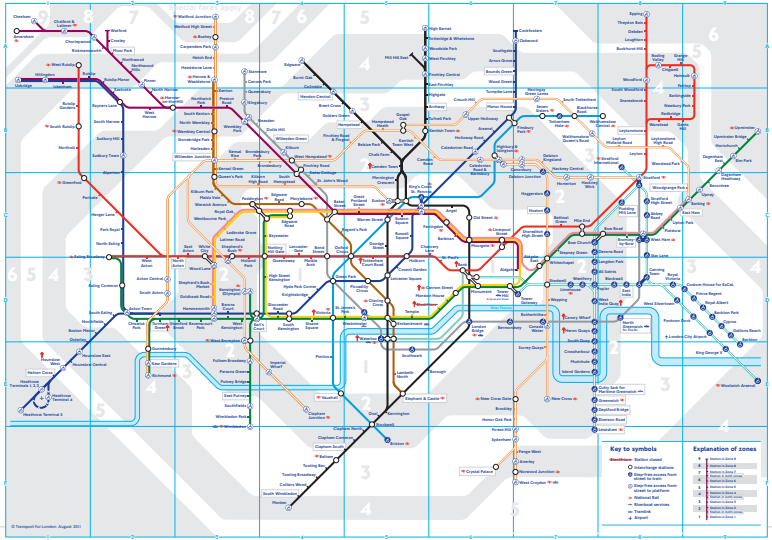
Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Routenplanung

17. Vorlesung, Sommersemester 2023

Adrian Feilhauer | 26. Juni 2023

Fahrplanauskunft



Abgrenzung zu Straßennetzwerken

Eingabe bei Straßennetzen:
Straßenkarte modelliert als Graph, bestehend aus

- Kreuzungen $\hat{=}$ Knoten
- Straßensegmenten $\hat{=}$ Kanten
- Metriken (Reisezeit, Distanz, ...) $\hat{=}$ Kantengewichte

Abgrenzung zu Straßennetzwerken

Eingabe bei Straßennetzen:
Straßenkarte modelliert als Graph, bestehend aus

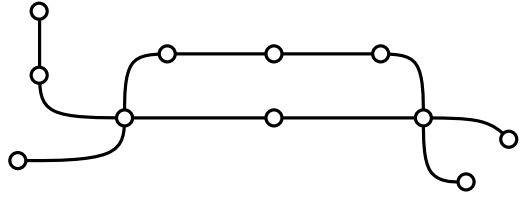
- Kreuzungen $\hat{=}$ Knoten
- Straßensegmenten $\hat{=}$ Kanten
- Metriken (Reisezeit, Distanz, ...) $\hat{=}$ Kantengewichte

Was ist die Eingabe bei ÖV-Netzwerken?

Fahrpläne

Fahrplan:

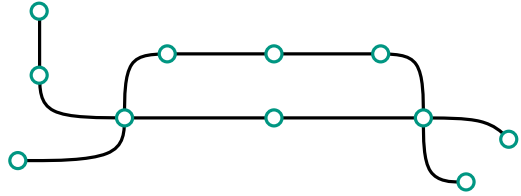
- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)



Fahrpläne

Fahrplan:

- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)



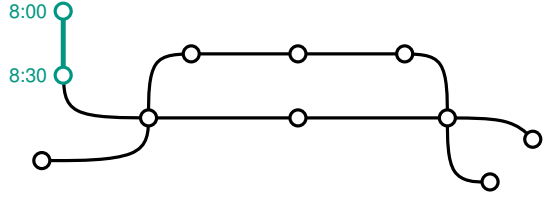
Fahrpläne

Fahrplan:

- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)

Connection: 5-Tupel $c = (v_{\text{dep}}(c), v_{\text{arr}}(c), \tau_{\text{dep}}(c), \tau_{\text{arr}}(c), \text{trip}(c))$

- Abfahrtsstop $v_{\text{dep}}(c) \in \mathcal{S}$
- Ankunftsstop $v_{\text{arr}}(c) \in \mathcal{S}$
- Trip $\text{trip}(c) \in \mathcal{T}$
- Abfahrtszeit $\tau_{\text{dep}}(c) \in \Pi$
- Ankunftszeit $\tau_{\text{arr}}(c) \in \Pi$
- Kein Zwischenhalt!



