

Kreuzungsminimierung bei simultaner Einbettung planarer Graphen

Bachelorarbeit
von

Maximilian Geißer

An der Fakultät für Informatik
Karlsruhe Institute of Technology

Erstgutachter:	Prof. Dr. Dorothea Wagner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Peter Sanders
Betreuende Mitarbeiter:	Dipl.-Inform. Thomas Bläsius Dr. Ignaz Rutter

Bearbeitungszeit: 1. November 2014 – 31. Januar 2015

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne die Verwendung anderer als der angegebenen Quellen verfasst habe.

Karlsruhe, 28. Januar 2015

Maximilian Geißer

Deutsche Zusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit beschäftige ich mich mit Kreuzungsminimierung bei gegebener simultaner Einbettung zweier planarer Graphen. Die Problemstellung besteht darin eine gemeinsame Zeichnung der beiden Graphen zu finden, in der jeder Graph für sich planar gezeichnet ist und zusätzlich die Anzahl an Kreuzungen von Kanten aus verschiedenen Graphen minimiert ist. Zu Beginn wird die \mathcal{NP} -Vollständigkeit dieses Problems gezeigt, auch wenn die Einbettung beider Graphen gegeben ist. In diesem Beweis wird ein gemeinsamer Graph verwendet, der aus vielen Zusammenhangskomponenten besteht.

Um positive Resultate zu erhalten, werden danach spezielle, zusammenhängende gemeinsame Graphen untersucht. Wir werden dabei nur die Einbettung des gemeinsamen Graphen als gegeben voraussetzen. Als weitere Vereinfachung wird von exklusiven Knoten abgesehen. Die gemeinsamen Graphen, die untersucht werden, sind der Kreis, der Pfad und die Spinne. Zur Untersuchung dieser Fälle wird mehrfach benötigt, dass sich in kreuzungsminimalen simultanen Zeichnungen, falls der gemeinsame Graph zusammenhängend ist, exklusive Kanten maximal einmal kreuzen. In diesem Kapitel werde ich die Äquivalenz dieser Problemstellung mit dem Finden eines speziellen Schnittes zeigen.

Im darauffolgenden Kapitel wird, anders als zuvor, die Einbettung von beiden Graphen als gegeben vorausgesetzt. Dort betrachten wir nun den Fall, dass der gemeinsame Graph 2-fach zusammenhängend ist. In diesem Fall kann die Minimierung in jeder Facette unabhängig von allen anderen vorgenommen werden. Ich gebe effiziente Algorithmen zur Kreuzungsminimierung an, falls die exklusiven Teile in jeder Facette des gemeinsamen Graphen nicht zu sehr verwoben sind. In dieser Bachelorarbeit wird für 2-fach verwobene Graphen ein optimaler Algorithmus und für 3-fach verwobene Graphen eine 6-Approximation bewiesen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Verwandte Arbeiten	2
1.2	Beitrag dieser Arbeit	3
2	Grundlagen	5
2.1	Allgemeine Grundlagen	5
2.2	Allgemeines zu simultanen Einbettungen	8
3	Komplexität der Kreuzungsminimierung	13
4	Feste Einbettung des gemeinsamen Graphen	15
4.1	Gemeinsamer Graph ist Kreis	15
4.2	Maximale Schnitte in Intervallgraphen	22
4.3	Gemeinsamer Graph ist Pfad	25
4.4	Gemeinsamer Graph ist Spinne	32
5	Feste Einbettung beider Graphen	35
5.1	Verwebungsgrad bis zu 2	36
5.2	Verwebungsgrad ist 3	37
6	Zusammenfassung	45
	Literaturverzeichnis	47

1. Einleitung

Oft ist es interessant die Entwicklung eines Netzwerks über die Zeit verstehen. Visualisierung von Netzwerken ist ein probates Mittel in der Netzwerkanalyse. Dies führt dazu, dass man verschiedene Graphen, die sich Knoten beziehungsweise Kanten teilen, gemeinsam darstellen möchte. Damit dynamische Netzwerken untersucht werden können, ergeben sich zusätzliche Anforderungen an die Zeichnung. Man möchte nicht nur den einzelnen Graphen sondern auch die Unterschiede zwischen den Netzwerken anschaulich darstellen. Eine intuitive Forderung um dieses Ziel zu erreichen ist, dass die Knoten, die in mehreren der Graphen vorkommen, in der gemeinsamen Zeichnung an derselben Position sind. Ebenso werden wir im Folgenden fordern, dass gemeinsame Kanten in allen Zeichnungen gleich gezeichnet werden.

In Abbildung 1.1 sind zwei planare Graphen einzeln und zusammen dargestellt. Die Graphen sind jeder für sich gut verständlich und auch die Unterschiede sind deutlich zu erkennen. Man sieht den Graphen schnell an, was gleich geblieben ist und welche Unterschiede sich ergeben haben. Die Anzahl an Kreuzungen hat einen großen Einfluss auf die Lesbarkeit einer Zeichnung [Pur97], deswegen schränkt man sich auf planare Graphen ein, falls man Graphen gleichzeitig einbettet. Wir werden uns in dieser Bachelorarbeit auf den Fall beschränken, dass zwei planare Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ gleichzeitig eingebettet werden. Der *gemeinsame Graph* G_g ist definiert als $G_g = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$. Der gemeinsame Graph wird im Folgenden schwarz, die Kanten, welche nur im erste Graph vorhanden sind, werden grün sowie die Kanten des zweite Graphen rot dargestellt.

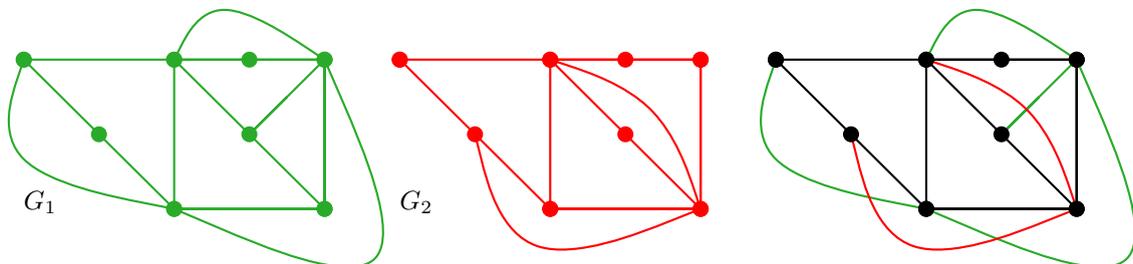


Abbildung 1.1: Rechts ist eine simultane Einbettung der planaren Graphen G_1 und G_2 zu sehen.

Eine planare Einbettung von Graphen, die gemeinsame Knoten und gemeinsame Kanten gleich darstellt, wird *simultane Einbettung mit fixierten Kanten* genannt. Die englische Übersetzung lautet „*Simultaneous Embedding with Fixed Edges*“ kurz *SEFE*.

1.1 Verwandte Arbeiten

Simultanes Einbetten ist ein gut untersuchtes Problem. Eine ausführliche Zusammenfassung der wichtigen Resultate ist erschienen [BKR12]. Die meisten Arbeiten in diesem Gebiet beschäftigten sich damit, wie komplex es ist, zu entscheiden, ob man gegebene Graphen simultan einbetten kann. Es ist mittlerweile bekannt, dass das Finden einer simultanen Einbettung \mathcal{NP} -vollständig ist, falls man mindestens drei Graphen simultan einbetten möchte [GJP⁺06]. Die Komplexität im Fall, dass man nur zwei Graphen simultan einbettet, ist noch ungeklärt. Jedoch wurden viele Fälle bereits erfolgreich untersucht.

Es wurde gezeigt, dass das Finden einer SEFE äquivalent dazu ist, dass man eine planare Einbettung der Graphen findet, die auf dem gemeinsamen Graphen übereinstimmen [JS09]. Dabei versteht man unter der Übereinstimmung, dass sowohl die zyklische Anordnung aller Kanten an allen gemeinsamen Knoten gleich sein muss, als auch dass die relativen Lagen der Zusammenhangskomponenten zueinander übereinstimmen müssen. Aufbauend auf diese Arbeit wurden viele Ergebnisse erzielt.

Für einige spezielle Graphen wurde bewiesen, wie kompliziert das Finden einer SEFE ist. Zum Beispiel ist das Finden einer SEFE in linearer Zeit möglich, falls der gemeinsame Graph 2-fach zusammenhängend oder ein Stern ist [ADBF⁺11]. Gleichzeitig wurde der Fall, dass der gemeinsame Graph 2-fach zusammenhängend ist, auch mit anderen Mitteln untersucht [HJL13]. Auch für den Fall, dass die Graphen 2-fach zusammenhängend und der gemeinsame Graph zusammenhängend ist, wurde ein Algorithmus aufgezeigt, welcher quadratische Laufzeit hat [BR11]. Man bewies zusätzlich, dass bestimmte Strukturen entfernt werden können, falls man versucht Graphen simultan einzubetten [BKR13].

Ein anderer Ansatz um eine simultane Einbettung zu erhalten wurde von Markus Schäfer verfolgt [Sch13]. Dieser Ansatz ist algebraischer Natur. Man kann für spezielle Graphen durch das Abzählen von Knotenpaaren, die sich in einer gemeinsamen Zeichnung ungerade oft kreuzen, entscheiden, ob es eine simultane Einbettung gibt. Hinter diesem Ansatz versteckt sich das Lösen von Gleichungssystemen über \mathbb{F}_2 . Mit diesem Ansatz kann man zum Beispiel, falls der gemeinsame Graph aus disjunkten Kreisen besteht, entscheiden, ob eine simultane Einbettung existiert.

Zusammenfassend wurde für bestimmte Graphenpaare gezeigt, dass es immer eine simultane Einbettung gibt. Auf der anderen Seite gibt es auch bestimmte Graphen, sodass es Beispiele gibt, sodass keine simultane Einbettung existiert. Man kann zum Beispiel drei Pfade konstruieren, sodass es keine simultane Einbettung dieser drei Pfade gibt [BCD⁺07].

Selbst nachdem man sich ausführlich mit dem Erhalten einer simultanen Einbettung beschäftigt hat, ist noch unklar, wie man eine gut lesbare Zeichnung findet, wenn man weiß, dass eine simultane Einbettung existiert. Es gibt im Großen und Ganzen zwei verschiedene Ansätze, die eine lesbare Zeichnung liefern sollen. Auf der einen Seite versucht man bei der simultanen Einbettung die Anzahl der Knicke auf den Kanten zu minimieren. Es wurde zum Beispiel gezeigt, dass falls der gemeinsame Graph ein Pfad ist, so ergeben sich nur wenige Knicke auf den Kanten [EK05]. Aktuelle Arbeiten haben gezeigt, dass man für eine gegebene simultane Einbettung eine Zeichnung findet, die nur eine lineare Anzahl an Knicken pro Kante besitzt [CFG⁺14]. Ebenso wurde gezeigt, dass falls eine SEFE zweier Graphen gegeben ist, so kann man eine Zeichnung angeben, die zu dieser Einbettung passt, in der alle gemeinsamen Kanten geradlinig und alle exklusiven Kanten nur eine konstante Anzahl Knicke haben [GHKR14].

Auf der anderen Seite versucht man die Anzahl der Kreuzungen in der Zeichnung zu minimieren, um eine angenehme Zeichnung zu erhalten. Denn für die Lesbarkeit einer Zeichnung ist nachgewiesen, dass die Anzahl der Kreuzungen einen großen Einfluss hat [Pur97]. In dieser Bachelorarbeit habe ich mich mit diesem Thema beschäftigt. Die Problemstellung besteht also darin, die rot-grünen Kreuzungen zu minimieren unter der Einschränkung, dass beide Graphen einzeln planar eingebettet sind. Eine Zeichnung wird *kreuzungsminimale simultane Zeichnung* genannt, falls es keine Kreuzungen gleichfarbiger Kanten gibt und die Anzahl der rot-grünen Kreuzungen minimal unter allen Zeichnungen ist. Dabei verstehen wir unter $cr_{sp}(G_1, G_2)$ die minimale Anzahl an G_1 - G_2 -Kreuzungen in einer *SEFE*, in der sowohl G_1 als auch G_2 planar eingebettet sind. Gibt es keine solche Einbettung, wird $cr_{sp}(G_1, G_2) = \infty$ definiert. Ich nenne diese Zahl auch die *simultane Kreuzungszahl* von G_1 und G_2 .

Es wurde bereits Kreuzungsminimierung bei simultaner Einbettung von Graphen untersucht [CJS08]. Der Unterschied zu dieser Arbeit besteht darin, dass dort das Konzept der simultanen Einbettung aufgeweicht wird. Am Ende ergibt sich dort nicht unbedingt eine simultane Einbettung. Auf Kosten der simultanen Einbettung werden mehrere Kreuzungen eingespart. In dieser Arbeit wurden die Kanten mit Gewichten belegt, sodass Kreuzungen im gemeinsamen Graphen deutlich teurer sind, als rot-grüne Kreuzungen.

1.2 Beitrag dieser Arbeit

Auf allgemeinen Graphen ist bekannt, dass Kreuzungsminimierung \mathcal{NP} -vollständig ist [GJ83]. In Kapitel 3 werde ich zeigen, dass auch die Kreuzungsminimierung bei simultaner Einbettung \mathcal{NP} -vollständig ist. In den darauffolgenden Kapiteln werde ich dann spezielle gemeinsame Graphen betrachten und versuchen in den entsprechenden Fällen zu entscheiden, wie komplex es ist, die Anzahl der Kreuzungen zu minimieren. Das Lemma 2.3 wird in diesen Kapiteln mehrfach benötigt. In diesem Lemma zeige ich, dass sich in kreuzungsminimalen simultanen Zeichnungen, falls der gemeinsame Graph zusammenhängend ist, exklusive Kanten maximal einmal kreuzen. Es ergeben sich unterschiedliche Problemstellungen abhängig davon, welche Voraussetzungen angenommen werden. Ich habe die Problemstellungen nach dem Gesichtspunkt sortiert, welche Einbettungen gegeben sind. Man kann voraussetzen, dass nur die Einbettung des gemeinsamen Graphen festliegt, oder sogar beide Graphen fest eingebettet sind.

Die unterschiedlichen Fälle, die in dieser Bachelorarbeit bearbeitet werden, werde ich nun aufzählen. In Kapitel 4 betrachten wir die Problemstellung, dass die Einbettung des gemeinsamen Graphen festliegt und keine exklusiven Knoten erlaubt sind. In diesem Kapitel werden nacheinander die Fälle betrachtet, dass der gemeinsame Graph ein Kreis, ein Pfad bzw. eine Spinne ist. Ein wichtiges Ergebnis aus diesem Kapitel ist, dass die Kreuzungsminimierung im Fall, dass der gemeinsame Graph ein Kreis ist, äquivalent umgeformt werden kann zu dem Finden eines maximalen Schnittes in einem Kreis-sehnengraphen mit positiven Kantengewichten (vgl. Lemma 4.4). Auch der Fall, dass der gemeinsame Graph ein Pfad ist, kann durch das Finden eines speziellen Schnittes gelöst werden (vgl. Lemma 4.10). In diesem Fall kann man eine kreuzungsminimale simultane Zeichnung angeben, falls man einen minimalen Schnitt in einem speziellen Graphen findet. Zusätzlich wurde in diesem Kapitel ein dynamisches Programm zum Finden eines maximalen Schnittes in Intervallgraphen mit konstanter Cliquengröße beschrieben.

In Kapitel 5 werden wir eine andere Problemstellung betrachten. Wir betrachten einen 2-fach zusammenhängenden gemeinsamen Graphen und setzen beide Graphen fest eingebettet voraus. Durch die Einbettung beider Graphen ist für jeden exklusiven Knoten klar, in welcher Facette er liegt. Zur Kreuzungsminimierung kann nun jede Facette für sich selbst betrachtet werden. In dieser Bachelorarbeit wurden bis zu 3-fach verwobene Graphen betrachtet. In

dem Fall, wenn die Graphen 3-fach verwoben sind, gebe ich eine 6-Approximation für $\text{cr}_{\text{sp}}(G_1, G_2)$ an.

2. Grundlagen

Dieses Kapitel ist in zwei Abschnitte aufgeteilt. Im ersten Abschnitt werden alle notwendigen Definitionen und Notationen gesammelt. Im zweiten Abschnitt werden wir zwei wichtige Lemmata beweisen. Die Lemmata erklären, warum wir uns auf simultane Einbettungen beschränken, die einen zusammenhängenden gemeinsamen Graphen besitzen.

2.1 Allgemeine Grundlagen

Folgende Definition stammt aus einem Buch von Reinhard Diestel [Die12]. Ein ungerichteter Graph G ist ein Tupel (V, E) . Dabei sind V und E Mengen mit $E \subset \binom{V}{2}$. Die Elemente in E sind 2-elementige Teilmengen von V . Wir nennen die Elemente aus V *Knoten* und die Elemente aus E *Kanten*. Für eine Kante $\{u, v\}$ wird oft uv geschrieben. Wir betrachten nur Graphen, die zwischen einem Knotenpaar maximal eine Kante besitzen. Im Folgenden werden wir Graphen ohne *Schleifen*, dies sind Kanten von der Form $\{u, u\}$ mit $u \in V$, betrachten. Ein ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten und ohne Schleifen wird auch *einfacher Graph* genannt. Wir werden in dieser Bachelorarbeit nur mit einfachen Graphen arbeiten.

Für die Knoten eines Graphen G werden wir auch $V(G)$ schreiben. Analog versteht man unter $E(G)$ die Kanten des Graphen G .

Eine *Zeichnung* Z eines Graphen G (vergleiche [PT00]) ist eine Abbildung der Knoten in den \mathbb{R}^2 und eine Abbildung der Kanten auf stetige Kurven im \mathbb{R}^2 . Jedem Knoten wird ein anderer Punkt in der Ebene zuordnet und eine Kante uv wird auf eine stetige Kurve, die $f(u)$ und $f(v)$ verbindet, abgebildet. Dieser Bogen wird *Kante* der Zeichnung Z genannt. Eine Zeichnung muss außerdem noch folgende Punkte erfüllen:

1. Eine Kante von Z durchläuft kein Bild eines Knotens.
2. Zwei Kanten von Z haben eine endliche Anzahl an Schnittpunkten.
3. Keine drei Kanten von Z haben einen gemeinsamen Schnittpunkt im Inneren der Kante.

In einer solchen Zeichnung wird ein Schnittpunkt von zwei Kanten eine *Kreuzung* genannt. Dabei zählen gemeinsame Endpunkte von zwei Kanten nicht als eine Kreuzung.

Die *Kreuzungszahl* eines Graphen G (Englisch: *crossing number*) $cr(G)$ ist die minimale Anzahl an Kreuzungen über alle Zeichnungen von G . Ein Graph heißt *planar*, wenn er

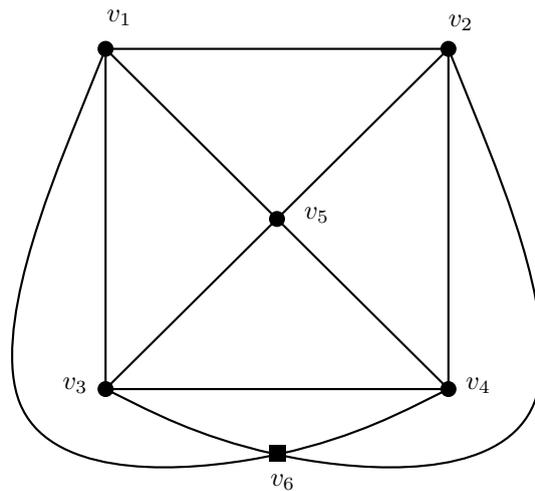


Abbildung 2.1: Planarisierung von K_5 durch Hinzufügen von v_6

planar in die Ebene eingebettet werden kann, d.h. er lässt sich ohne Kreuzungen zeichnen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $cr(G) = 0$. Aus jedem Graphen erhält man einen planaren Graphen, indem man für jede Kreuzung von einem Kantenpaar einen Knoten einfügt, vergleiche hierfür Abbildung 2.1. Der resultierende Graph wird *Planarisierung* von G genannt.

Lemma 2.1. *In einer kreuzungsminimalen Zeichnung eines Graphen kreuzen sich verschiedene Kanten maximal einmal.*

Beweis. Wir nehmen an, dass es eine kreuzungsminimale Zeichnung gebe, in der sich mindestens zwei Kanten mehrfach kreuzen. Betrachte zwei beliebige Kanten uv und wx , die sich in der kreuzungsminimalen Zeichnung öfter als einmal schneiden. Ohne Einschränkung kreuzt wx auf dem Abschnitt zwischen den ersten beiden Schnittpunkten s_1 und s_2 höchstens so viele Kanten wie uv . Durch die in Abbildung 2.2 dargestellte Transformation erhält man eine Zeichnung mit echt weniger Kreuzungen. Denn die Kreuzungspunkte s_1 und s_2 existieren nicht mehr und auf dem Abschnitt zwischen den Schnittpunkten haben beide Kanten höchstens so viele Kreuzungen wie zuvor. Ansonsten wurden die Kanten nicht verändert.

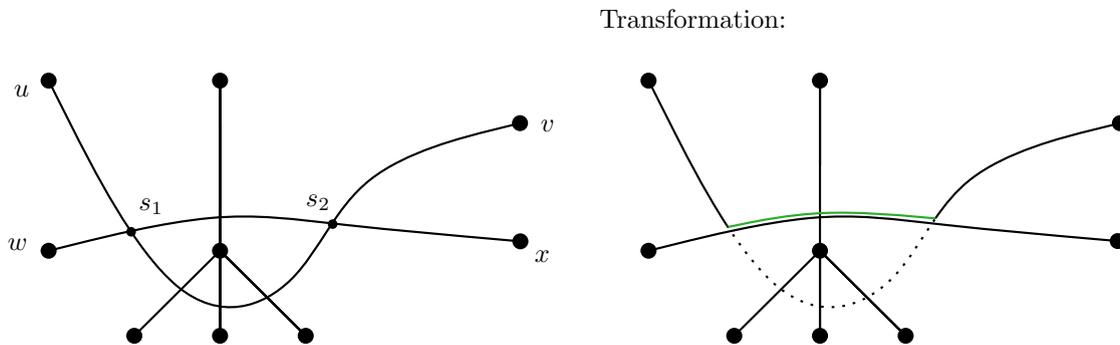


Abbildung 2.2: In dieser Zeichnung ist eine Transformation dargestellt, die zu weniger Kreuzungen führt.

