie später mit local Queue Number 2 bzw. 3. In Abschnitt 3.6 konstruieren wir außerdem einen Graphen, der bei fester Knotenordnung local Page Number 4 hat. Weiterhin zeigen wir für beide Parameter eine obere Schranke von 4.

Schließlich untersuchen wir in Kapitel 4 gerichtete azyklische k -Bäume. Dazu zeigen wir sowohl für die local Page Number als auch die local Queue Number jeweils zuerst die obere und anschließend die untere Schranke. Für beide Parameter kommen wir dabei zu dem Ergebnis, dass die untere und obere Schranke identisch sind und beide Parameter für gerichtete k -Bäume somit feststehen.

Zum Schluss geben wir im Fazit 5 einen kurzen Überblick über hier beantwortete sowie weiterhin offene Probleme im Bereich local Page und Queue Number von gerichteten azyklischen Graphen. Dazu formulieren wir einige der wichtigsten Fragen aus, die zur Weiterarbeit in diesem Bereich anregen sollen.

1.4 Eigener Beitrag

Wir initiieren mit dieser Arbeit die Betrachtung der local Page Number und local Queue Number von gerichteten azyklischen Graphen. Dabei zeigen wir, dass es für planare gerichtete Graphen deutlich kleinere Beispiele mit local Page/Queue Number 3 gibt, als für planare ungerichtete Graphen. Für die Konstruktion dieser Graphen formulieren wir außerdem Lemma 3.3, welches allgemein in bestimmten Typen von linear Layouts die Existenz einer Kante vw mit bestimmten Eigenschaften besagt. Die Existenz einer solchen Kante nutzen wir dann, um konkrete Graphen zu konstruieren. Wir nähern uns außerdem der Frage, ob es einen planaren Graphen mit local Page Number 4 gibt. Auch wenn wir keinen solchen Graphen finden, ist bereits die Erkenntnis, dass der in Kapitel 3.6 konstruierte Graph bei fester Knotenordnung ein 4-lokales Book Embedding benötigt, von Bedeutung. Der Graph könnte beispielsweise als Vorlage dienen, um einen planaren Graphen zu finden, der ohne weitere Restriktionen local Page Number 4 hat. Für die obere Schranke von 4 für die local Page/Queue Number formulieren wir außerdem eine sehr allgemeine Aussage 3.9, welche die Lokalität bestimmter linear Layouts anhand der Existenz von k -Orientierungen beschränkt. Diese Aussage kann auch für andere Graphklassen sowie die Betrachtung anderer linear Layouts verwendet werden. Beispielsweise verwenden wir die gleiche Aussage später für k -Bäume. Für gerichtete k -Bäume beantworten wir sowohl die Frage nach der local Page Number als auch der local Queue Number mit $k + 1$. Beide Parameter sind für ungerichtete k -Bäume nicht genau bekannt, weshalb die von uns gefundenen Schranken eine echte Verbesserung der implizit bekannten Schranken sind. Die hier gewonnen Erkenntnisse sind somit ebenso ein Fortschritt für weitere Forschung an der local Page/Queue Number von ungerichteten k -Bäumen.

2. Grundlagen

In folgendem Kapitel geben wir einige Definitionen an, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit benutzt werden. Außerdem präsentieren wir grundlegende Erkenntnisse aus bisherigen Arbeiten, welche hier später genutzt werden.

2.1 Definitionen

Hier definieren wir alle Begriffe genau, die nicht allgemein bekannt sind. Dabei teilen wir die Begriffsdefinitionen in weitere Kapitel auf, damit klar ist zu welchem Bereich der jeweilige Begriff gehört. Zunächst erklären wir einige Begriffe im Bereich Graphentheorie, die auch außerhalb von Book Embeddings und Queue Layouts verwendet werden.

Wir behandeln in dieser Arbeit verschiedene Graphklassen. Dabei werden wir uns aber fast ausschließlich mit gerichteten azyklischen Graphen befassen.

Definition 2.1. *Ein gerichteter azyklischer Graph ist ein gerichteter Graph, welcher keine gerichteten Kreise enthält.*

Eine Graphklasse innerhalb der gerichteten azyklischen Graphen sind die aufwärtsplanaren Graphen. Diese können als Pendant zu den planaren Graphen im ungerichteten Fall verstanden werden. Da diese Graphklasse Gegenstand vieler Arbeiten war, untersuchen wir auch hier vorgestellte Graphen auf ihre Aufwärtsplanarität.

Definition 2.2. *Ein gerichteter azyklischer Graph heißt aufwärtsplanar, wenn er sich so planar zeichnen lässt, dass jede Kante monoton nach oben, also in positive y -Richtung, führt.*

Unabhängig davon ob die Kanten eines Graphen gerichtet sind, gibt es mehrere Graphklassen die im Hinblick auf Page/Queue Number interessant sind. Wir definieren nun einige dieser Graphklassen und geben kurz an, wie sich die Page/Queue Number für diese Klassen verhält.

Definition 2.3. *Ein Graph heißt außenplanar, wenn er sich so in der Ebene darstellen lässt, dass sich alle seine Knoten am Rand der äußeren Facette befinden.*

Eine *Facette* ist eine von Knoten und Kanten eines Graphen eingeschlossene, zusammenhängende Fläche. Es ist bekannt, dass sich genau alle außenplanaren Graphen mit einem Book Embedding mit nur einer Seite einbetten lassen. Außerdem lässt sich jeder außenplanare Graph mit einem Queue Layout mit zwei Queues einbetten. Eine weitere für die Page Number interessante Graphklasse sind Graphen mit Hamiltonkreis.

Definition 2.4. *Ein Hamiltonkreis ist ein einfacher Kreis in einem Graphen, der jeden Knoten genau einmal enthält.*

Graphen die einen solchen Kreis besitzen werden auch *hamiltonisch* genannt. Hamiltonische Graphen und deren Subgraphen sind genau die Menge an Graphen, die sich mit zwei Seiten einbetten lassen.

Eine weitere Graphklasse die wir untersuchen sind k -Bäume, welche als Oberbegriff von Bäumen verstanden werden können. Sie lassen sich wie folgt rekursiv definieren:

Definition 2.5. *Ein vollständiger Graph mit $k + 1$ Knoten wird als k -Baum bezeichnet. Weitere k -Bäume erhält man, indem man zu einem bestehenden k -Baum einen Knoten hinzufügt, und mit jedem Knoten einer beliebigen k -Clique des bisherigen k -Baums verbindet.*

Dabei sind k -Bäume für $k \geq 3$ nicht mehr planar. Wir werden k -Bäume später im Hinblick auf local Page und local Queue Number in einem eigenen Kapitel behandeln.

Weiterhin definieren wir die Schreibweise für den Knotengrad.

Definition 2.6. *Der Knotengrad $\deg(v)$ eines Knoten v gibt die Gesamtanzahl der zu v inzidenten Kanten an. Für Knoten in gerichteten Graphen gibt es außerdem den Eingangsgrad $\deg_{\text{in}}(v)$ sowie den Ausgangsgrad $\deg_{\text{out}}(v)$, welche die Anzahl der zu v eingehenden, bzw. der von v ausgehenden Kanten angeben.*

Dazu definieren wir die k -Orientierung eines Graphen. Diese kann sowohl für gerichtete als auch ungerichtete Graphen existieren.

Definition 2.7. *Eine k -Orientierung G' eines Graphen G ist ein gerichteter Graph mit der selben Knoten- und Kantenmenge wie G , und $\deg_{\text{out}}(v) \leq k$ für jeden Knoten $v \in V(G')$.*

2.1.1 Book Embedding und Page Number

Wir definieren jetzt einige Begriffe zum Thema Page Number genauer. Auch wenn der Begriff Buch in dieser Arbeit kaum Verwendung findet, definieren wir diesen hier, um ein umfassendes Verständnis des Konzepts Page Number zu bieten. Für die Definition eines Buchs folgen wir dabei den Definitionen von Persinger [37] sowie von Atneosen [3].

Definition 2.8. *Ein Buch ist eine Vereinigung von n Halbebenen, sogenannte Seiten, im dreidimensionalen Raum, die sich alle auf einer Linie, dem sogenannten Buchrücken treffen.*

Ein Book Embedding beruht auf der Idee, Graphen auf Büchern einzubetten und ist ein grundlegendes Konzept dieser Arbeit. Um diese zu definieren folgen wir dabei der heute gebräuchlichen Definition, welche von Ollmann und Taylor [33] sowie von Kainen [24] entwickelt wurde:

Definition 2.9. Ein Book Embedding (σ, \mathcal{P}) eines Graphen ist die Einbettung seiner Knoten und Kanten auf einem Buch. Dazu werden die Knoten auf paarweise unterschiedlichen Positionen mit der Knotenreihenfolge σ auf dem Buchrücken positioniert, und die Kanten auf die Seiten \mathcal{P} verteilt. Zwei Kanten, die auf der gleichen Seite liegen, dürfen sich dabei nicht überkreuzen.

Jedes Book Embedding hat also eine totale Ordnung σ über alle Knoten, welche der Reihenfolge der Knoten entspricht. Um die Ordnung zwischen zwei Knoten in σ zu beschreiben, verwenden wir das Zeichen \prec . Liegt a vor b schreiben wir $a \prec b$. In den Abbildungen dieser Arbeit stellen wir uns den Buchrücken als eine unsichtbare, waagerechte Linie vor. Liegt ein Knoten a in σ vor einem Knoten b , also gilt $a \prec b$, so liegt a links von b und b liegt rechts von a auf dem Buchrücken. Die Kanten zeichnen wir dann als Halbkreise zwischen den beiden Knoten, und färben sie entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu einer Seite unterschiedlich ein.

Für Book Embeddings gilt: Eine Menge von k Kanten *kreuzen sich* paarweise bzw. *stehen in Konflikt*, wenn in der Knotenordnung zunächst die k paarweise verschiedenen linken Endpunkte aller Kanten auftreten, und darauf in selber Reihenfolge die k paarweise verschiedenen rechten Endpunkte folgen. Der linke bzw. rechte Endpunkt ist dabei der Knoten, der im Book Embedding links bzw. rechts vom jeweils anderen Knoten liegt. Die Forderung, dass es für k Kanten je k paarweise verschiedenen linke und rechte Endpunkte gibt impliziert, dass keine zwei Kanten einen gemeinsamen Endpunkt haben. Daraus lässt sich folgende Aussage schließen:

Beobachtung 2.10. In Book Embeddings stehen benachbarte Kanten nicht in Konflikt zueinander.

Ein Konflikt von k Kanten wird, besonders in anderen Arbeiten, auch k -Twist genannt. Zwei Kanten ab und cd kreuzen sich beispielsweise, falls deren Knoten in der Reihenfolge $a \prec c \prec b \prec d$ eingebettet werden. In Abbildung 2.1 ist ein Beispiel für einen 3-Twist zu sehen.

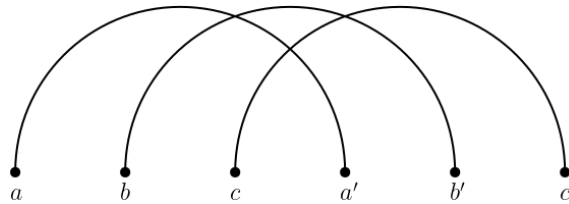


Abbildung 2.1: Ein Beispiel für drei sich paarweise kreuzende Kanten aa' , bb' und cc' , auch 3-Twist genannt. Konstellationen dieser Art auf einer Seite sind in Book Embeddings verboten. Die Knotenordnung $a \prec b \prec c \prec a' \prec b' \prec c'$ erzwingt hier also, dass die drei Kanten auf drei verschiedenen Seiten liegen.

Aus diesen Konflikten ergibt sich die Page Number für einen Graphen. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit meist nicht direkt mit der Page Number, sondern vielmehr ihrer lokalen Variante. Dennoch ist die Page Number hier einer der zentralsten Begriffe, weshalb wir sie definieren.

Definition 2.11. Als Page Number $pn(G)$ eines Graphen G wird die minimale Anzahl an Seiten bezeichnet, die für ein Book Embedding von G notwendig ist.

Ein Book Embedding mit k Seiten wird auch als k -Page Book Embedding bezeichnet.

Jetzt definieren wir die lokale Variante der Page Number, welche die Gesamtzahl der benötigten Seiten außer Acht lässt. Wir untersuchen hier fast ausschließlich die lokale Variante.

Definition 2.12. *Ein Book Embedding eines Graphen G heißt k -lokal, wenn jeder Knoten inzidente Kanten auf maximal k paarweise verschiedenen Seiten hat.*

Definition 2.13. *Als local Page Number $pn_\ell(G)$ eines Graphen G wird das kleinste $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet, sodass es ein k -lokales Book Embedding gibt.*

Wir befassen uns hier vorrangig mit Book Embeddings von gerichteten azyklischen Graphen. Für diese fordern wir als zusätzliche Einschränkung, dass die Knotenordnung einer *topologischen Sortierung* der Knoten entspricht.

Definition 2.14. *Eine topologische Knotenordnung σ eines gerichteten azyklischen Graphen ist eine Sortierung seiner Knoten, sodass für jede gerichtete Kante vw der Anfangspunkt v in σ vor dem Endpunkt w kommt.*

Ein Book Embedding eines gerichteten azyklischen Graphen D hat also eine Knotenordnung, welche zumindest teilweise durch die Kantenrichtungen vorgegeben wird. Existiert in D eine gerichtete Kante vw , so gilt für die Knotenordnung von jedem Book Embedding von D : $v \prec w$. Es kann Paare von Knoten geben, über deren Ordnung zueinander keine Aussage getroffen werden kann, in diesen Fällen ist die Reihenfolge nicht eindeutig vorgegeben.

Schließlich definieren wir noch einige weitere Schreibweisen, die im Laufe der Arbeit mehrfach verwendet werden.

Als Seitenmenge $P(v)$ eines Knoten v wird die Menge der Seiten bezeichnet, auf welchen zu v inzidente Kanten liegen. Entsprechend wird die Anzahl der paarweise verschiedenen Seiten, auf denen zu v inzidente Kanten liegen als $|P(v)|$ bezeichnet. Die Seite, auf welcher eine Kante vw liegt, bezeichnen wir als P_{vw} .

2.1.2 Queue Layout und Queue Number

Analog zur Page Number definieren wir hier wichtige Begriffe zum Thema Queue Number genau. Dabei folgen wir den Definitionen von Heath und Rosenberg [21] welche das Konzept Queue Layout eingeführt haben.

Definition 2.15. *Ein Queue Layout (σ, \mathcal{Q}) eines Graphen besteht aus einer totalen Knotenordnung σ und der Verteilung der Kanten auf eine Menge \mathcal{Q} von Queues. Dabei dürfen Kanten in derselben Queue nicht verschachtelt sein.*

Wie bei Book Embeddings benutzen wir bei Queue Layouts das Zeichen \prec um die Ordnung zwischen zwei Knoten in σ zu beschreiben. Außerdem benutzen wir analog die Begriffe *rechts von* bzw. *links von* um das Verhältnis zweier Knoten zu beschreiben. In Abbildungen stellen wir die Knoten ebenfalls horizontal von links nach rechts entsprechend der Knotenordnung dar. Kanten werden als Halbkreise zwischen ihren Endpunkten gezeichnet und entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu Queues unterschiedlich eingefärbt.

Wir bezeichnen in Queue Layouts k Kanten als paarweise *verschachtelt* bzw. als *in Konflikt* zueinander stehend, wenn in der Knotenordnung zunächst die k paarweise verschiedenen linken Endpunkte aller Kanten auftreten, und darauf in umgekehrter Reihenfolge die k paarweise verschiedenen rechten Endpunkte folgen. Je zwei Kanten dürfen somit für eine Verschachtelung keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen, woraus sich folgende Aussage schließen lässt:

Beobachtung 2.16. In Queue Layouts stehen benachbarte Kanten nicht in Konflikt zueinander.

Eine Verschachtlung von k Kanten wird auch k -Rainbow genannt. Zwei Kanten ab und cd sind beispielsweise verschachtelt, falls $a \prec c \prec d \prec b$ gilt. In Abbildung 2.2 ist ein Beispiel für einen 3-Rainbow abgebildet.

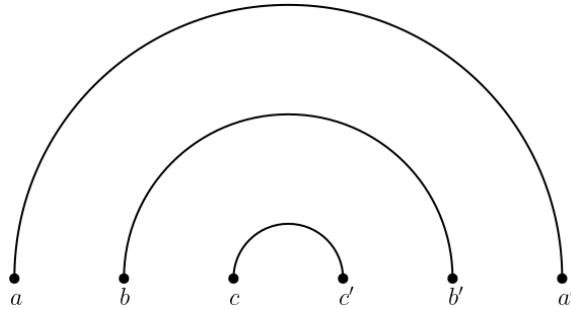


Abbildung 2.2: Ein Beispiel für drei paarweise verschachtelte Kanten aa' , bb' und cc' , auch 3-Rainbow genannt. Konstellationen dieser Art in einer Queue sind in Queue Layouts verboten. Die Knotenordnung $a \prec b \prec c \prec c' \prec b' \prec a'$ erzwingt hier also, dass sich die drei Kanten in drei verschiedenen Queues befinden.

Auch für Queue Layouts existiert ein Maß dafür, wie gut sich ein Graph einbetten lässt, die Queue Number.

Definition 2.17. Die Queue Number $qn(G)$ eines Graphen G ist die minimale Anzahl an Queues, die für ein Queue Layout von G benötigt werden.

Ein Queue Layout mit k Queues wird auch als k -Queue Layout bezeichnet.

Wie bei der Page Number geben wir auch hier Definitionen für die lokale Variante der Queue Number. Auch bei Queue Layouts untersuchen wir fast ausschließlich die lokale Variante.

Definition 2.18. Ein Queue Layout eines Graphen G heißt k -lokal, wenn jeder Knoten inzidente Kanten in maximal k paarweise verschiedenen Queues hat.

Definition 2.19. Die local Queue Number $qn_\ell(G)$ eines Graphen G ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$, für welches G ein k -lokales Queue Layout besitzt.

Auch für Queue Layouts fordern wir hier zusätzlich für gerichtete azyklische Graphen, dass die Knotenordnung σ einer topologischen Sortierung der Knoten entspricht. Weiterhin bezeichnen wir die Menge der Queues, in welchen sich zu einem Knoten v inzidente Kanten befinden, als $Q(v)$. Die Queue in welcher sich eine Kante vw befindet, nennen wir Q_{vw} .

Book Embeddings und Queue Layouts sind *linear Layouts*. Diese sind wie folgt definiert:

Definition 2.20. Ein Linear Layout eines Graphen besteht aus einer Knotenordnung σ und einer Partition $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ der Kantenmenge.

Eine Partition ist die Aufteilung einer Menge in nichtleere Teilmengen, sodass jedes Element der ursprünglichen Menge in genau einer Teilmenge enthalten ist. Abhängig vom

Typ von linear Layout verbieten wir bestimmte Konfigurationen von Kanten innerhalb eines Sets. Verbotene Konfigurationen bezeichnen wir als *Kantenkonflikte*. Die Kriterien für einen Kantenkonflikt sind dabei abhängig vom konkreten Typ von linear Layout. Für Book Embeddings sind die Konflikte unterhalb von Definition 2.9, und für Queue Layouts unterhalb von Definition 2.15 genauer erklärt. Die Teilmengen S_1, \dots, S_n , welche bei der Partition der Kantenmenge entstehen, werden hier auch als *Sets* bezeichnet. In einem linear Layout eines Graphen G bezeichnen wir die Menge an Sets, in welchen die zu einem Knoten $v \in V(G)$ inzidenten Kanten liegen als $S(v)$. Das Set in welchem die Kante vw liegt, nennen wir S_{vw} . Auch für linear Layouts führen wir den Begriff Lokalität ein und definieren diesen.