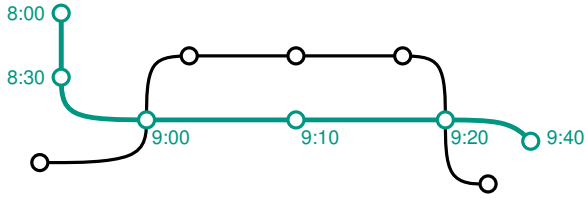
Fahrpläne

Fahrplan:

- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)

Trip:

- Folge von Connections $T = (c_1, \ldots, c_k)$
- Fahrt eines Zuges (Busses, ...)
- von Endstation zu Endstation
- Abfahrten an den Stops zu bestimmten Zeiten



Trip 1

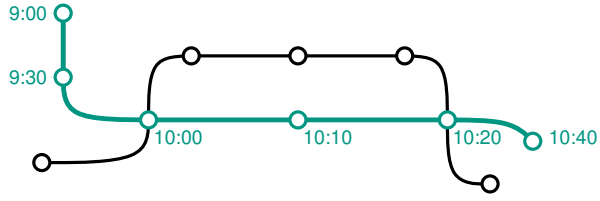
Fahrpläne

Fahrplan:

- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)

Trip:

- Folge von Connections $T = (c_1, \ldots, c_k)$
- Fahrt eines Zuges (Busses, ...)
- von Endstation zu Endstation
- Abfahrten an den Stops zu bestimmten Zeiten



Fahrpläne

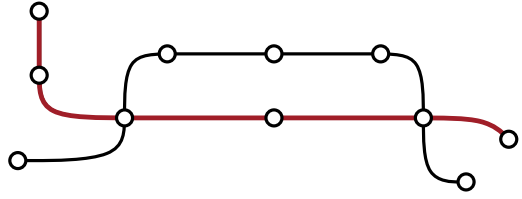
Fahrplan:

- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)

Routen: (Linien)

- Partitionierung der Trips
- Zwei Trips T_1, T_2 gehören zur gleichen Route

  $\Leftrightarrow$ T_1 und T_2 besuchen genau die gleiche Sequenz von Stops
- Ist bei realen Zug-/Bahnlinien nicht immer der Fall!



Route 1

Fahrpläne

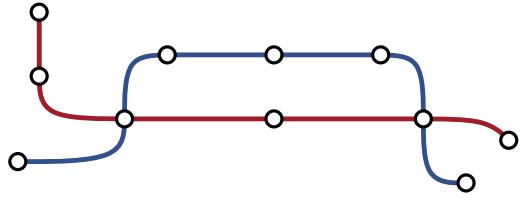
Fahrplan:

- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)

Routen: (Linien)

- Partitionierung der Trips
- Zwei Trips T_1, T_2 gehören zur gleichen Route

  $\Leftrightarrow$ T_1 und T_2 besuchen genau die gleiche Sequenz von Stops
- Ist bei realen Zug-/Bahnlinien nicht immer der Fall!



Route 1
Route 2

Fahrpläne

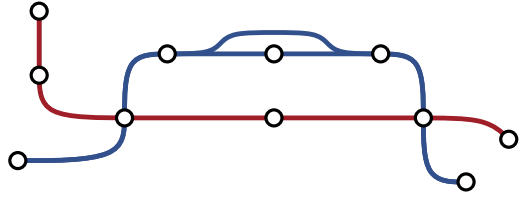
Fahrplan:

- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)

Routen: (Linien)

- Partitionierung der Trips
- Zwei Trips T_1, T_2 gehören zur gleichen Route

  $\Leftrightarrow$ T_1 und T_2 besuchen genau die gleiche Sequenz von Stops
- Ist bei realen Zug-/Bahnlinien nicht immer der Fall!



Route 1
keine Route!