Man erhält durch die angegebene Transformation also eine Zeichnung mit echt weniger Kreuzungen. Dies ist ein Widerspruch zu der Kreuzungsminimalität der angegebenen Zeichnung. \square

Zwei Kanten uv und uw mit $w \neq v$ heißen *benachbart*.

Lemma 2.2. *In einer kreuzungsminimalen Zeichnung kreuzen sich benachbarte Kanten nicht.*

Beweis. Seien uv und uw benachbarte Kanten. Nach Lemma 2.1 kreuzen sie sich in der kreuzungsminimalen Zeichnung maximal einmal.

Wir nehmen an, dass uv und uw sich in der kreuzungsminimalen Zeichnung im Punkt s kreuzen (vergleiche Abbildung 2.3). Durch die angegebene Transformation erhält man ein Zeichnung mit echt weniger Kreuzungen. Dies ist ein Widerspruch zu der Kreuzungsminimaleität der Zeichnung. \square

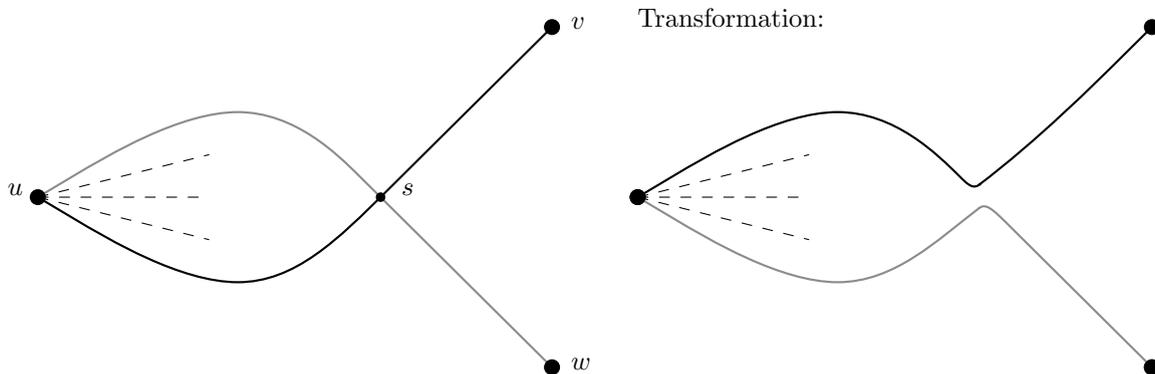


Abbildung 2.3: Hier ist eine Transformation abgebildet, die eine Kreuzung zwischen benachbarten Kanten einspart.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Seien $A, B \subseteq V$ disjunkte Teilmengen der Knotenmenge, dann schreiben wir kurz $[A, B]$ für die Anzahl der Kanten, die von A nach B gehen.

Jede Teilmenge $S \subseteq V$ der Knotenmenge definiert einen *Schnitt* $(S, V \setminus S)$. Der Wert eines Schnittes ist $[S, V \setminus S]$. Ein Schnitt mit maximalem Wert wird auch *maximaler Schnitt* genannt. Sei $c = (S, V \setminus S)$ ein Schnitt, so bezeichnen wir mit $|c|$ den Wert des Schnittes.

Wir benötigen noch das Konzept der *Knotenkontraktion*. Sei dafür $G = (V, E)$ ein Graph und $u, v \in V$. Wir schreiben G/uv für den Graphen der durch Zusammenlegen der Knoten u und v aus G entsteht. Dabei wird die Kante zwischen u und v entfernt, falls sie existiert, und u und v werden zu einem Knoten v_{uv} vereinigt. Knoten, die zu u oder v adjazent waren, sind nun adjazent zu v_{uv} . Die Kantengewichte in G/uv ergeben sich durch Addition der entsprechenden Kantengewichte in G . Kanten ohne Kantenbeschriftung haben Gewicht 1.

In einem Graphen $G = (V, E)$ nennt man eine Teilmenge der Knotenmenge $C \subseteq V$ eine *Clique* genau dann, wenn je zwei Knoten aus C adjazent sind. Die *Cliquengröße* $\omega(G)$ eines Graphen G ist die maximale Anzahl an Knoten, welche eine Clique in G bilden.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für jede Teilmenge der Knotenmenge $W \subseteq V$ versteht man unter $G|_W$ den Graphen, der als Knotenmenge W und als Kantenmenge alle Kanten aus G hat, die einen Knoten aus W mit einem Knoten aus W verbinden. Man nennt $G|_W$ den von W *induzierten Graphen*.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zwei Schnitte $(S_1, V \setminus S_1)$, $(S_2, V \setminus S_2)$ *schneiden sich genau* dann, wenn die Mengen $V_1 = \{v \in V \mid v \in S_1, v \in S_2\}$, $V_2 = \{v \in V \mid v \in S_1, v \notin S_2\}$, $V_3 = \{v \in V \mid v \notin S_1, v \in S_2\}$ und $V_4 = \{v \in V \mid v \notin S_1, v \notin S_2\}$ nicht leer sind.

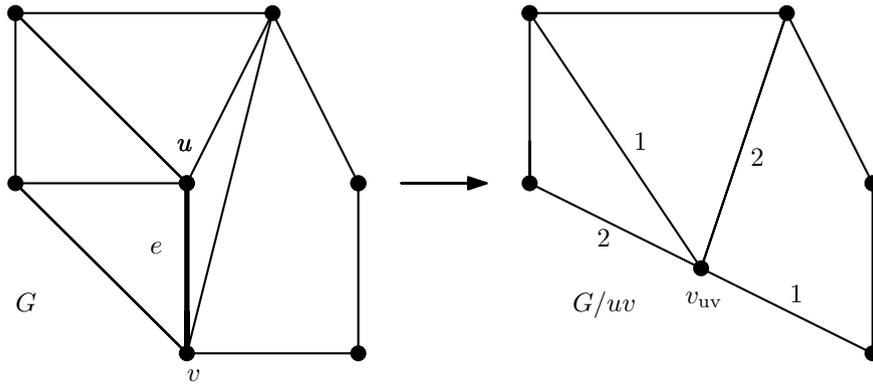


Abbildung 2.4: Der Graph G/uv (rechts) entsteht durch das Zusammenlegen von u und v aus dem Graphen G (links).

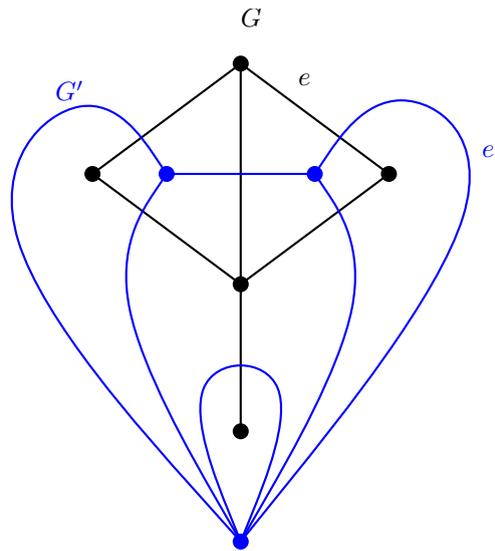


Abbildung 2.5: In schwarz ist der planare Graph G zu sehen. In blau ist der duale Graph zu G gezeichnet.

Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph, so gibt es einen *dualen Graphen* $G' = (V', E')$ zu G . Die Knoten in G' sind die Facetten in einer planaren Zeichnung von G . Für jede Kante $e \in E$ verbinden wir die angrenzenden Facetten in G' . Der duale Graph kann Zyklen und Doppelkanten enthalten. In Abbildung 2.5 ist ein planarer Graph mit seinem dualen Graphen zu sehen. Eine Kante $e' \in E'$ kreuzt genau eine Kante $e \in E$. Wir nennen e' die *duale Kante* von e . Falls die Kante e das Kantengewicht $z \in \mathbb{R}$ hat, so belegen wir auch ihre duale Kante mit diesem Gewicht.

2.2 Allgemeines zu simultanen Einbettungen

Seien zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ gegeben. Der *Vereinigungsgraph* G_v von G_1 und G_2 ist definiert als $G_v = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Eine Kante, welche nur in G_1 oder nur in G_2 liegt, wird *exklusive Kante* genannt.

Lemma 2.3. *Sei der gemeinsame Graph G_g von zwei planaren Graphen zusammenhängend.*

Falls eine kreuzungsminimale, simultane Zeichnung existiert, dann kreuzen sich in dieser zwei exklusive Kanten maximal einmal.

Beweis. Wir nehmen an, dass sich zwei Kanten e_1 (grün) und e_2 (rot) in der kreuzungsminimalen, simultanen Zeichnung mindestens zweimal schneiden. Der gemeinsame Graph liegt ohne Beschränkung außerhalb von dem Gebiet, welches von den Kanten e_1 und e_2 begrenzt wird. Diese Annahme löst einige Symmetrien auf. Wir können dies ohne Beschränkung annehmen, da der gemeinsame Graph nur aus einer Zusammenhangskomponente besteht und wir eine kreuzungsminimale, simultane Zeichnung vorliegen haben, also insbesondere keine gleichfarbigen Kreuzungen erlauben.

Um dieses Lemma zu beweisen, werde ich eine Fallunterscheidung machen. Wir werden jeden Fall zu einem Widerspruch führen. Dabei werden wir die Kanten orientiert betrachten. Durch die Orientierung der Kanten können wir die Begriffe rechts und links verwenden. Insbesondere können wir bei einer Kreuzung erkennen, ob die grüne Kante von rechts nach links oder von links nach rechts gekreuzt wird.

Der erste Hauptfall ist, dass die rote Kante mindestens einmal von rechts nach links und einmal von links nach rechts kreuzt. Dieser Fall ist zum Beispiel in Abbildung 2.6 zu sehen. In diesem Fall werde ich zeigen, dass es immer ein sogenanntes inneres Gebiet gibt. Danach wird auf Grundlage dieses Gebiets eine Zeichnung angegeben, die echt weniger rot-grüne Kreuzungen hat, dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Ein inneres Gebiet in Abbildung 2.6 wäre z.B. das Gebiet, welches innerhalb der Kantensegmenten zwischen s_4 und s_5 liegt. Im Folgenden werde ich die Kantensegmente zwischen den Schnittpunkten s_i und s_{i+1} mit $e_1|_{s_i, s_{i+1}}$ und $e_2|_{s_i, s_{i+1}}$ bezeichnen. In der Zeichnung und im Folgenden sind die Kreuzungen entlang der roten Kante durchnummeriert. Ein Gebiet, welches genau von einem roten und einem grünen Kantensegment begrenzt wird, heißt *inneres Gebiet* genau dann, wenn es zusätzlich weder von e_1 noch von e_2 in mehrere Zusammenhangskomponenten zerschnitten wird.

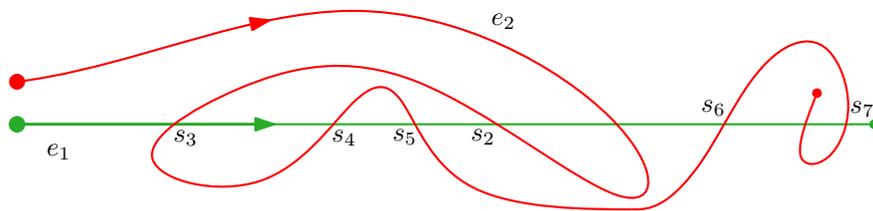


Abbildung 2.6: In dieser Abbildung sind zwei sich mehrfach kreuzende Kanten dargestellt. Die Schnittpunkte sind entlang der roten Kante durchnummeriert.

Ich zeige nun, dass es in diesem Fall mindestens ein inneres Gebiet gibt. Da es Kreuzungen von links nach rechts und von rechts nach links gibt, findet man eine Kreuzung s_i , sodass die darauffolgende andersrum orientiert ist. Diese Kantensegmente begrenzen nun ein Gebiet. Nun gibt es den Fall, dass diese Schnittpunkte auch entlang der grünen Kante benachbart sind, so ist das gefundene Gebiet bereits ein inneres Gebiet. Dieser Fall ist in Abbildung 2.6 bei s_4 und s_5 zu sehen. Der zweite Fall ist, dass es entlang der grünen Achse genau eine Kreuzung zwischen s_i und s_{i+1} gibt. In diesem Fall ist das betrachtete Gebiet ein inneres und die rote Kante endet dort. Betrachte für diesen Fall s_6 und s_7 in Abbildung 2.6. Der letzte Fall ist nun das es auf der grünen Kante zwischen s_i und s_{i+1} mindestens zwei Schnittpunkte gibt. Dieser Fall ist in Abbildung 2.6 bei s_2 und s_3 zu sehen. Die Kreuzungen zwischen s_i und s_{i+1} müssen nun abwechselnd orientiert liegen, da das rote Kantensegment $e_2|_{s_i, s_{i+1}}$ die Wahl beschränkt. Somit gibt es eine Kreuzung s_j , sodass s_{j+1} andersrum orientiert ist. Bezüglich der grünen Kanten sind diese Kreuzungen näher beieinander. Wendet man diese Fallunterscheidung nun auf s_j und s_{j+1} an, so erhält man entweder ein inneres Gebiet, oder noch näher benachbarte Kreuzungen s_k und s_{k+1} . Man erhält nun mit der Endlichkeit der Kreuzungen ein inneres Gebiet.

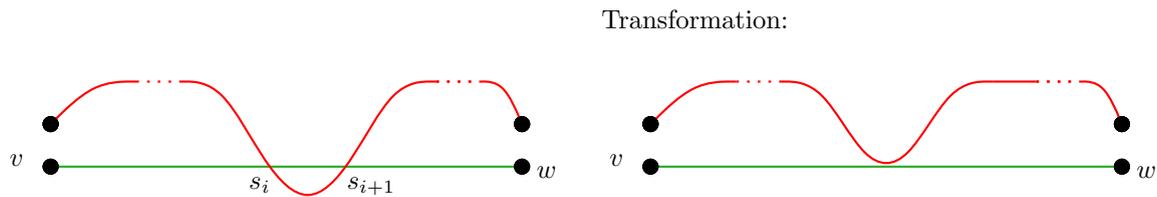


Abbildung 2.7: In dieser Abbildung wird gezeigt, wie man zwei Kreuzungen auf den Kanten e_1 und e_2 löschen kann, falls man ein inneres Gebiet findet und dieses frei von Kreuzungen ist.

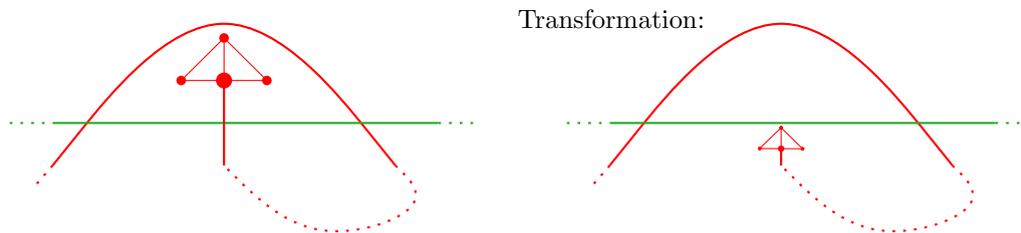


Abbildung 2.8: In dieser Abbildung ist der Fall, dass ein Endknoten in dem inneren Gebiet liegt, dargestellt. Daneben ist eine Transformation angegeben, die zu weniger Kreuzungen führt.

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass es immer ein Gebiet gibt, welches nur von zwei Kantensegmenten begrenzt ist, werde ich nun zeigen, wie man eine Zeichnung mit weniger rot-grünen Kreuzungen erhält. Wir starten mit dem Fall, dass die rote Kante nicht in diesem Gebiet endet. Wir betrachten zuerst den Fall, dass keine Kante diese begrenzenden Kantensegmente kreuzt. Wir befinden uns nun in dem Fall aus Abbildung 2.7. Man erhält durch die Transformation, die in dieser Abbildung angegeben ist, eine Zeichnung mit echt weniger Kreuzungen.

In dem Fall, dass $e_1|_{s_i, s_{i+1}}$ oder $e_2|_{s_i, s_{i+1}}$ von mindestens einer andersfarbigen Kante gekreuzt werden, erhält man ein Zeichnung mit weniger Kreuzungen, indem man alle kreuzenden Kanten und ihre Zusammenhangskomponente aus dem inneren Gebiet herauszieht. Dies kann man ohne Schwierigkeiten machen, da der gemeinsame Graph außerhalb liegt, also in diesem Gebiet maximal exklusive Knoten liegen können. Zusätzlich müssen alle kreuzenden Kanten, da wir uns im inneren Gebiet befinden, dieses Gebiet wieder über dasselbe Kantensegment verlassen.

Kommen wir nun zu dem Fall, dass die rote Kante innerhalb dieses inneren Gebietes endet. In diesem Fall betrachten wir den roten Graphen, der von dem inneren Gebiet beschränkt wird. Wir sparen Kreuzungen, indem wir diesen Graphen aus dem inneren Gebiet entfernen und in der ϵ -Umgebung der grünen Kante platzieren. Dies ist in Abbildung 2.8 dargestellt. So erhält man auch in diesem Fall eine Widerspruch zu der Kreuzungsminimalität der ursprünglichen Zeichnung.

Nun kommen wir zum zweiten Hauptfall. Es gibt entweder nur links-rechts oder nur rechts-links Kreuzungen. In diesem Fall erhalten wir immer eine Spirale. In Abbildung 2.9 ist eine Spirale zu sehen, die sich ergibt, falls nur links-rechts Kreuzungen vorliegen. In diesem Fall ergibt sich immer ein inneres Gebiet in dem zwei Endknoten der betrachteten Kanten liegen. Dies kann man in Abbildung 2.9 sehen. Der gemeinsame Graph liegt weiterhin ohne Einschränkung außerhalb von dem Gebiet, welches von den Kanten e_1 und e_2 begrenzt wird. Man erhält nun eine Zeichnung mit weniger Kreuzungen, indem man den gesamten roten Graphen, der in dem inneren Gebiet liegt, in eine kleine Umgebung der roten Kante zieht. Dies geschieht analog wie im Fall, als ein Endknoten im inneren Gebiet lag.

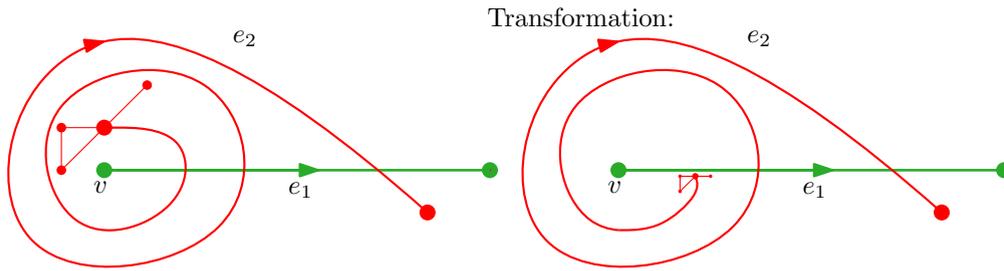


Abbildung 2.9: Hier ist die Spirale mitsamt einer Transformation, welche die Anzahl der Kreuzungen verringert, dargestellt.

In allen Fällen erhält man nun eine Widerspruch zur Kreuzungsminimalität der Zeichnung. Somit können sich zwei exklusive Kanten in der kreuzungsminimalen Zeichnung, falls der gemeinsame Graph zusammenhängend ist, nur maximal einmal schneiden. \square

Lemma 2.3 deutet an, dass sich exklusive Kanten in kreuzungsminimalen, simultanen Zeichnungen nicht kompliziert kreuzen, falls der gemeinsame Graph zusammenhängend ist. Das wir diese Voraussetzung wirklich benötigen, zeigt das folgenden Lemma.

Lemma 2.4. *Besteht der gemeinsame Graph aus k Zusammenhangskomponenten, so existieren kreuzungsminimale, simultane Zeichnungen, in welchen sich zwei exklusive Kanten mindestens k -mal kreuzen.*

Beweis. In der Abbildung 2.10 ist eine Zeichnung zu sehen, in der der gemeinsame Graph aus drei Zusammenhangskomponenten besteht. Die Zusammenhangskomponenten sind die isolierten Knoten v_1 und v_2 sowie der Kreis mit zusätzlicher Kante e_g . Die Kanten e_1 und e_2 kreuzen sich dreimal. Diese Abbildung lässt sich logisch auf k Zusammenhangskomponenten fortsetzen. Falls die Anzahl der Zusammenhangskomponenten gerade ist, soll die Kante e_2 oberhalb von e_1 starten und oberhalb von e_1 enden.

Das die angegebene simultane Zeichnung kreuzungsminimal ist, sieht man wie folgt. Die Kanten e_1 und e_2 müssen in der Facette liegen, welche nicht von e_g berandet wird. Andernfalls würden sich zum Beispiel e_1 und e_g kreuzen. Die Knoten v_1 und v_2 müssen in derselben Facette liegen, da die Kanten, welche v_i mit dem Rand verbinden, sonst e_g kreuzen würde. Diese Kanten nenne ich im Folgenden auch Verbindungsstreifen.