Definition 2.21. *Ein linear Layout eines Graphen G heißt k -lokal, wenn jeder Knoten inzidente Kanten in maximal k paarweise verschiedenen Sets hat.*

Für die Knotenordnung von linear Layouts von gerichteten Graphen gilt außerdem genauso wie für Book Embeddings und Queue Layouts, dass diese eine topologische Sortierung der Knoten ist.

Linear Layout ist als Überbegriff zu verstehen, in dieser Arbeit für Book Embeddings und Queue Layouts. Ein Book Embedding ist ein Linear Layout, für das die Kanten anhand ihrer Kreuzungen partitioniert werden, bei einem Queue Layout werden die Kanten aufgrund ihrer Verschachtelungen aufgeteilt. Ein weiteres, hier nicht weiter behandeltes Linear Layout ist das sogenannte *Arch Layout*, welches erstmals von Dujmović et al. [12] untersucht wurden. In einem Arch Layout werden zwei Kanten in unterschiedliche Arches gesetzt, sofern beide Endpunkte einer Kante links oder beide rechts von beiden Endpunkten der anderen Kante liegen.

2.2 Beliebige große Page Number für gerichtete planare Graphen

Für gerichtete planare Graphen gilt die obere Schranke von 4 für die Page Number, wie von Yannakakis [41] gezeigt wurde. Außerdem wurden von Yannakakis [42] sowie von Bekos et al. [4] jeweils planare Graphen vorgestellt, die tatsächlich vier Seiten benötigen. Für gerichtete planare Graphen gilt diese Schranke jedoch nicht. Der hier verwendete Graph wurde bereits von Heath et al. [22] gefunden, und hat Queue Number 2.

Behauptung 2.22 ([22]). *Es gibt für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen planaren gerichteten azyklischen Graphen mit Page Number $\geq k$.*

Beweis. Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ lässt sich ein planarer gerichteter azyklischer Graph P_k mit $2k$ Knoten und $3k - 1$ Kanten entsprechend Abbildung 2.3 konstruieren.

Zwischen den gestrichelten Kanten ist das Schema entsprechend weit fortzuführen, der hier abgebildete Graph entspricht $k = 4$. Die Knotenordnung im Book Embedding ist eindeutig, es gilt $v_1 \prec v_2 \prec \dots \prec v_k \prec w_1 \prec w_2 \prec \dots \prec w_k$. Dabei stehen alle Kanten $v_1w_1, v_2w_2, \dots, v_kw_k$ paarweise in Konflikt. Somit benötigt jede Kante $v_iw_i, i \in [1 \dots k]$ ihre eigene Seite P_i im Book Embedding, weshalb mindestens k Seiten benötigt werden. □

Der Graph ist gerichtet und planar, allerdings nicht aufwärtsplanar.

Entsprechend gibt es keine obere Schranke für die Page Number von ungerichteten planaren Graphen, sofern man die Knotenordnung σ im Book Embedding wählen kann.

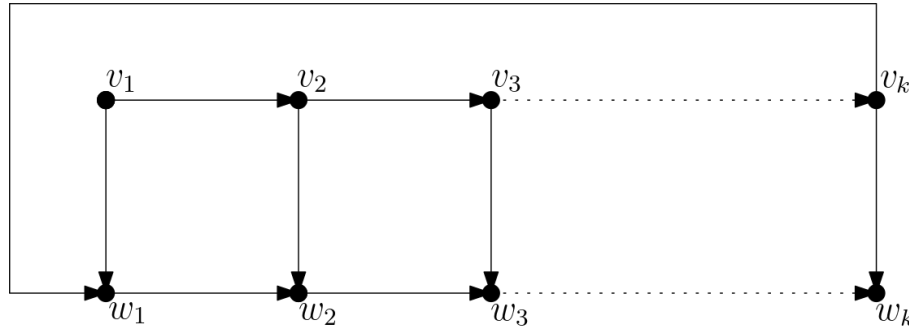


Abbildung 2.3: Planarer gerichteter azyklischer Graph P_k mit beliebig großer Page Number. P_k besteht aus je k Knoten v_1, \dots, v_k und w_1, \dots, w_k . Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ existiert die gerichtete Kante $v_i w_i$. Dazu existieren für jedes $j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \leq j$ die gerichteten Kanten $v_i v_j$ und $w_i w_j$. Weiterhin gibt es die gerichtete Kante $v_k w_1$.

Dabei wird dann nicht eine beliebige Knotenordnung, sondern die ungünstigste, das heißt jene welche die größte Page Number erzwingt, betrachtet. Dazu kann obiges Beispiel mit gleicher Knotenordnung aber ungerichteten Kanten verwendet werden, wobei die gleichen Konflikte entstehen.

2.3 Beliebige große Queue Number für gerichtete planare Graphen

Die Queue Number von planaren Graphen ist beschränkt. Diese These wurde von Heath et al. [19] aufgestellt, und kürzlich von Dujmović et al. [9] bewiesen. Konkret wurde ein Algorithmus vorgestellt, der jeden planaren Graphen mit höchstens 49 Queues einbettet. Bekos et al. [5] konnten diese obere Schranke an die Queue Number von 49 auf 42 verschärfen. Ähnlich wie bei der Page Number gilt diese Schranke jedoch nicht für gerichtete Graphen, da hier die Knotenordnung durch eine topologische Sortierung der Knoten vorgegeben wird. Auch der hier gezeigte Graph wurde bereits von Heath et al. [22] entdeckt.

Behauptung 2.23 ([22]). *Es gibt für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen planaren gerichteten azyklischen Graphen mit Queue Number k .*

Beweis. Wir konstruieren dafür für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ einen Graph Q_k mit $2k$ Knoten und $3k - 2$ Kanten entsprechend Abbildung 2.4.

Der Graph weist starke Ähnlichkeiten zu dem in Abbildung 2.3 gezeigten Beispiel auf. Im Gegensatz dazu ist Q_k allerdings aufwärts-außenplanar. Erneut stehen alle Kanten $v_1 w_1, \dots, v_k w_k$ paarweise miteinander in Konflikt. Dies liegt daran, dass für beliebige $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i < j$ die Knotenordnung $v_i \prec v_j \prec w_j \prec w_i$ erzwungen wird, und somit die Kanten $v_i w_i$ und $v_j w_j$ miteinander verschachtelt sind. Somit entsteht ein Regenbogen der Größe k , und Q_k hat Queue Number k . \square

Es ist zu beobachten, dass dieser Graph Page Number 1 hat.

2.4 Zusammenhänge der definierten Parameter und eingeführten Graphklassen

In diesem Kapitel halten wir einige der wichtigsten, bekannten Zusammenhänge zwischen den zuvor eingeführten Parametern und Graphklassen fest. Dabei erklären wir diese Zusammenhänge kurz und verweisen auf deren Beweise, bzw. führen diese selbst aus.

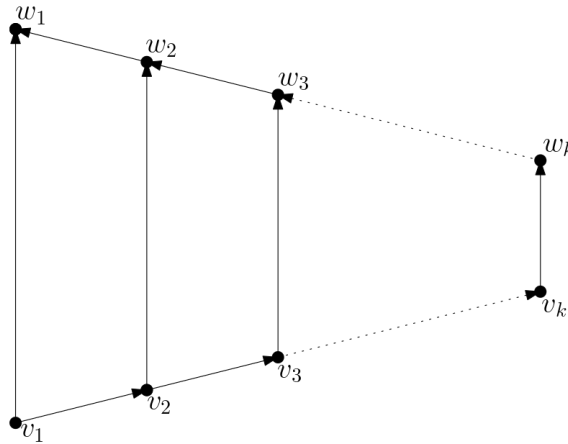


Abbildung 2.4: Graph Q_k mit beliebig großer Queue Number. Q_k besteht aus je k Knoten v_1, \dots, v_k und w_1, \dots, w_k . Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ existiert die gerichtete Kante $v_i w_i$. Dazu existieren für jedes $j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \leq j$ die gerichteten Kanten $v_i v_j$ und $w_j w_i$.

Linear Layouts von ungerichteten Graphen wurden bereits ausführlich erforscht, und für viele Graphklassen wurden obere und untere Schranken für die Page Number und Queue Number gefunden. Daher ist es wichtig zu wissen, inwiefern diese Schranken auf gerichtete Graphen übertragbar sind.

Behauptung 2.24. *Für jeden ungerichteten Graphen G und jeden gerichteten azyklischen Graphen \vec{G} , der durch Richten der Kanten von G entsteht, gilt $pn(G) \leq pn(\vec{G})$, $pn_\ell(G) \leq pn_\ell(\vec{G})$, $qn(G) \leq qn(\vec{G})$, sowie $qn_\ell(G) \leq qn_\ell(\vec{G})$.*

Beweis. Der Unterschied zwischen Book Embeddings (Queue Layouts) von G und \vec{G} ist lediglich die Einschränkung an die Knotenordnung, die für Book Embeddings (Queue Layouts) von \vec{G} gilt. Sei σ eine topologische Knotenordnung des Book Embeddings (Queue Layouts) Π von \vec{G} mit $k = pn(\vec{G})$ Seiten ($k = qn(\vec{G})$ Queues) insgesamt, bzw. mit höchstens $k = pn_\ell(\vec{G})$ Seiten ($k = qn_\ell(\vec{G})$ Queues) in denen sich zu jedem Knoten inzidente Kanten befinden. Dass eine solche Einbettung existiert, geht aus der Definition der jeweiligen Parameter hervor. Da G dieselben Knoten und Kanten wie \vec{G} hat, ist Π für G ebenfalls gültig, und hat k Seiten (Queues) insgesamt, bzw. lokal. Dann ist die global Page Number $pn(G)$ (global Queue Number $qn(G)$) bzw. die local Page Number $pn_\ell(G)$ (local Queue Number $qn_\ell(G)$) von G höchstens k . \square

Für alle vier hier erwähnten Parameter pn, pn_ℓ, qn und qn_ℓ hat ein gerichteter Graph \vec{G} also einen mindestens so großen Wert, wie sein ungerichtetes Pendant G . Dass der Wert echt größer sein kann, sieht man an den Graphen in Kapitel 3.1 und Kapitel 3.8. Bereits bekannte untere Schranken für die global/local Page/Queue Number von ungerichteten Graphklassen können somit für die entsprechende Graphklasse mit gerichteten Graphen übernommen werden. Dennoch stellen wir in dieser Arbeit teilweise für den gerichteten Fall neue Graphen vor, obwohl bereits ungerichtete Graphen bekannt sind, welche für den Beweis der Schranke genügen. Grund dafür ist, dass die Beispiele für den ungerichteten Fall oft vergleichsweise groß sind, und wir deutlich kleinere gerichtete Graphen finden. In Kapitel 3.3 verwenden wir beispielsweise einen gerichteten Graphen mit 40 Knoten um die untere Schranke von 3 für die local Page Number von planaren Graphen zu zeigen, während für den Beweis der selben Schranke für den ungerichteten Fall in [30] ein Graph

mit etwa 500 Mal so vielen Knoten verwendet wurde. In manchen Fällen können solche untere Schranken auch für den gerichteten Fall verbessert, also erhöht werden. Dies tun wir beispielsweise in Kapitel 4.2 bzw. Kapitel 4.4 für die untere Schranke der local Page Number bzw. local Queue Number von gerichteten azyklischen k -Bäumen.

Aus oberen Schranken für diese Parameter von ungerichteten Graphklassen hingegen kann im Allgemeinen keine Information für die obere Schranke der entsprechenden gerichteten Graphklasse gewonnen werden. Beispiele dafür sind die oberen Schranken von 4 bzw. 42 für die global Page Number bzw. global Queue Number von planaren Graphen. In Kapitel 2.2 bzw. Kapitel 2.3 zeigen wir mit einfachen, bereits bekannten Beispielen, dass es für die global Page Number bzw. global Queue Number von gerichteten planaren Graphen keine obere Schranke gibt.

Für andere Graphklassen sind die oberen Schranken von ungerichteter und gerichteter Graphklasse identisch, was wir beispielsweise für die obere Schranke der local Page Number bzw. local Queue Number von k -Bäumen in Kapitel 4.1 bzw. Kapitel 4.3 zeigen.

Ein weiterer interessanter Zusammenhang ist der zwischen global und local Page Number bzw. global und local Queue Number. Da die jeweils lokalen Varianten im Vergleich zur globalen Variante kaum erforscht sind, ist es wertvoll zu wissen, inwiefern bekannte Werte für die lokalen Varianten übernommen werden können. Der Zusammenhang ist dabei relativ einfach zu erklären.

Behauptung 2.25. *Für jeden Graphen G gilt $pn_\ell(G) \leq pn(G)$ und $qn_\ell(G) \leq qn(G)$.*

Beweis. Sei Π ein Book Embedding (Queue Layout) von G welches genau $pn(G)$ Seiten ($qn(G)$ Queues) verwendet. Dann hat jeder Knoten in Π (in Φ) inzidente Kanten höchstens auf den $pn(G)$ insgesamt verwendeten Seiten (in den $qn(G)$ insgesamt verwendeten Queues). Somit hat G local Page Number höchstens $pn(G)$ (local Queue Number höchstens $qn(G)$). \square

Obere Schranken für die globale Page Number bzw. global Queue Number von Graphklassen können somit für die jeweils lokale Variante übernommen und möglicherweise verbessert, also verringert werden. Wie bereits erwähnt kann die global Page Number bzw. die global Queue Number von planaren gerichteten Graphen beliebig groß werden. Die local Page Number bzw. local Queue Number von planaren Graphen ist allerdings auf 4 beschränkt, wie wir in Kapitel 3.7 bzw. Kapitel 3.10 zeigen. Daraus folgt, dass es gerichtete Graphen gibt mit beschränkter local Page/Queue Number, aber beliebig großer global Page/Queue Number.

Beobachtung 2.26. *Es gibt für jedes $k \geq 4$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ einen gerichteten Graphen \vec{G} mit $pn_\ell(\vec{G}) \leq k$ und $pn(\vec{G}) > n$ bzw. mit $qn_\ell(\vec{G}) \leq k$ und $qn(\vec{G}) > n$.*

Die jeweils globale Variante kann also nicht mit einem multiplikativen Faktor durch die lokale Variante beschränkt werden. Auch für allgemeine ungerichtete Graphen kann die global Page/Queue Number im Vergleich zur local Page/Queue Number beliebig groß werden, wie Merker und Ueckerdt in [30] bzw. [31] gezeigt haben.

Behauptung 2.27 ([30, 31]). *Es gibt für jedes $k \geq 5$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ einen ungerichteten Graphen G mit $pn_\ell(G) \leq k$ aber $pn(G) > n$ bzw. mit $qn_\ell(G) \leq k$ aber $qn(G) > n$.*

Der Unterschied zwischen global Page Number und local Page Number bzw. global Queue Number und local Queue Number eines gerichteten/ungerichteten Graphen kann also beliebig groß sein.

Nun folgt ein weiterer Zusammenhang zwischen globaler und lokaler Variante.

Behauptung 2.28. *Für jeden Graphen G gilt $pn(G) = 1 \iff pn_\ell(G) = 1$ und $qn(G) = 1 \iff qn_\ell(G) = 1$.*

Beweis. Wir zeigen beide Äquivalenzen parallel. Die Richtung \Rightarrow folgt jeweils bereits aus Behauptung 2.25. Für \Leftarrow zeigen wir, dass die Existenz einer 1-lokalen Einbettung auch die Existenz einer Einbettung mit nur einer Seite (Queue) insgesamt impliziert. Sei dazu G ein beliebiger Graph und Π ein 1-lokales Book Embedding (Φ ein 1-lokales Queue Layout) von G . Da je zwei benachbarte Kanten auf der selben Seite (in der selben Queue) liegen, liegen auch alle Kanten einer Zusammenhangskomponente auf der selben Seite (in der selben Queue). Nicht zusammenhängende Teilgraphen H und H' von G können ohne Kantenkonflikte zwischen Kanten aus $E(H)$ und Kanten aus $E(H')$ eingebettet werden, beispielsweise indem alle Knoten von H vor allen Knoten von H' eingebettet werden. Da es zwischen H und H' keine Kanten gibt, gibt es auch dann keine Einschränkung an die Reihenfolge von H und H' , wenn G gerichtet ist. Somit können auch die Kanten verschiedener Zusammenhangskomponenten von G , und somit jede Kante von G auf der selben Seite (in der selben Queue) eingebettet werden. Somit hat G Page Number 1 (Queue Number 1). \square

Jetzt zeigen wir einige Zusammenhänge zwischen Page Number und Queue Number von Graphklassen. Bernhart und Kainen [6] haben gezeigt, dass genau die außenplanaren Graphen Page Number 1 haben. Von Heath et. al [19] wurde außerdem gezeigt, dass sich jeder Graph mit Page Number 1 mit einem 2-Queue Layout einbetten lässt. Diese beiden Aussagen gelten jeweils nur für ungerichtete Graphen und lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Behauptung 2.29 ([6, 19]). *Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G ist außenplanar $\iff pn(G) = 1 \Rightarrow qn(G) \leq 2$.*

Die zweite Folgerung lässt sich nicht umkehren, da es Graphen mit Queue Number 2 und Page Number 2 gibt. Betrachte dafür beispielsweise den vollständigen Graphen K_4 , dessen Book Embedding bzw. Queue Layout wir in Abbildung 3.5 bzw. in Abbildung 3.19 skizziert haben.

Ebenfalls wurde von Bernhart und Kainen [6] gezeigt, dass genau die Subgraphen von hamiltonischen planaren Graphen Page Number höchstens 2 haben. Auch Graphen mit Queue Number 1 haben Page Number höchstens 2, wie von Heath et al. [19] gezeigt wurde. Dies lässt sich zu folgender Aussage zusammenfassen:

Behauptung 2.30 ([6, 19]). *Für jeden ungerichteten Graph G gilt: $qn(G) = 1 \Rightarrow pn(G) \leq 2 \iff G$ ist Subgraph eines hamiltonischen Graphs.*

Auch hier lässt sich die erste Folgerung nicht umkehren, da es Graphen mit Queue Number 2 und Page Number 2 gibt. Im Allgemeinen lässt sich jedoch anhand der Page Number keine Aussage über die Queue Number eines Graphen treffen oder umgekehrt. So stellten Dujmović et al. [8] Graphen mit Queue Number 4, aber beliebig hoher Page Number vor.

Gerichtete Graphklassen wurden unter anderem von Heath et al. [22] untersucht. Dort wurden die Page und Queue Number von gerichteten Bäumen, sowie von gerichteten Graphen mit genau einem Kreis ermittelt. Diese Ergebnisse halten wir hier fest.