Fahrpläne

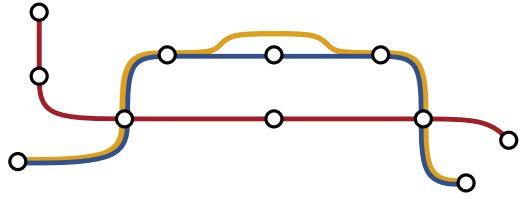
Fahrplan:

- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)

Routen: (Linien)

- Partitionierung der Trips
- Zwei Trips T_1, T_2 gehören zur gleichen Route

  $\Leftrightarrow$ T_1 und T_2 besuchen genau die gleiche Sequenz von Stops
- Ist bei realen Zug-/Bahnlinien nicht immer der Fall!



Route 1
Route 2
Route 3

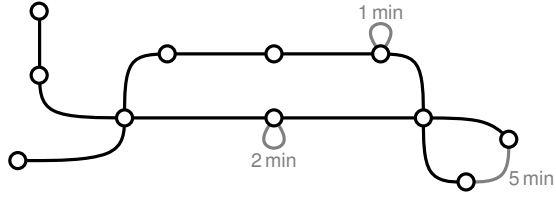
Fahrpläne

Fahrplan:

- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)

Zur Modellierung von Umstiegen:

- Mindestumstiegszeiten an Stops: $\tau_{\text{ch}} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{N}_0$
- Fußwege zwischen (nahen) Stops: $\tau_{\text{walk}} \colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$



Journeys

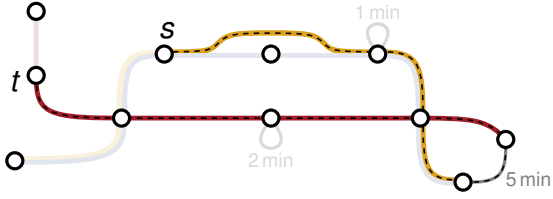
Gegenstück zu einem Pfad in einem Straßennetzwerk?

Journeys

Gegenstück zu einem Pfad in einem Straßennetzwerk?

Journey:

- Modelliert Reise eines Passagiers durch das Netzwerk
- Folge von Legs: Teilsequenzen von Trips aus dem Fahrplan
  (Möglicherweise mit Umstiegen/Fußwegen dazwischen)



Journeys

Gegenstück zu einem Pfad in einem Straßennetzwerk?

Journey:

- Modelliert Reise eines Passagiers durch das Netzwerk
- Folge von Legs: Teilsequenzen von Trips aus dem Fahrplan
  (Möglicherweise mit Umstiegen/Fußwegen dazwischen)

Journey ist konsistent, wenn ...

- Erster Stop von Leg T_{i+1} entspricht letztem Stop von Leg T_i
  (Oder es existiert Fußweg dazwischen)
- Abfahrt von T_{i+1} ist *nach* Ankunft von T_i
  (+ Zeit für Umstieg/Fußweg)

Modellierung von Fahrplänen

Zwei grundlegende Ansätze:

1. Modellierung als gerichteter Graph
2. Benutze Fahrplan „direkt“

$\rightsquigarrow$ Dijkstra

$\rightsquigarrow$ Neue Algorithmen

Modellierung von Fahrplänen

Zwei grundlegende Ansätze:

1. Modellierung als gerichteter Graph
   - ⇝ Dijkstra
2. Benutze Fahrplan „direkt“
   - ⇝ Neue Algorithmen

Jetzt ersteres, später zweiteres.

Modellierung von Fahrplänen

Zwei grundlegende Ansätze:

1. Modellierung als gerichteter Graph
2. Benutze Fahrplan „direkt“

⇝ Dijkstra

⇝ Neue Algorithmen

Jetzt ersteres, später zweiteres.

Modellierung als Graph:

- Reduziere auf (bekanntes) Kürzeste-Wege-Problem
- Optimale Journeys entsprechen kürzesten Wegen

Modellierung von Fahrplänen

Zwei grundlegende Ansätze:

1. Modellierung als gerichteter Graph ⇝ Dijkstra
2. Benutze Fahrplan „direkt“ ⇝ Neue Algorithmen

Jetzt ersteres, später zweiteres.

Modellierung als Graph:

- Reduziere auf (bekanntes) Kürzeste-Wege-Problem
- Optimale Journeys entsprechen kürzesten Wegen

Frage: Wie die Zeitabhängigkeit (Abfahrten/Ankünfte) kodieren?