Die einzige Wahl, die bleibt, ist somit, wie man die Knoten innerhalb der Facette anordnet. Jedoch werden durch jede Vertauschung der Knoten quadratisch viele Kreuzungen auf den Verbindungsstreifen erzeugt, wobei nur linear viele Kreuzungen zwischen e_1 und e_2 gespart werden. Wählt man also den Verbindungsstreifen dick genug, so führt schon eine Vertauschung zu mehr rot-grünen Kreuzungen, als es Kreuzungen in der Zeichnung mit unveränderter Anordnung der Knoten gibt. Somit ist die angegebene Zeichnung eine kreuzungsminimale, simultane Zeichnung. \square

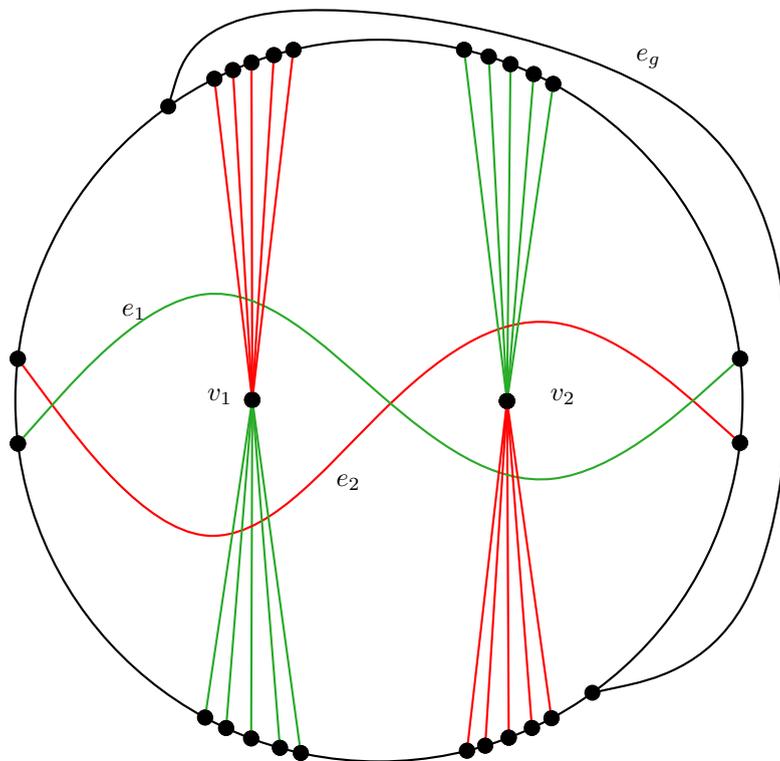


Abbildung 2.10: Diese Abbildung zeigt eine kreuzungsminimale, simultane Zeichnung, in der sich die exklusiven Kanten e_1 und e_2 3-mal kreuzen. Die Verbindungsstreifen haben Dicke 5 und die isolierten Knoten sind unverändert angeordnet.

3. Komplexität der Kreuzungsminimierung

Ich zeige in diesem Kapitel, dass Kreuzungsminimierung bei simultaner, planarer Einbettung \mathcal{NP} -vollständig ist.

Ich zeige, dass folgendes Entscheidungsproblem \mathcal{NP} -vollständig ist: „Gegeben zwei planare Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ und eine natürliche Zahl k^* ; gilt $\text{cr}_{\text{sp}}(G_1, G_2) \leq k^*$?“ Ich werde dieses Entscheidungsproblem im Folgenden SP-KREUZUNGSZAHL nennen, wobei S für simultan und P für planar steht.

Theorem 3.1. SP-KREUZUNGSZAHL $\in \mathcal{NP-C}$

Beweis. Ich zeige zuerst, dass SP-KREUZUNGSZAHL in \mathcal{NP} liegt. Gegeben einen Zeugen, der die Kreuzungen kennt, kann man durch Einfügen von Dummy-Knoten für jede rot-grüne-Kreuzung (vergleiche Planarisierung) und Überprüfung der Planarität des Vereinigungsgraph die Richtigkeit überprüfen. Ob ein Graph planar gezeichnet werden kann, kann in linearer Zeit in $|V|$ überprüft werden [HT74]. Also ist die Überprüfung in polynomieller Zeit möglich.

Ich werde die \mathcal{NP} -Vollständigkeit durch eine Reduktion von Kreuzungszahl beweisen. Dabei wird als bekannt vorausgesetzt, dass folgendes Entscheidungsproblem \mathcal{NP} -vollständig ist: „Gegeben einen Graphen G und eine natürliche Zahl k ; gilt $\text{cr}(G) \leq k$?“. Vergleiche dazu „Crossing Number is \mathcal{NP} -Complete“ (Kreuzungszahl ist \mathcal{NP} -vollständig) [GJ83].

Sei ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Ich wandle den Graphen in zwei neue Graphen um, indem ich jede Kante des Graphen G in $2 \cdot |E|$, abwechselnd grüne und rote Kanten, unterteile (vergleiche Abbildung 3.1). Der Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ ist nun der grüne Graph und $G_2 = (V_2, E_2)$ ist der rote Graph. Dabei wird $V_1 = V_2$ gewählt und $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Außerdem wird $k^* = k$ gewählt. Offensichtlich sind G_1 und G_2 planar, da sie aus isolierten Knoten, Sternen und einfachen Kanten bestehen.

Nun ist noch die Äquivalenz zweier Lösungen zu zeigen. Gibt es eine kreuzungsminimale Zeichnung von G mit weniger als k Kreuzungen, so kreuzen sich nach Lemma 2.1 paarweise verschiedene Kanten maximal einmal. So wird eine Kante von G von maximal $|E|$ Kanten gekreuzt. Bei der Reduktion wurde eine Kante genau in $|E|$ Abschnitte mit einem roten und einem grünen Teil aufgeteilt. Für jede Kreuzung gibt es nun die Möglichkeit abhängig von

Kante in G :



Kante in G_v :



Abbildung 3.1: Hier wird veranschaulicht, wie die Transformation von G zu G_v gemeint ist.

der aktuellen Farbe der kreuzenden Kante den roten oder grünen Abschnitt zu wählen. So erhält man eine Zeichnung mit höchstens $k = k^*$ G_1 - G_2 -Kreuzungen.

Gibt es eine Zeichnung der Graphen G_1 und G_2 mit höchstens $k^*(=k)$ rot-grünen Kreuzungen und keinen gleichfarbigen Kreuzungen, gilt also $cr_{sp}(G_1, G_2) \leq k^*$. Vergisst man nun die Farben so erhält man einen Graphen G mit maximal k Kreuzungen.

Dies zeigt die Äquivalenz der Lösungen. □

4. Feste Einbettung des gemeinsamen Graphen

Wir werden in diesem Kapitel grundsätzlich voraussetzen, dass der gemeinsame Graph fest eingebettet ist. Im Folgenden seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ immer planare Graphen mit $V_1 = V_2$. Wir verbieten somit exklusive Knoten.

In werde in diesem Kapitel für unterschiedliche gemeinsame Graphen zeigen, wie die Anzahl der rot-grünen Kreuzungen minimiert werden kann.

4.1 Gemeinsamer Graph ist Kreis

Wir betrachten nun den Fall, dass der gemeinsame Graph ein Kreis ist (vergleiche Abbildung 4.1). Wir interessieren uns nur für Zeichnungen, in welchen sowohl G_1 als auch G_2 planar gezeichnet sind. Den exklusiven Kanten ist es somit insbesondere nicht erlaubt den Kreis zu kreuzen.

Eine Kante wx *alterniert* mit der Kante uv genau dann, wenn $\{u, v\} \cap \{w, x\} = \emptyset$ und auf jedem Pfad von u nach v auf dem Kreis entweder w oder x liegt. Alle Kanten, welche mit der Kante uv alternieren, fassen wir in der Menge $\text{Al}(uv)$ zusammen.

Im Folgenden werde ich zeigen, dass die alternieren-Relation auf den Kanten symmetrisch ist.

Lemma 4.1. *Sei $G_v = (V, E)$ der Vereinigungsgraph von G_1 und G_2 und der gemeinsame Graph sein ein Kreis. Außerdem seien $wx, uv \in E$. Dann gilt: $wx \in \text{Al}(uv) \Leftrightarrow uv \in \text{Al}(wx)$*

Beweis. Ich zeige nur eine Richtung, die andere geht analog. Sei also $wx \in \text{Al}(uv)$. Also gilt $\{u, v\} \cap \{w, x\} = \emptyset$ und auf jedem Pfad auf dem Kreis von u nach v liegt entweder w oder x . Die erste Bedingung für $uv \in \text{Al}(wx)$ ist somit bereits erfüllt.

Wir nehmen nun an, dass die zweite Bedingung nicht erfüllt ist. Es gibt also einen Pfad von w nach x auf dem Kreis, auf dem weder u noch v liegt. Daraus folgt, dass auf einem Pfad von u nach v sowohl x als auch w liegt. Also liegt auf dem anderen Pfad von u nach v weder x noch w . Dies ist ein Widerspruch zu $wx \in \text{Al}(uv)$. \square

Die alternieren-Relation ist also symmetrisch auf den Kanten. Wir nennen zwei Kanten uv und wx *alternierend*, wenn wx mit uv alterniert. Zum Beispiel die Kanten e_1 und e_2 in Abbildung 4.1 sind alternierend. Nach Definition alternieren nur exklusive Kante.

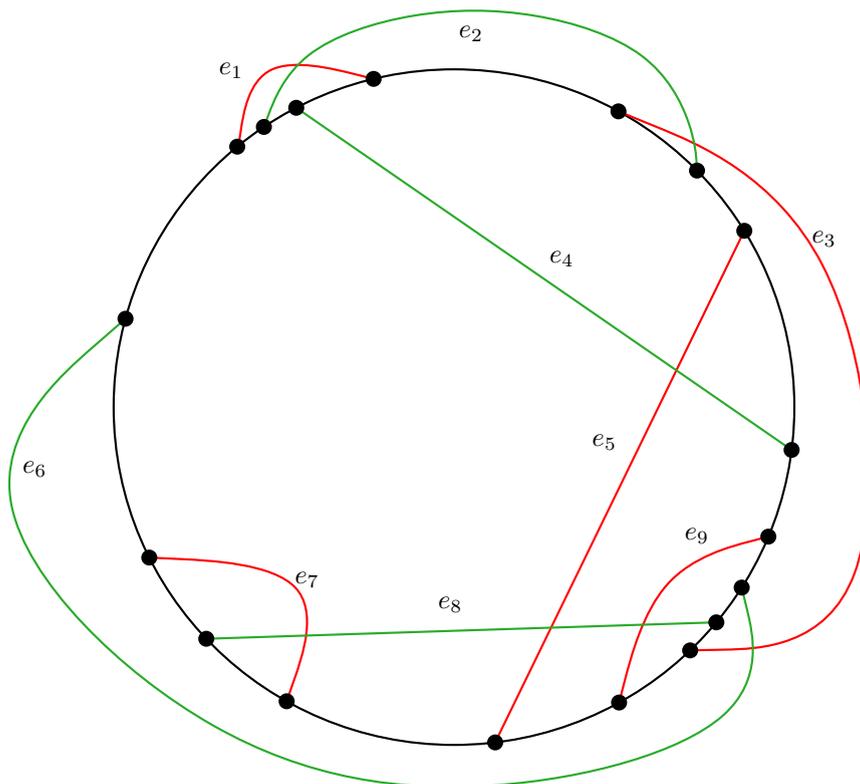


Abbildung 4.1: Hier ist eine simultane Zeichnung zu sehen, dabei ist der gemeinsame Graph ein Kreis.

Sei $G_v = (V, E)$ der Vereinigungsgraph von G_1 und G_2 . Wir betrachten nun den *Konfliktgraphen* auf den exklusiven Kanten bezüglich der alternieren-Relation. Dies ist ein ungerichteter Graph K , der als Knotenmenge die exklusiven Kanten von G_v hat. Dabei sind zwei Knoten adjazent genau dann, wenn die zugehörigen Kanten alternieren.

Ein Graph ist ein *Kreissehnengraph*, falls er eine Kreissehnenrepräsentation besitzt. In einer *Kreissehnenrepräsentation* eines Graphen G wird jeder Knoten aus $V(G)$ von einer Sehne in einem Kreis repräsentiert. Die Sehnen müssen so positioniert sein, dass sich diese genau dann schneiden, wenn die dazugehörigen Knoten adjazent sind.

Lemma 4.2. *Sei G_v der Vereinigungsgraph zweier planarer Graphen. Außerdem sei der gemeinsame Graph ein Kreis.*

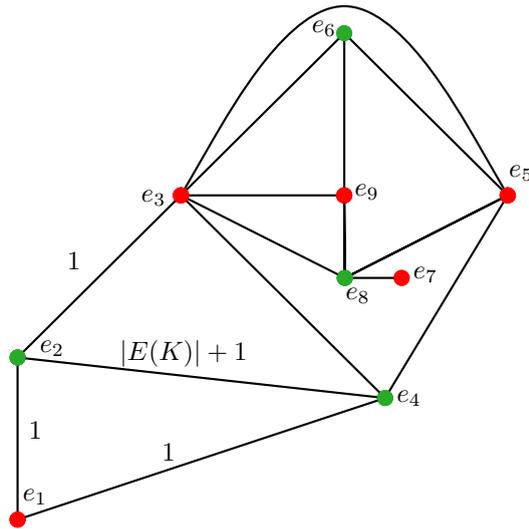
Dann ist der Konfliktgraph K zu G_v ein Kreissehnengraph.

Beweis. Die Kreissehnenrepräsentation des Konfliktgraphen erhält man wie folgt. Für jeden Knoten in K wählt man als Sehne die Verbindung der entsprechenden Endpunkte im ursprünglichen Graphen G_v . Zur besseren Veranschaulichung vergleiche Abbildung 4.2.

Zwei Sehnen schneiden sich genau dann, wenn die zugehörigen Kanten von G_v alternieren. Zwei Knoten in K sind adjazent genau dann, wenn sie alternierend liegen. Dies zeigt, dass sich auf diese Weise eine Kreisrepräsentation des Konfliktgraphen ergibt. \square

Lemma 4.3. *Sei G_v der Vereinigungsgraph von den planaren Graphen G_1 und G_2 . Außerdem sei der gemeinsame Graph ein Kreis. Dann gilt:*

In einer kreuzungsminimalen simultanen Zeichnung kreuzen sich zwei Kanten genau dann, wenn sie beide in derselben Facette liegen und alternieren.

Konfliktgraph K :

Kreissehenrepräsentation:

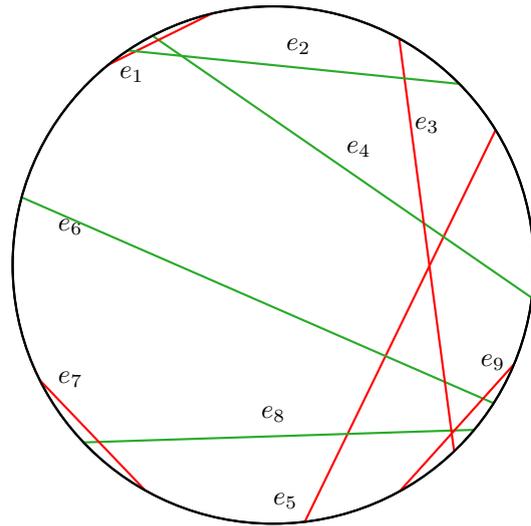


Abbildung 4.2: Links ist der Konfliktgraphen K zum Graphen aus Abbildung 4.1 gezeichnet. Die Kanten zwischen gleichfarbigen Knoten tragen $|E(K)| + 1$ als Kantengewicht. Die Kantengewichte sind für Lemma 4.4 relevant. Rechts ist eine Kreissehenrepräsentation von K angegeben

Beweis. Liegen beide Kanten in derselben Facette, so werden durch das Zeichnen der einen Kante, da die Kanten nach Voraussetzung alternieren, die Eckpunkte der anderen Kante in unterschiedliche Facetten aufgeteilt. Diese Situation liegt zum Beispiel bei e_1 und e_2 in Abbildung 4.1 vor. Damit kreuzen sich die beiden Kanten selbst in der kreuzungsminimalen Zeichnung nach dem Jordanschen Kurvensatz.

Ich zeige die umgekehrte Aussage über die Kontraposition. Betrachte die Kanten uv und wx , die in unterschiedlichen Facetten oder nicht alternierend liegen. Falls sie in unterschiedlichen Facetten liegen, können sie sich nicht kreuzen, da sie den Kreis nicht kreuzen dürfen. Falls sie in derselben Facette liegen ergeben sich zwei weitere Fälle. Der erste Fall ist, dass die Kanten uv und wx benachbart sind. Analog zu Lemma 2.2 kann man nun argumentieren, warum die Kanten sich in einer kreuzungsminimalen Zeichnung nicht kreuzen.

Als zweiten Fall betrachten wir nun den Fall, dass die Kanten nicht benachbart sind und nicht alternieren. Es muss also $\{u, v\} \cap \{w, x\} = \emptyset$ gelten, da wir Graphen ohne Mehrfachkanten betrachten. Also liegt auf einem Weg auf dem Kreis von u nach v kein Knoten aus wx . Auch in diesem Fall kann man die Kanten uv und wx ohne Kreuzung zeichnen, da die Kante wx die Endpunkte u und v nicht trennt. Die Kanten müssten sich gerade oft kreuzen. Nach Lemma 2.1 kreuzen sie sich also nicht.

In allen Fällen kreuzen sich die Kanten nicht. Dies schließt den Beweis. \square

Legt man die Vereinigungseinbettung fest, so kann man keine Minimierung vornehmen, da die simultane Kreuzungszahl nach Lemma 4.3 eindeutig festgelegt ist. Man muss in diesem Fall nur die Zahl der paarweise alternierenden Kantenpaare, welche in derselben Facette liegen, abzählen. Falls mindestens eines dieser Kantenpaare gleichfarbig ist, erhält die simultane Kreuzungszahl den Wert unendlich.

Der interessante Fall ist, wenn nur der gemeinsame Graph fest eingebettet ist. Wir nennen die Kanten, die mit uv alternieren, auch *Konfliktkanten* zu uv . Das Lemma 4.3 erlaubt uns nur die miteinander alternierenden Kanten zu betrachten, da alle anderen Kantenpaare ohne Kreuzungen untereinander gezeichnet werden können. Nun ist Kreuzungsminimierung

äquivalent dazu, die exklusiven Kanten nach innen/außen zu verteilen, sodass möglichst wenig alternierende Kantenpaare in derselben Facette liegen. Dabei müssen die Kanten so verteilt werden, dass keine zwei gleichfarbigen Kanten, welche miteinander alternieren, in derselben Facette liegen.

Das Problem der Kreuzungsminimierung ist also äquivalent dazu im Konfliktgraphen K den maximalen Schnitt zu finden. Man möchte möglichst viele der Kreuzungen vermeiden, indem man die entsprechenden Kanten in verschiedene Facetten aufteilt. Dabei muss man mit hohen Kantengewichten sicherstellen, dass gleichfarbige, miteinander alternierende Kanten getrennt werden. Man könnte diesen Kanten zum Beispiel das Kantengewicht $|E(K)| + 1$ zuordnen. Sei $(S, V(K) \setminus S)$ der maximale Schnitt. Platziert man nun die Kanten aus S in die eine und die restlichen Kanten in die andere Facette, so erhält man eine kreuzungsminimale, simultane Zeichnung.

Damit ergibt sich:

Lemma 4.4. *Sei G_v der Vereinigungsgraph von den planaren Graphen G_1 und G_2 . Außerdem sei der gemeinsame Graph ein Kreis. Dann gilt:*

Das Bestimmen von $\text{cr}_{\text{sp}}(G_1, G_2)$ ist so komplex wie das Bestimmen eines maximalen Schnittes in dem Konfliktgraphen K mit Kantengewichten 1 und $|E(K)| + 1$.

Beweis. Nachdem man einen maximalen Schnitt in K erhalten hat, addiert man die Gewichte der Kanten, die nicht den Schnitt kreuzen. Wir nennen diesen Wert k . Ist k echt größer als $|E(K)|$, so gibt es keinen Schnitt, der alle gleichfarbigen, alternierenden Kanten trennt. Man kann also keine Partition in zwei Mengen angeben, sodass wenn die Kanten entsprechend dieser Partition verteilt werden, sich keine gleichfarbigen Kreuzungen ergeben. Man hat somit unabhängig von der Aufteilung der Kanten eine gleichfarbige Kreuzung. In diesem Fall hat $\text{cr}_{\text{sp}}(G_1, G_2)$ den Wert unendlich.

Falls k höchstens den Wert $|E(K)|$ annimmt, kann man eine kreuzungsminimale Zeichnung angeben, indem man die Kanten aus S in der eine und die restlichen Kanten in der andere Facette platziert. In diesem Fall hat $\text{cr}_{\text{sp}}(G_1, G_2)$ den Wert k . Denn würde es eine echt bessere Aufteilung $(S', V(K) \setminus S')$ geben, so wäre $(S, V(K) \setminus S)$ kein maximaler Schnitt. \square

Es ist jedoch noch nicht bekannt, wie komplex das Finden eines maximalen Schnittes in Kreissehnengraphen ist. Im Folgenden werden wir eine andere Sichtweise auf das Problem kennenlernen. Dafür wird ein reduzierter Konfliktgraph eingeführt, bei dem gleichfarbige, alternierende Kanten zu Komponenten zusammengefasst werden.

Eine Einbettung von dem Vereinigungsgraph, welche so gewählt ist, dass sich rote Kanten nicht mit roten Kanten und grüne Kanten nicht mit grünen Kanten kreuzen, nennen wir *gültige Einbettung*.

Eine gültige Einbettung existiert genau dann, wenn der Konfliktgraph K eingeschränkt auf die exklusiven Kanten aus G_1 und eingeschränkt auf die exklusiven Kanten aus G_2 bipartit ist. Wir werden diese Graphen mit $K|_{G_1}$ bzw. $K|_{G_2}$ bezeichnen. Auf der Suche nach einer gültigen Einbettung untersucht man den Konfliktgraphen auf den grünen beziehungsweise den roten Kanten unabhängig voneinander auf 2-Färbbarkeit.