Behauptung 2.31 ([22]). *Für jeden gerichteten Baum T gilt $pn(T) = 1$ und $qn(T) \leq 2$.*

Behauptung 2.32 ([22]). *Für jeden gerichteten Graph D mit genau einem Kreis gilt $pn(D) \leq 2$ und $qn(D) \leq 2$.*

Die local Page Number bzw. local Queue Number von ungerichteten sowie gerichteten Graphen ist außerdem abhängig vom *maximum average degree* $mad(G)$ eines Graphen G . Der maximum average degree ist ein Maß für die Dichte eines Graphen und wie folgt definiert: $mad(G) = \max\{2|E(H)|/|V(H)|, H \subseteq G, H \neq \emptyset\}$. Den Zusammenhang zwischen maximum average degree und local Page/Queue Number konnten Merker und Ueckerdt [30, 31] für ungerichtete Graphen zeigen.

Behauptung 2.33 ([30, 31]). *Für jeden ungerichteten Graph G gilt $mad(G)/4 \leq pn_\ell(G) \leq mad(G)/2 + 2$ und $mad(G)/4 \leq qn_\ell(G) \leq mad(G)/2 + 2$.*

Aufgrund von Behauptung 2.24 gilt die untere Schranke auch für gerichtete Graphen. Die obere Schranke gilt ebenfalls für gerichtete Graphen, da für den Beweis der oberen Schranke in [30] eine beliebige Knotenordnung gewählt wurde.

Behauptung 2.34. *Für jeden gerichteten Graph \vec{G} gilt $mad(\vec{G})/4 \leq pn_\ell(\vec{G}) \leq mad(\vec{G})/2 + 2$ und $mad(\vec{G})/4 \leq qn_\ell(\vec{G}) \leq mad(\vec{G})/2 + 2$.*

Für einen ungerichteten Graphen G und einen gerichteten azyklischen Graphen \vec{G} , der durch Richten der Kanten von G entsteht, sind die Parameter $pn_\ell(G)$, $qn_\ell(G)$, $pn_\ell(\vec{G})$ und $qn_\ell(\vec{G})$ also paarweise aneinander gebunden. Allerdings können die Parameter paarweise unterschiedlich sein, wie aus Lemma 3.2 sowie dem Graph und Lemma 3.13 aus Kapitel 3.8 hervorgeht.

3. Planare Graphen

In diesem Kapitel behandeln wir die local Page Number und local Queue Number von planaren gerichteten azyklischen Graphen. Dafür stellen wir vergleichsweise kleine Graphen mit möglichst hoher local Page bzw. local Queue Number vor. Außerdem übertragen wir einige Schranken von ungerichteten auf gerichtete Graphen, und zeigen diese.

3.1 Local Page Number 2

Wir stellen mit diesem Kapitel zunächst einen möglichst kleinen Graphen vor, welcher kein 1-lokales Book Embedding besitzt.

Behauptung 3.1. *Es gibt einen aufwärts-außenplanaren, gerichteten, azyklischen Graphen mit local Page Number 2.*

Beweis. Betrachte dazu den Graphen D in Abbildung 3.1.

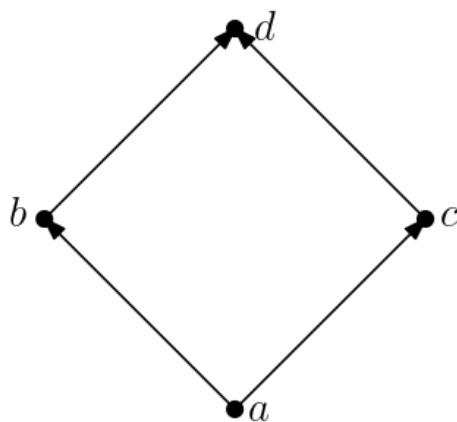


Abbildung 3.1: Aufwärts-außenplanarer, gerichteter, azyklischer Graph D mit local Page Number 2

Die Ordnung der Knoten im Book Embedding ist nicht eindeutig, da keine Aussage über die Relation von b zu c getroffen werden kann. Es gibt deshalb zwei Möglichkeiten für die topologische Knotenordnung, aufgrund der Symmetrie von D genügt allerdings die Betrachtung einer der beiden. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an,

dass $a \prec b \prec c \prec d$ gilt. Die Kante ac steht dann in Konflikt mit bd , weshalb diese auf unterschiedlichen Seiten liegen. Da D zusammenhängend ist, impliziert die Verwendung von zwei Seiten auch direkt die 2-Lokalität. Ein entsprechendes Book Embedding ist in Abbildung 3.2 zu sehen.

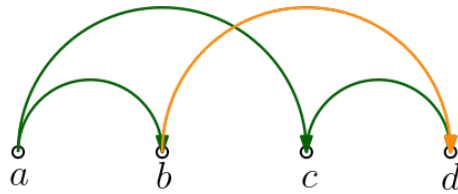


Abbildung 3.2: Mögliches Book Embedding von D

□

3.2 Vergleich zu ungerichteten Graphen

Nun betrachten wir, inwiefern das Richten von Kanten die local Page Number eines Graphen ändern kann. Klar ist, dass die local Page Number dadurch nicht kleiner wird, da die Kantenrichtungen zusätzliche Einschränkungen an das Book Embedding eines Graphen geben.

Lemma 3.2. *Es gibt einen ungerichteten Graphen G , für den ein azyklisch gerichteter Graph D existiert, den man durch Richten der Kanten von G erhält, und für den gilt: $pn_\ell(D) > pn_\ell(G)$.*

Beweis. Betrachte dazu den Graph G in Abbildung 3.3.

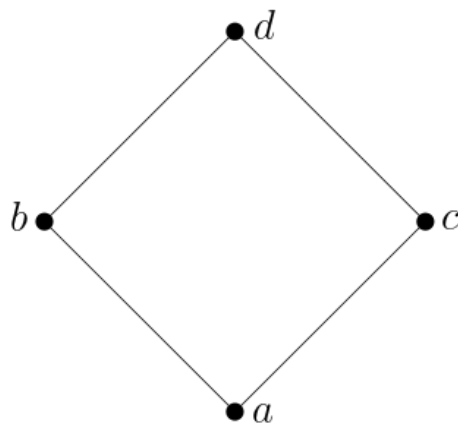
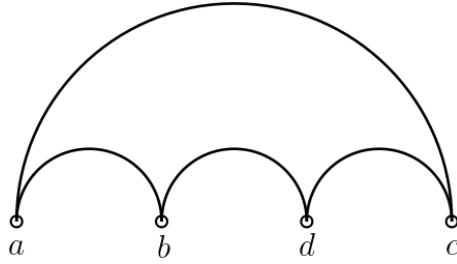


Abbildung 3.3: Ungerichteter Graph G

Als außenplanarer ungerichteter Graph hat G Page Number 1, und somit auch local Page Number 1. Das zugehörige Book Embedding ist in Abbildung 3.4 zu sehen.

Der Graph G lässt sich nun so richten, dass man den Graphen D aus Abbildung 3.1 erhält. Wie in Kapitel 3.1 gezeigt wurde, hat D local Page Number 2. Somit ist die local Page Number von D echt größer als die von G , es gilt $pn_\ell(D) = 2 > 1 = pn_\ell(G)$. □

Es lassen sich weitere Beobachtungen zum Verhältnis von gerichteten und ungerichteten Graphen im Bezug auf local Page Number tätigen. Nehme dazu einen beliebigen ungerichteten Graphen G und einen gerichteten Graphen \vec{G} , der durch Richten der Kanten

Abbildung 3.4: 1-lokales Book Embedding von G

von G entsteht. Die local Page Number von \vec{G} ist nach oben hin auf 4 beschränkt, siehe dazu Kapitel 3.7. Da die local Page Number von G mindestens 1 beträgt, gilt somit $pn_\ell(\vec{G}) - pn_\ell(G) \leq 3$. Da außerdem $pn_\ell(G) \leq pn_\ell(\vec{G})$ gilt, ist die Konstante $C = 3$ eine obere Schranke für die Differenz von $pn_\ell(G)$ und $pn_\ell(\vec{G})$.

3.3 Local Page Number 3

Es wurde bereits von Merker und Ueckerdt [30] gezeigt, dass es ungerichtete Graphen mit local Page Number mindestens 3 gibt. Das dort konstruierte Beispiel hatte 19.685 Knoten. Hier werden wir nun einen deutlich kleineren gerichteten Graphen finden, der ebenfalls local Page Number mindestens 3 hat. Für die Konstruktion dieses Graphen benötigen wir zunächst eine Kante vw , für welche die beiden Endpunkte v und w in jedem Book Embedding inzidente Kanten auf den selben zwei Seiten haben. Dazu zeigen wir zunächst allgemeiner folgendes Lemma:

Lemma 3.3. *In jedem 2-lokalen linear Layout Γ des vollständigen Graphen K_4 , bei welchem genau zwei verschiedene, nicht benachbarte Kanten in Konflikt stehen, existiert eine Kante vw , sodass sich die zu v inzidenten Kanten in Γ in den selben zwei Sets befinden wie die zu w inzidenten Kanten.*

Gesucht ist also eine Kante vw mit $S(v) = S(w)$ und $|S(v)| = |S(w)| = 2$, wobei $S(v)$ bzw. $S(w)$ für die Menge an Sets steht, in denen sich zu v bzw. w inzidente Kanten befinden.

Beweis. Es lassen sich folgende Beobachtungen aufstellen:

- (i) Da zwei Kanten miteinander in Konflikt stehen, werden zwei Sets für die Partition der Kantenmenge benötigt.
- (ii) Es gilt $|S(v)| \leq 2$ für jedes $v \in V(K_4)$.
- (iii) Aufgrund der Vollständigkeit von K_4 , gibt es für je zwei Knoten $x, y \in V(K_4)$ in jedem linear Layout ein Set S_{xy} , in dem sich die zu x und y inzidente Kante xy befindet.

Aus diesen drei Beobachtungen folgt bereits die Existenz einer Kante vw mit $S(v) = S(w)$ und $|S(v)| = |S(w)| = 2$. Der Beweis erfolgt durch Fallunterscheidung über die Anzahl der Sets in \mathcal{S} eines Linear Layouts von K_4 . Da ein Set als eine nichtleere Teilmenge der Kantenmenge definiert war, befindet sich in jedem Set mindestens eine Kante. Da es in jedem linear Layout von K_4 einen Kantenkonflikt gibt, werden mindestens zwei Sets benötigt.

- Sei Γ ein beliebiges 2-lokales linear Layout mit Partition $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$. Aus der Vollständigkeit von K_4 folgt, dass es nicht gleichzeitig einen Knoten x mit $S(x) = \{S_1\}$ und einen Knoten y mit $S(y) = \{S_2\}$ gibt. Grund dafür ist, dass die Kante xy existiert und zu beiden Knoten inzident ist, weshalb $S(x)$ und $S(y)$ nicht disjunkt sind. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass es in Γ keinen Knoten gibt, dessen inzidente Kanten alle in S_2 sind. Da es zwei Kanten gibt, die in Konflikt zueinander stehen, gibt es mindestens eine Kante in S_2 , also mindestens zwei Knoten $v, w \in V(K_4)$ welche inzidente Kanten in S_2 haben. Da angenommen wurde, dass es keine Knoten gibt deren inzidente Kanten alle in S_2 liegen, haben v und w auch inzidente Kanten in S_1 . Somit erfüllt die Kante vw die Bedingung aus Lemma 3.3.
- Sei Γ ein beliebiges 2-lokales linear Layout mit Partition $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch: angenommen es gibt in Γ keine Kante $vw \in E(K_4)$ mit den Eigenschaften $S(v) = S(w)$ und $|S(v)| = |S(w)| = 2$. Nach Voraussetzung ist Γ 2-lokal, das heißt es gilt für alle $v \in V(K_4)$: $|S(v)| \leq 2$. Für jeden Knoten $v \in V(K_4)$ gilt deshalb $|S(v)| = 1$ oder $|S(v)| = 2$. Es gibt nur drei verschiedene Möglichkeiten, welche Sets die Menge $S(v)$ für einen Knoten v mit $|S(v)| = 2$ beinhalten kann. Diese Möglichkeiten sind $\{S_1, S_2\}$, $\{S_1, S_3\}$ und $\{S_2, S_3\}$. Da es vier Knoten gibt und angenommen wurde, dass sich deren Mengen an Sets paarweise unterscheiden, gibt es einen Knoten $v_1 \in V(K_4)$ mit $|S(v_1)| = 1$. Es gelte dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $S(v_1) = \{S_1\}$. Aufgrund der Vollständigkeit von K_4 hat dann jeder andere Knoten ebenfalls inzidente Kanten in S_1 . Für die restlichen drei Knoten aus $V(K_4) \setminus \{v_1\}$ verbleiben somit zwei mögliche Setmengen der Größe zwei, $\{S_1, S_2\}$ und $\{S_1, S_3\}$. Da angenommen wurde, dass es keine zwei Knoten mit der selben Setmenge gibt, gibt es einen weiteren Knoten $v_2 \in V(K_4) \setminus \{v_1\}$ mit $|S(v_2)| = 1$. Aus der Vollständigkeit folgt dann $S(v_1) = S(v_2) = \{S_1\}$. Es wurde angenommen, dass Γ drei Sets verwendet. In jedem Set befindet sich mindestens eine Kante, die zu v_1 oder v_2 inzidenten Kanten befinden sich aber alle in S_1 . Die einzige verbleibende Kante v_3v_4 kann sich aber nicht gleichzeitig in S_2 und S_3 befinden. Widerspruch, also gibt es eine Kante vw mit der gesuchten Bedingung aus Lemma 3.3 oder es gibt kein 2-lokales linear Layout mit drei Sets.
- Sei Γ ein beliebiges 2-lokales linear Layout Γ mit Partition $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Angenommen es gibt einen Knoten $v_1 \in V(K_4)$ mit $|S(v_1)| = 1$. Sei $S(v_1) = \{S_1\}$. Da kein Set leer ist, befinden sich dann die drei verbleibenden Kanten v_2v_3, v_2v_4 und v_3v_4 , welche nicht zu v_1 inzident sind, in den verbleibenden Sets $\{S_2, S_3, S_4\}$. Dann befinden sich aber die zu v_2 inzidenten Kanten v_1v_2, v_2v_3 und v_2v_4 in drei paarweise verschiedenen Sets, was ein Widerspruch zur 2-Lokalität von Γ ist. Also gilt $|S(v)| = 2$ für alle $v \in V(K_4)$. Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $S(v_1) = \{S_1, S_2\}$. Angenommen es gibt keine zwei Knoten $v, w \in V(K_4)$ mit $S(v) = S(w)$. Da jede Kante zwei Endpunkte hat, kommt jedes Set in mindestens zwei Setmengen von Knoten vor, so auch S_1 . Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $S(v_2) = \{S_1, S_3\}$. In den Setmengen von v_3 und v_4 muss nun insgesamt je einmal das Set S_2 bzw. S_3 , sowie zweimal das Set S_4 enthalten sein. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $S(v_3) = \{S_2, S_4\}$ und $S(v_4) = \{S_3, S_4\}$. Bis auf Umbenennungen der Knoten und Sets ist diese Zuteilung eindeutig. Dann haben v_1 und v_4 aber kein gemeinsames Set. Widerspruch, da aufgrund der Vollständigkeit von K_4 die Kante v_1v_4 existiert. Somit gibt es eine Kante vw mit der gesuchten Bedingung aus Lemma 3.3 oder es gibt kein 2-lokales linear Layout mit vier Sets.

Für eine Partition mit fünf nichtleeren Sets existiert kein 2-lokales Linear Layout. Grund dafür ist, dass K_4 lediglich sechs Kanten hat, und es somit nur zwei Kanten gibt, welche sich nicht in verschiedenen Sets befinden. Knoten aus K_4 , welche nicht zu diesen beiden Kanten gleichzeitig inzident sind, hätten dann inzidente Kanten in drei paarweise verschiedenen Sets.

Bei einer Partition mit sechs Sets würden sich alle Kanten in paarweise unterschiedlichen Sets befinden. Partitionen mit mehr als sechs Sets sind für sechs Kanten nicht möglich.

Somit wurde für alle möglichen Linear Layouts von K_4 die Existenz einer Kante vw mit $S(v) = S(w)$ und $|S(v)| = |S(w)| = 2$ bewiesen.

□

Wir betrachten nun Book Embeddings von K_4 . Aufgrund der Symmetrie von K_4 sind alle Book Embeddings bis auf die Partition der Kanten identisch, und die Knotenordnung spielt keine Rolle. Betrachte dafür Abbildung 3.5.

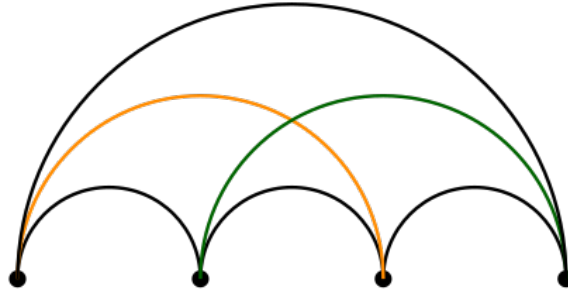


Abbildung 3.5: Grundlegendes Aussehen eines Book Embeddings von K_4 ohne Benennung der Knoten. Die zwei in Konflikt stehenden Kanten sind farblich markiert, die schwarzen Kanten liegen auf beliebigen Seiten.

Es lässt sich beobachten, dass es in jedem Book Embedding genau einen Konflikt gibt, und die vier Endpunkte der zwei sich kreuzenden Kanten paarweise verschieden sind. Somit lässt sich Lemma 3.3 für jedes 2-lokale Book Embedding von K_4 anwenden.

Die Kanten des Graphen K_4 lassen sich außerdem richten, sodass der gerichtete azyklische Graph D in Abbildung 3.6 entsteht.

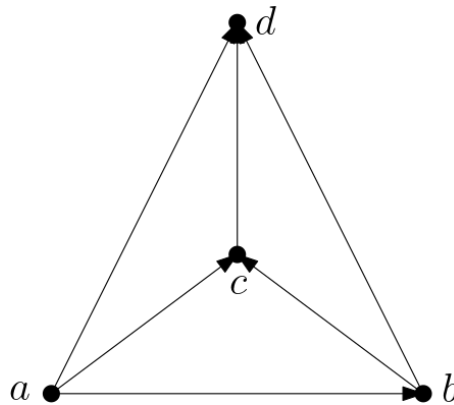


Abbildung 3.6: Graph D , der durch Richten der Kanten von K_4 entsteht

Da Lemma 3.3 für ein beliebiges linear Layout von K_4 gezeigt wurde, gilt es auch für den Graphen D , bei welchem durch die Kantenrichtungen die Knotenordnung festgelegt wird. Somit hat D in jedem 2-lokalen Book Embedding eine Kante vw mit $P(v) = P(w)$ und $|P(v)| = |P(w)| = 2$.

Nun werden sechs Kopien des Graphen G in Abbildung 3.7 an D angefügt, sodass der Graph D_G entsteht. Dazu werden für jede Kante $vw \in E(D)$ die Knoten s_1, \dots, s_6 eingefügt und wie in Abbildung 3.7 mit gerichteten Kanten untereinander sowie mit v und w verbunden.