Modellierung: Zwei Ansätze

1. Zeitexpandiert

- Zeitabhängigkeiten ausrollen
- Knoten entsprechen Ereignissen im Fahrplan
- Kanten verbinden Ereignisse miteinander
  - Fahrt mit Connection
  - Umstieg zwischen Trips
  - Warten auf Trip

− Großer Graph

\+ Einfacher Anfragealgorithmus (Dijkstra)

2. Zeitabhängig

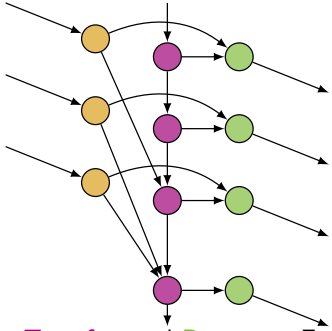
- Zeitabhängigkeit in den Kantengewichten
- Knoten entsprechen Stops
- Kante $\Leftrightarrow$ Connection verbindet Stops
  - Umstiegszeiten?

\+ Kleiner Graph

− Zeitabhängige Algorithmen?

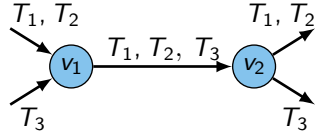
Modellierung: Zwei Ansätze

1. Zeitexpandiert



- Arrival-, Transfer- und Departure-Ereignisse
- Für jede Connection
- Kantengewicht = Zeitdiff.
  (alternativ: ungewichtet, Knotenlabel = Ereigniszeit)

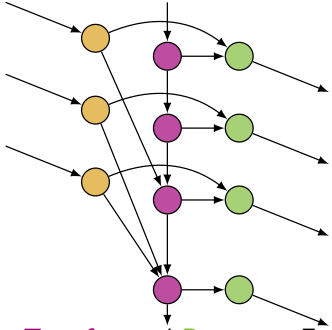
2. Zeitabhängig



- Pro Stop: Stationsknoten
- Kanten: zeitabhängig
- Umstiege?

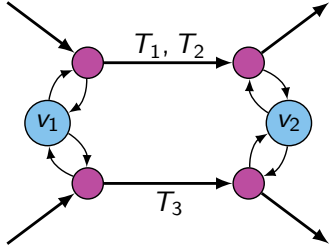
Modellierung: Zwei Ansätze

1. Zeitexpandiert



- Arrival-, Transfer- und Departure-Ereignisse
- Für jede Connection
- Kantengewicht = Zeitdiff.
  (alternativ: ungewichtet, Knotenlabel = Ereigniszeit)

2. Zeitabhängig



- Pro Stop: Stationsknoten
- Partitioniere Trips in Routen
- Pro Route: Routen-Knoten
- Routenkanten: zeitabhängig
- Stationskanten: Transferzeit

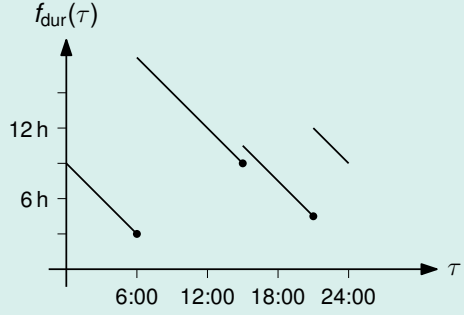
Zeitabhängige Kanten

Connections modelliert durch stückweise lineare Funktionen $f^e_{\text{dur}}, f^e_{\text{arr}}$

Connections zwischen v_i und v_j:

id	dep. time	travel time
1	06:00	3 h 00 min
2	15:00	9 h 00 min
3	21:00	4 h 30 min
⋮	⋮	⋮

Entsprechende Funktion:



- Für jede Connection: Connection Point (τ, w)
  $\tau \mathrel{\hat{=}}$ Abfahrtszeit, $w \mathrel{\hat{=}}$ Reisezeit (bzw. Ankunftszeit)
- Zwischen Connections: Lineares Warten