Im Folgenden beschreibe ich einen Algorithmus, der die Bipartitität überprüft. Man beginnt damit eine grüne Kante in eine der Facetten des Kreises einzufügen. Dabei ist es für eine gültige Einbettung irrelevant, ob die erste Kante außen oder innen liegt. Danach bettet man alle damit alternierenden, grünen Kanten in die andere Facette ein (vergleiche Lemma 4.3). Nun betrachtet man nacheinander die neu eingefügten Kanten und fährt mit ihren Konfliktkanten analog fort. Diese Vorgehensweise wiederholt man solange, bis eine

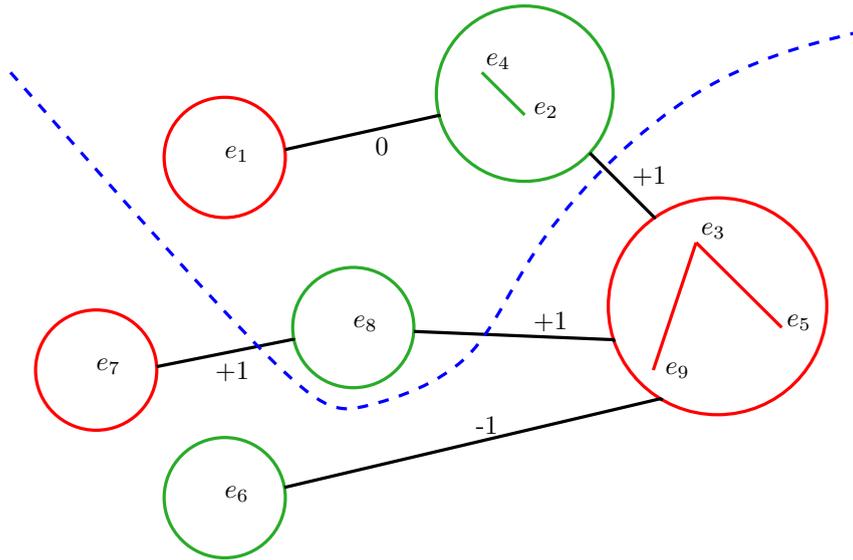


Abbildung 4.3: In dieser Abbildung ist der reduzierte Konfliktgraph K_{red} zu dem Graphen aus Abbildung 4.1 zu sehen. Zusätzlich ist der maximale Schnitt eingezeichnet.

Kante in beide Facetten eingefügt wurde, dies entspricht der Tatsache, dass keine gültige Einbettung existiert. Man hat in diesem Fall eine Kante gefunden, die mit zwei Kanten alterniert, wobei die eine Konfliktkante außen und die andere innen liegt. Egal in welche Facette wir die Kante einfügen, wir erhalten eine gleichfarbige Kreuzung.

Wird jede Kante in genau eine Facette eingefügt, so hat man eine gültige Einbettung gefunden. In dem Fall, dass nicht alle Kanten eingefügt werden, wird aus den restlichen Kanten eine beliebige Kante gewählt und analog wie bei der Startkante verfahren. Dies ist ohne Probleme möglich, da diese Kante mit keiner, der bis jetzt betrachteten Kanten, in Konflikt steht. Diese Kante liegt in einer anderen Zusammenhangskomponente von $K|_{G_1}$. Ob eine gültige Einbettung existiert, sieht man durch den oben beschriebenen Algorithmus. Dafür wendet man ihn nur auf die grünen und danach nur auf die roten Kanten an.

Eine Beispiel einer Zeichnung einer gültigen Einbettung ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Existiert keine gültige Einbettung, so kann das Problem nicht zufriedenstellend, das heißt ohne Kreuzung von gleichfarbigen Kanten, gelöst werden. Zum Beispiel, wenn drei rote Kanten paarweise alternieren, kann man keine solche Einbettung finden. Drei paarweise alternierende, rote Kanten sind im Konfliktgraphen als Dreieck zu erkennen, ein Dreieck ist nicht bipartit.

Für den Rest des Abschnittes werden wir voraussetzen, dass eine gültige Einbettung existiert. In diesem Fall kann man den Konfliktgraphen reduzieren, indem man gleichfarbige, alternierende Kanten zusammenfasst (vergleiche Abbildung 4.3).

Die *Komponente* von einer exklusiven Kante e aus G_i ist die Zusammenhangskomponente, in der sie sich in $K|_{G_i}$ befindet. Dabei ist $i \in \{1, 2\}$. Eine Komponente ist also eine Menge von Kanten, welche über beliebig viele, gleichfarbige Kanten alternierend sind. Liegt für eine exklusive Kante e die Einbettung fest, so ist die Einbettung aller Kanten in der Komponente von e bereits festgelegt, da gleichfarbige Kreuzungen verboten sind. In dem *reduzierten Konfliktgraphen* K_{red} hat man deswegen als Knotenmenge gerade die verschiedenen Komponenten der roten und grünen Kanten. Die Kantenmenge $E(K_{red})$ des reduzierten Konfliktgraphen sind die Kanten zwischen roten und grünen Komponenten (siehe Abbildung 4.3).

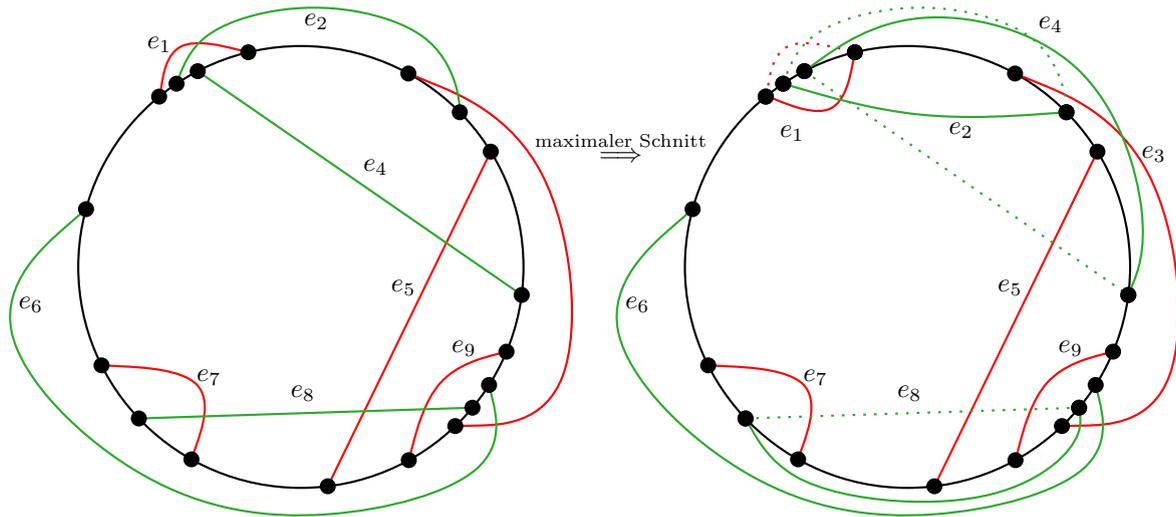


Abbildung 4.4: Links ist zur Erinnerung die simultane Zeichnung des betrachteten Graphen zu sehen (vergleiche Abbildung 4.1). Rechts ist die kreuzungsminimale, simultane Zeichnung von G_v angegeben, diese ergibt sich durch den in Abbildung 4.3 dargestellten Schnitt aus der gültigen Zeichnung links.

Um nun mit Hilfe von dem reduzierten Konfliktgraphen das Problem der Kreuzungsminimierung zu lösen, muss man noch passende Kantengewichte für die Kanten bestimmen.

Man hat zwei Möglichkeiten jede einzelne Komponente einzubetten. Nämlich wie in der gültigen Einbettung angegeben oder gerade alle Kanten in der jeweils anderen Facette. Die zweite Einbettung werde ich im folgenden die *gespiegelte Einbettung* nennen.

Wir wollen das Problem der Kreuzungsminimierung wieder durch das Finden eines maximalen Schnittes lösen. Anschaulich heißen die beiden Partitionen, dass wir für die kreuzungsminimale simultane Zeichnung die eine Partition gespiegelt und die andere unverändert einbetten müssen.

Betrachten wir eine grüne und eine rote Komponente. Es gibt nun genau vier Möglichkeiten diese einzubetten. Darunter sind die Möglichkeit beide gespiegelt einzubetten oder nur eines gespiegelt einzubetten. Offensichtlich gibt es die gleiche Anzahl an Kreuzungen innerhalb dieser beiden Komponenten, wenn man sie beide gespiegelt einbettet oder beide wie in der gültigen Einbettung lässt. Falls man nur eine Komponente gespiegelt einbettet, erhält man oft eine andere Anzahl an Kreuzungen. Als Kantengewicht zwischen einer roten und grünen Komponente benötigt man nun die Differenz dieser beiden Werte. Positive Zahlen sagen anschaulich aus, dass es sich lohnen würde einmal die gespiegelte Einbettung zu wählen.

Theorem 4.5. Sei G_v der Vereinigungsgraph von den planaren Graphen G_1 und G_2 . Außerdem sei der gemeinsame Graph ein Kreis. Dann gilt:

Aus dem maximalen Schnitt in dem reduzierten Konfliktgraphen K_{red} von G_1 und G_2 erhält man eine kreuzungsminimale simultane Zeichnung.

Beweis. Ich zeige zuerst: Falls der maximale Schnitt den Wert k hat, so findet man eine gültige Einbettung, welche im Vergleich zur gewählten gültigen Einbettung k Kreuzungen spart. Der maximale Schnitt in dem Konfliktgraphen liefert eine Aufteilung der Komponenten in zwei Mengen. Wir nennen diese S und $V \setminus S$. Der Wert dieses Schnittes sei $k \in \mathbb{N}_0$, da falls es keinen Schnitt mit positivem Gewicht gibt, der triviale Schnitt der maximale Schnitt ist.

Aus dieser Aufteilung erhält man eine um k verbesserte Einbettung indem man die Komponenten in S spiegelt. Zwei Komponenten auf der gleichen Seite des Schnittes werden entweder beide gespiegelt oder beide gleichgelassen, d.h. die Anzahl der Kreuzungen zwischen diesen Komponenten bleibt gleich. Nur Kanten, welche den Schnitt kreuzen, ändern die Anzahl der vorhandenen rot-grünen-Kreuzungen. Indem man die Komponenten in S spiegelt, reduziert man nach Definition der Kantenbeschriftung die Anzahl der Kreuzungen um k . Durch das Kantengewicht hat man sich auf einer Kante gemerkt, wie viele Kreuzungen eingespart werden, wenn man eine der beiden Komponenten flippt. Um den Wert, der auf einer Kante, welche den Schnitt kreuzt, steht, wird die Kreuzungszahl erniedrigt. Das heißt falls der Wert 2 ist, so gibt es 2 Kreuzungen weniger, falls man eine Komponente gespiegelt einbettet.

Dies zeigt, dass falls der maximale Schnitt den Wert k hat, so findet man eine Einbettung, welche um k verbessert ist. Diese Einbettung ist eine gültige Einbettung, da die gleichfarbigen Kanten in Komponenten zusammengefasst waren und so immer noch kreuzungsfrei gezeichnet werden können.

Nun ist noch die Umkehrung zu zeigen. Hat die kreuzungsminimale simultane Zeichnung k Kreuzungen weniger als die einer gewählten gültigen Einbettung, so findet man in dem Konfliktgraphen einen Schnitt, dessen Wert k ist. Die kreuzungsminimale simultane Zeichnung liefert einem für jede Kante, ob sie in der inneren oder äußeren Facette des Kreises liegt. Die Einbettung einer Kanten legt die Einbettung ihrer ganzen Komponente fest. Also können ohne Verlust einer besseren Zeichnung Kanten zu Komponenten zusammengefasst werden. Man hat als einzigen Freiheitsgrad die Wahl, ob man die gespiegelte oder ungespiegelte Einbettung wählen möchte.

Wir definieren nun S wie folgt: $S := \{v \in V(K_{red}) \mid v \text{ ist in der gültigen Einbettung im Vergleich zur kreuzungsminimalen simultanen Zeichnung gespiegelt eingebettet}\}$. Der Schnitt $(S, V(K_{red}) \setminus S)$ im Konfliktgraphen hat den Wert k , da die Kantenbeschriftung gerade so gewählt wurde. \square

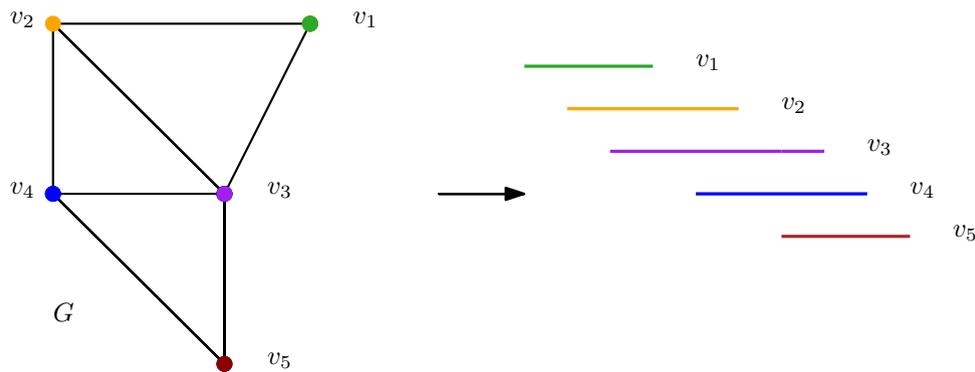


Abbildung 4.5: In dieser Abbildung ist der Graph G (links) mit einer Intervallrepräsentation von G (rechts) zu sehen. Dabei sind die Intervalle zur besseren Lesbarkeit übereinander gezeichnet.

4.2 Maximale Schnitte in Intervallgraphen

In diesem Abschnitt werde ich ein dynamisches Programm zur Bestimmung eines maximalen Schnittes in Intervallgraphen mit konstanter Cliquengröße beschreiben.

Es folgt eine Notation, die hauptsächlich in diesem Abschnitt benötigt wird. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, x ein Knoten und S eine Menge von Knoten, wobei $x \notin S$. Mit $|(x, S)|$ bezeichnen wir die Anzahl der Kanten von x nach S .

In einer *Intervallrepräsentation* eines Graphen G wird jeder Knoten aus $V(G)$ von einem Intervall in den reellen Zahlen repräsentiert. Die Start- und Endpunkte der Intervalle müssen so gewählt sein, dass sich die Intervalle genau dann schneiden, wenn die dazugehörigen Knoten adjazent sind. Dabei ist es irrelevant, ob man die Intervalle offen oder abgeschlossen wählt, da die Intervallrepräsentation so gewählt werden kann, dass diese Intervalle echt unterschiedliche Start- und Endpunkte besitzen. Anschaulich kann man dies durch kleine Verschiebungen erreichen.

Jeder Graph G , der eine Intervallrepräsentation besitzt, ist ein *Intervallgraph*. In Abbildung 4.5 ist ein Intervallgraph mit seiner Intervallrepräsentation zu sehen.

Viele der typischen \mathcal{NP} -vollständigen Probleme wie 3-Färbbarkeit oder das Finden eines hamiltonschen Kreises sind auf Intervallgraphen in linearer Zeit möglich [Kei85]. Es ist jedoch noch nicht bekannt, wie komplex das Finden eines maximalen Schnittes in Intervallgraphen ist. Im Folgenden möchte ich deswegen ein dynamisches Programm beschreiben, welches den maximalen Schnitt in Intervallgraphen mit konstanter Cliquengröße $\omega(G)$ berechnet.

Im Folgenden betrachten wir einen Intervallgraphen, dessen Intervallrepräsentation gegeben ist. Für jeden Knoten v ist ein Intervall $I_v = [s_v, e_v]$ gegeben. Ich werde die Start- und Endpunkte der Intervalle nun *Ereignispunkte* nennen. Wir gehen ohne Einschränkung davon aus, dass die Ereignispunkte echt unterschiedlich sind. Es gibt somit $2 \cdot |V|$ verschiedene Ereignispunkte, diese werden der Größe nach, mit der kleinsten reellen Zahl beginnend, durchnummeriert. Nun kann man die Ereignispunkte sogar so verschieben, dass sie genau auf den natürlichen Zahlen 1 bis $2 \cdot |V|$ liegen.

Wir gehen nun folgendermaßen vor um den maximalen Schnitt zu finden. Zu einem bestimmten Ereignispunkt i berechnet man alle relevanten Schnitte in dem Graphen, der durch die Intervalle, die links von i beginnen, gegeben ist. Diese Lösungen verwendet man als Bausteine um den maximalen Schnitt in einem größeren Graphen zu erhalten. Welche Schnitte relevant sind, werde ich aufzeigen. Um diese Vorgehensweise durchzuführen, benötigen wir einige Definitionen.

Wir sagen ein Knoten v *verschwindet* zum Zeitpunkt i genau dann, wenn der i -te Ereigniszeitpunkt Endpunkt des Intervalls von v ist. Wir sagen ein Knoten v *erscheint* zum Zeitpunkt i genau dann, wenn der i -te Ereigniszeitpunkt Startpunkt des Intervalls von v ist. Alle Knoten, die bis zum i -ten Ereigniszeitpunkt bereits erschienen sind, fassen wir in der Menge V_i zusammen. Als Formel ergibt sich somit $V_i = \{v \in V \mid s_v \leq i\}$.

Ein Knoten v nennen wir *aktiv* zum Zeitpunkt i genau dann, wenn er erschienen ist, aber noch nicht verschwunden ist. Ein Knoten, der zum Zeitpunkt i verschwindet, ist nicht mehr aktiv zu diesem Zeitpunkt. Anschaulich ist ein Knoten auf seinem halboffenen Intervall aktiv. Alle Knoten, die zum Zeitpunkt i aktiv sind, fassen wir in der Menge A_i zusammen. Also $A_i = \{v \in V \mid s_v \leq i \text{ und } e_v > i\}$.

Für jede Wahl einer Teilmenge $S \subseteq A_i$ kann man nun den maximalen Schnitt in $G|_{V_i}$ berechnen, der S und $A_i \setminus S$ trennt. Dieser Wert wird als $T[i, S]$ gespeichert. Die Teilmenge S von den aktiven Knoten nennen wir auch die *ausgewählten Knoten*. Man berechnet zu jedem Ereigniszeitpunkt für jede Möglichkeit der ausgewählten Knoten den Wert des maximalen Schnittes. Dafür geht man wie in der Formel 4.1 vor. Die Richtigkeit dieser Formel wird in Lemma 4.6 gezeigt. Bei dieser Vorgehensweise betrachtet man zu jedem Zeitpunkt die Potenzmenge der aktiven Knoten. Falls $\omega(G)$ die Cliquenzahl des Graphen ist, so sind maximal $\omega(G)$ viele Knoten gleichzeitig aktiv, da die aktiven Knoten eine Clique bilden. Die Laufzeit ist also in $\mathcal{O}(2^{\omega(G)} \cdot |V(G)|)$. Damit man dieses Problem mit dieser Vorgehensweise in polynomieller Zeit lösen kann, benötigen wir somit konstante oder in der Knotenanzahl logarithmisch große Cliquengröße. Außerdem erkennt man, dass dies ein FPT-Algorithmus ist.

Lemma 4.6. *Für $i \in \{1, \dots, 2 \cdot |V|\}$ und $S \subseteq A_i$ ist $T[i, S]$ aus Formel 4.1 der Wert des maximalen Schnittes in dem von V_i induzierten Graphen, der S und $A_i \setminus S$ trennt.*

$$T[i+1, S] = \begin{cases} \max\{T[i, S], T[i, S \cup \{x\}]\} & , \text{ wenn } x \text{ in } i+1 \text{ verschwindet} \\ T[i, S \setminus \{x\}] + |(x, A_{i+1} \setminus S)| & , \text{ wenn } x \text{ in } i+1 \text{ startet und } x \in S \\ T[i, S \setminus \{x\}] + |(x, S)| & , \text{ wenn } x \text{ in } i+1 \text{ startet und } x \notin S \end{cases} \quad (4.1)$$

mit $T[1, S] = 0$ für $S \subseteq A_1$ beliebig (4.2)

Beweis. Falls i gleich eins ist, gilt die Behauptung. Da der maximale Schnitt in einem Graphen mit nur einem Knoten immer den Wert null hat.

Der Induktionsschritt ergibt sich nun über eine Fallunterscheidung.

Falls zum Zeitpunkt $i+1$ der Knoten x verschwindet, so ist die Menge der betrachteten Knoten identisch mit der zum vorherigen Ereigniszeitpunkt, also $V_i = V_{i+1}$. Es ändert sich nur die Menge der aktiven Knoten, es gilt $A_i \setminus \{x\} = A_{i+1}$. Wird eine Menge von ausgewählten Knoten $S \subseteq A_{i+1}$ vorgegeben, so ist unbekannt auf welcher Seite des Schnittes sich x befinden soll, da x nicht mehr einer der aktiven Knoten ist. Es gibt nun die Fälle, dass der maximale Schnitt x von S trennt oder nicht. Betrachten wir nun den Schnitt, der zusätzlich x von S trennt. Dies ist ein Schnitt in V_{i+1} ($= V_i$), der S von $(A_{i+1} \cup \{x\}) \setminus S$ ($= A_i \setminus S$) trennt. Dieser Schnitt hat nach Definition maximal den Wert $T[i, S]$. Analog hat der Schnitt, der zusätzlich x nicht von S trennt, maximal den Wert $T[i, S \cup \{x\}]$. Der Wert des gesuchten Schnittes kann somit maximal das Maximum der beiden betrachteten Schnitte sein. Das es einen Schnitt gibt der diesen Wert annimmt, zeige ich ohne Beschränkung der Allgemeinheit unter der Voraussetzung, dass $T[i, S] \geq T[i, S \cup \{x\}]$ gilt. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Schnitt in dem Graphen, der von V_i ($= V_{i+1}$) induziert wird, der S von $A_i \setminus S$ trennt und den Wert $T[i, S]$ hat. Dies ist auch ein Schnitt in V_{i+1} .