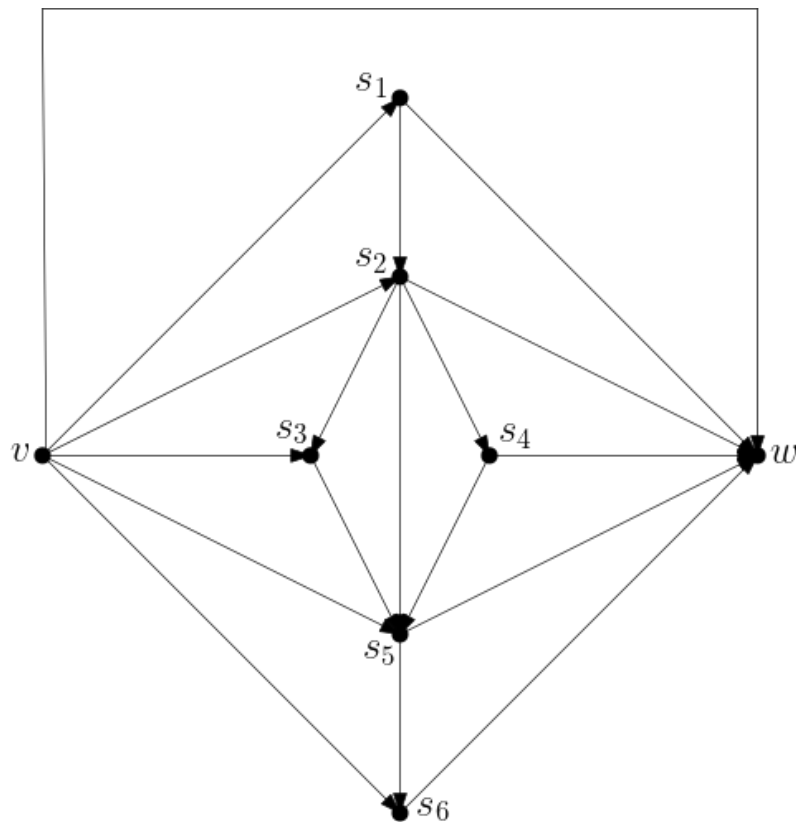


Abbildung 3.7: Teilgraph G , welcher für jede Kante von D eingefügt wird.

Wir stellen nun folgende Behauptung auf:

Lemma 3.4. *Der Graph D_G hat local Page Number 3.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an es gibt ein 2-lokales Book Embedding von D_G . Der Graph D ist ein Teilgraph von D_G . Aufgrund von Lemma 3.3 gibt es deshalb in jedem 2-lokalen Book Embedding von D_G mindestens einen Teilgraphen G wie in Abbildung 3.7, sodass für dessen Knoten v und w die Bedingung $P(v) = P(w)$ mit $|P(v)| = 2$ erfüllt ist. Wir betrachten nun einen Teilgraphen G' von D_G mit dieser Bedingung. Die Knoten von G' haben bis auf die Vertauschung von s_3 und s_4 eine eindeutige topologische Sortierung, es gilt in jedem Book Embedding $v \prec s_1 \prec s_2 \prec \{s_3, s_4\} \prec s_5 \prec s_6 \prec w$.

Sei Π ein 2-lokales Book Embedding von D_G . In Abbildung 3.8 ist ein Ausschnitt von Π mit dem Teilgraphen G' abgebildet.

Es fehlt die Kante s_2s_5 , außerdem ist die Kante vw nicht eingezeichnet. Weiterhin fehlen der Übersicht halber die Kanten direkt aufeinanderfolgender Knoten, diese sind nur insofern relevant, dass sie die Ordnung der Knoten vorgeben. Dieses Book Embedding von G' ist bis auf die Vertauschung der Knoten s_3 und s_4 eindeutig: vs_6 steht mit allen zu w inzidenten Kanten in Konflikt. Die Kante vs_6 liege ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf P_1 , dann liegen alle zu w inzidenten Kanten zusammen auf einer anderen Seite, dies sei P_2 . Die Verwendung einer dritten Seite ist hier nicht möglich, da $|P(v) + P(w)| = 2$ vorausgesetzt wurde. Da s_1w mit allen zu v inzidenten Kanten in Konflikt steht, liegen weiterhin alle zu v inzidenten Kanten ebenfalls auf P_1 . Die Ordnung der Knoten s_3 und s_4 spielt hier keine Rolle, die Konflikte der Kanten sind die selben.

Nun soll die Kante s_2s_5 in das Book Embedding eingefügt werden. Die zu s_2 bzw. zu s_5 inzidenten Kanten liegen bereits jeweils auf P_1 und P_2 , woraus folgt, dass s_2s_5 ebenfalls

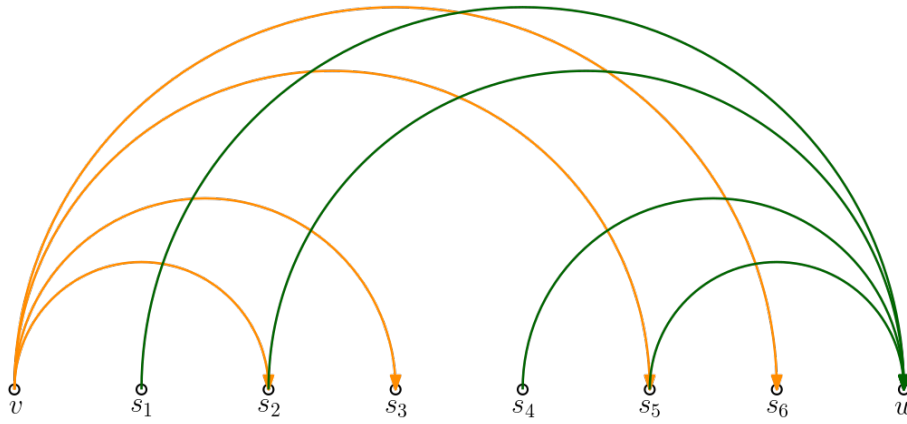


Abbildung 3.8: unvollständiges Book Embedding II des Teilgraphen G' von D_G . Alle orangen und alle grünen Kanten liegen jeweils auf derselben Seite.

auf P_1 oder P_2 liegt, da Π 2-lokal ist. Das ist aber nicht möglich, da so entweder mit vs_3 oder s_4w ein Konflikt entsteht. Somit ist ein 2-lokales Book Embedding von D_G unter der Bedingung $P(v) = P(w)$ und $|P(v)| = |P(w)| = 2$ nicht möglich, und D_G hat local Page Number 3.

□

Der Teilgraph G wurde sechsmal an den Graphen D angefügt. Der resultierende Graph D_G hat somit $6 \cdot 6 + 4 = 40$ Knoten und $6 \cdot 17 + 6 = 108$ Kanten. Entsprechend der Eigenschaften seiner Teilgraphen G und D ist D_G gerichtet, azyklisch und aufwärts planar.

3.4 Local Page Number 3 bei beschränkter Seitenanzahl

Beim Betrachten der local Page Number wird im Allgemeinen die gesamte Seitenanzahl des Book Embeddings außer Acht gelassen, weshalb diese vergleichsweise groß werden kann. Hier soll es nun eine Schranke für die Anzahl der insgesamt verwendeten Seiten geben. Für den Fall, dass es Restriktionen für die Seitenanzahl gibt, lassen sich schnell Graphen mit großer local Page Number finden. Beispielsweise lässt sich der in 2.2 vorgestellte Graph, welcher local Page Number ≥ 3 hat, deutlich verkleinern falls die Page Number beschränkt ist. Dazu kombiniert man das Gadget aus Abbildung 3.7 mit dem Graphen aus 2.2. Der entstehende Graph ist in Abbildung 3.9 zu sehen.

Der Graph wird wie folgt konstruiert: Gegeben sei eine obere Schranke p für die maximale gesamte Seitenanzahl. Wir konstruieren einen Graphen mit $2p - 2$ Knoten entsprechend dem Muster aus 2.2. Anschließend setzen wir einen Knoten x zwischen Knoten v_{p-1} und w_1 und teilen die Kante zwischen v_{p-1} und w_1 in zwei Kanten $v_{p-1}x$ und xw_1 auf. Zu x inzidente Kanten liegen alle auf der gleichen Seite, sofern sie zu Knoten führen die gemäß der topologischen Sortieren vor Knoten v_1 oder nach Knoten w_{p-1} liegen. Bei den Knoten a, b und c unten ist genau das der Fall. Alle drei Kanten ax, bx und cx liegen auf derselben Seite, da sie jeweils mit den gleichen $p - 1$ unterschiedlichen Kanten in Konflikt stehen. Die Knoten haben eine eindeutige Ordnung, es gilt $a \prec b \prec c \prec x$. Deshalb steht die rot markierte Kante ac mit bx in Konflikt, und liegt auf einer anderen Seite. Somit erfüllt die rote Kante genau die in 3.3 geforderten Voraussetzungen für eine Kante vw mit $P(v) = P(w)$ und $|P(v)| = |P(w)| = 2$.

Wir fügen nun an diese Kante das Gadget 3.7 an. Es ergibt sich ein Graph der Größe $2p + 10$ Knoten und $3p + 24$ Kanten, wobei p die Schranke für die gesamte Seitenanzahl bezeichnet. Gibt es beispielsweise eine obere Schranke von 4 für die gesamte Seitenanzahl,

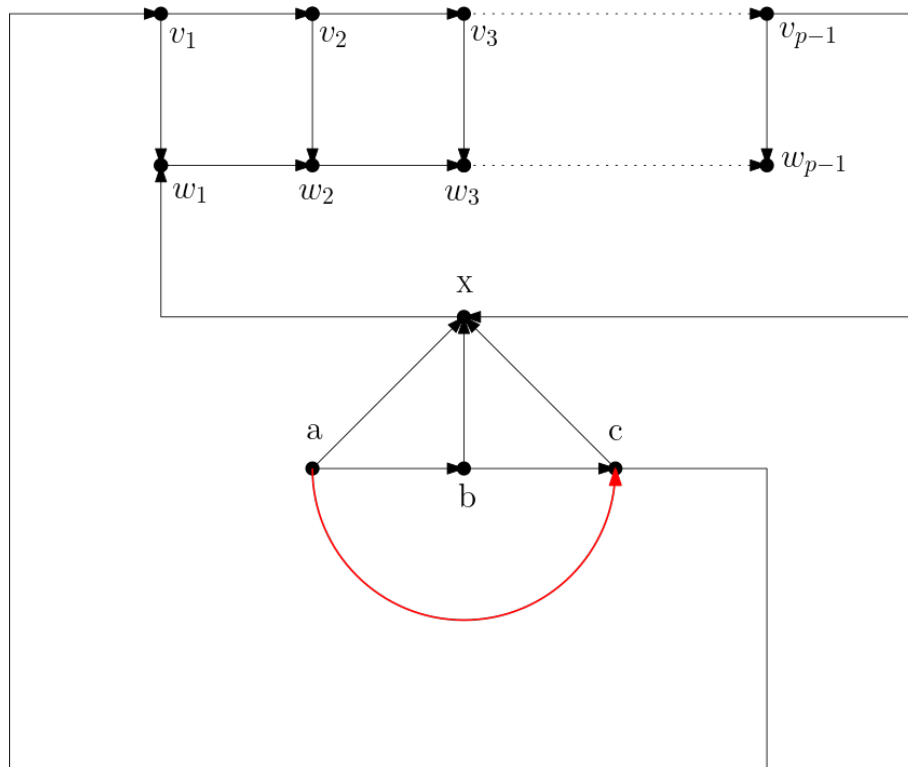


Abbildung 3.9: Gerichteter Graph mit Kante vw

lässt sich mit dieser Vorgehensweise ein Graph mit 18 Knoten und 36 Kanten konstruieren, der local Page Number 3 hat. Für $p < 15$ hat dieser Graph weniger Knoten als der in 3.3 gezeigte Graph. Im Umkehrschluss benötigen allgemein Graphen der genannten Größe mindestens p Seiten, um 2-lokal bleiben zu können.

Weiterhin kann mit dem abgebildeten Graphen erzwungen werden, dass beliebig viele direkt aufeinanderfolgende Knoten inzidente Kanten auf der gleichen Seite haben. Dazu kann der Graphen um Knoten $d, e \dots$ erweitert werden, die entsprechend auf c folgen mit $c \prec d \prec e \dots$ und ebenfalls zu x inzident sind. Außerdem können so beliebig viele Kanten der gleichen Seite erzeugt werden, die zum gleichen Knoten, hier x , inzident sind.

3.5 Local Page Number 4 bei fester Knotenordnung und Dreieck vwx

Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich ein Graph konstruieren, der bei vorgegebener Knotenordnung im Book Embedding 4-lokal ist.

Lemma 3.5. *Ein planarer gerichteter azyklischer Graph D mit einem Dreieck Δvwx mit $P(v) = P(w) = P(x)$ und $|P(v)| = 3$ auf einer Facette lässt sich bei fester Knotenordnung zu einem Graphen D' erweitern, welcher 4-lokal ist.*

Beweis. Sei D ein planarer gerichteter azyklischer Graph mit einem Dreieck Δvwx mit $P(v) = P(w) = P(x)$ und $|P(v)| = 3$ auf einer Facette. Wir erweitern D um die Knoten s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 und s_6 , wodurch der Graph D' entsteht. Das Book Embedding des Teilgraphen T von D' bestehend aus v, w, x und s_1, \dots, s_6 ist in Abbildung 3.10 zu sehen. Die Knotenordnung sei fest.

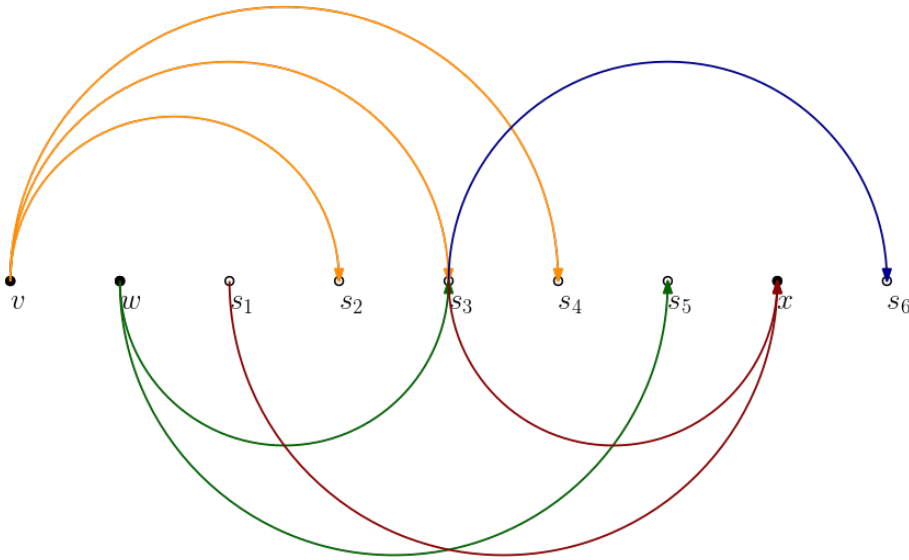


Abbildung 3.10: Book Embedding von des Teilgraphen T von D'

Zum Knoten s_3 sind in der Abbildung bereits vier verschiedenfarbige Kanten inzident. Es bleibt also zu zeigen, dass andere Kantenverteilungen ebenfalls ein 4-locales Book Embedding ergeben, unter der Voraussetzung $P(v) = P(w) = P(x) \wedge |P(v)| = 3$. Dazu zeigen wir zunächst, dass jedes Book Embedding bei welchem einer der Knoten v, w oder x im abgebildeten Bereich inzidente Kanten auf mindestens 2 verschiedenen Seiten hat, 4-lokal ist. Wir unterscheiden die verschiedenen Fälle:

- Knoten w hat inzidente Kanten auf mehr als einer Seite: Angenommen ws_3 und ws_5 liegen auf unterschiedlichen Seiten, diese seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit P_1 und P_2 . Da vs_2 und s_1x jeweils mit beiden zu w inzidenten Kanten, aber auch gegenseitig in Konflikt stehen, liegen diese jeweils auf einer weiteren Seite, diese seien P_3 bzw. P_4 . Dies ist aber unter der Voraussetzung $P(v) = P(w) = P(x) \wedge |P(v)| = 3$ mit einem 3-lokalen Book Embedding nicht möglich, mindestens einer der Knoten v, wx hat inzidente Kanten in vier verschiedenen Seiten.
- Knoten x hat inzidente Kanten auf mehr als einer Seite: Analog: Liegen s_1x und s_3x auf verschiedenen Seiten, so liegen vs_4 und ws_5 auf zwei weiteren verschiedenen Seiten, da beide Kanten mit beiden zu x inzidenten Kanten und auch gegenseitig in Konflikt stehen. Auch das verbietet unter der Voraussetzung ein 3-locales Book Embedding.
- Knoten v hat inzidente Kanten auf mehr als einer Seite: Die zu w inzidenten Kanten liegen ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf der Seite P_1 , die zu x inzidenten Kanten auf P_2 . Alle zu v inzidenten Kanten stehen jeweils mit ws_5 und s_1x in Konflikt und liegen somit weder auf P_1 noch auf P_2 . Auch hier existiert kein 3-locales Book Embedding, wenn die zu v inzidenten Kanten nicht alle auf derselben Seite liegen.

Falls einer der Knoten v, w, x in dem gezeigten Ausschnitt eines Book Embeddings von T zu Kanten auf unterschiedlichen Seiten inzident ist, ist das gesamte Book Embedding von D' also 4-lokal. Falls alle drei Knoten jeweils nur zu Kanten auf der gleichen Seite inzident sind, ergibt sich das in Abbildung 3.10 gezeigte Book Embedding. Hier steht die Kante s_3s_6 mit den Kanten vs_4, ws_5 und s_1x in Konflikt, weshalb sie eine vierte Seite benötigt. Somit ist auch dieses Book Embedding 4-lokal.

□

3.6 Local Page Number 4 bei fester Knotenordnung

Unter der Voraussetzung, dass die Knotenordnung im Book Embedding fest vorgegeben werden kann, lässt sich ein planarer ungerichteter Graph G mit Page Number 4 konstruieren. Dies werden wir in diesem Kapitel tun. Dabei wird nicht die bestmögliche, sondern die ungünstigste Knotenordnung im Bezug auf niedrige local Page Number untersucht.

Theorem 3.6. *Es gibt einen planaren Graphen G und eine Knotenordnung σ für G , sodass G mit σ kein 3-lokales Book Embedding hat.*

Nun konstruieren wir einen solchen Graphen und Knotenordnung. Der Graph G ist in Abbildung 3.11 skizziert und wird wie folgt konstruiert: Sei K eine Kopie des ungerichteten vollständigen bipartiten Graphs $K_{2,38}$. Die Knotenmenge von K kann in zwei Teilmengen V_1 bzw. V_2 zu 2 bzw. 38 Knoten unterteilt werden, sodass jeder Knoten genau zu allen Knoten verbunden ist, die sich in der jeweils anderen Teilmenge befinden. Nun erhält man G , indem man in K zusätzlich Kanten so einfügt, dass alle 38 Knoten aus V_2 durch einen Pfad verbunden sind, und außerdem die zwei Knoten aus V_1 durch eine Kante miteinander verbunden sind. Die Knotenmenge bleibt dabei dieselbe.

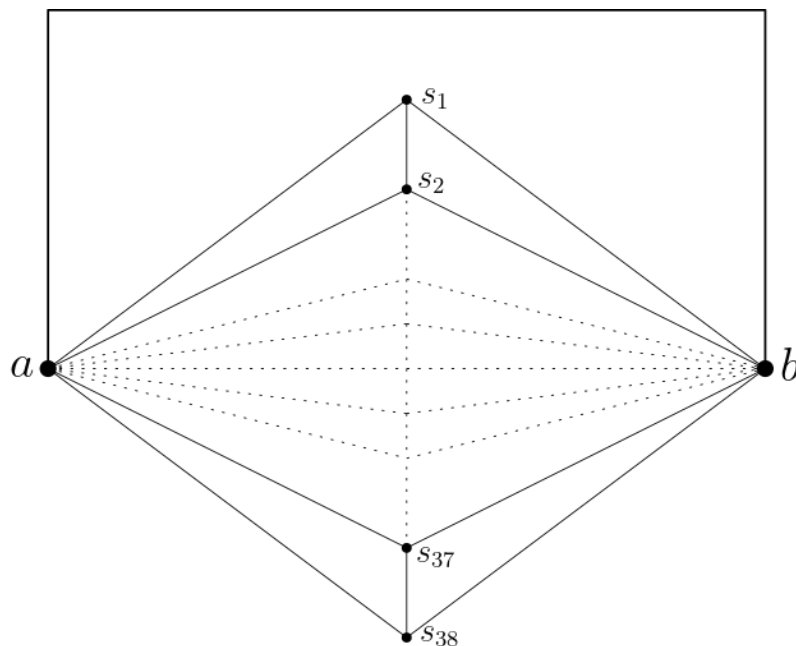


Abbildung 3.11: Skizze von G

Wir teilen die Knotenmenge $V(G)$ analog zu $V(K)$ in zwei Teilmengen V_1 und V_2 auf. Die Knoten in V_1 bezeichnen wir im Folgenden als a und b . Weiterhin bezeichnen wir die Knoten aus V_2 als s_1, \dots, s_{38} sodass für alle $i \in \{1, \dots, 37\}$ die Kante $s_i s_{i+1}$ existiert.

Lemma 3.7. *Es gibt eine totale Knotenordnung σ für den Graphen G , mit welcher jedes zugehörige Book Embedding mindestens vier Seiten benötigt.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch. Wir konstruieren eine Knotenordnung σ für die Knoten aus G . Nehme zunächst an, es gibt ein 3-lokales Book Embedding Π unter Verwendung von σ . Also gilt für Π : $|P(a)| \leq 3$ und $|P(b)| \leq 3$. Da die Kante ab zu den beiden Knoten a und b inzident ist, gilt $P(a) \cap P(b) \neq \emptyset$. Somit folgt $|P(a) \cup P(b)| \leq (3+3) - 1 = 5$. Zu a oder b inzidente Kanten liegen also in Π nur auf insgesamt fünf verschiedenen Seiten.

Sei \mathcal{P} die Menge aller in Π verwendeten Seiten. Die Knoten a und b haben in Π inzidente Kanten auf höchstens fünf verschiedenen Seiten, bezeichne diese Seitenmenge als \mathcal{P}_{ab} . Nun legen wir für die Knotenordnung σ fest: $a \prec s_i \prec b$ für jedes $i \in \{1, \dots, 38\}$. Alle Knoten s_1, \dots, s_{38} liegen also zwischen a und b in Π .

Beachte weiterhin, dass für alle $i \in \{1, \dots, 38\}$ je eine Kante as_i und eine Kante s_ib existiert.

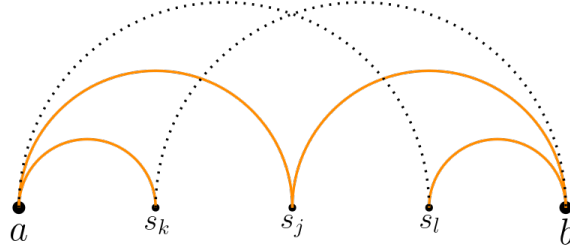


Abbildung 3.12: Der einfarbige Knoten s_j verhindert, dass weitere Knoten s_k, s_l gleichzeitig einfarbig sind mit derselben Farbe wie s_j

Angenommen für ein $j \in \{1, \dots, 38\}$ liegen die Kanten as_j und s_jb auf derselben Seite P_j . Dann gilt für Knoten $s_k \prec s_j$, dass as_j und s_kb in Konflikt stehen, weshalb s_kb nicht auf P_j liegt. Analog gilt für Knoten $s_l \succ s_j$, dass as_l mit s_jb in Konflikt steht, und somit nicht auf P_j liegt. Eine Skizzierung dieses Sachverhalts ist in Abbildung 3.12 zu sehen.

Somit gibt es, egal welche Knotenordnung innerhalb der Knoten s_1, \dots, s_{38} in Π gilt, für jede Seite $P \in \mathcal{P}_{ab}$ höchstens einen Knoten $s \in V_2$, für den die Kanten as und sb beide auf der Seite P liegen. Mit $|\mathcal{P}_{ab}| \leq 5$ folgt, dass es in Π insgesamt höchstens fünf Knoten $s_i, i \in \{1, \dots, 38\}$ gibt, für welche die Kanten as_i und s_ib auf derselben Seite liegen. Diese Knoten werden im Folgenden als *einfarbig* bezeichnet. Für die verbleibenden mindestens 33 Knoten aus $\{s_1, \dots, s_{38}\}$, die im Folgenden als *zweifarbige* bezeichnet werden, liegen die Kanten zu a und b auf unterschiedlichen Seiten.

Nun teilen wir die Knoten s_1, \dots, s_{36} in neun 4-Tupel $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_9)$ auf. Es gelte dabei $F_1 = (s_1, s_2, s_3, s_4); \dots; F_9 = (s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36})$. Wir legen nun die Ordnung aller Knoten fest, diese ist in Abbildung 3.13 zu sehen.

Für die Knotenordnung σ der Knoten eines Tupels $F_i \in \mathcal{F}, i \in \{1, \dots, 9\}$ legen wir fest: $s_j \prec s_{j+2} \prec s_{j+1} \prec s_{j+3}$, mit $j = 4i - 3$. Für F_1 gilt beispielsweise $s_1 \prec s_3 \prec s_2 \prec s_4$. Außerdem verschachteln wir in σ die Tupel untereinander, es gilt $s_j \prec s_{j+2} \prec F_{i+1} \prec s_{j+1} \prec s_{j+3}$ für jedes $i \in \{1, \dots, 8\}$ und $j = 4i - 3$. Beispielsweise wird F_2 zwischen den Knoten s_3 und s_2 von F_1 platziert, F_3 wiederum zwischen den Knoten s_7 und s_6 von F_2 und so weiter. Schließlich platzieren wir die Knoten s_{37} und s_{38} innerhalb von F_9 , sodass gilt $s_{33} \prec s_{35} \prec s_{37} \prec s_{38} \prec s_{34} \prec s_{36}$. Damit ist σ eine eindeutige Knotenordnung für alle Knoten aus $V(G)$.

Als nächstes betrachten wir die 4-Tupel aus \mathcal{F} , die keine *einfarbigen* Knoten besitzen. Anfangs wurde gezeigt, dass es in Π höchstens fünf einfarbige Knoten gibt. Bei neun 4-Tupeln gibt es deshalb in Π mindestens $9 - 5 = 4$ solcher 4-Tupel.

Wir nehmen nun vier 4-Tupel die nur aus *zweifarbigen* Knoten bestehen, und bezeichnen diese als T_1, T_2, T_3 und T_4 . Wir geben den Knoten dieser 4-Tupel ebenfalls neue Namen, es sei $T_i = (c_i, d_i, e_i, f_i), i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sodass in σ gilt $c_i \prec e_i \prec d_i \prec f_i$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte dabei $c_1 \prec c_2 \prec c_3 \prec c_4$, T_2 liegt also in σ zwischen den Knoten von T_1, T_3 innerhalb von T_2 und T_4 innerhalb von T_3 .

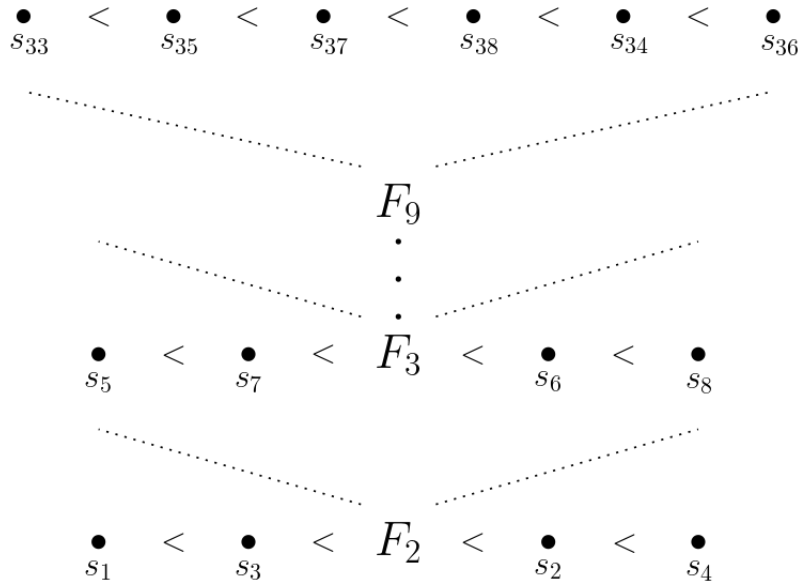


Abbildung 3.13: Verbildlichung der Knotenordnung σ . Die neun 4-Tupel F_1, \dots, F_9 werden dabei ineinander verschachtelt.

Betrachte nun einen Ausschnitt von Π mit den Knoten a, b, c_i, e_i, d_i und f_i für ein beliebiges $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, zu sehen in Abbildung 3.14.

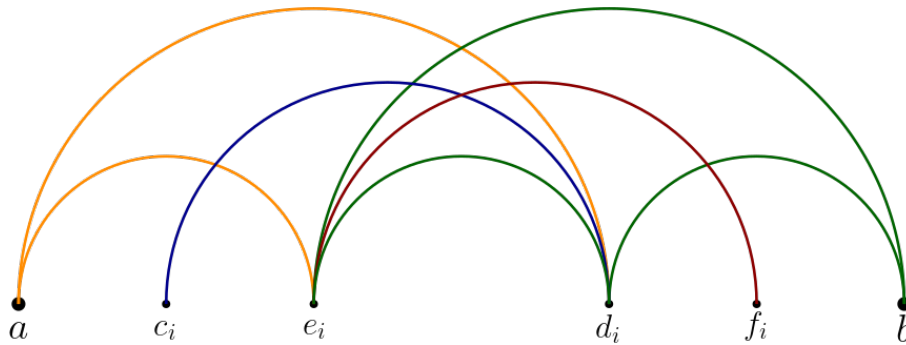


Abbildung 3.14: Mögliches 3-lokales Book Embedding von a, c_i, e_i, d_i, f_i, b für ein beliebiges $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ unter σ

Beachte, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, diese Knoten 3-lokal einzubetten. In jedem Fall kann aber folgende Aussage getroffen werden:

Lemma 3.8. *Für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ liegt in Π mindestens eine der Kanten $c_i d_i, d_i e_i, e_i f_i$ auf einer Seite aus \mathcal{P}_{ab} , auf welcher sich auch eine der Kanten $a e_i, a d_i, e_i b, d_i b$ befindet. Es gilt: es gibt ein $P \in \mathcal{P}_{ab}$, sodass $c_i d_i \in P$ oder $d_i e_i \in P$ oder $e_i f_i \in P$ und zusätzlich $a e_i \in P$ oder $a d_i \in P$ oder $e_i b \in P$ oder $d_i b \in P$.*

Beweis. Wir beweisen Lemma 3.8 durch einen Widerspruch: Wir nehmen an es gibt keine zwei solchen Kanten, die auf der gleichen Seite liegen. Für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: Beide Knoten d_i und e_i haben vier adjazente Kanten, d.h. $\deg(d_i) = \deg(e_i) = 4$. Als Element von T_i wurde außerdem vorausgesetzt, dass d_i und e_i zweifarbig sind, also $a d_i$ und $d_i b$ bzw. $a e_i$ und $e_i b$ jeweils auf unterschiedlichen Seiten liegen. Sei $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}_{ab}$ die Menge der Seiten, auf denen die Kanten $a d_i, d_i b, a e_i$ und $e_i b$ liegen. Dann liegen $c_i d_i, d_i e_i$ und $e_i f_i$ per Voraussetzung nicht auf Seiten aus \mathcal{P}_i . Da am Anfang dieses Abschnitts angenommen wurde, dass Π 3-lokal ist, liegen je $c_i d_i$ und $d_i e_i$ bzw. $d_i e_i$ und $e_i f_i$ auf derselben Seite,

ansonsten hätte d_i bzw. e_i inzidente Kanten auf vier verschiedenen Seiten. Somit liegen auch $c_i d_i$ und $e_i f_i$ auf derselben Seite. Widerspruch, da $c_i \prec e_i \prec d_i \prec f_i$ gilt, und $c_i d_i$ und $e_i f_i$ somit in Konflikt stehen. \square

Somit ist Lemma 3.8 bewiesen.

Für T_1 gilt deshalb: Es gibt eine Seite $P_1 \in \mathcal{P}_{ab}$, auf der je mindestens eine der Kanten $c_1 d_1, d_1 e_1, e_1 f_1$ und eine der Kanten $a e_1, a d_1, e_1 b, d_1 b$ liegt. Für einen Knoten $x \in V(G)$ mit $e_1 \prec x \prec d_1$ gilt deshalb, dass weder ax noch bx auf P_1 liegen, da beide Kanten jeweils mit allen Kanten $c_1 d_1, d_1 e_1, e_1 f_1$ in Konflikt stehen, und mindestens eine der Kanten $c_1 d_1, d_1 e_1, e_1 f_1$ bereits auf P_1 liegt.

Beachte nun, dass das 4-Tupel $T_2 = (c_2, d_2, e_2, f_2)$ in σ zwischen d_1 und e_1 liegt. Für die Knotenordnung gilt $e_1 \prec c_2 \prec e_2 \prec d_2 \prec f_2 \prec d_1$. Wir betrachten nun einen Ausschnitt von Π mit den Knoten aus T_1 und T_2 sowie a und b . Dieser Ausschnitt ist in Abbildung 3.15 gezeichnet.

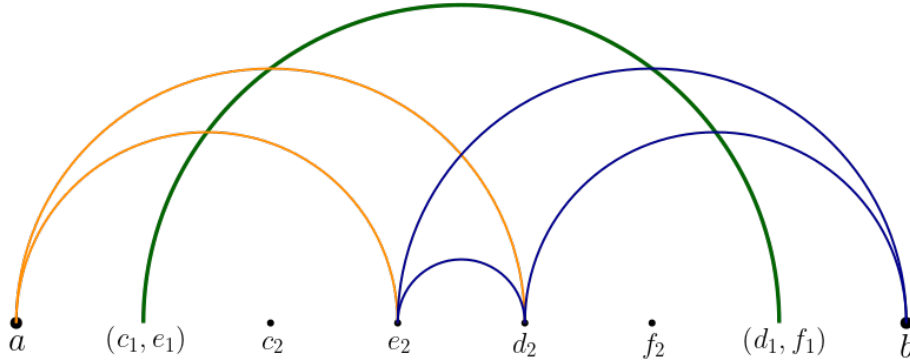


Abbildung 3.15: Ausschnitt von Π mit a , den 4-Tupeln T_1 und T_2 , sowie b . Die grüne Kante stellt hierbei diejenige Kante aus $c_1 d_1, d_1 e_1, e_1 f_1$ dar, die auf der Seite $P_1 \in \mathcal{P}_{ab}$ liegt.

Zuvor wurde bewiesen, dass eine der Kanten $c_1 d_1, d_1 e_1, e_1 f_1$ auf einer Seite $P_1 \in \mathcal{P}_{ab}$ liegt. Für das Einbetten von T_2 gilt deshalb zusätzlich, dass die Kanten $a e_2, a d_2, e_2 b, d_2 b$ nicht auf P_1 liegen. Außerdem gilt auch für T_2 , dass eine Kante aus $c_2 d_2, d_2 e_2, e_2 f_2$ auf einer Seite $P_2 \in \mathcal{P}_{ab}$ liegt, auf welcher auch eine der Kanten $a e_2, a d_2, e_2 b, d_2 b$ liegt. Beachte, dass $P_2 \neq P_1$ gilt, da keine der Kanten $a e_2, a d_2, e_2 b, d_2 b$ auf P_1 liegt. Analog können Aussagen für die Einbettung von T_3 und T_4 getroffen werden. Keine der Kanten $a e_3, a d_3, e_3 b, d_3 b$ liegt auf den Seiten P_1 oder P_2 , und es gibt eine Kante aus $c_3 d_3, d_3 e_3, e_3 f_3$ die auf einer Seite $P_3 \in \mathcal{P}_{ab} \setminus \{P_1, P_2\}$ liegt. Keine der Kanten $a e_4, a d_4, e_4 b, d_4 b$ liegt auf den Seiten P_1, P_2 oder P_3 , und es gibt eine Kante aus $c_4 d_4, d_4 e_4, e_4 f_4$ die auf einer Seite $P_4 \in \mathcal{P}_{ab} \setminus \{P_1, P_2, P_3\}$ liegt.

Betrachte nun einen Ausschnitt von Π mit den Knoten a, b , den 4-Tupeln T_1, T_2, T_3 und T_4 sowie den Knoten s_{37} und s_{38} , zu sehen in Abbildung 3.16. Für die Knotenordnung σ gilt $e_4 \prec s_{37} \prec s_{38} \prec d_4$.

Alle zu a oder b inzidenten Kanten liegen per Definition auf Seiten aus \mathcal{P}_{ab} . Anfangs wurde außerdem $|\mathcal{P}_{ab}| \leq 5$ gezeigt. Mit $\{P_1, P_2, P_3, P_4\} \in \mathcal{P}_{ab}$ folgt deshalb, dass die Kanten $a s_{38}$ und $s_{37} b$ beide nur auf einer Seite $P_5 \in \mathcal{P}_{ab} \setminus \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ liegen, da sie beide mit je einer Kante aus $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ in Konflikt stehen. Wegen $a \prec s_{37} \prec s_{38} \prec b$ stehen $a s_{38}$ und $s_{37} b$ aber in Konflikt. Widerspruch dazu, dass sie beide auf P_5 liegen. Das Book Embedding Π ist also nicht 3-lokal. Da Π ein beliebiges Book Embedding für die Knotenordnung σ war, lässt sich G allgemein unter σ nicht 3-lokal einbetten. \square

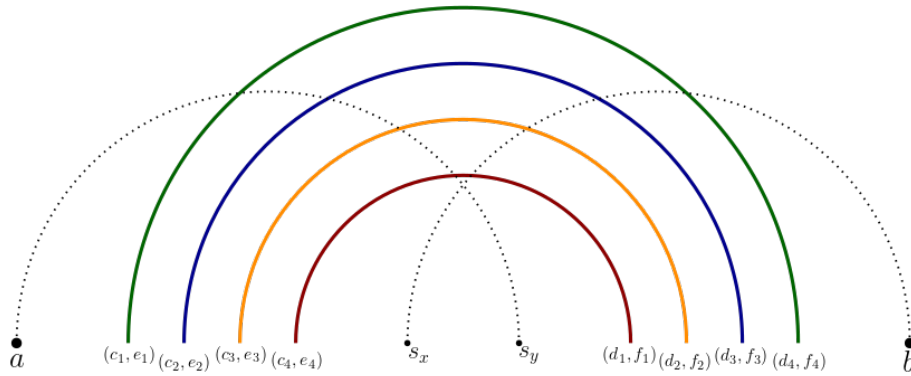


Abbildung 3.16: Π mit den Knoten a, b, s_37 und s_38 sowie den Tupeln T_1, T_2, T_3 und T_4 . Die farbigen Kanten stehen dabei für die Kanten aus T_1, \dots, T_4 die auf den paarweise verschiedenen Seiten P_1, \dots, P_4 liegen.