Taucht zum $i+1$ Zeitpunkt ein Knoten x erstmals auf, so ist $A_{i+1} = A_i \cup \{x\}$ und $V_{i+1} = V_i \cup \{x\}$. Da $A_i \subseteq A_{i+1}$ legt jede Festlegung einer ausgewählten Menge $S \subseteq A_{i+1}$

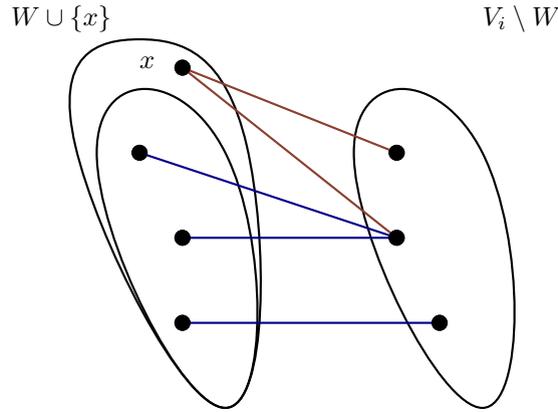


Abbildung 4.6: In diesem Bild ist ein maximaler Schnitt in dem Graphen $G|_{V_{i+1}}$ zu sehen, wobei im Zeitpunkt $i+1$ der Knoten x erscheint. Der maximale Schnitt setzt sich aus den Kanten, die von x über den Schnitt laufen, in braun dargestellt, und den Kanten, die in V_i den Schnitt kreuzen (blau), zusammen. Kanten innerhalb der Partitionen sind nicht gezeichnet.

fest, welche Knoten aus A_i auserwählt sind. Wird eine Menge von auserwählten Knoten $S \subseteq A_{i+1}$ vorgegeben, so gibt es wiederum zwei Fälle und zwar, dass der Knoten x in dieser Menge liegt, oder nicht.

Falls x in S liegt, erhält man den Wert des maximalen Schnittes durch das Lösen von zwei Problemen. Man sucht den maximalen Schnitt in der Knotenmenge V_i , wobei dort $S \setminus \{x\}$ von $A_i \setminus (S \setminus \{x\})$ getrennt werden muss. Dieser Schnitt hat maximal den Wert $T[i, S \setminus \{x\}]$. Zusätzlich zu diesem Wert wird die Anzahl der Kanten hinzugefügt, welche von x nach V_{i+1} gehend den Schnitt kreuzen. Dies sind, da x in S liegt, gerade $|(x, A_{i+1} \setminus S)|$ viele. Man erhält den höchsten Wert eines Schnittes, indem man den maximalen Wert des Schnittes an der i -ten Stelle, wenn man dort $S \setminus \{x\}$ auserwählt, mit der Anzahl an Kanten, die von x nach $A_{i+1} \setminus S$ gehen, addiert. Der maximale Schnitt hat somit maximal den Wert $T[i, S \setminus \{x\}] + |(x, A_{i+1} \setminus S)|$.

Falls x in S liegt, gibt es auch einen Schnitt der diesen Wert annimmt. Dies ergibt sich wie folgt. In V_i gibt es nach Induktionsvoraussetzung einen Schnitt der $S \setminus \{x\}$ von $A_i \setminus (S \setminus \{x\})$ trennt mit dem Wert $T[i, S \setminus \{x\}]$. Sei $(W, V_i \setminus W)$ dieser Schnitt, wobei $S \setminus \{x\} \subseteq W$. Nun ist $(W \cup \{x\}, V_i \setminus W)$ ein Schnitt in V_{i+1} , beachte $x \notin V_i$. In diesem Schnitt wird $(S \setminus \{x\}) \cup \{x\}$ von $A_i \setminus (S \setminus \{x\})$ getrennt. Umgeformt bedeutet das, dass S von $A_i \cup \{x\} \setminus ((S \setminus \{x\}) \cup \{x\}) (= A_{i+1} \setminus S)$ getrennt wird. Wir haben einen Schnitt in $G|_{V_i}$ der S von $A_{i+1} \setminus S$ trennt. Der Wert dieses Schnittes berechnet sich aus zwei Werten (vergleiche Abbildung 4.6). Der erste Wert ist die Anzahl der Kanten, die in V_i den Schnitt gekreuzt haben. Dies sind gerade $T[i, S \setminus \{x\}]$ Kanten. Dazu kommen die Kanten, die von x ausgehend den Schnitt kreuzen. Dies sind gerade $|(x, A_{i+1} \setminus S)|$ Kanten.

Falls x nicht in S liegt, geht man auf analoge Weise vor. Man betrachtet in diesem Fall die Kanten, welche von x nach V_{i+1} gehend den Schnitt kreuzen, dies sind genau $|(x, S)|$ viele.

Zusammenfassend geht man also wie folgt vor. Jedes Mal, wenn ein neuer Knoten x erscheint, addiert man die Anzahl der Kanten, die von x nach A_i gehen und den Schnitt kreuzen. Verschwindet ein Knoten so betrachtet man, auf welcher Seite des Schnittes dieser liegen muss, um einen höheren Schnitt zu erhalten. \square

4.3 Gemeinsamer Graph ist Pfad

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ planaren Graphen. Nun betrachten wir den Fall, dass der gemeinsame Graph P von G_1 und G_2 ein Pfad ist. Also $P = x_0, \dots, x_n$. Sei wieder $G_v = (V, E)$ der Vereinigungsgraph von G_1 und G_2 . Die exklusiven Kanten bezeichnen wir mit E_{ex} . Wir beschränken uns auf den Fall, dass $\deg(v) \leq 3$, $\forall v \in V$ und $\deg(x_0) \leq 2$ und $\deg(x_n) \leq 2$. Das heißt man erlaubt an jedem Knoten nur eine exklusive Kante. Wir untersuchen die Kreuzungsminimierung, wobei wir exklusive Knoten verbieten.

Zur Untersuchung dieses Falles, gehen wir ähnlich wie beim Kreis vor. Wir untersuchen wieder einen Konfliktgraphen. Dieser Fall ist jedoch etwas komplizierter, da für eine exklusive Kanten mehr als zwei echt unterschiedliche Einbettungen existieren. Betrachte hierfür Abbildung 4.7.

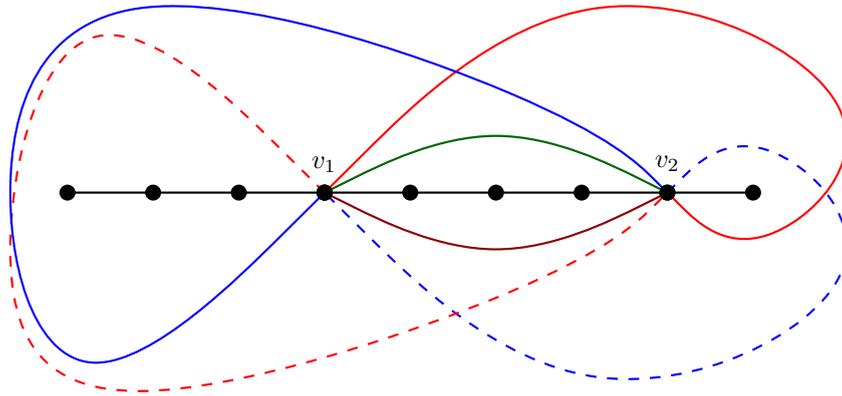


Abbildung 4.7: Für eine exklusive Kante, die v_1 und v_2 verbindet, existieren vier echt unterschiedliche Verbindungsmöglichkeiten. Dabei sind in diesem Bild paarweise äquivalente Verbindungsstrecken in derselben Farbe dargestellt, wobei eine Kante gestrichelt wurde.

Man kann sich für jede exklusive Kante im Start- und Endpunkt binär entscheiden (oben bzw. unten) und im oder gegen den Uhrzeigersinn verbinden. Man kann den gemeinsamen Graph nicht komplett umrunden, da sich die Kante sonst selbst schneiden müsste. Auch die Wahl der Richtung ist für die Kreuzungsminimierung nicht von Bedeutung, man legt nur eine andere äußere Facette fest. Es gibt damit vier echt unterschiedliche Verbindungen zwischen einem Knotenpaar. Für Kanten, die mindestens einen der Endpunkte des gemeinsamen Graphen enthalten, gibt es nur 2 echt unterschiedliche Einbettungen.

Für Knoten v und w bezeichnet $[v, w]$ den eindeutigen, kürzesten Weg auf dem gemeinsamen Graph der v mit w verbindet.

Wir untersuchen nun abhängig von der gegenseitigen Lage der Kanten, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit sie sich kreuzen. Dabei treten nur drei unterschiedliche Fälle auf, falls man an jedem Knoten nur eine exklusive Kante erlaubt. Wir haben uns zu Beginn des Abschnittes auf diesen Fall eingeschränkt.

Seien $e_1 = v_1v_2$ und $e_2 = w_1w_2$ exklusive Kanten.

Wir sagen e_1 *umschließt* Kante e_2 genau dann, wenn $[w_1, w_2] \subsetneq [v_1, v_2]$ und $\{w_1, w_2\} \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$. Dieser Fall ist in Abbildung 4.8 dargestellt.

Wir sagen e_1 *alterniert* mit Kante e_2 genau dann, wenn $[w_1, w_2] \cap \{v_1, v_2\} \neq \emptyset$ und $\{w_1, w_2\} \cap [v_1, v_2] \neq \emptyset$ und $\{w_1, w_2\} \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$. Dieser Fall ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Vergleiche auch die Definition von alternierenden Kanten, als der gemeinsame

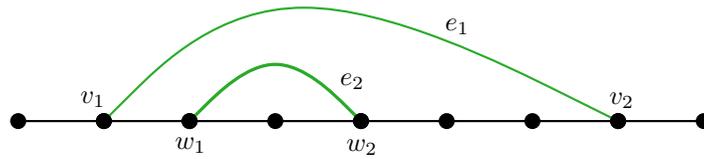


Abbildung 4.8: In dieser Abbildung umschließt die Kante e_1 die Kante e_2 .

Graph ein Kreis war. Diese Definition ist offensichtlich symmetrisch. Wir sagen e_1 und e_2 sind alternierende Kanten genau dann, wenn e_1 mit e_2 alterniert.

Falls $e_1 = v_1v_2$ und $e_2 = w_1w_2$ alternierende Kanten sind, so liegt genau ein Endpunkt von e_1 zwischen den Endpunkten von e_2 und genau ein Endpunkt von e_2 zwischen den Endpunkten von e_1 . Also in Formel: $\{v^*\} := [w_1, w_2] \cap \{v_1, v_2\}$ und $\{w^*\} := \{w_1, w_2\} \cap [v_1, v_2]$. Wir nennen v^* und w^* die *inneren Knoten*.

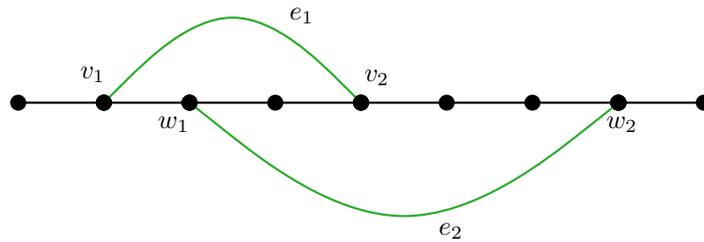


Abbildung 4.9: Hier sind zwei alternierende Kanten dargestellt. Dabei sind bei dieser Anordnung v_2 und w_1 die inneren Knoten.

Außerdem sagen wir e_1 und e_2 liegen *disjunkt* genau dann, wenn $[v_1, v_2] \cap [w_1, w_2] = \emptyset$. Dieser Fall ist in Abbildung 4.10 dargestellt.

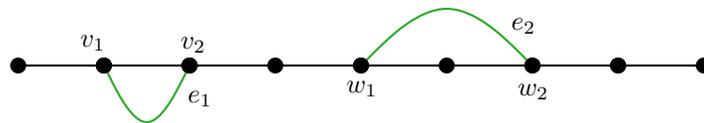


Abbildung 4.10: Disjunkte Anordnung der Kanten.

Das diese drei Fälle alles abdecken, zeigt folgendes Lemma.

Lemma 4.7. *Sei der gemeinsame Graph $P = x_0, \dots, x_n$ von den planaren Graphen G_1 und G_2 ein Pfad. Fordert man, dass an jedem Knoten von P nur eine exklusive Kante anfangen darf, dann gilt:*

Liegen zwei exklusive Kanten nicht alternierend, so liegen sie umschließend oder disjunkt.

Beweis. Betrachte die exklusiven Kanten $e_1 = v_1v_2$ und $e_2 = w_1w_2$, welche nicht alternieren.

Nach Definition gilt nun $[w_1, w_2] \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$ oder $\{w_1, w_2\} \cap [v_1, v_2] = \emptyset$ oder $\{w_1, w_2\} \cap \{v_1, v_2\} \neq \emptyset$. Dabei können, wegen der Voraussetzung, von keinem Knoten zwei exklusive Kanten ausgehen. Also kann $\{w_1, w_2\} \cap \{v_1, v_2\} \neq \emptyset$ nicht gelten. Es gilt also $[w_1, w_2] \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$ oder $\{w_1, w_2\} \cap [v_1, v_2] = \emptyset$. O.B.d.A. sei $[w_1, w_2] \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$.

Nun können wiederum zwei Fälle auftreten. Der erste Fall ist, dass $[w_1, w_2] \cap [v_1, v_2] \neq \emptyset$. Da $[w_1, w_2] \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$ und $[w_1, w_2] \cap [v_1, v_2] \neq \emptyset$ gilt, muss $[w_1, w_2] \subsetneq [v_1, v_2]$ gelten, da $[w_1, w_2]$ die Knoten v_1 und v_2 voneinander trennt. Also umschließt e_1 die Kante e_2 .

Der zweite Fall ist, dass $[w_1, w_2] \cap [v_1, v_2] = \emptyset$. Nach Definition liegen e_1 und e_2 disjunkt. \square

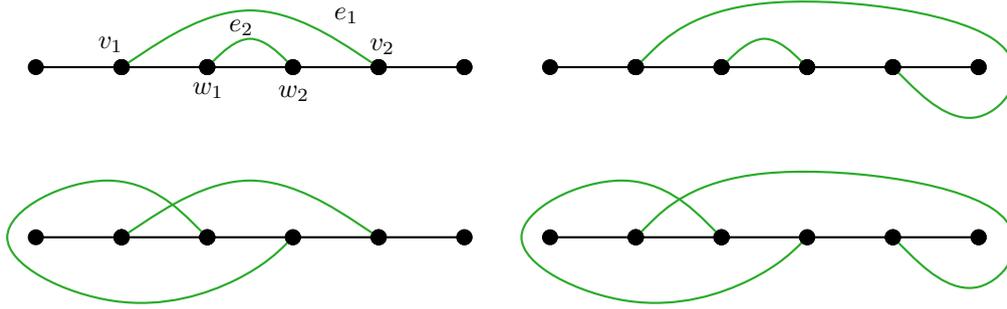


Abbildung 4.11: Diese vier Abbildungen sollen veranschaulichen, wann sich umschließende Kanten e_1 und e_2 schneiden. In den zwei oberen Bildern ist die Bedingung aus Lemma 4.8 nicht erfüllt. Zeichnerisch wird angedeutet, dass es für die Kreuzung irrelevant ist, wie die Kante e_1 liegt. Wohingegen die beiden unteren Abbildungen zeigen, dass sich Kreuzungen ergeben, falls die Bedingung erfüllt ist.

Ein Kantenpaar, welches disjunkt liegt, kann bei der Kreuzungsminimierung vernachlässigt werden. Denn unabhängig von der gewählten Einbettung können die Kanten kreuzungsfrei gezeichnet werden.

Die interessanten Fälle sind demnach die Fälle, wenn die Kanten alternierend oder umschließend liegen. Im Folgenden werden wir untersuchen, wann in diesen Fällen Kreuzungen entstehen. Um die gegenseitige Lage der Kanten deutlich zu machen orientiere ich den Pfad P in eine Richtung. Startet eine exklusive Kante e_1 in einem Punkt v_1 bezüglich der Orientierungsrichtung nach „links“, so bezeichnen wir das mit $e_1(v_1) = 1$. Geht die Kante nach „rechts“, so schreiben wir $e_1(v_1) = 0$. Wir stellen uns im Folgenden den Pfad liegend vor, sodass wir „links“ mit „oben“ und „rechts“ mit „unten“ identifizieren können.

Wir untersuchen zuerst umschließende Kantenpaare. Einige Fälle sind in Abbildung 4.11 veranschaulicht.

Lemma 4.8. *Sei der gemeinsame Graph $P = x_0, \dots, x_n$ von den planaren Graphen G_1 und G_2 ein Pfad. Sei $e_1 = v_1v_2$ eine umschließende Kante von $e_2 = w_1w_2$, dann gilt:*

In einer kreuzungsminimalen, simultanen Zeichnung kreuzen sich e_1 und e_2 genau dann, wenn $e_2(w_1) \neq e_2(w_2)$.

Beweis. Es gelte $e_2(w_1) \neq e_2(w_2)$. Die Kante, welche w_1 mit w_2 verbindet, muss ein Ende des Pfades umlaufen. Der Kreis $e_2 \cup [w_1, w_2]$ berandet eine Facette. Entweder v_1 oder v_2 liegt innerhalb dieser Facette. So kreuzen sich nach dem Jordanschen Kurvensatz e_2 und e_1 .

Ich zeige die Umkehrung durch Kontraposition. Es gelte also $e_2(w_1) = e_2(w_2)$. In diesem Fall sind die Kanten e_1 und e_2 ohne Kreuzung zeichnerisch, denn der Kreis $e_2 \cup [w_1, w_2]$ trennt v_1 nicht von v_2 . Also müssten sich e_1 und e_2 gerade oft schneiden, nach Lemma 2.3 kreuzen sie sich also nicht. \square

Als nächstes untersuchen wir alternierende Kantenpaare. Zur Veranschaulichung sind unterschiedliche Lagen in Abbildung 4.12 zu sehen.

Lemma 4.9. *Sei der gemeinsame Graph $P = x_0, \dots, x_n$ von den planaren Graphen G_1 und G_2 ein Pfad. Seien $e_1 = v_1v_2$ und $e_2 = w_1w_2$ alternierende Kanten mit inneren Knoten v_2 und w_1 . Dann gilt:*

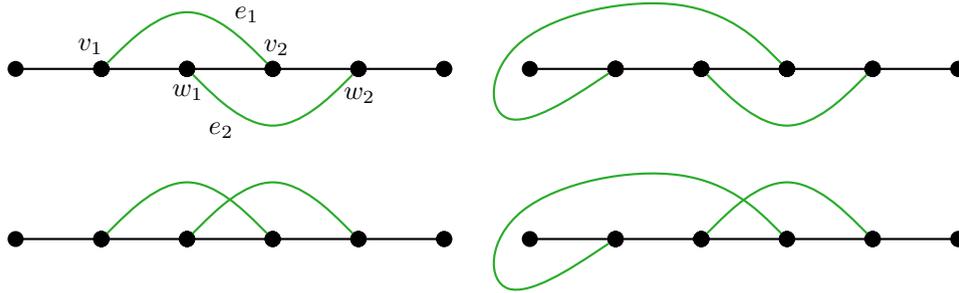


Abbildung 4.12: Diese vier Abbildungen dienen zur Veranschaulichung der gegenseitigen Lage der alternierenden Kanten e_1 und e_2 . In den oberen Bildern ist die Bedingung aus Lemma 4.9 nicht erfüllt. Die beiden unteren Abbildungen zeigen, dass sich Kreuzungen ergeben, falls die Bedingung erfüllt ist.

In einer kreuzungsminimalen, simultanen Zeichnung kreuzen sich e_1 und e_2 genau dann, wenn $e_2(w_1) = e_1(v_2)$.

Beweis. Es gelte $e_2(w_1) = e_1(v_2)$. Betrachtet man nun die Facette die von $e_1 \cup [v_1, v_2]$ berandet wird, so liegt w_2 außerhalb dieser Facette. Jedoch startet nach Voraussetzung die Kante e_2 in w_1 in diese Facette. Wieder liefert der Jordansche Kurvensatz, dass sich e_1 und e_2 kreuzen müssen.

Ich zeige die Umkehrung durch Kontraposition. Es gelte also $e_2(w_1) \neq e_1(v_2)$. Nun liegt der Beginn der Kante in w_1 außerhalb der Facette, die von $e_1 \cup [v_1, v_2]$ berandet wird. Ebenso liegt auch der Endpunkt w_2 außerhalb der Facette. Nun ist es möglich die Kante e_2 so zu zeichnen, dass sie e_1 nicht kreuzt. Hier könnte man zusätzlich mit Lemma 2.3 argumentieren, da der gemeinsame Graph zusammenhängend ist. \square

Betrachten wir nun zuerst kurz den Fall, dass der gemeinsame Graph ein Pfad ist und die Einbettung des Vereinigungsgraphen festliegt. Nach Lemma 4.9 und 4.8 ist die Kreuzungsminimierung unter diesen Voraussetzungen trivial, denn durch die Festlegung der Kanten am Start- und Endpunkt ist die Anzahl der Kreuzungen schon fest.

Sei im folgenden nur die Einbettung des gemeinsamen Graphen gegeben. Um die kreuzungsminimale, simultane Zeichnung zu erhalten, baue ich wieder einen Konfliktgraphen. Man verhält sich ähnlich zu dem Fall, als der gemeinsame Graph ein Kreis war und stellt alle Konflikte in einem Graphen dar. Der Konfliktgraph $K = (V^*, E^*)$ wird wie folgt definiert:

1. $V^* := \{v \in V \mid v \text{ ist Start- oder Endpunkt einer exklusiven Kante}\}$
2. $E_{\text{um}}^* := \{\{v_1, v_2\} \in \binom{V^*}{2} \mid v_1v_2 \in E_{\text{ex}} \text{ und } \exists w_1w_2 \in E_{\text{ex}} \text{ mit } w_1w_2 \text{ umschließt } v_1v_2\}$
3. $E_{\text{al}}^* := \{\{v_2, w_1\} \in \binom{V^*}{2} \mid \exists v_1, w_2 \in V \text{ mit } v_1v_2 \in E_{\text{ex}} \text{ und } w_1w_2 \in E_{\text{ex}} \text{ sind alternierende Kanten mit inneren Knoten } v_2, w_1\}$
4. $E^* := E_{\text{um}}^* \cap E_{\text{al}}^*$

Durch die Kanten in E_{um}^* wird die Bedingung festgehalten, die man an Kanten stellt, die umschlossen werden (vergleiche Lemma 4.8). In E_{al}^* werden die Konflikte von alternierenden Kanten festgehalten (vergleiche Lemma 4.9). Abbildung 4.14 zeigt den Konfliktgraphen zu dem Graphen aus Abbildung 4.13.