Wir haben einen planaren Graphen G und eine Knotenordnung σ gefunden, sodass sich G mit σ nicht 3-lokal einbetten lässt. Somit ist Theorem 3.6 bewiesen.

3.7 Obere Schranke für die local Page Number

Yannakakis [41] hat gezeigt, dass sich jeder planare ungerichtete Graph mit einem 4-Page Book Embedding einbetten lässt. Zusammen mit Behauptung 2.25 folgt, dass jeder planare ungerichtete Graph local Page Number höchstens 4 hat. Hier folgt nun der Beweis, dass letzteres auch im gerichteten Fall gilt. Die hier verwendete Beweisführung wurde bereits von Merker [30] verwendet, um die obere Schranke von 4 für die local Page Number von ungerichteten planaren Graphen einfacher zu zeigen. Wir zeigen jedoch zunächst eine allgemeinere Aussage.

Theorem 3.9. *Für jedes $k \geq 1$ lässt sich jeder gerichtete azyklische Graph, für den eine k -Orientierung existiert, mit jeder Art von linear Layout, bei welchem benachbarte Kanten nicht in Konflikt stehen, $(k + 1)$ -lokal einbetten.*

Beweis. Sei D ein gerichteter azyklischer Graph, für den eine k -Orientierung D' existiert. Wir konstruieren nun ein linear Layout Γ' für D' . Dazu weisen wir jedem Knoten $v \in V(D')$ ein zugehöriges Set S_v zu. Wir legen genau alle zu v eingehenden Kanten uv mit $u \in V(D')$ in das Set S_v . Die Sets, in denen sich von v ausgehende Kanten vw , $w \in V(D')$ befinden, werden jeweils durch den Knoten w bestimmt. Da für D' gilt, dass jeder Knoten maximal k ausgehende Kanten hat und alle eingehenden Kanten im selben Set liegen, ist D' $(k+1)$ -lokal. D und D' unterscheiden sich lediglich in ihren Kantenrichtungen, was einer unterschiedlichen Ordnung im linear Layout entspricht. Zwei Kanten uw , vw die sich im selben Set S_w befinden, haben durch die Konstruktion von Γ' jeweils den selben Endknoten. Sie sind also benachbart und stehen im linear Layout nicht in Konflikt, egal welche Knotenordnung besteht. Somit hat die Knotenordnung hier keinen Einfluss auf die Konflikte zwischen Kanten. Sei σ eine topologische Knotenordnung von D , dann ist Γ mit σ und der gleichen Kantenpartition auf die Sets wie Γ' ein $(k + 1)$ -lokales linear Layout von D . \square

Zu zeigen bleibt, dass Theorem 3.9 für Book Embeddings von planaren Graphen anwendbar ist. Aus Behauptung 2.10 folgt, dass Book Embedding ein zulässiger Typ von linear Layout ist. Außerdem haben Chrobak und Eppstein [7] einen Algorithmus vorgestellt, zu jedem ungerichteten planaren Graphen G eine 3-Orientierung konstruiert. Da sich jeder gerichtete Graph durch Entfernen der Kantenrichtungen in einen deckungsgleichen ungerichteten Graphen umwandeln lässt, folgt daraus folgende Aussage.

Behauptung 3.10. *Jeder planare gerichtete azyklische Graph besitzt eine 3-Orientierung.*

Also lässt sich Theorem 3.9 anwenden, was die local Page Number von gerichteten azyklischen Graphen auf 4 beschränkt.

Korollar 3.11. *Zu jedem planaren gerichteten azyklischen Graphen existiert ein 4-lokales Book Embedding.*

3.8 Local Queue Number 2

Analog zu Kapitel 3.1 stellen wir auch hier zunächst einen möglichst kleinen Graphen mit local Queue Number 2 vor.

Behauptung 3.12. *Es gibt einen aufwärts-außenplanaren, gerichteten, azyklischen Graphen mit local Queue Number 2.*

Beweis. Betrachte dazu den Graphen D in Abbildung 3.17.

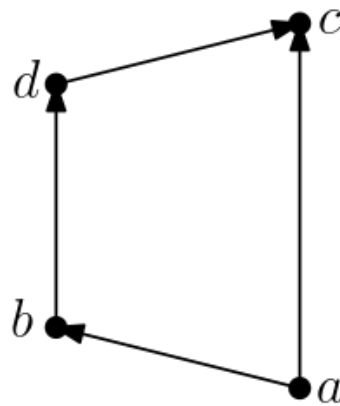


Abbildung 3.17: Aufwärtsplanarer, außenplanarer, gerichteter, azyklischer Graph D mit local Queue Number 2

Die Ordnung der Knoten im Queue Layout ist durch die Kantenrichtungen eindeutig, es gilt $a \prec b \prec d \prec c$. Eine mögliches Queue Layout von D ist in Abbildung 3.18 gezeichnet.

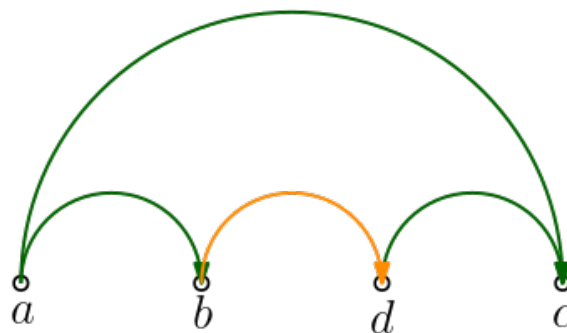


Abbildung 3.18: Mögliches Queue Layout von D . Die Verteilung der Kanten auf verschiedene Queues ist durch deren unterschiedliche Färbung verbildlicht.

Die Kanten ac und bd bilden einen 2-Rainbow und befinden sich deshalb in verschiedenen Queues. Da D zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen Knoten der inzidente Kanten in mindestens zwei verschiedenen Queues hat. Somit lässt sich D nicht 1-lokal in einem Queue Layout darstellen. \square

Interessant zu erwähnen ist außerdem, dass dieser Graph bis auf die Richtung der Kante dc zu dem anfangs gezeigten Graphen in Abbildung 3.1 identisch ist. Der dort gezeigte Graph hatte local Page Number 2. Dieser hier in Abbildung 3.17 hat local Page Number 1, wie man leicht an der Einbettung in Abbildung 3.18 sieht.

Weiterhin folgt folgende Aussage

Lemma 3.13. *Es gibt einen ungerichteten Graphen G , für den ein azyklisch gerichteter Graph D existiert, den man durch Richten der Kanten von G erhält, und für den gilt: $qn_\ell(D) > qn_\ell(G)$.*

da sich der Graph G , der durch Entfernen der Richtungen der Kanten von D entsteht, mit nur einer Queue einbetten lässt. Dies ist beispielsweise mit der Knotenordnung $a \prec b \prec c \prec d$ möglich, wie man anhand von Abbildung 3.2 in Kapitel 3.1 sehen kann. Mit Behauptung ?? folgt dann $qn(G) = 1 < 2 = qn(D)$.

3.9 Local Queue Number 3

In diesem Kapitel stellen wir einen planaren gerichteten azyklischen Graphen mit local Queue Number mindestens 3 vor. Die Existenz eines solchen Graphen war bekannt, da Merker und Ueckerdt [31] bereits einen planaren ungerichteten Graphen mit local Queue Number 3 vorgestellt haben. Der dortige Graph wurde induktiv konstruiert und war dementsprechend groß. Wir stellen für den gerichteten Fall ein deutlich kleineres Beispiel vor. Die Konstruktion des Graphen sowie der Beweis gleichen denen in Kapitel 3.3, in welchem wir einen planaren Graphen mit local Page Number 3 konstruiert haben. Analog dazu fordern wir zunächst die Existenz einer Kante vw für welche die beiden Endpunkte inzidente Kanten auf in den selben zwei Queues haben.

Lemma 3.14. *In jedem 2-lokalen Queue Layout des Graphen K_4 existiert eine Kante vw , sodass $Q(v) = Q(w)$ und $|Q(v)| = |Q(w)| = 2$.*

Beweis. Aufgrund der Symmetrie von K_4 sind alle Queue Layouts bis auf die Verteilung der Kanten auf Queues identisch. In Abbildung 3.19 ist ein Schema für ein Queue Layout von K_4 abgebildet.

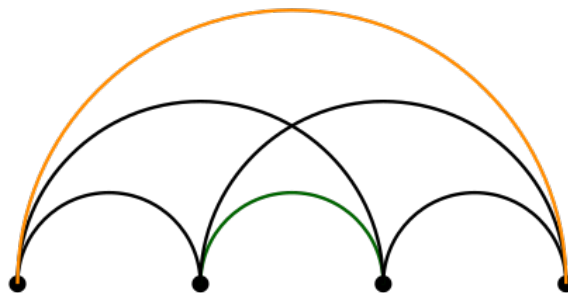


Abbildung 3.19: Grundlegendes Aussehen eines Queue Layouts von K_4 ohne Benennung der Knoten. Die zwei in Konflikt stehenden Kanten sind farblich markiert, die schwarzen Kanten liegen auf beliebigen Seiten.

Es stehen genau zwei Kanten miteinander in Konflikt und deren insgesamt vier Endpunkte sind paarweise verschieden. Somit lässt sich hier Lemma 3.3 anwenden. Also hat jedes 2-lokale Queue Layout von K_4 eine Kante vw , für die $Q(v) = Q(w)$ und $|Q(v)| = |Q(w)| = 2$ gilt.

□

Nun sei D ein Graph, der durch Richten der Kanten des vollständigen Graphen mit vier Knoten K_4 entsteht, zu sehen in Abbildung 3.20.

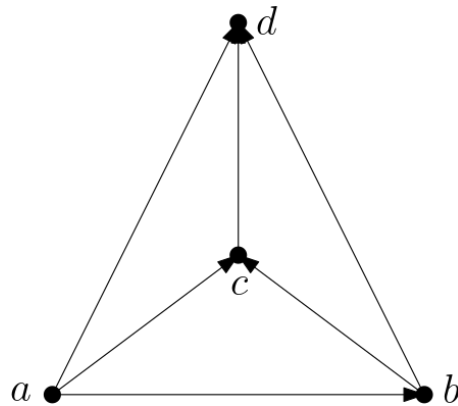


Abbildung 3.20: Graph D der durch Richten der Kanten von K_4 entsteht

Für die topologische Knotenordnung σ' für ein Queue Layout von D gilt aufgrund der Kantenrichtungen $a \prec b \prec c \prec d$. Da Lemma 3.14 für ein beliebiges 2-lokales Queue Layout gezeigt wurde, gilt die Behauptung auch für Queue Layouts mit der topologischen Knotenordnung $a \prec b \prec c \prec d$, und somit auch für jedes Queue Layout von D .

Nun fügen wir an jede der sechs Kanten von D eine Kopie des Graphen G ein, welcher in Abbildung 3.21 gezeichnet ist. Dazu fügen wir für jede Kante $vw \in E(D)$ die Knotenmenge $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ ein, verbinden v und w jeweils mit s_i über die gerichtete Kante vs_i bzw. ws_i für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ und verbinden zusätzlich die Knoten aus S über den gerichteten Pfad (s_1, s_2, s_3, s_4) . Somit entsteht der planare Graph D_G mit 28 Knoten und 72 Kanten. Wir zeigen nun, dass sich dieser nicht 2-lokal in ein Queue Layout einbetten lässt.

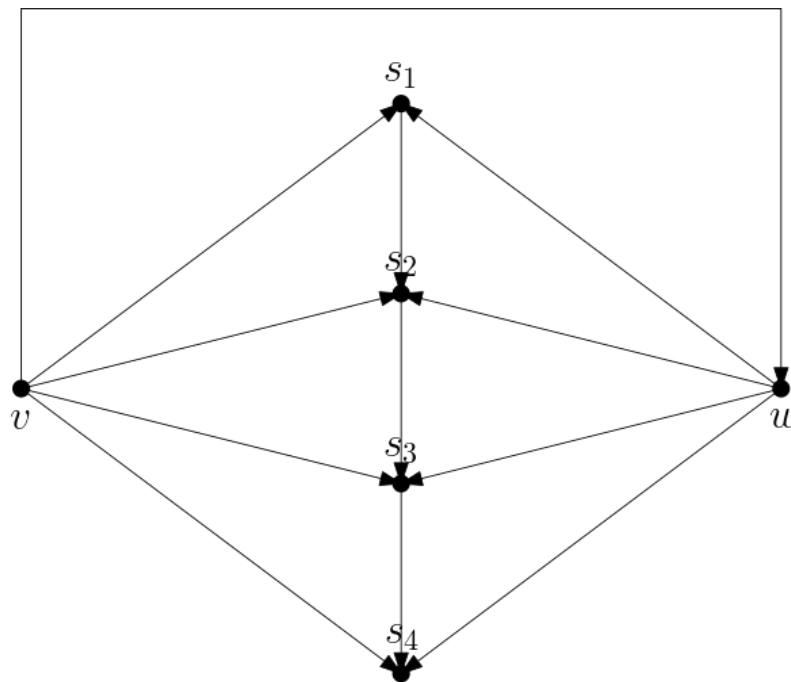


Abbildung 3.21: Graph G , bestehend aus den Knoten v, w sowie s_1, s_2, s_3 und s_4 .

Lemma 3.15. *Der Graph D_G hat local Queue Number mindestens 3.*

Beweis. Der Beweis erfolgt per Widerspruch, wir nehmen an es gibt ein 2-lokales Queue Layout Φ von D_G . Zuvor wurde mit Lemma 3.14 gezeigt, dass in jedem 2-lokalen Queue Layout von D eine Kante vw mit $Q(v) = Q(w)$ und $|Q(v)| = |Q(w)| = 2$ existiert. Da D ein Subgraph von D_G ist und Φ 2-lokal ist, existiert diese Kante auch in Φ . Es gibt deshalb einen Subgraphen G' in D_G entsprechend Abbildung 3.21, für den die Kante vw die Eigenschaften $Q(v) = Q(w)$ und $|Q(v)| = |Q(w)| = 2$ erfüllt. Wir betrachten nun einen Ausschnitt von Φ , in welchem der Subgraph G' zu sehen ist in Abbildung 3.22.

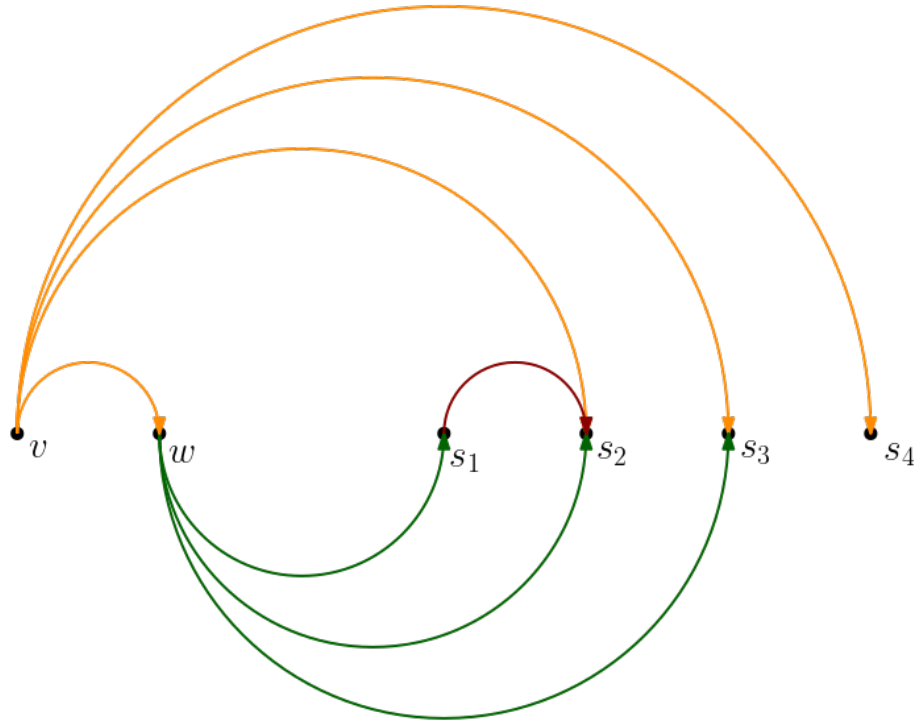


Abbildung 3.22: Ausschnitt des Queue Layout Φ von D_G mit dem Subgraphen G' . Die Verteilung der Kanten auf verschiedene Queues ist durch unterschiedliche Färbung verbildlicht

Die topologische Knotenordnung $v \prec w \prec s_1 \prec s_2 \prec s_3 \prec s_4$ ist eindeutig durch die Kantenrichtungen vorgegeben. Die Kante vw erfüllt die Bedingungen $Q(v) = Q(w)$ und $|Q(v)| = |Q(w)| = 2$. Seien Q_1 und Q_2 die Queues, in denen in Φ zu v oder w inzidente Kanten liegen. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die Kante vs_4 in Q_1 liegt. Dann liegen die Kanten ws_1, ws_2 und ws_3 alle in Q_2 , da sie jeweils mit vs_4 einen 2-Rainbow bilden. Dann liegen aber wiederum die Kanten vs_2 und vs_3 ebenfalls in Q_1 , da sie jeweils mit ws_1 einen 2-Rainbow bilden. Nun steht die Kante s_1s_2 jeweils mit vs_3 und mit ws_3 in Konflikt, weshalb sie in einer dritten Queue P_3 liegt. Die zu s_2 inzidenten Kanten vs_2, ws_2 und s_1s_2 liegen dann aber in insgesamt drei verschiedenen Queues P_1, P_2 und P_3 . Widerspruch zu der 2-Lokalität von Φ . \square

Im Vergleich zu dem in Kapitel 3.3 konstruierten Graphen mit local Page Number 3 ist D_G nicht aufwärtsplanar, dafür allerdings etwas kleiner. Das ist unter anderen damit zu begründen, dass in Queue Layouts, im Gegensatz zu Book Embeddings, auch Kanten direkt aufeinanderfolgender Knoten, wie hier s_2s_3 , Konflikte erzeugen können.

3.10 Obere Schranke für die local Queue Number

In diesem Kapitel zeigen wir, dass die obere Schranke für die local Queue Number von planaren gerichteten azyklischen Graphen 4 beträgt.

In Beobachtung 2.16 haben wir festgehalten, dass in Queue Layouts benachbarte Kanten nicht miteinander in Konflikt stehen. Weiterhin haben wir in Behauptung 3.10 das Ergebnis von Chrobak und Eppstein [7], dass jeder planare Graph eine 3-Orientierung besitzt, vorgestellt. Mit diesen beiden Aussagen lässt sich Theorem 3.9 anwenden, was zu folgendem Schluss führt:

Korollar 3.16. *Zu jedem planaren gerichteten azyklischen Graphen existiert ein 4-lokales Queue Layout.*

4. k -Bäume

In diesem Abschnitt untersuchen wir die local Page Number und die local Queue Number von gerichteten azyklischen k -Bäumen. Dabei übertragen wir die jeweils obere Schranke der local Page Number bzw. local Queue Number von ungerichteten auf gerichtete k -Bäume und beweisen diese. Außerdem stellen wir neue untere Schranken auf, was die Frage beantwortet, was die höchstmögliche local Page Number bzw. local Queue Number von gerichteten azyklischen k -Bäumen ist. Eine Definition für k -Bäume ist in Definition 2.5 zu finden.

4.1 Obere Schranke für die local Page Number

In diesem Kapitel geben wir eine obere Schranke für die local Queue Number von gerichteten azyklischen Graphen an, und zeigen, dass diese Schranke auch für andere linear Layouts gilt. Die Page Number von ungerichteten k -Bäumen wurde erstmals von Ganley und Heath [17] untersucht. Es ist möglich, k -Bäume azyklisch zu richten, beispielsweise indem man entsprechend der Konstruktionsvorschrift jede Kante zu neu hinzugefügten Knoten hin richtet. Die initiale $k + 1$ -Clique kann dabei beliebig azyklisch gerichtet werden.

Ganley und Heath [17] haben bewiesen, dass ungerichtete k -Bäume höchstens Page Number $k + 1$ haben. Als untere Schranke wurden außerdem k -Bäume gezeigt, die k Seiten benötigen. Hier beweisen wir nun, dass die obere Schranke von $k + 1$ auch für die local Page Number von gerichteten k -Bäumen gilt.

Für ungerichtete k -Bäume wurde diese Schranke bereits von Merker [30] bewiesen, wir liefern hier nun den Beweis für gerichtete k -Bäume. Zusätzlich verallgemeinern wir diese Aussage und zeigen, dass diese Schranke nicht nur für Book Embeddings gilt.

Theorem 4.1. *Für jedes $k \geq 1$ lässt sich jeder gerichtete azyklische k -Baum mit jeder Art von linear Layout, bei welchem benachbarte Kanten nicht in Konflikt stehen, $(k + 1)$ -lokal einbetten.*

Beweis. Wir nehmen dazu einen beliebigen gerichteten azyklischen k -Baum D . Dabei bezeichne n die Knotenanzahl $|V(D)|$. Aufgrund der induktiven Definition von k -Bäumen besitzt D mindestens eine k -Clique, von welcher aus sich D durch Hinzufügen von Knoten entsprechend der Vorschrift für k -Bäume konstruieren lässt. Wir fixieren eine solche k -Clique C als initiale Clique, und bezeichnen ihre Knoten als v_1, \dots, v_k . Alle übrigen Knoten aus $V(D) \setminus V(C)$ werden entsprechend der Konstruktionsreihenfolge von D als v_{k+1}, \dots, v_n

bezeichnet. Dabei gilt für je zwei Knoten v_x, v_y , dass $x < y$, falls x vor y in den Graphen D eingefügt wurde. So erhält man eine Ordnung σ über alle Knoten $v \in D$. Bezüglich der Knotenordnung σ schreiben wir auch $v_x < v_y$ für zwei Knoten v_x, v_y mit $x < y$. Beachte, dass die Konstruktionsreihenfolge eines k -Baums im Nachhinein nicht eindeutig ist, das heißt es gibt mehrere mögliche Knotenbenennungen. Wir konstruieren nun einen gerichteten azyklischen k -Baum D' , der sich von D lediglich in den Richtungen der Kanten unterscheidet, das heißt es gilt unter anderem $V(D') = V(D)$. Die k -Clique C' entspreche der k -Clique C . Wir richten die Kanten von D' so, dass $v_j v_i \in E(D')$ genau dann, wenn $v_i < v_j$. Für jede Kante ist also der Knoten mit höherem Index der Anfangspunkt, und der mit geringerem Index der Endpunkt. Die topologische Knotenordnung von D' ist somit genau die Umkehrung der Konstruktionsreihenfolge von D als k -Baum mit initialer k -Clique C .

Aufgrund der Konstruktion von D als k -Baum hat jeder Knoten $v_j \in V(D') \setminus V(C')$ genau k adjazente Knoten $v_i \in V(D')$, für die in σ gilt, dass $v_i < v_j$. Knoten aus $V(C')$ haben sogar weniger solche Knoten. Damit hat aber jeder Knoten v_j in D' Ausgangsgrad höchstens k . Somit ist D' eine k -Orientierung von D . Also lässt sich Theorem 3.9 anwenden. Daraus folgt bereits die Behauptung. \square

Wir verbildlichen nun ein linear Layout eines gerichteten azyklischen k -Baum. Dazu ist in Abbildung 4.1 die Kantenverteilung eines linear Layout zu sehen, welches aus der hier beschriebenen Konstruktion einer k -Orientierung und der bei Theorem 3.9 beschriebenen Konstruktion eines linear Layouts unter Verwendung einer k -Orientierung hervorgeht.

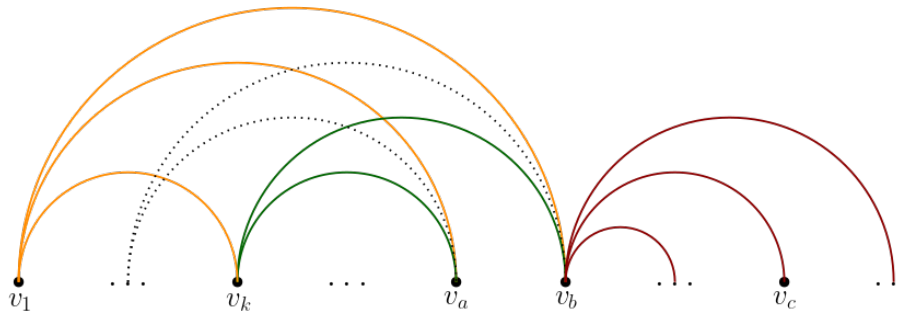


Abbildung 4.1: Skizze der Kantenverteilung eines linear Layouts von einem gerichteten azyklischen k -Baum D , ohne Einzeichnen der Kantenrichtungen. Die Kantenfärbung entspricht dabei der Verteilung der Kanten auf verschiedene Sets. Die Reihenfolge der Knoten von links nach rechts entspricht nicht der topologischen Knotenordnung τ des linear Layouts, sondern der Knotenordnung σ . Diese geht aus der Konstruktionsreihenfolge von D bei Fixierung von $C = \{v_1, \dots, v_k\}$ als initiale Clique hervor. Für die Knotenordnung σ gilt hier $v_1 < v_k < v_a < v_b < v_c$. Die Knoten v_a und v_b wurden bei der Konstruktion von D an die Clique C angefügt. Der Knoten v_c wurde an eine Clique angefügt, in der sich auch Knoten v_b befindet. Richtet man die Kanten in der Abbildung nun gedanklich von rechts nach links, entsteht eine k -Orientierung von D . Dies liegt daran, dass jeder Knoten zum Zeitpunkt seines Einfügens bei der Konstruktion eines k -Baum lediglich k adjazente Knoten hat. Kanten, welche sich im selben Set befinden, sind alle zueinander benachbart und zum selben Knoten inzident, wie man hier im Bild an den jeweils nach rechts führenden Kanten von den Knoten v_1, v_k und v_b aus sehen kann. Somit kommt es unabhängig von der topologischen Knotenordnung zu keinen weiteren Kantenkonflikten.

Für Book Embeddings gilt Theorem 4.1, da in diesen benachbarte Kanten nicht miteinander in Konflikt stehen, wie in Beobachtung 2.10 bereits festgehalten wurde. Daraus folgt die zu Anfang des Kapitels genannte obere Schranke für die local Page Number.

Korollar 4.2. *Für jedes $k \geq 1$ besitzt jeder gerichtete azyklische k -Baum ein $(k + 1)$ -lokales Book Embedding.*

4.2 Untere Schranke für die local Page Number

In Kapitel 4.1 wurde bereits gezeigt, dass jeder gerichtete k -Baum local Page Number höchstens $k + 1$ hat. Für ungerichtete k -Bäume ist die beste bekannte untere Schranke für die die local Page Number k , wie von Merker [30] gezeigt wurde. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass für gerichtete k -Bäume die obere Schranke $k + 1$ für die local Page Number auch gleichzeitig die untere Schranke ist, was somit eine Verbesserung der bisher bekannten unteren Schranke ist.

Theorem 4.3. *Für jedes $k > 1$ gibt es einen gerichteten azyklischen k -Baum mit local Page Number $k + 1$.*

Beweis. Wie in Kapitel 4.1 gezeigt wurde, lässt sich jeder gerichtete azyklische k -Baum mit einem $(k + 1)$ -lokalen Book Embedding einbetten. Somit gibt es keinen azyklisch gerichteten k -Baum mit local Page Number größer als $k + 1$. Zu zeigen bleibt also, dass es für jedes $k > 1$ einen k -Baum gibt, der sich nicht mit einem k -lokalen Book Embedding einbetten lässt.

Dafür konstruieren wir einen solchen k -Baum G_k , für den jedes Book Embedding $(k + 1)$ -lokal ist. Dieser ist in Abbildung 4.2 abgebildet.

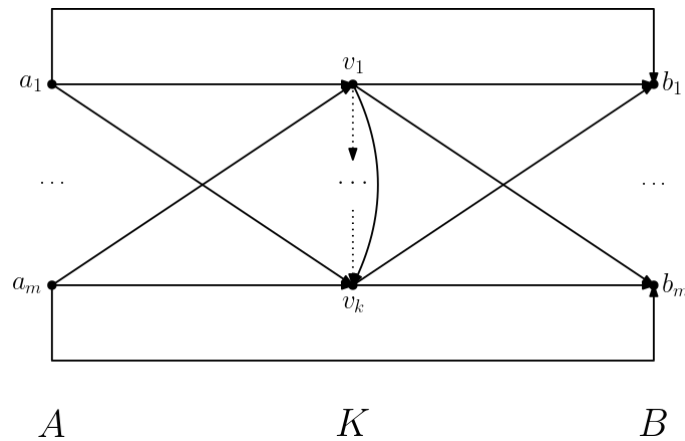


Abbildung 4.2: Der k -Baum G_k , bestehend aus der Knotenmenge A , der k -Clique K und der Knotenmenge B

Sei dazu K eine Kopie einer k -Clique K_k , bestehend aus den Knoten v_1, \dots, v_k . Wir richten deren Kanten so, dass $v_i v_j \in E(K)$ genau dann, wenn $i < j$. Füge nun eine Menge B von $m = k^k + 1$ Knoten b_1, \dots, b_m hinzu, sodass jeder der Knoten aus B jeweils mit allen Knoten v_1, \dots, v_k verbunden wird. Für die Kantenrichtungen gelte $vb \in E(G)$ für $v \in V(K)$ und $b \in B$. Da beispielsweise b_1 zusammen mit den Knoten v_1, \dots, v_k eine $k + 1$ -Clique bildet, ist dies ein gültiger Ausgangspunkt für die Konstruktion eines k -Baums. Füge weiterhin eine Menge A von m Knoten a_1, \dots, a_m in den Graphen ein. Jeder Knoten $a_i \in A$ wird mit dem entsprechenden Knoten $b_i \in B$ über die gerichtete Kante $a_i b_i$ verbunden. Weiterhin wird jeder Knoten $a_i \in A$ jeweils mit den Knoten $\{v_1, \dots, v_{k-1}\} \in K$ über

die gerichtete Kante $a_i v_j, j \in \{1, \dots, (k-1)\}$ verbunden. Da jedes $b \in B$ zusammen mit den Knoten v_1, \dots, v_{k-1} eine k -Clique bildet, entsprechen diese Einfügungen der Konstruktionsvorschrift für k -Bäume. Für die topologische Knotenreihenordnung von G_k gilt somit $\{a_1, \dots, a_m\} \prec v_1 \prec \dots \prec v_k \prec \{b_1, \dots, b_m\}$.

Der Beweis für die $k+1$ -Lokalität erfolgt nun per Widerspruch: Wir nehmen im Folgenden an, es existiert ein k -lokales Book Embedding Π für G_k . Für eine Kante vw sei P_{vw} hier die Seite, auf welcher vw in Π liegt. Jeder Knoten $b \in B$ ist mit den k Knoten v_1, \dots, v_k verbunden. Da G_k k -lokal ist, hat jeder Knoten v_1, \dots, v_k Kanten auf höchstens k verschiedenen Seiten. Somit gibt es für jeden Knoten $b \in B$ höchstens k^k verschiedene Möglichkeiten, wie die zu ihm inzidenten Kanten $vs, v \in V(K)$ auf die Seiten von Π verteilt werden. Da es aber $m = k^k + 1$ Knoten $b \in B$ gibt, gibt es mindestens zwei Knoten b und b' , deren inzidente Kanten gleiche Seitenbelegungen haben, genauer gesagt sodass $P_{vb} = P_{vb'}$ gilt, für alle $v \in V(K)$. Es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b \prec b'$.

Als nächstes zeigen wir, dass $P_{v_i b'} \neq P_{v_j b'}$ für beliebige $v_i, v_j \in K, v_i \neq v_j$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v_i \prec v_j$. Da dann wegen $v_i \prec v_j \prec b \prec b'$ die Kante $v_i b$ mit der Kante $v_j b'$ in Konflikt steht, liegen diese auf unterschiedlichen Seiten, es gilt also $P_{v_i b} \neq P_{v_j b'}$. Mit $P_{v_i b} = P_{v_i b'}$ folgt somit $P_{v_i b'} \neq P_{v_j b'}$. Wegen der Voraussetzung $P_{vb} = P_{vb'}$ für alle $v \in V(K)$ gilt dann für b auch analog $P_{v_i b} \neq P_{v_j b}$ für beliebige $v_i, v_j \in V(K)$. Die zu b und b' inzidenten Kanten liegen also auf den gleichen, jeweils k verschiedenen Seiten.

Betrachte nun eine Skizze von Π mit den Knoten v_1, \dots, v_k, b und b' , sowie desjenigen Knotens $a \in A$, welcher zu b adjazent ist, in Abbildung 4.3.

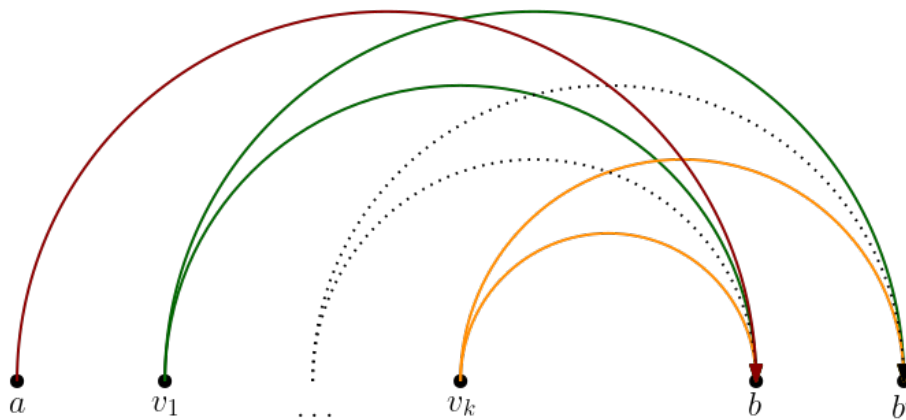


Abbildung 4.3: Ausschnitt des Book Embeddings Π mit den Knoten a, v_1, \dots, v_k, b und b' . Die topologische Knotenordnung $a \prec v_1 \prec \dots \prec v_k \prec b \prec b'$ ist durch die Kantenrichtungen und durch die Annahme $b \prec b'$ eindeutig.

Die Kante ab steht mit allen Kanten $v_i b', i \in \{1, \dots, k\}$ in Konflikt, da $a \prec v_i \prec b \prec b'$ gilt. Die zu b' inzidenten Kanten liegen aber genau auf den k verschiedenen Seiten, auf denen auch zu b inzidente Kanten liegen. Somit liegt ab auf einer Seite P_{ab} mit $P_{ab} \neq P_{vb}$ für jedes $v \in V(K)$. Widerspruch, da der Knoten b dann inzidente Kanten auf $k+1$ verschiedenen Seiten hat, und Π nicht k -lokal ist. Für G_k existiert somit kein k -lokales Book Embedding. \square

Da wir somit die obere und die untere Schranke auf $k+1$ setzen, ist die Frage nach der local Page Number von gerichtete azyklischen k -Bäumen beantwortet. Die größtmögliche local Page Number von gerichteten azyklischen k -Bäumen liegt bei $k+1$.

4.3 Obere Schranke für die local Queue Number

In diesem Kapitel zeigen wir eine obere Schranke für die local Queue Number von gerichteten azyklischen k -Bäumen. Für ungerichtete k -Bäume wurden bereits Schranken gefunden. So hat Wiechert [40] gezeigt, dass k -Bäume global Queue Number höchstens $2^k + 1$ haben. Die local Queue Number von k -Bäumen konnte von Merker und Ueckerdt[31] auf $k + 1$ beschränkt werden. Wir zeigen hier, dass die Schranke von $k + 1$ auch für die local Queue Number von gerichteten azyklischen k -Bäumen gilt.

Wie in Beobachtung 2.16 bereits festgehalten wurde, stehen in Queue Layouts benachbarte Kanten nicht in Konflikt zueinander. Somit lässt sich Theorem 4.1 anwenden, woraus folgt, dass sich jeder gerichtete azyklische Baum mit einem $(k + 1)$ -lokalen Queue Layout einbetten lässt. In Abbildung 4.1 ist ein Beispiel für ein eine $(k + 1)$ -lokale Einbettung nach der in Kapitel 4.1 beschriebenen Vorgehensweise zu sehen.

Korollar 4.4. *Für jedes $k \geq 1$ besitzt jeder gerichtete azyklische k -Baum ein $(k + 1)$ -lokales Queue Layout.*

4.4 Untere Schranke für die local Queue Number

Nun zeigen wir, dass die obere Schranke von $k + 1$ für die local Queue Number von azyklisch gerichteten k -Bäumen auch gleichzeitig die untere Schranke ist. Wiechert [40] konnte bereits zeigen, dass es für jedes $k \geq 1$ einen ungerichteten k -Baum mit global Queue Number mindestens $k + 1$ gibt. Die beste bekannte untere Schranke für die local Queue Number von ungerichteten k -Bäumen liegt bei $\lceil k/2 \rceil + 1$. Wir konstruieren hier nun für jedes $k > 1$ einen azyklisch gerichteten k -Baum mit local Queue Number mindestens $k + 1$, was somit eine Verbesserung der bisher bekannten unteren Schranke ist.

Theorem 4.5. *Für jedes $k > 1$ gibt es einen gerichteten azyklischen k -Baum mit local Queue Number $k + 1$.*

Beweis. In Kapitel 4.3 zeigen wir, dass sich jeder gerichtete azyklische k -Baum mit einem $(k + 1)$ -lokalen Queue Layout einbetten lässt. Somit bleibt lediglich zu zeigen, dass es für jedes $k > 1$ einen gerichteten azyklischen k -Baum gibt, der sich nicht in ein k -lokales Queue Layout einbetten lässt.