Jede Kante steht für eine Bedingung, die man gerne erfüllen würde. Zum Beispiel deutet $e = v_1v_2 \in E_{\text{um}}^*$ an, dass es sich lohnen würde $e(v_1) = e(v_2)$ zu wählen. Die Idee ist jetzt die Kantengewichte so festzulegen, dass der minimale Schnitt in dem Graphen K eine

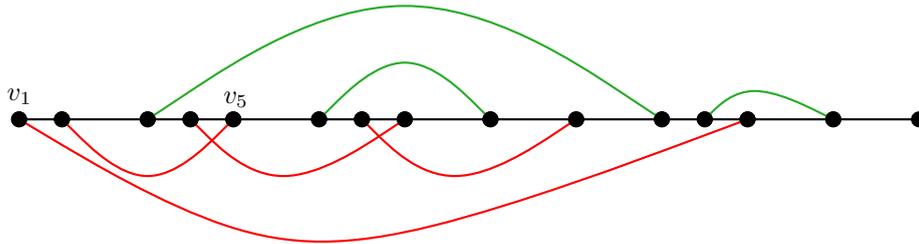


Abbildung 4.13: Dies ist eine nicht kreuzungsminimale Zeichnung zweier planarer Graphen, wobei der gemeinsame Graph ein Pfad ist. Die Knoten sind von links nach rechts durchnummeriert.

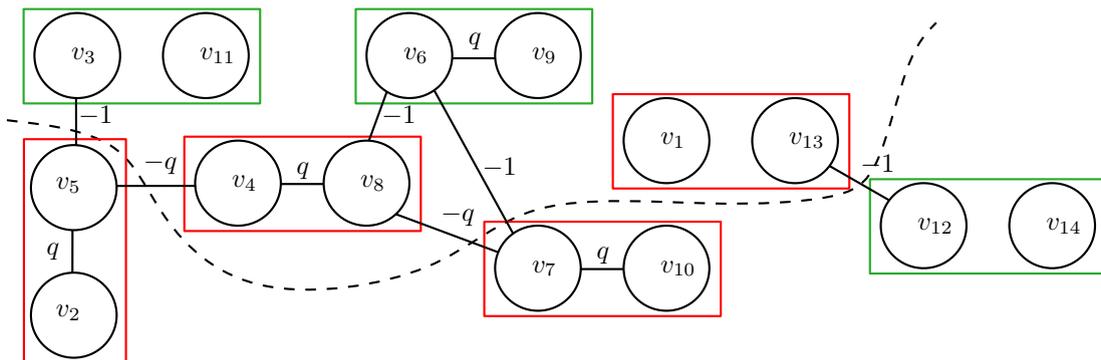


Abbildung 4.14: Dies ist der Konfliktgraph zu dem Graphen aus Abbildung 4.13. Zusätzlich ist ein minimaler Schnitt eingezeichnet. Die Knoten, welche durch eine exklusive Kante verbunden sind, werden von einem Rechteck umrandet. In diesem Beispiel ist q gleich neun ($2 \cdot 4 + 1$).

kreuzungsminimale, simultane Zeichnung liefert, falls eine solche existiert. Außerdem soll man an dem Wert des minimalen Schnittes merken, ob es eine solche Zeichnung gibt. Der minimale Schnitt teilt V^* auf in S und $V^* \setminus S$. Um die kreuzungsminimale, simultane Zeichnung aus diesem Schnitt zu erhalten, legen wir für v aus S fest, dass $e(v)$ gleich eins ist. Umgekehrt sei $e(v)$ gleich null für v aus $V^* \setminus S$. Wir bezeichnen die Zeichnung, die durch diese Festlegung aus einem Schnitt entsteht, die vom *Schnitt induzierten Zeichnung*. Damit diese Festlegung wirklich die kreuzungsminimale, simultane Zeichnung liefert, benötigen wir passende Kantengewichte.

Ein Bedingung, die zu einer gleichfarbigen Kreuzung führt, muss unbedingt erfüllt werden. Deswegen erhalten Kanten, die zu gleichfarbigen Kreuzungen führen, einen so großen Wert, das man am Wert des minimalen Schnittes sofort sieht, ob es eine gleichfarbige Kreuzung gibt. Sei q dieser große Wert. Ich werde später explizit sagen, wie groß q zu wählen ist. Im Folgenden kann man sich darunter auch den Wert unendlich vorstellen.

An die Kanten aus E_{al}^* notiert man das Gewicht -1 , falls die betrachteten Kanten verschiedenfarbig sind, und $-q$, falls die betrachteten Kanten gleichfarbig sind. Wir zwingen den minimalen Schnitt, indem wir den Kantenwert auf $-q$ festlegen, die Endpunkte dieser Kanten im Konfliktgraphen zu trennen. Kreuzt der Schnitt eine Kante mit Wert $-q$, so ist die Bedingung aus Lemma 4.9 nicht erfüllt, es ergibt sich somit keine gleichfarbige Kreuzung.

An die Kante $v_1v_2 \in E_{\text{um}}^*$ notiert man q , falls die Kante v_1v_2 von einer gleichfarbigen Kante umschlossen wird, und sonst ℓ , wobei $\ell := \#\{e \in E_{\text{ex}} \mid e \text{ umschließt } (v_1, v_2)\}$.

Nachdem ich alle Kantengewichte außer q konkret festgelegt habe, kann ich nun sagen wie groß q ist.

$$q = 1 + 2 \cdot \sum_{e \in E^*, |w(e)| \neq q} |w(e)|$$

Sei k_{-q} die Anzahl der Kanten in K mit Kantengewicht $-q$. Der Wert q ist so groß gewählt, dass es nicht mehr ausgeglichen werden kann, wenn der Schnitt eine Kante mit dem Wert q kreuzt oder eine Kante mit dem Wert $-q$ nicht kreuzt. Was ich damit meine, zeigt folgendes Lemma.

Lemma 4.10. *Sei der gemeinsame Graph P von den planaren Graphen G_1 und G_2 ein Pfad und K der dazu gehörige Konfliktgraph.*

Der minimalen Schnitt in K nimmt einen Wert im Intervall $I = (-q \cdot k_{-q} - \frac{1}{2} \cdot q, -q \cdot k_{-q} + \frac{1}{2} \cdot q)$ genau dann an, wenn die vom Schnitt induzierte Zeichnung eine kreuzungsminimale, simultane Zeichnung ist.

Beweis. Bevor ich die Äquivalenz durch Beweis der beiden Richtungen zeige, stelle ich noch einige Vorüberlegungen an. Es ist nicht möglich, dass der Schnitt den Wert $-q \cdot k_{-q} - \frac{1}{2} \cdot q$ oder kleiner annimmt. Denn die Summe aller negativen Kanten, die ein Kantengewicht ungleich $-q$ haben, ist echt größer als $-\frac{1}{2} \cdot q$. Dieses Ergebnis folgt durch Widerspruch wie in Gleichung 4.3 aufgezeigt. Der Wert q wurde gerade so definiert, dass diese Ungleichung gilt. Der Schnitt wird minimal, wenn man alle Kanten mit Wert $-q$ und alle Kanten mit negativem Kantengewicht kreuzt. Man kann somit niemals $-q \cdot k_{-q} - \frac{1}{2} \cdot q$ erreichen.

Analog zu Gleichung 4.3 kann man zeigen, dass die Summe aller positiven Kanten, die ein Kantengewicht ungleich q haben, kleiner als $\frac{1}{2} \cdot q$ ist.

Nun zum Beweis der Aussage. Die Rückrichtung zeige ich durch Kontraposition. Unser minimaler Schnitt hat einen Wert außerhalb des Intervalls I . Wegen den Vorüberlegungen muss der Wert des Schnittes mindestens $-q \cdot k_{-q} + \frac{1}{2} \cdot q$ sein. Dieser Schnitt kreuzt jedoch

nicht alle Kanten mit Wert $-q$ oder mindestens eine Kante mit Wert q . Denn angenommen der Schnitt kreuzt alle Kanten mit Wert $-q$ und keine Kante mit Wert q . Dann ist der Wert des Schnittes am größten, wenn er zusätzlich alle Kanten mit positivem Wert ungleich q kreuzt. Nach der Vorüberlegung ist diese Summe jedoch kleiner als $\frac{1}{2} \cdot q$. Somit wäre der Wert des Schnittes kleiner als $-q \cdot k_{-q} + \frac{1}{2} \cdot q$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass der Schnitt einen Wert außerhalb von I annimmt. Also kreuzt der Schnitt nicht alle Kanten mit Wert $-q$ oder mindestens eine Kante mit Wert q . Diese Kanten wurden gerade so gebaut, dass sich in der vom Schnitt induzierten Zeichnung gleichfarbige Kanten kreuzen. Diese Zeichnung ist somit keine kreuzungsminimale simultane Zeichnung.

Nun hat der minimale Schnitt einen Wert in I . Dies ist nur möglich, wenn die Kanten mit Gewicht $-q$ gekreuzt und mit Gewicht q nicht gekreuzt werden. Dies ergibt sich wie beim Beweis der Rückrichtung. Die vom Schnitt induzierte Zeichnung hat somit keine gleichfarbigen Kreuzungen. Die positiven Kantengewichte zeigen an, wie viel Kreuzungen in der vom Schnitt induzierten Zeichnung entstehen, falls der Schnitt diese Kante kreuzt. Falls man eine Kante mit Wert -1 kreuzt, so spart man eine Kreuzung in der Zeichnung. Der minimale Schnitt in K liefert somit die Zeichnung mit der geringsten Anzahl an rot-grünen Kreuzungen unter den Zeichnungen, die keine gleichfarbige Kreuzung besitzen. Diese Zeichnung ist gerade die kreuzungsminimale, simultane Zeichnung. \square

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in E^*, |w(e)| \neq q, w(e) < 0} w(e) \leq -\frac{1}{2} \cdot q &\implies \sum_{e \in E^*, |w(e)| \neq q, w(e) < 0} -|w(e)| \leq -\frac{1}{2} \cdot q \\
 &\implies \sum_{e \in E^*, |w(e)| \neq q, w(e) < 0} |w(e)| \geq \frac{1}{2} \cdot q \\
 \implies \sum_{e \in E^*, |w(e)| \neq q, w(e) < 0} |w(e)| \geq \frac{1}{2} \cdot q &\stackrel{(\text{Def. } q)}{=} \frac{1}{2} + \frac{2}{2} \sum_{e \in E^*, |w(e)| \neq q} |w(e)| \\
 &\implies 0 \geq \frac{1}{2} + \sum_{e \in E^*, |w(e)| \neq q, w(e) \geq 0} |w(e)| \quad \zeta
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

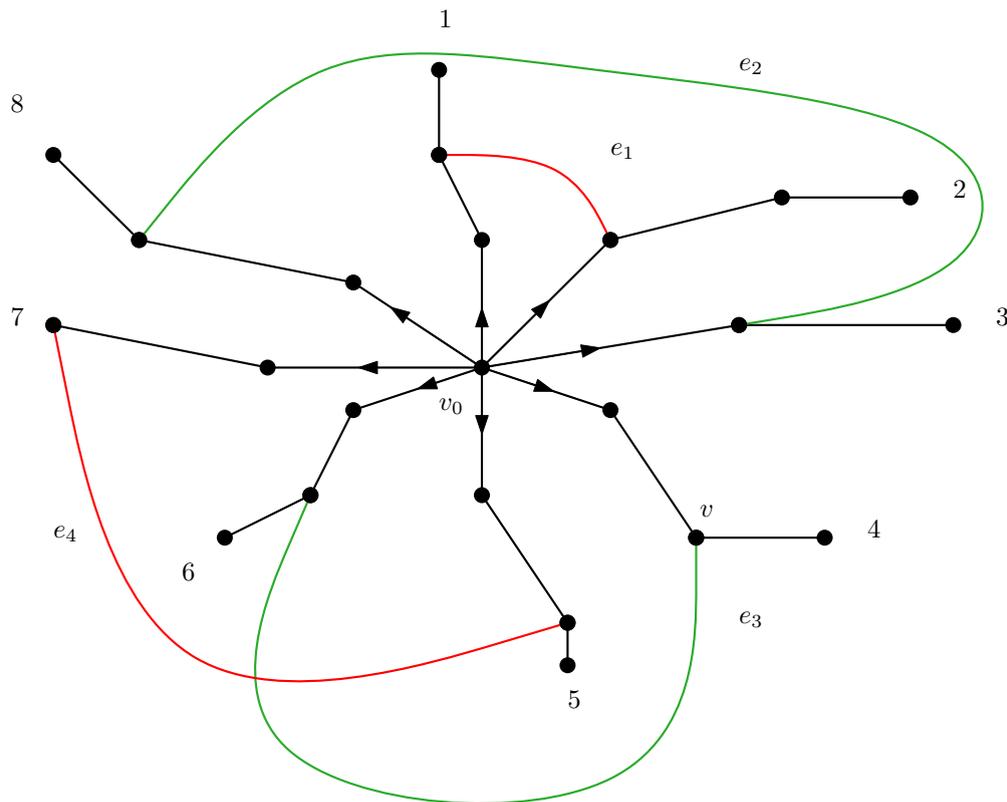


Abbildung 4.15: Dies ist ein Zeichnung zweier planare Graphen, deren gemeinsamer Graph eine Spinne ist. Durch die Pfeile an v_0 ist die Orientierung der Beine angedeutet.

4.4 Gemeinsamer Graph ist Spinne

Im Folgenden werden wir den Fall betrachten, dass der gemeinsame Graph eine Spinne ist. In diesem Abschnitt werde ich ohne Beweis aufzeigen, wie man, falls die gemeinsame Einbettung festliegt, in diesen Fall die kreuzungsminimale simultane Zeichnung erhält. Eine *Spinne* ist ein Baum mit einem Knoten, der mindestens Grad drei hat. Zusätzlich haben bei einer Spinne alle anderen Knoten maximal Grad zwei. In Abbildung 4.15 ist ein Graph zu sehen, dessen gemeinsamer Graph eine Spinne ist.

Sei v_0 der Knoten mit Grad mindestens drei. Wir werden nur den Fall untersuchen, dass es keine exklusive Kante gibt, die inzident zu v_0 ist. Zusätzlich werden wir uns, wie in Abschnitt 4.3, auf den Fall beschränken, dass an einem Knoten maximal eine exklusive Kante beginnt. Nun kann man, da die Einbettung des gemeinsamen Graphen fest ist, die Beine der Spinne im Uhrzeigersinn anordnen. Zusätzlich wollen wir die Beine orientieren, sodass wir beispielsweise sagen können, dass die Kante e_3 das Bein 4 in v nach rechts verlässt (vgl. Abbildung 4.15).

Es gibt verschiedene Fälle, wie zwei Kanten e_i, e_j zueinander liegen können (vergleiche Abbildung 4.15). Der erste Fall ist, dass deren Beine sich umschließen (vergleiche e_1, e_2 in Abbildung 4.15). Wir sagen in diesem Fall, dass e_i und e_j sich *im Großen umschließen*. Kanten umschließen sich genau dann im Großen, wenn die zyklische Anordnung der entsprechenden Beine abba ist.

Der zweite Fall ist, dass eine alternierende Anordnung der Beine vorliegt (vergleiche e_3, e_4 in Abbildung 4.15). Wir sagen in diesem Fall, dass e_i und e_j *im Großen alternieren*.

Folgendes Lemma ergibt sich mit Lemma 2.3:

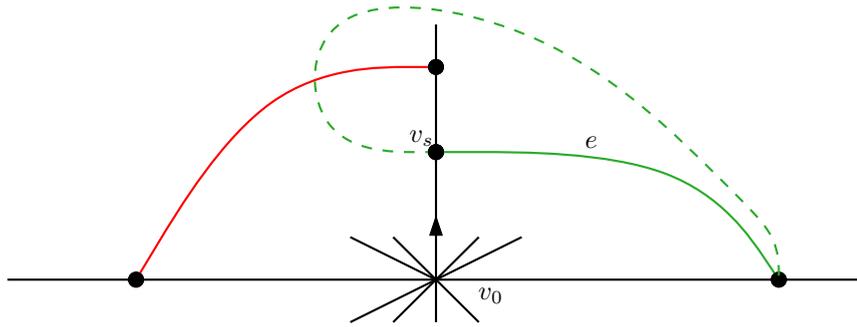


Abbildung 4.16: Der spezielle Fall, dass zwei Kanten genau ein Bein gemeinsam haben, ist hier dargestellt. Dabei deutet die gestrichelte Kante an, in welchem Fall sich die Kanten kreuzen. Im Punkt v_0 werden die restlichen Beine der Spinne angedeutet.

Lemma 4.11. *Sei der gemeinsame Graph zweier planarer Graphen eine Spinne.*

In der kreuzungsminimalen, simultanen Zeichnung kreuzen sich im Großen alternierende Kanten genau einmal und im Großen umschließenden Kanten nicht.

Als Erstes betrachtet man die im großen alternierenden Kanten, falls sich dort ein gleichfarbiges Paar findet, können wir keine kreuzungsminimale simultane Zeichnung angeben. Kantenpaare, die sich im Großen umschließen oder im Großen alternieren, müssen nun für die Kreuzungsminimierung nicht weiter betrachtet werden.

Nun verbleiben noch die Fälle, bei welchen das Kantenpaar auf höchstens 3 Beinen lebt. Für die Anzahl der Kreuzungen ist es in diesen Fällen offensichtlich wichtig, in welche Richtung eine Kante ihre Knoten verlässt. Jedoch ist es irrelevant, ob die Kante im oder gegen den Uhrzeigersinn gezeichnet wird, denn Doppelkreuzungen eines Kantenpaares können mit Lemma 2.3 aufgelöst werden. Für jeden Knoten, der inzident zu einer exklusiven Kante ist, muss somit eine binäre Entscheidung getroffen werden.

Falls das betrachtete Kantenpaar auf höchstens 2 Beinen lebt, erhalten wir genau die Fälle, die wir im Abschnitt 4.3 („Gemeinsamer Graph ist Pfad“) untersucht haben. Bei diesen Fällen wissen wir genau, wann sich Kreuzungen ergeben. Es verbleibt der Fall, dass das Kantenpaar auf genau 3 Beinen lebt. Dieser Fall ist in Abbildung 4.16 dargestellt. In diesem Beispiel ergibt sich eine Kreuzung genau dann, wenn die Kante e v_s nach links verlässt. Die Knoten, die, wie v_s , in einem Konflikt mit einer Kante stehen, nennen wir *spezielle Knoten*.

Wir erhalten eine kreuzungsminimale simultane Zeichnung mit derselben Idee wie im Fall, als der gemeinsame Graph ein Pfad war. Man bildet einen Konfliktgraphen und liest aus dem minimalen Schnitt in diesem die kreuzungsminimale, simultane Zeichnung ab. Aus dem minimalen Schnitt $(S, V^* \setminus S)$ erhalten wir die kreuzungsminimale, simultane Zeichnung, wie folgt. Sei $v \in S$, so verlässt die exklusive Kante, welche inzident zu v ist, v nach rechts. Ist $v \in V^* \setminus S$, so verlässt die entsprechende Kante v nach links. Der Konfliktgraph in diesem Fall ist ähnlich zu dem aus Abschnitt 4.3. Der gesuchte Schnitt ist jedoch etwas komplizierter, da man noch die Bedingungen der speziellen Knoten erfüllen möchte.

Die Knoten des Konfliktgraphen sind gerade alle Knoten des gemeinsamen Graphen, die inzident zu einer exklusiven Kante sind. Jedes alternierende oder umschließende Kantenpaar liefert, wie in Abschnitt 4.3, eine Kante. Auch die Kantengewichte ergeben sich wie zuvor. Das Vorzeichen des Kantengewichts hängt jedoch zusätzlich noch von der Lage der Kanten bezüglich v_0 ab. Dieser Unterschied zwischen dem neuen Konfliktgraphen und dem aus Abschnitt 4.3 wird durch Abbildung 4.17 motiviert. Im Pfadfall (vgl. Abbildung 4.17 links)

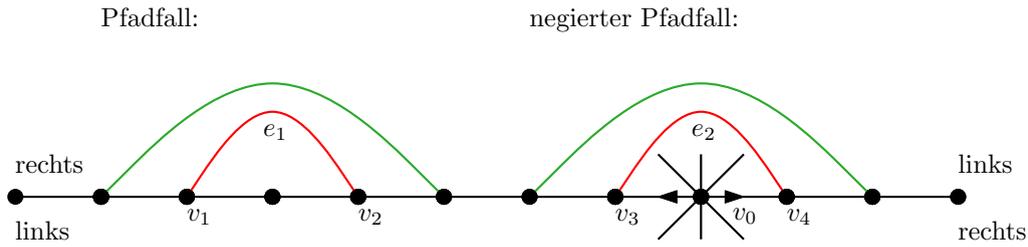


Abbildung 4.17: In dieser Abbildung ist dargestellt, wie exklusive Kanten bezüglich v_0 liegen können. Hier ist der Fall, dass zwei Kanten umschließend liegen, gezeichnet. Analog ergibt sich auch bei dem Fall, wenn die Kanten alternierend sind, der negierte Fall, falls jeweils zwei Enden an einem gemeinsamen Bein starten.

ergibt sich eine Kreuzung genau dann, wenn $e_1(v_1) \neq e_1(v_2)$. Im negierten Pfadfall ergibt sich genau dann eine Kreuzung, wenn $e_2(v_3) = e_2(v_4)$. Dies liegt daran, dass die Kante e_2 auf zwei Beinen lebt. Durch die Orientierung der Beine ändert sich somit das Vorzeichen im Konfliktgraphen.

Die Forderung an die speziellen Knoten kann man in den Konfliktgraphen integrieren, indem man Superknoten ℓ und r zu K hinzufügt. Diese Knoten repräsentieren links und rechts. Wir betrachten später nur die Schnitte in K , die ℓ von r trennen. Man verbindet nun jeden speziellen Knoten für sich entweder mit dem Knoten ℓ oder r . Die Wahl hängt davon ab, welche Richtung für die Kante im speziellen Knoten empfohlen wird. Legt der Schnitt einen speziellen Knoten auf die andere Seite, so muss dafür mit dem Kantengewicht bezahlt werden. Als Kantengewicht auf diesen Kanten wählt man die Anzahl an Kreuzungen, die entstehen, falls die Kante das entsprechende Bein in die falsche Richtung verlässt. In unserem Beispiel würden wir den Knoten v_s mit r verbinden. Als Kantengewicht würden wir 1 wählen, da eine Kreuzung entsteht, falls e v_s nach links verlässt.

Kurz zusammengefasst bildet man eine Konfliktgraphen, der die Gleichungen und Ungleichung, die durch alternierende und umschließende Kantenpaare entstehen, darstellt. Dabei muss man aufpassen, dass die Vorzeichen negiert sind, falls die betrachteten Kanten sich beide Beine teilen. Durch das Hinzufügen der Superknoten ℓ und r werden die Bedingungen, die man an die speziellen Knoten stellt, dargestellt. Der konstruierte Konfliktgraph enthält nun alle relevanten Informationen, sodass man die Kreuzungsminimierung mit einem minimalen Schnitt lösen kann. Gesucht ist nun der Schnitt mit minimalem Gewicht in K unter den Schnitten, die ℓ von r trennen. Dieser liefert eine kreuzungsminimale, simultane Zeichnung durch folgende Festlegung. Sei der minimale Schnitt $(S, V^* \setminus S)$ mit $r \in S$. Sei $v \in S$, so verlässt die exklusive Kante, welche inzident zu v ist, v nach rechts. Ist $v \in V^* \setminus S$, so verlässt die entsprechende Kante v nach links.

5. Feste Einbettung beider Graphen

In diesem Kapitel werden wir den Fall betrachten, dass die Einbettung der beiden Graphen fest, der gemeinsame Graph 2-fach zusammenhängend ist und exklusive Knoten erlaubt sind. Wir erlauben exklusive Knoten, da die Kreuzungsminimierung ohne diese trivial ist.

Durch die Einbettung der beiden Graphen ist für jede Kante festgelegt, in welcher Facette sie liegt. Es geht nun darum die exklusiven Knoten optimal zu positionieren. Die Kreuzungen innerhalb einer Facette können unabhängig von allen anderen Facetten minimiert werden. Wir betrachten deshalb im Folgenden nur die Graphen eingeschränkt auf eine Facette. Da der gemeinsame Graph 2-fach zusammenhängend ist, ergibt sich die Problemstellung wie in Abbildung 5.1 dargestellt.

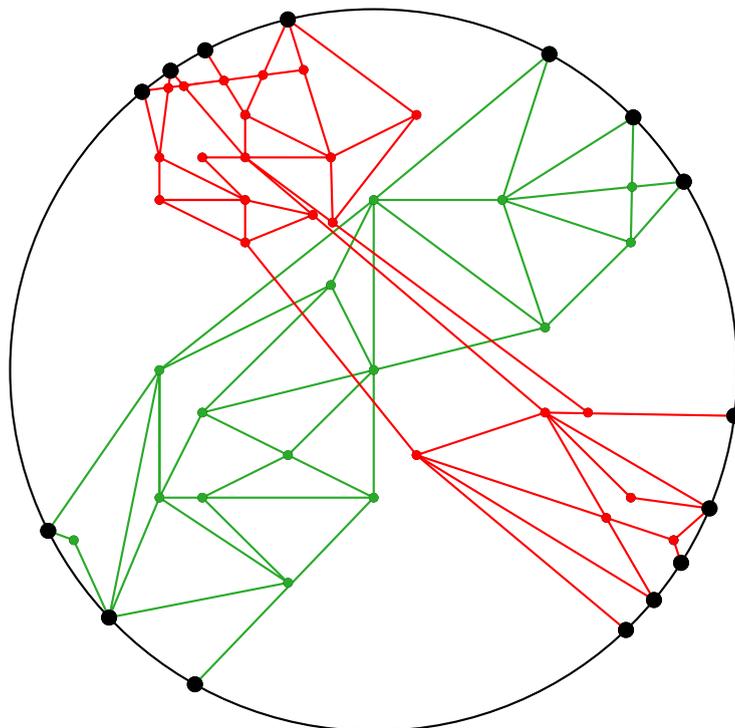


Abbildung 5.1: In dieser Abbildung ist eine Zeichnung des gemeinsamen Graphen eingeschränkt auf eine Facette zu sehen.

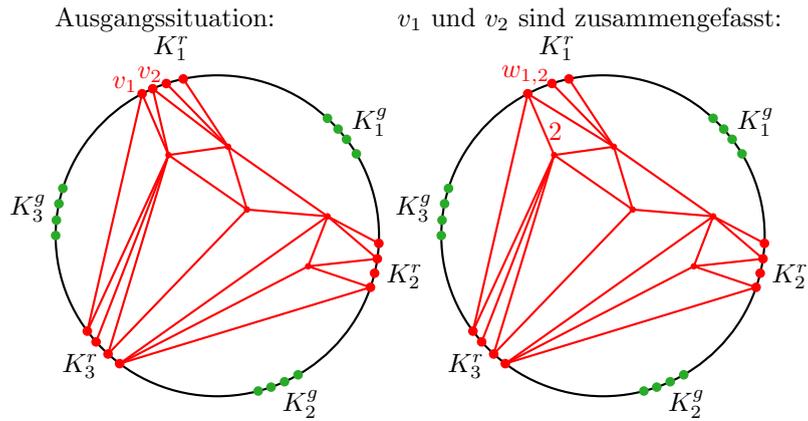


Abbildung 5.2: Diese Abbildung veranschaulicht das Zusammenfassen der benachbarten Andockstellen. Links ist die Ausgangssituation zu sehen. Rechts sind die Knoten v_1 und v_2 zusammengefasst worden. Durch das Zusammenfassen verändert sich die simultane Kreuzungszahl nicht.

Ein Knoten des gemeinsamen Graphen heißt *rote Andockstelle*, wenn eine rote Kante inzident zu diesem Knoten ist. Analog definiere ich grüne Andockstelle. Ich beschränke mich auf den Fall, dass verschiedenfarbige Kanten verschiedene Andockstellen besitzen. In diesem Fall nenne ich zwei gleichfarbige Andockstellen v_1, v_2 *benachbart*, falls es einen Pfad von v_2 nach v_1 auf dem gemeinsamen Graphen gibt, der keine andersfarbige Andockstelle übergeht. Die fünf roten Andockstellen rechts in Abbildung 5.1 sind zum Beispiel paarweise benachbart. Die „benachbart“-Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Wir werden im Folgenden jede Äquivalenzklasse durch einen Knoten ersetzen. Dies erhalten wir indem wir nacheinander benachbarten Knoten zusammenfassen. Durch diese Kontraktionen ändert sich die simultane Kreuzungszahl nicht. Deswegen werden wir im Folgenden nur noch den Fall betrachten, dass die Äquivalenzklassen jeweils nur einen Knoten enthalten. Durch die Kontraktion können Kantengewichte ungleich 1 entstehen (vergleiche Abbildung 5.2).

Sei $K_1^r, K_2^r, \dots, K_{n_r}^r, K_1^g, K_2^g, \dots, K_{n_g}^g$ eine disjunkte Repräsentation der einelementigen Äquivalenzklassen. Sei $K_i^r = \{v_i^r\}$. Die Zahl n_g ist offensichtlich gleich groß wie n_r , falls n_g größer als eins ist, da sich entlang des Kreises rote und grüne Klassen abwechseln. Im Folgenden werde ich die Anzahl der Äquivalenzklassen auch den *Verwebungsgrad* der Facette nennen. Ebenso werde ich abkürzend q ($= n_g = n_r$) für den Verwebungsgrad verwenden. Anschaulich wird das Problem schwieriger je größer q ist.

5.1 Verwebungsgrad bis zu 2

Offensichtlich sind exklusive Graphen, die keine Andockstelle besitzen, ohne Kreuzungen einbettbar. Im Folgenden nehme ich also an, dass sowohl der rote, als auch der grüne Graph zusammenhängend sind.

Der Fall, dass $n_g = 1$ und $n_r = 0$ ist, ist trivial, da in diesem Fall innerhalb der Facette nur rote Kanten liegen.

Der Fall, wenn q eins ist, kann einfach und ohne Kreuzungen gelöst werden, indem man den roten und grünen Graphen separat innerhalb des Graphen einbettet. Die Fälle $q = 2$ und $q = 3$ werden durch geschickte Schnitte gelöst.

Im Fall $q = 2$ können rot-grüne Kreuzungen entstehen, vergleiche Abbildung 5.1. Um diese minimal zu halten, versucht man die Graphen an ihren dünnsten Stellen aneinander

vorbeizuführen. Man sucht also den minimalen Schnitt im exklusiven, roten Graphen, der v_1^r von v_2^r trennt. Das Gleiche benötigt man auch in dem grünen, exklusiven Graphen. Sei der Wert dieses Schnittes im roten Graphen k_r und im grünen Graphen k_g .

Lemma 5.1. *Sei der gemeinsame Graph der planaren Graphen G_1 und G_2 2-fach zusammenhängend. Seien G_1 und G_2 zweifach verwobene Graphen, dann gilt:*

In der kreuzungsminimalen, simultanen Zeichnung ergeben sich genau $k_g \cdot k_r$ Kreuzungen innerhalb der betrachteten Facette.

Beweis. Nach dem Satz von Menger gibt es k_r kantendisjunkte Wege von v_1^r nach v_2^r . Ebenso gibt es k_g kantendisjunkte Wege von v_1^g nach v_2^g . Jeder einzelne kantendisjunkte, grüne Weg muss alle roten Wege kreuzen, damit ergeben sich mindestens $k_g \cdot k_r$ Kreuzungen.

Beiden Schnitte erzeugen Zusammenhangskomponenten um die Andockstellen. Indem man diese Zusammenhangskomponenten zum Rand „zieht“, erhält man in der Mitte der Facette ein Schachmuster mit gerade $k_b \cdot k_r$ Kreuzungen. Die Gleichheit erhält man somit, indem man die beiden Graphen an deren dünnsten Stelle aneinander vorbeiführt. \square

5.2 Verwebungsgrad ist 3

Als letzten Fall werde ich $q = 3$ betrachten. Ich werde eine 6-Approximation für diesen Fall angeben. Um die Lesbarkeit zu verbessern, werde ich die roten Klassen mit a bis c und die grünen mit x bis z bezeichnen. Auf dem Kreis haben wir die Anordnung a, x, b, y, c, z .

Alle Schnitte im exklusiven roten Graphen, die a von b und c trennen, fasse ich zu der Menge $C_{a,b \cup c}$ zusammen. Die Schnitte mit minimalem Gewicht aus $C_{a,b \cup c}$ vereinige ich zu der Menge $MC_{a,b \cup c}$. Zunächst möchte ich zeigen, dass es Schnitte $mc_{a,b \cup c} \in MC_{a,b \cup c}$, $mc_{b,a \cup c} \in MC_{b,a \cup c}$ und $mc_{c,a \cup b} \in MC_{c,a \cup b}$ gibt, die sich paarweise nicht kreuzen. In Kapitel 2 findet man die Definition, wann zwei Schnitte sich kreuzen.

Lemma 5.2. *Es existieren $mc_{a,b \cup c} \in MC_{a,b \cup c}$, $mc_{b,a \cup c} \in MC_{b,a \cup c}$ und $mc_{c,a \cup b} \in MC_{c,a \cup b}$, die sich paarweise nicht kreuzen.*

Beweis. Sei $MC_{a,b \cup c} = \{(S_1, V \setminus S_1), \dots, (S_k, V \setminus S_k)\}$, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a \in S_1, \dots, S_k$ gilt. Wähle nun $i \in \{1, \dots, k\}$ so, dass $|S_i| \leq |S_1|, \dots, |S_k|$. Nun ist $mc_{a,b \cup c} := (S_i, V \setminus S_i)$. Analog definieren wir $mc_{b,a \cup c}$ und $mc_{c,a \cup b}$. Wir zeigen, dass jede Kreuzung zwischen diesen Schnitten einen Widerspruch liefert.

Angenommen $mc_{a,b \cup c}$ und $mc_{c,a \cup b}$ kreuzen sich, dann werden die Knoten nach Definition in vier nichtleere Teilmengen aufgeteilt. Ich werde diese Teilmengen, wie in Abbildung 5.3, mit A, B, C und R bezeichnen. In dem Gebiet R liegt weder a noch b noch c und R steht für Rest. Wähle nun c_a und c_c , wie in Abbildung 5.3 angegeben. Offensichtlich gilt $c_a \in C_{a,b \cup c}$ und $c_c \in C_{c,a \cup b}$. Ich zeige durch Abzählen, dass die Schnitte c_a und c_c wiederum minimal sind. Die Anzahl der Kanten die von X nach Y gehen, werde ich mit $[X, Y]$ notieren. Als Wert des Schnittes c_a erhält man $[A, B] + [A, C] + [A, R]$. Der Wert des Schnittes c_c ist $[C, A] + [C, B] + [C, R]$.

Wir nehmen nun an, dass die kreuzenden Schnitte $mc_{a,b \cup c}$ und $mc_{b,a \cup c}$ zusammen einen echt kleineren Wert haben.

$$\begin{aligned} & \underbrace{[A, B] + [A, C] + [B, R] + [C, R]}_{|mc_{a,b \cup c}|} + \underbrace{[A, R] + [B, R] + [A, C] + [B, C]}_{|mc_{c,a \cup b}|} \\ & < \underbrace{[A, B] + [A, C] + [A, R]}_{|c_a|} + \underbrace{[A, C] + [B, C] + [C, R]}_{|c_c|} \end{aligned} \quad (5.1)$$

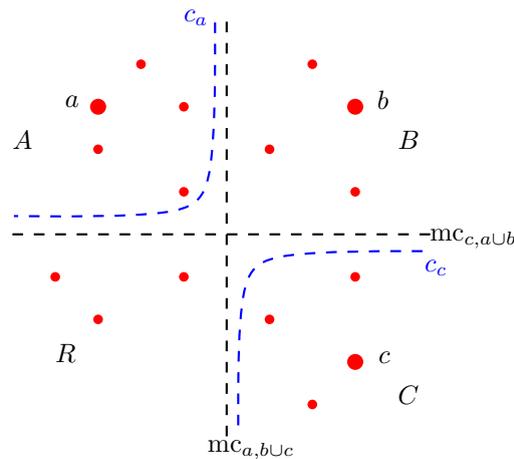


Abbildung 5.3: In dieser Abbildung wird veranschaulicht, welche Schnitte zu wählen sind, falls sich zwei Schnitte mit minimalem Wert schneiden.

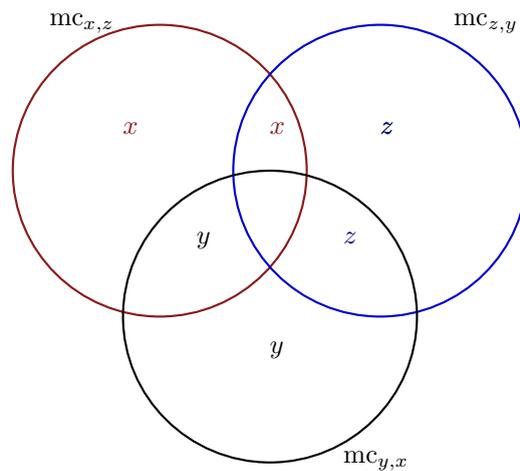


Abbildung 5.4: In dieser Abbildung sind die Schnitte im dualen Graphen veranschaulicht. Es gibt verschiedene Fälle, wie die Knoten x, y, z zueinander liegen können. Der Knoten x liegt in dieser Darstellung zum Beispiel entweder links oben oder oben in der Mitte.

Daraus folgt $[B, R] + [B, R] < 0$. Dies ist ein Widerspruch. Es gilt somit Gleichheit in Ungleichung 5.1, da sowohl $mc_{a,b \cup c}$ als auch $mc_{c,a \cup b}$ minimale Schnitte aus $C_{a,b \cup c}$ bzw. $C_{c,a \cup b}$ sind.

Nun ist aber c_a ein minimaler Schnitt mit einem echt kleineren Bereich, der a enthält. Dies ist ein Widerspruch zu der Konstruktion von $mc_{a,b \cup c}$. Somit erhält man, dass kein Schnittpaar sich kreuzen kann. \square

Alle Schnitte im exklusiven grünen Graphen, die x von y trennen, fasse ich zu der Menge $C_{x,y}$ zusammen. Die Schnitte mit minimalem Gewicht in $C_{x,y}$ vereinige ich zu der Menge $MC_{x,y}$. Sei $mc_{x,y} \in MC_{x,y}$.

Im Folgenden werden wir mit dem dualen Graphen des exklusiven grünen Graphen arbeiten. Ein Schnitt wie $mc_{x,y}$ entspricht im dualen Graphen einem einfachen Kreis. Man erhält den Kreis, indem man die Facetten, die an die Kanten von S nach $V \setminus S$ angrenzen, verbindet. Der Kreis für $mc_{x,y}$ ist einfach, da der Wert eines Schnittes, der im dualen Graphen nicht von einem einfachen Kreis repräsentiert wird, nicht minimal ist. Angenommen $mc_{x,y}$ wird

im dualen Graphen nicht von einem einfachen Kreis repräsentiert. Wähle nun den vom Gewicht kürzesten, einfachen Kreis, der x umschließt. Der Schnitt, der von diesem Kreis repräsentiert wird, hat nun echt kleineres Gewicht wie $mc_{x,y}$. Die Länge des Kreises ist ja genau der Wert des Schnittes.

Die drei Kreise sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Ich werde nun zeigen, dass die minimalen Schnitte $mc_{x,y}$, $mc_{y,z}$, $mc_{x,z}$ so gewählt werden können, dass das Gebiet, welches innerhalb aller Kreise liegt, leer ist. Danach werde ich auf Grundlage dieser Anordnung durch Zuweisen von Gebieten eine Zeichnung angeben, die höchstens eine gewissen Anzahl an Kreuzungen hat.

Lemma 5.3. *Die Schnitte $mc_{x,y}$, $mc_{y,z}$, $mc_{x,z}$ können so gewählt werden, dass kein Knoten innerhalb aller Kreise liegt.*

Beweis. Falls die drei Kreise, welche die Schnitte repräsentieren, sich nicht überschneiden, sind wir fertig. Es ist also nur der Fall zu untersuchen, dass sich die Kreise, wie in Abbildung 5.4 dargestellt, überlappen. Dabei können einzelne Gebiete auch keine Knoten enthalten.

Als ersten Fall werde ich betrachten, dass ein Knoten außerhalb der beiden anderen Kreise liegt. In diesem Fall kann man, wie in Abbildung 5.5 links dargestellt, das Gebiet in der Mitte leeren, ohne den Wert der Schnitte zu ändern. Man kann die Schnitte, wie angegeben, umlegen, da sowohl der braune Kreis als auch der schwarze Kreis einen minimalen Schnitt repräsentiert. Würde man nun annehmen, dass der Halbmond um y in Abbildung 5.5 keinen minimalen Schnitt mehr repräsentiert, so wäre der gepunktete Pfad von u nach v echt kürzer. Dies ist jedoch ein Widerspruch dazu, dass der Schnitt $mc_{x,z}$ minimal ist.

Der zweite Fall ist, dass kein Knoten außerhalb der beiden anderen Kreise liegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Knoten in zwei Kreisen liegen. In diesem Fall kann man die Schnitte, wie rechts in Abbildung 5.5 zu sehen ist, umlegen. Die angegebenen Kreise repräsentieren immer noch minimale Schnitte, da $mc'_{x,z}$, $mc'_{z,y}$ und $mc'_{y,x}$ zusammen maximal so groß sind wie $mc_{x,z}$, $mc_{z,y}$ und $mc_{y,x}$. Dies liegt daran, dass die Länge der Kreise der Größe der Schnitte entspricht. \square

Theorem 5.4. *Sei der gemeinsame Graph der planaren Graphen G_1 und G_2 2-fach zusammenhängend, die Einbettung beider Graphen fest und $q = 3$. Dann gilt für die Kreuzungen innerhalb der betrachteten Facette:*

$$\begin{aligned} & \max\{ |mc_{x,z}| \cdot |mc_{a,b \cup c}|, |mc_{x,y}| \cdot |mc_{b,a \cup c}|, |mc_{y,z}| \cdot |mc_{c,a \cup b}| \} \leq cr_{sp}(G_1, G_2) \\ & \leq 2 \cdot (|mc_{x,z}| \cdot |mc_{a,b \cup c}| + |mc_{x,y}| \cdot |mc_{b,a \cup c}| + |mc_{y,z}| \cdot |mc_{c,a \cup b}|) =: n_0 \end{aligned}$$

Beweis. Ich werde zuerst die untere Schranke begründen. Dabei löst man den Fall mit $q = 3$, indem man das Ergebnis im Falle $q = 2$ verwendet.

Wenn man dem Knoten z zusätzlich erlaubt sich vom Rand zu lösen, so erhöht sich die simultane Kreuzungszahl nicht, da man nun mehr Freiheiten hat. In dem Fall, wenn man z erlaubt den Rand zu verlassen, befinden wir uns in dem Fall $q = 2$. Nach Lemma 5.1 ergeben sich in diesem Fall genau $|mc_{x,y}| \cdot |mc_{b,a \cup c}|$ viele Kreuzungen. Erlaubt man nun entsprechend x bzw. y sich vom Rand so lösen, so erhält man die beiden anderen Produkte als untere Schranken.