Der Graph G_k den wir hier konstruieren ist der selbe wie der, den wir in Kapitel 4.2 benutzt haben um die untere Schranke der local Page Number zu zeigen. Die Konstruktion ist dort etwas ausführlicher erklärt, außerdem ist G_k dort in Abbildung 4.2 zu sehen. Sei K die Kopie einer k -Clique K_k mit Knoten v_1, \dots, v_k und gerichteten Kanten $v_i v_j$ für jedes $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i < j$. Nun fügen wir eine Menge B von $m = k^k + 1$ Knoten b_1, \dots, b_m hinzu, und verbinden jeden Knoten aus B jeweils mit jedem Knoten aus K über die gerichteten Kanten $v_i b_j, i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, m\}$. Außerdem fügen wir eine Menge A von $m = k^k + 1$ Knoten a_1, \dots, a_m hinzu, und verbinden jeden Knoten aus A jeweils mit jedem Knoten aus $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ über die gerichteten Kanten $a_i v_j, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, k - 1\}$. Zusätzlich verbinden wir jeden Knoten $a_i \in A$ mit dem zugehörigen Knoten $b_i \in B$ über die gerichtete Kante $a_i b_i$. Somit entsteht ein gerichteter azyklischer k -Baum G_k . Für jede topologische Knotenordnung von G_k gilt $\{a_1, \dots, a_m\} \prec v_1 \prec \dots \prec v_k \prec \{b_1, \dots, b_m\}$.

Wir nehmen nun an es gibt ein k -lokales Queue Layout Φ für G_k . In Φ hat jeder der k Knoten aus $V(K) = \{v_1, \dots, v_k\}$ inzidente Kanten in jeweils maximal k verschiedenen Queues. Für einen Knoten $b \in B$ gibt es deshalb höchstens k^k verschiedene Möglichkeiten,

in welchen Queues sich die k zu $V(K)$ inzidenten Kanten befinden. Da es aber $k^k + 1$ Knoten in B gibt, gibt es mindestens zwei Knoten $b, b' \in B$ mit $Q_{v_i b} = Q_{v_i b'}$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b \prec b'$.

Jetzt zeigen wir, dass $Q_{v_i b} \neq Q_{v_j b}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$. Sei ohne Beschränkung $i < j$, also $v_i \prec v_j$ in Φ . Aufgrund der Wahl der Knoten b und b' gilt $Q_{v_i b} = Q_{v_i b'}$. Aufgrund der topologischen Knotenordnung $v_i \prec v_j \prec b \prec b'$ bilden $v_i b'$ und $v_j b$ einen 2-Rainbow, und liegen somit in verschiedenen Queues. Also gilt $Q_{v_i b} = Q_{v_i b'} \neq Q_{v_j b}$ woraus folgt, dass sich $v_i b$ und $v_j b$ in verschiedenen Queues befinden. Da i und j beliebig waren, befinden sich je zwei Kanten zwischen $V(K)$ und b in verschiedenen Queues. Aufgrund von $Q_{v_i b} = Q_{v_i b'}$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt dies auch für je zwei Kanten zwischen $V(K)$ und b' .

Sei nun a' derjenige Knoten aus A , der zu b' adjazent ist. Wir betrachten einen Ausschnitt von Φ mit den Knoten $a', v_1, \dots, v_k, b, b'$, abgebildet in Abbildung 4.4.

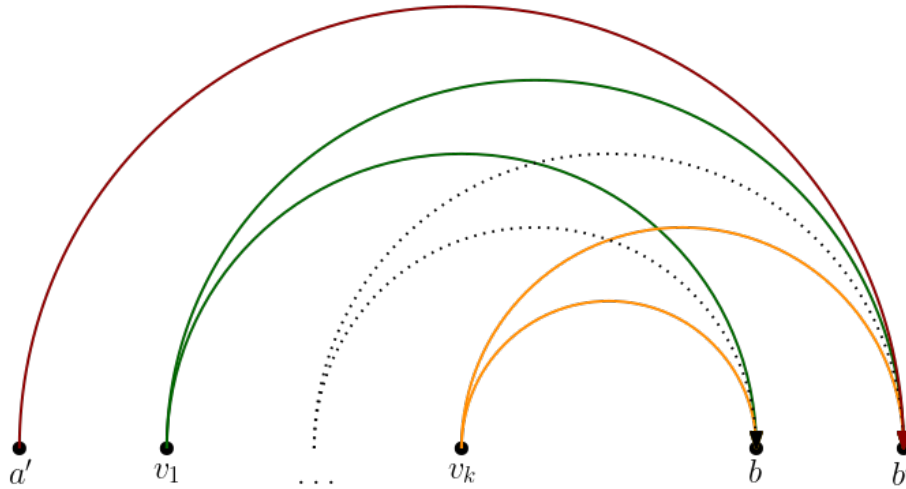


Abbildung 4.4: Ausschnitt des Queue Layouts Φ mit den Knoten a', v_1, \dots, v_k, b und b' . Die topologische Knotenordnung $a' \prec v_1 \prec \dots \prec v_k \prec b \prec b'$ ist durch die Kantenrichtungen und durch die Annahme $b \prec b'$ eindeutig.

Die Kante $a'b'$ steht mit allen Kanten $v_i b, i \in \{1, \dots, k\}$ in Konflikt, da $a' \prec v_i \prec b \prec b'$ gilt, und somit alle Kanten jeweils mit $a'b'$ einen 2-Rainbow bilden. Für die Queue, in der sich $a'b'$ befindet, gilt somit: $Q_{a'b'} \neq Q_{v_i b}$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Mit $Q_{v_i b} = Q_{v_i b'}$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ folgt dann aber $Q_{a'b'} \neq Q_{v_i b'}$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Somit befinden sich die zu b' inzidenten Kanten in mindestens $k + 1$ verschiedenen Queues. Widerspruch, es gibt also kein k -lokales Queue Layout für G_k . \square

Somit haben wir einen k -Baum mit local Queue Number $k + 1$ konstruiert, sowie gezeigt, dass sich jeder gerichtete azyklische k -Baum $(k + 1)$ -lokal einbetten lässt. Dies beantwortet die Frage nach der höchstmöglichen local Queue Number von gerichteten azyklischen k -Bäumen, sie beträgt $k + 1$.

Wir haben hier für jedes $k > 1$ einen k -Baum G_k mit local Queue Number $k + 1$ konstruiert. In Kapitel 4.2 wurde der selbe k -Baum konstruiert und gezeigt, dass dieser local Page Number $k + 1$ hat. Dies führt zu folgender Beobachtung:

Korollar 4.6. *Es gibt für jedes $k > 1$ einen k -Baum G_k mit $pn_\ell(G_k) = qn_\ell(G_k) = k + 1$.*

Mit Theorem 4.3 und Theorem 4.5 ist diese Aussage allerdings trivial, da sich zwei k -Bäume zu einem weiteren k -Baum zusammenfügen lassen, der mindestens so große local

Page Number und local Queue Number hat wie seine Bestandteile. Somit ließe sich ein solcher k -Baum G_k auch dann leicht konstruieren, wenn wir in Kapitel 4.2 und Kapitel 4.4 unterschiedliche Graphen konstruiert hätten.

5. Fazit und offene Fragen

In dieser Arbeit haben wir uns erstmalig mit der local Page Number und der local Queue Number von gerichteten azyklischen Graphen befasst. Für planare Graphen haben wir dabei vergleichsweise kleine Graphen mit local Page Number 3 bzw. local Queue Number 3 vorgestellt. Außerdem konnten wir zeigen, dass für beide Parameter die obere Schranke von 4 gilt. Auch wenn wir einen planaren Graphen konstruieren konnten, der bei fixierter Knotenordnung local Page Number 4 hat, bleibt die Frage weiterhin offen, ob es gerichtete, oder gar ungerichtete planare Graphen mit local Page Number 4 gibt. Die selbe Frage gilt für die local Queue Number.

Frage 5.1. *Gibt es einen planaren gerichteten Graph D mit $pn_\ell(D) = 4$?*

Frage 5.2. *Gibt es einen planaren gerichteten Graph D mit $qn_\ell(D) = 4$?*

Damit einher gehen die Fragen, ob die local Page Number bzw. local Queue Number von planaren gerichteten Graphen die selben sind wie die von planaren ungerichteten Graphen. Für die Frage nach der local Queue Number kann außerdem, wie in dieser Arbeit für die local Page Number, zunächst eine feste Knotenordnung betrachtet werden um einen Graphen zu finden der sich nicht 3-lokal einbetten lässt. Das Finden eines solchen Graphens, sofern vorhanden, ist vermutlich deutlich einfacher, und kann dennoch hilfreich sein für die spätere Konstruktion eines potenziellen planaren gerichteten Graphen mit local Queue Number 4.

Frage 5.3. *Gibt es einen planaren Graphen G und eine Knotenordnung σ , sodass es für G mit σ kein 3-lokales Queue Layout gibt?*

Dagegen ist die Frage nach der global Page Number von planaren Graphen beantwortet. Für ungerichtete Graphen beträgt sie 4, und für gerichtete Graphen ist sie unbeschränkt. Die bisher gefundenen Beispiele mit Page Number 4 von Bekos et al. [4] und Yannakakis [42] bestehen aus mehreren hundert bis tausend Knoten und setzen sich aus Kopien von Gadgets zusammen. Daher ist zu erwarten, dass ein potenzieller Graph mit local Page Number 4, egal ob ungerichtet oder gerichtet, ähnlich groß sein wird, und deshalb ebenfalls aus einer Verknüpfung kleinerer Gadgets konstruiert werden wird.

Auch im Bereich k -Bäume verbleiben offene Fragen. Während wir zwar in Kapitel 4 die local Page Number sowie die local Queue Number von gerichteten k -Bäumen mit jeweils

$k + 1$ bestimmen konnten, sind beide Werte für den ungerichteten Fall noch offen. Bekannt ist, dass die local Page Number von ungerichteten k -Bäumen entweder k oder $k + 1$ beträgt, wie Merker [29] gezeigt hat. Die local Queue Number konnte von Merker und Ueckerdt [31] von unten auf $\lceil k/2 \rceil + 1$ und von oben auf $k + 1$ beschränkt werden. Möglicherweise sind die hier konstruierten Beispiele hilfreich für die Konstruktion von ungerichteten k -Bäumen.

Frage 5.4. *Was ist die local Page Number von ungerichteten k -Bäumen?*

Frage 5.5. *Was ist die local Queue Number von ungerichteten k -Bäumen?*

Wir haben außerdem einen gerichteten k -Baum gefunden, der gleichzeitig die maximale local Page Number von $k + 1$ sowie die maximale local Queue Number von $k + 1$ hat. Es lassen sich eine Vielzahl von Fragen stellen, inwiefern die Beschränkung eines der beiden der Parameter den jeweils anderen beschränkt. Beispielsweise wurde von Dujmović et al. [8] kürzlich herausgefunden, dass Graphen mit Queue Number höchstens 4 im Allgemeinen beliebig große Page Number haben. Fragen dieser Art lassen sich für unterschiedlichste Graphklassen und auch für die jeweils lokale Variante der Parameter stellen.

Frage 5.6. *Gibt es eine Konstante c , sodass es für jedes $k > 1$ einen gerichteten k -Baum D mit $pn_\ell(D) = k + 1$ und $qn_\ell(D) \leq c$ gibt?*

Frage 5.7. *Gibt es eine Konstante c , sodass es für jedes $k > 1$ einen gerichteten k -Baum D mit $qn_\ell(D) = k + 1$ und $pn_\ell(D) \leq c$ gibt?*

Anstatt einer Konstanten kann auch eine Beschränkung in Abhängigkeit von k untersucht werden, beispielsweise für $k/2$.

Literatur

- [1] Hugo A Akitaya, Erik D Demaine, Adam Hesterberg und Quanquan C Liu. “Upward partitioned book embeddings”. In: *International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization*. Springer. 2017, S. 210–223.
- [2] Jawaherul Md Alam, Michael A Bekos, Martin Gronemann, Michael Kaufmann und Sergey Pupyrev. “Queue layouts of planar 3-trees”. In: *Algorithmica* 82.9 (2020), S. 2564–2585.
- [3] Gail Adele Atneosen. *On the embeddability of compacta in n-books: intrinsic and extrinsic properties*. Michigan State University, 1968.
- [4] Michael A Bekos, Michael Kaufmann, Fabian Klute, Sergey Pupyrev, Chrysanthi Raftopoulou und Torsten Ueckerdt. “Four pages are indeed necessary for planar graphs”. In: *arXiv preprint arXiv:2004.07630* (2020).
- [5] Michael A. Bekos, Martin Gronemann und Chrysanthi N. Raftopoulou. “On the Queue Number of Planar Graphs”. In: *CoRR* abs/2106.08003 (2021). URL: <https://arxiv.org/abs/2106.08003>.
- [6] Frank Bernhart und Paul C Kainen. “The book thickness of a graph”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 27.3 (1979), S. 320–331.
- [7] Marek Chrobak und David Eppstein. “Planar orientations with low out-degree and compaction of adjacency matrices”. In: *Theoretical Computer Science* 86.2 (1991), S. 243–266.
- [8] Vida Dujmović, David Eppstein, Robert Hickingbotham, Pat Morin und David R Wood. “Stack-number is not bounded by queue-number”. In: *Combinatorica* (2021), S. 1–14.
- [9] Vida Dujmović, Gwenaël Joret, Piotr Micek, Pat Morin, Torsten Ueckerdt und David R Wood. “Planar graphs have bounded queue-number”. In: *Journal of the ACM (JACM)* 67.4 (2020), S. 1–38.
- [10] Vida Dujmović, Pat Morin und David R Wood. “Layout of graphs with bounded tree-width”. In: *SIAM Journal on Computing* 34.3 (2005), S. 553–579.
- [11] Vida Dujmović und David R Wood. “Graph treewidth and geometric thickness parameters”. In: *Discrete & Computational Geometry* 37.4 (2007), S. 641–670.
- [12] Vida Dujmović und David R Wood. “On linear layouts of graphs”. In: *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 6.2 (2004), S. 339–358.
- [13] Stefan Felsner, Laura Merker, Torsten Ueckerdt und Pavel Valtr. “Linear Layouts of Complete Graphs”. In: *arXiv preprint arXiv:2108.05112* (2021). Appears in the Proceedings of the 29th International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization (GD 2021). URL: <https://arxiv.org/abs/2108.05112>.
- [14] Fabrizio Frati, Radoslav Fulek und Andres J. Ruiz-Vargas. “On the Page Number of Upward Planar Directed Acyclic Graphs”. In: *Journal of Graph Algorithms and Applications* 17.3 (2013), S. 221–244. DOI: 10.7155/jgaa.00292.

- [15] Zvi Galil, Ravi Kannan und ENDRE SZEMERedi. “On 3-pushdown graphs with large separators”. In: *Combinatorica* 9.1 (1989), S. 9–19.
- [16] Zvi Galil, Ravi Kannan und ENDRE SZEMERedi. “On nontrivial separators for k-page graphs and simulations by nondeterministic one-tape Turing machines”. In: *Proceedings of the eighteenth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1986, S. 39–49.
- [17] Joseph L Ganley und Lenwood S Heath. “The pagenumber of k-trees is $O(k)$ ”. In: *Discrete Applied Mathematics* 109.3 (2001), S. 215–221.
- [18] Christian Haslinger und Peter F Stadler. “RNA structures with pseudo-knots: Graph-theoretical, combinatorial, and statistical properties”. In: *Bulletin of mathematical biology* 61.3 (1999), S. 437–467.
- [19] Lenwood S Heath, Frank Thomson Leighton und Arnold L Rosenberg. “Comparing queues and stacks as machines for laying out graphs”. In: *SIAM journal on discrete mathematics* 5.3 (1992), S. 398–412.
- [20] Lenwood S Heath und Sriram V Pemmaraju. “Stack and queue layouts of directed acyclic graphs: Part II”. In: *SIAM Journal on Computing* 28.5 (1999), S. 1588–1626.
- [21] Lenwood S Heath und Arnold L Rosenberg. “Laying out graphs using queues”. In: *SIAM Journal on Computing* 21.5 (1992), S. 927–958.
- [22] Lenwood S. Heath, Sriram V. Pemmaraju und Ann N. Trenk. “Stack and Queue Layouts of Directed Acyclic Graphs: Part I”. In: *SIAM Journal on Computing* 28.4 (1999), S. 1510–1539. URL: <https://doi.org/10.1137/S0097539795280287>.
- [23] Paul Jungeblut, Laura Merker und Torsten Ueckerdt. “A Sublinear Bound on the Page Number of Upward Planar Graphs”. In: *arXiv preprint arXiv:2107.05227* (2021).
- [24] Paul C Kainen. “Some recent results in topological graph theory”. In: *Graphs and combinatorics*. Springer, 1974, S. 76–108.
- [25] Paul C Kainen. “The book thickness of a graph II”. In: *Congressus Numerantium* 71 (1990), S. 121–132.
- [26] Ravi Kannan. “Unraveling k-page graphs”. In: *Information and control* 66.1-2 (1985), S. 1–5.
- [27] Seth M Malitz. “Graphs with E edges have pagenumber $O(\sqrt{E})$ ”. In: *Journal of Algorithms* 17.1 (1994), S. 71–84.
- [28] Tamara Mchedlidze und Antonios Symvonis. “Crossing-free acyclic hamiltonian path completion for planar st-digraphs”. In: *International Symposium on Algorithms and Computation*. Springer. 2009, S. 882–891.
- [29] Laura Merker. “Local page numbers”. Diss. Bachelor’s thesis, Karlsruhe Institute of Technology, Germany, 2018. URL: https://i11www.iti.kit.edu/_media/teaching/theses/ba-merker-18.pdf.
- [30] Laura Merker und Torsten Ueckerdt. “Local and union page numbers”. In: *International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization*. Springer. 2019, S. 447–459.
- [31] Laura Merker und Torsten Ueckerdt. “The Local Queue Number of Graphs with Bounded Treewidth”. In: *Proceedings of the 28th International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization (GD 2020)* (2020). URL: <https://arxiv.org/abs/2008.05392>.
- [32] Richard Nowakowski und Andrew Parker. “Ordered sets, pagenumbers and planarity”. In: *Order* 6.3 (1989), S. 209–218.

-
- [33] L Taylor Ollmann. “On the book thicknesses of various graphs”. In: *Proc. 4th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*. Bd. 8. 1973, S. 459.
- [34] Christos H Papadimitriou und Mihalis Yannakakis. “Towards an architecture-independent analysis of parallel algorithms”. In: *SIAM journal on computing* 19.2 (1990), S. 322–328.
- [35] Aduri Pavan, Raghunath Tewari und NV Vinodchandran. “On the power of unambiguity in logspace”. In: *arXiv preprint arXiv:1001.2034* (2010).
- [36] Sriram Venkata Pemmaraju. *Exploring the powers of stacks and queues via graph layouts*. Virginia Polytechnic Institute und State University, 1992.
- [37] CA Persinger. “Subsets of n-books in E3”. In: *Pacific Journal of Mathematics* 18.1 (1966), S. 169–173.
- [38] S Rengarajan und CE Veni Madhavan. “Stack and queue number of 2-trees”. In: *International Computing and Combinatorics Conference*. Springer. 1995, S. 203–212.
- [39] Jennifer Vandenbussche, Douglas B West und Gexin Yu. “On the pagenumber of k-trees”. In: *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 23.3 (2009), S. 1455–1464.
- [40] Veit Wiechert. “On the queue-number of graphs with bounded tree-width”. In: *CoRR* abs/1608.06091 (2016). URL: <http://arxiv.org/abs/1608.06091>.
- [41] Mihalis Yannakakis. “Embedding planar graphs in four pages”. In: *Journal of Computer and System Sciences* 38.1 (1989), S. 36–67.
- [42] Mihalis Yannakakis. “Planar graphs that need four pages”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 145 (2020), S. 241–263.