Ich werde die obere Schranke durch das Angeben einer Zeichnung zeigen. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|mc_{a,b \cup c}| \geq |mc_{b,a \cup c}|$, $|mc_{c,a \cup b}|$ und $|mc_{a,b \cup c}| > 0$. Nach Lemma 5.3 kann ich annehmen, dass es nur sieben der acht möglichen Gebiete gibt. Seien die Schnitte und Gebietsnamen, wie in Abbildung 5.6 angegeben. Wir legen zusätzlich $X = X_y \cup X_z$, $Y = Y_x \cup Y_z$ und $Z = Z_x \cup Z_y$ fest. Es ergeben sich folgende Werte für die minimalen Schnitte:

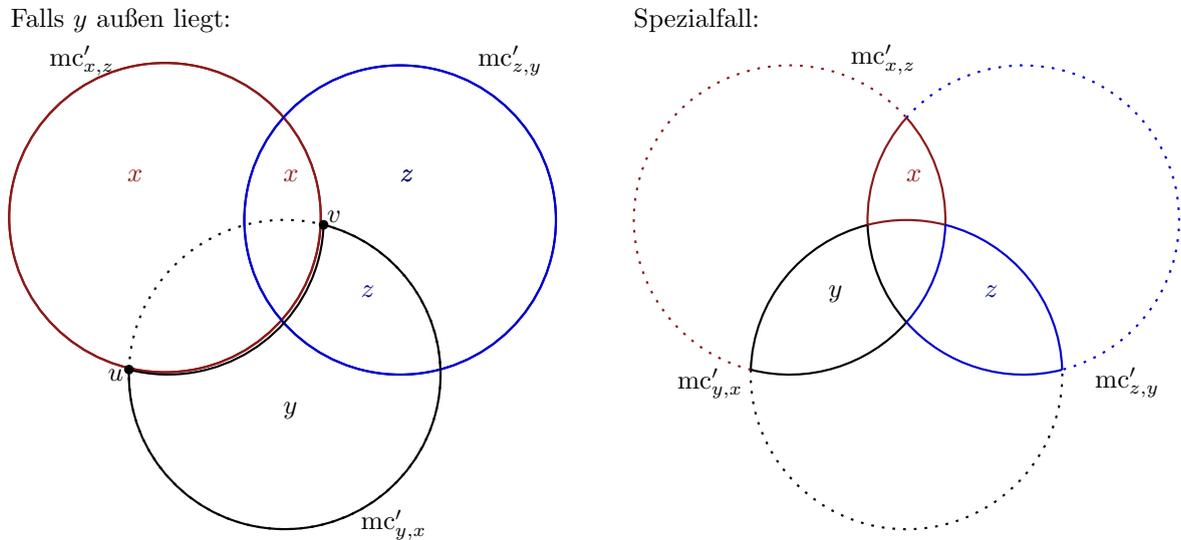


Abbildung 5.5: In dieser Abbildung ist links die mögliche Vereinfachung, falls ein Knoten außen liegt, veranschaulicht. Die ursprüngliche Lage wird dabei gepunktet dargestellt. Was in dem Fall passiert, wenn alle Knoten innen liegen, ist rechts dargestellt. Beiden Umformungen liefern minimale Schnitte mit den gewünschten Eigenschaften.

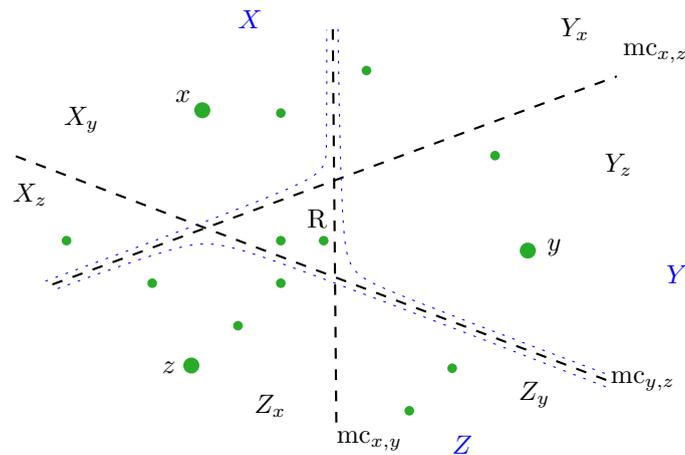


Abbildung 5.6: In dieser Abbildung sind die minimalen Schnitt dargestellt. Diese teilen die Knotenmenge nach Lemma 5.3 in maximal sieben Gebiete auf. Die Namen leiten sich von der Lage der Gebiete bezüglich der Schnitte ab. Der Knoten x zum Beispiel könnte auch in dem Gebiet X_z liegen.

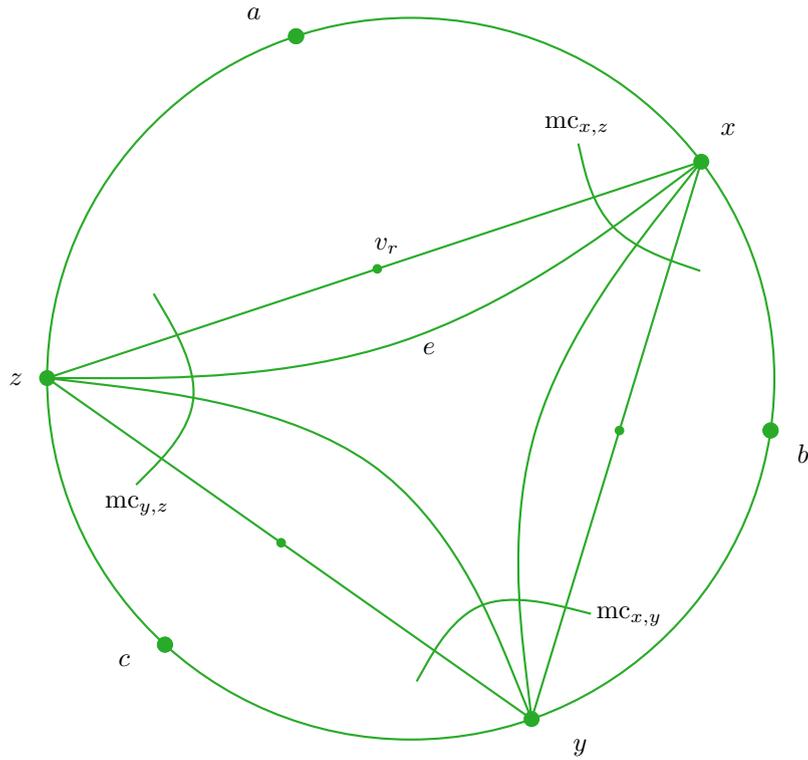


Abbildung 5.8: Durch dieser Abbildung wird motiviert, warum die Kanten von X nach Z nicht immer direkt verlaufen können.

Abbildung 5.8. Durch die Wahl der Schnitte wird v_r in die Menge R verschoben. Durch das Platzieren von v_r zu Y kann die Kante e nicht direkt von X nach Z laufen.

Ich werde für den Rest des Beweises abkürzend $w_{c,a \cup b}$ für $|mc_{c,a \cup b}|$ schreiben. Es ergeben sich in unsere Zeichnung n_S Kreuzungen (vergleiche Gleichung 5.2).

$$\begin{aligned}
 n_S &= t_{X,Z} \cdot (w_{b,a \cup c} + w_{c,a \cup b}) + t_{X,Y} \cdot w_{b,a \cup c} + t_{Y,Z} \cdot w_{c,a \cup b} \\
 &= [X, Z] \cdot (w_{b,a \cup c} + w_{c,a \cup b}) + ([X, Y] + [X, R]) \cdot w_{b,a \cup c} + ([Y, Z] + [Z, R]) \cdot w_{c,a \cup b} \quad (5.2) \\
 &= ([X, Z] + [X, Y] + [X, R]) \cdot w_{b,a \cup c} + ([X, Z] + [Y, Z] + [Z, R]) \cdot w_{c,a \cup b}
 \end{aligned}$$

Nun ist noch zu zeigen, dass dies höchstens den Wert n_O annimmt. Der Wert der oberen Schranke ist in Gleichung 5.3 genauer aufgezeigt.

$$\begin{aligned}
 n_O &= 2 \cdot (mc_{x,z} \cdot w_{a,b \cup c} + mc_{x,y} \cdot w_{b,a \cup c} + mc_{y,z} \cdot w_{c,a \cup b}) \\
 &= 2 \cdot ([X, Z] + [X, Y_z] + [X, R] + [Y_x, Z] + [Y_x, Y_z] + [Y_x, R]) \cdot w_{a,b \cup c} \quad (5.3) \\
 &\quad + 2 \cdot ([X, Y] + [X, Z_y] + [Z_x, Y] + [Z_x, Z_y] + [R, Y] + [R, Z_y]) \cdot w_{b,a \cup c} \\
 &\quad + 2 \cdot ([Y, Z] + [Y, X_z] + [X_y, Z] + [X_y, X_z] + [R, Z] + [R, X_z]) \cdot w_{c,a \cup b}
 \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass n_S echt größere sei wie n_O . Nun kann man in den einzelnen Summanden kürzen.

$0 > 2 \cdot ([X, Z] + [X, Y_z] + [X, R] + [Y_x, Z] + [Y_x, Y_z] + [Y_x, R])$ bleibt bei $w_{a,b \cup c}$ stehen.

$[X, Z_x] + [X, R] > [X, Y] + [X, Z_y] + 2 \cdot ([Z_x, Y] + [Z_x, Z_y] + [R, Y] + [R, Z_y])$ bleibt bei $w_{b,a \cup c}$ erhalten.

$[X_z, Z] > [Y, Z] + [X_y, Z] + [R, Z] + 2 \cdot ([Y, X_z] + [X_y, X_z] + [R, X_z])$ bleibt bei $w_{c,a \cup b}$ stehen.
 Nun erhält man einen Widerspruch, wie in den Umformungen bei 5.4 und 5.5 aufgezeigt.

$$\begin{aligned}
 & 0 + ([X, Z_x] + [X, R]) \cdot w_{b,a \cup c} + [X_z, Z] \cdot w_{c,a \cup b} \\
 & > 2 \cdot ([X, Z] + [X, Y_z] + [X, R] + [Y_x, Z] + [Y_x, Y_z] + [Y_x, R]) \cdot w_{a,b \cup c} \\
 & + ([X, Y] + [X, Z_y] + 2 \cdot ([Z_x, Y] + [Z_x, Z_y] + [R, Y] + [R, Z_y])) \cdot w_{b,a \cup c} \\
 & + ([Y, Z] + [X_y, Z] + [R, Z] + 2 \cdot ([Y, X_z] + [X_y, X_z] + [R, X_z])) \cdot w_{c,a \cup b}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
 \implies & ([X, Z_x] + [X, R] + [X_z, Z]) \cdot w_{a,b \cup c} \geq ([X, Z_x] + [X, R]) \cdot w_{b,a \cup c} + [X_z, Z] \cdot w_{c,a \cup b} \\
 & \stackrel{5.4}{>} 2 \cdot ([X, Z] + [X, Y_z] + [X, R] + [Y_x, Z] + [Y_x, Y_z] + [Y_x, R]) \cdot w_{a,b \cup c} \\
 & + ([X, Y] + [X, Z_y] + 2 \cdot ([Z_x, Y] + [Z_x, Z_y] + [R, Y] + [R, Z_y])) \cdot w_{b,a \cup c} \\
 & + ([Y, Z] + [X_y, Z] + [R, Z] + 2 \cdot ([Y, X_z] + [X_y, X_z] + [R, X_z])) \cdot w_{c,a \cup b} \\
 & \geq 2 \cdot ([X, Z] + [X, Y_z] + [X, R] + [Y_x, Z] + [Y_x, Y_z] + [Y_x, R]) \cdot w_{a,b \cup c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \implies & ([X, Z_x] + [X, R] + [X_z, Z]) \cdot w_{a,b \cup c} \\
 & > 2 \cdot ([X, Z] + [X, Y_z] + [X, R] + [Y_x, Z] + [Y_x, Y_z] + [Y_x, R]) \cdot w_{a,b \cup c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \implies & [X, Z_x] + [X, R] + [X_z, Z] \\
 & > 2 \cdot ([X, Z] + [X, Y_z] + [X, R] + [Y_x, Z] + [Y_x, Y_z] + [Y_x, R])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \implies & [X, Z_x] + [X_z, Z] \\
 & > [X, R] + 2 \cdot ([X, Z] + [X, Y_z] + [Y_x, Z] + [Y_x, Y_z] + [Y_x, R])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \implies & [X, Z_x] + [X_z, Z] \\
 & > [X, R] + \underbrace{[X, Z_x] + [X, Z_y] + [X_y, Z] + [X_z, Z]}_{2 \cdot [X, Z]} + 2 \cdot ([X, Y_z] + [Y_x, Z] + [Y_x, Y_z] + [Y_x, R])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \implies & 0 > [X, R] + [X, Z_y] + [X_y, Z] + 2 \cdot ([X, Y_z] + [Y_x, Z] + [Y_x, Y_z] + [Y_x, R]) \neq \\
 & \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

□

6. Zusammenfassung

Zu Beginn dieser Bachelorarbeit wurde gezeigt (vergleiche Lemma 2.4), dass die Kreuzungsminimierung sehr viel komplizierter wird, falls der gemeinsame Graph aus mehreren Zusammenhangskomponenten besteht. In diesem Fall kann es für die Anzahl der Kreuzungen optimal sein, dass sich Kantenpaare doppelt kreuzen. Da diese Fälle sehr viel schwieriger zu untersuchen sind, haben wir uns danach fast nur noch mit zusammenhängenden gemeinsamen Graphen beschäftigt.

In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass die Kreuzungsminimierung im allgemeinen Fall \mathcal{NP} -vollständig ist. Dabei wurde im Beweis stark ausgenutzt, dass der gemeinsame Graph nicht zusammenhängend war. Daher ist ein sehr interessantes offenes Problem, wie kompliziert der gemeinsame Graph werden darf, bevor die Kreuzungsminimierung \mathcal{NP} -vollständig wird. Dazu kann man sich die Fälle gemeinsamer Graph ist zusammenhängend, besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten anschauen.

Rot-grüne Kreuzungen können somit im Allgemeinen nicht effizient minimiert werden. Um positive Resultate zu erhalten, haben wir die betrachteten Graphen weiter eingeschränkt. In Kapitel 4 wurden nun verschiedene, zusammenhängende gemeinsame Graphen betrachtet. Zusätzlich wurden keine exklusiven Knoten erlaubt. Falls der gemeinsame Graph ein Kreis ist, kann man die Kreuzungsminimierung überführen in das Finden eines maximalen Schnittes in einem Kreissehnengraph. Wie kompliziert das Finden eines solchen Schnittes ist, ist jedoch ein offenes Problem. Falls der gemeinsame Graph ein Pfad ist, erhält man die kreuzungsminimale simultane Zeichnung, indem man einen minimalen Schnitt findet. Zusammenfassend für dieses Kapitel lässt sich festhalten, dass die Kreuzungsminimierung selbst bei der Einschränkung auf spezielle gemeinsame Graphen mit meinen Ansätze so schwer wie das Finden eines besonderen Schnittes in einem speziellen Graphen ist. Für diese Arbeit wäre es interessant zu wissen, wie komplex das Finden eines maximalen Schnittes in diesen speziellen Graphenklassen ist. Für den Fall, dass der gemeinsame Graph ein Kreis ist, müsste man maximale Schnitte in Kreissehnengraphen untersuchen.

In Kapitel 5 haben wir eine andere Problemstellung betrachtet. In diesem Kapitel lag die Einbettung der beiden Graphen bereits fest. Zusätzlich haben wir den gemeinsamen Graphen als 2-fach zusammenhängend vorausgesetzt. Ohne exklusive Knoten ist in diesem Fall keine Kreuzungsminimierung möglich. Wir haben somit in diesem Kapitel exklusive Knoten erlaubt. In diesem Fall lässt sich die Kreuzungsminimierung durchführen, indem man jede Facette für sich minimiert. Wir haben die Komplexität von Kreuzungsminimierung bis zum Verwebungsgrad 3 betrachtet. Für den Fall $q = 2$ haben wir einen optimalen

Algorithmus kennengelernt. Im Fall $q = 3$ haben wir eine 6-Approximation erhalten. Kann man auch für größeres q eine Approximation finden? Kann man vielleicht sogar eine $q \cdot (q-1)$ -Approximation beweisen? Es könnte auch ein q_0 geben, sodass die Kreuzungsminimierung für den Verwebungsgrad q_0 schwer ist.

Um eine kreuzungsminimale Zeichnung eines nicht planaren Graphen $G = (V, E)$ zu erhalten, ist folgende Vorgehensweise ein probates Mittel. Man sucht sich zuerst eine planare Teilgraphen $T = (V, E')$ von G so, dass durch Hinzufügen einer beliebigen Kante $e \in E \setminus E'$ der Graph $T' = (V, E' \cup e)$ nicht mehr planar ist. Nun fügt man nacheinander die fehlenden Kanten kreuzungsminimal ein [GMW01]. Die in Kapitel 5 verwendete Methode könnte bessere Ergebnisse liefern, falls man eine Zerlegung von G in zwei planare Graphen findet und diese in einem Schritt zusammenfügt.

Literaturverzeichnis

- [ADBF⁺11] Patrizio Angelini, Giuseppe Di Battista, Fabrizio Frati, Maurizio Patrignani und Ignaz Rutter: *Testing the Simultaneous Embeddability of Two Graphs whose Intersection is a Biconnected Graph or a Tree*. In: *Proceedings of the 21st International Workshop on Combinatorial Algorithms*, Band 6460 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 212–225. Springer, 2011.
- [BCD⁺07] Peter Braß, Eowyn Cenek, Christian A. Duncan, Alon Efrat, Cesim Erten, Dan Ismailescu, Stephen G. Kobourov, Anna Lubiw und Joseph S. B. Mitchell: *On simultaneous planar graph embeddings*. *Comput. Geom.*, 36(2):117–130, 2007. <http://dx.doi.org/10.1016/j.comgeo.2006.05.006>.
- [BKR12] Thomas Bläsius, Stephen G. Kobourov und Ignaz Rutter: *Simultaneous Embedding of Planar Graphs*. CoRR, abs/1204.5853, 2012. <http://arxiv.org/abs/1204.5853>.
- [BKR13] Thomas Bläsius, Annette Karrer und Ignaz Rutter: *Simultaneous Embedding: Edge Orderings, Relative Positions, Cutvertices*. In: *Graph Drawing*, Seiten 220–231, 2013. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-03841-4_20.
- [BR11] Thomas Bläsius und Ignaz Rutter: *Simultaneous PQ-Ordering with Applications to Constrained Embedding Problems*. CoRR, abs/1112.0245, 2011. <http://arxiv.org/abs/1112.0245>.
- [CFG⁺14] Timothy M. Chan, Fabrizio Frati, Carsten Gutwenger, Anna Lubiw, Petra Mutzel und Marcus Schaefer: *Drawing Partially Embedded and Simultaneously Planar Graphs*. CoRR, abs/1410.8205, 2014. <http://arxiv.org/abs/1410.8205>.
- [CJS08] Markus Chimani, Michael Jünger und Michael Schulz: *Crossing Minimization meets Simultaneous Drawing*. In: *PacificVis*, Seiten 33–40. IE-EE, 2008. <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/apvis/pacificvis2008.html#ChimaniJS08>.
- [Die12] Reinhard Diestel: *Graph Theory, 4th Edition*, Band 173 der Reihe *Graduate texts in mathematics*. Springer, 2012, ISBN 978-3-642-14278-9.
- [EK05] Cesim Erten und Stephen G. Kobourov: *Simultaneous Embedding of Planar Graphs with Few Bends*. In: *Proceedings of the 12th International Symposium on Graph Drawing (GD'04)*, Band 3383 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 195–205. Springer, 2005.
- [GHR14] Luca Grilli, Seok-Hee Hong, Jan Kratochvíl und Ignaz Rutter: *Drawing Simultaneously Embedded Graphs with Few Bends*. In: *Graph Drawing - 22nd International Symposium, GD 2014, Würzburg, Germany, September 24-26, 2014, Revised Selected Papers*, Seiten 40–51, 2014. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45803-7_4.

- [GJ83] Michael R. Garey und David S. Johnson: *Crossing Number is NP-Complete*. SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, 4:312–316, 1983.
- [GJP⁺06] Elisabeth Gassner, Michael Jünger, Merijam Percan, Marcus Schaefer und Michael Schulz: *Simultaneous Graph Embeddings with Fixed Edges*. In: *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, 32nd International Workshop, WG 2006, Bergen, Norway, June 22-24, 2006, Revised Papers*, Seiten 325–335, 2006. http://dx.doi.org/10.1007/11917496_29.
- [GMW01] Carsten Gutwenger, Petra Mutzel und René Weiskircher: *Inserting an Edge into a Planar Graph*. In: *Proceedings of the Twelfth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA '01*, Seiten 246–255, Philadelphia, PA, USA, 2001. Society for Industrial and Applied Mathematics, ISBN 0-89871-490-7. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=365411.365455>.
- [HJL13] Bernhard Haeupler, Krishnam Raju Jampani und Anna Lubiw: *Testing Simultaneous Planarity when the Common Graph is 2-Connected*. J. Graph Algorithms Appl., 17(3):147–171, 2013. <http://dx.doi.org/10.7155/jgaa.00289>.
- [HT74] John E. Hopcroft und Robert E. Tarjan: *Efficient Planarity Testing*. Journal of the ACM, 21(4):549–568, 1974.
- [JS09] Michael Jünger und Michael Schulz: *Intersection Graphs in Simultaneous Embedding with Fixed Edges*. Seiten 205–218, 2009. <http://jgaa.info/accepted/2009/JuengerSchulz2009.13.2.pdf>.
- [Kei85] J.Mark Keil: *Finding hamiltonian circuits in interval graphs*. Information Processing Letters, 20:201–206, 1985.
- [PT00] János Pach und Géza Tóth: *Which Crossing Number Is It Anyway?* J. Comb. Theory, Ser. B, 80(2):225–246, 2000. <http://dx.doi.org/10.1006/jctb.2000.1978>.
- [Pur97] Helen C. Purchase: *Which Aesthetic has the Greatest Effect on Human Understanding?* In: *Graph Drawing, 5th International Symposium, GD '97, Rome, Italy, September 18-20, 1997, Proceedings*, Seiten 248–261, 1997. http://dx.doi.org/10.1007/3-540-63938-1_67.
- [Sch13] Marcus Schaefer: *Toward a Theory of Planarity: Hanani-Tutte and Planarity Variants*. J. Graph Algorithms Appl., 17(4):367–440, 2013. <http://dx.doi.org/10.7155/jgaa.00298>.