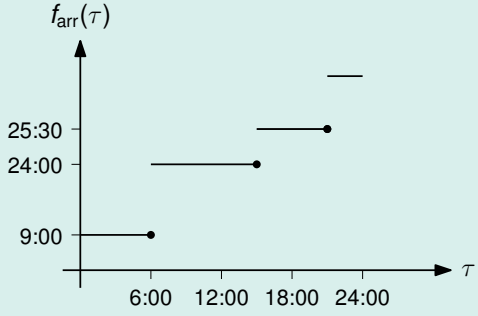
Zeitabhängige Kanten

Connections modelliert durch stückweise lineare Funktionen $f^e_{\text{dur}}, f^e_{\text{arr}}$

Connections zwischen v_i und v_j:

id	dep. time	travel time
1	06:00	3 h 00 min
2	15:00	9 h 00 min
3	21:00	4 h 30 min
⋮	⋮	⋮

Entsprechende Funktion:



- Für jede Connection: Connection Point (τ, w)
  $\tau \mathrel{\hat{=}}$ Abfahrtszeit, $w \mathrel{\hat{=}}$ Reisezeit (bzw. Ankunftszeit)
- Zwischen Connections: Lineares Warten

FIFO-Eigenschaft (Wdh.)

Definition

Sei $f_{\text{dur}} \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Reisezeit-Funktion. f erfüllt die FIFO-Eigenschaft, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ gilt, dass

$$f_{\text{dur}}(\tau) \leq \varepsilon + f_{\text{dur}}(\tau + \varepsilon).$$

Diskussion:

- Interpretation: „Warten lohnt sich nie“
- Kürzeste-Wege-Problem ohne FIFO-Eigenschaft ist NP-schwer
  (wenn Warten an Knoten nicht erlaubt ist)

$\Rightarrow$ Sicherstellen, dass Funktionen FIFO-Eigenschaft erfüllen

FIFO-Eigenschaft (Wdh.)

Definition

Sei $f_{\text{arr}} \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Ankunftszeit-Funktion. f erfüllt die FIFO-Eigenschaft, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ gilt, dass

$$f_{\text{arr}}(\tau) \leq f_{\text{arr}}(\tau + \varepsilon).$$

Diskussion:

- Interpretation: „Warten lohnt sich nie“
- Kürzeste-Wege-Problem ohne FIFO-Eigenschaft ist NP-schwer
  (wenn Warten an Knoten nicht erlaubt ist)

$\Rightarrow$ Sicherstellen, dass Funktionen FIFO-Eigenschaft erfüllen

Fahrplanauskunft mit Dijkstra

Anfrageszenarien

Gegeben: Startstop s, Zielstop t

Anfrageszenarien

Gegeben: Startstop s, Zielstop t

Zeit-Anfrage (Earliest Arrival Query):

- Finde schnellste Journey für Abfahrtszeit τ_{dep}
- Analog zu Dijkstra?

Anfrageszenarien

Gegeben: Startstop s, Zielstop t

Zeit-Anfrage (Earliest Arrival Query):

- Finde schnellste Journey für Abfahrtszeit τ_{dep}
- Analog zu Dijkstra?

Profil-Anfrage (Profile Query):

- Finde schnellste Journey für jeden Abfahrtszeitpunkt $\tau \in \Pi$
- Analog zu Dijkstra?

Zeit-Anfragen

Gegeben: Startstop s, Zielstop t und Abfahrtszeit τ_{dep}

Zeit-Anfragen

Gegeben: Startstop s, Zielstop t und Abfahrtszeit τ_{dep}

1. Zeitexpandiert

Startknoten:

- Erstes Transferevent von s mit Zeit $\tau \geq \tau_{\text{dep}}$

Zielknoten:

- Im Voraus unbekannt!
- Stoppkriterium: Erster gesettleter Knoten an t induziert schnellste Verbindung zu t

2. Zeitabhängig

Startknoten:

- Stationsknoten s

Zielknoten:

- Stationsknoten t

Anfrage:

- Time-Dependent Dijkstra mit Zeit τ_{dep}
- Nur Ankunftszeit im Voraus unbekannt

Zeit-Anfragen

Algorithm 1: `Time-Dijkstra`$(G = (V, E), s, \tau_{\text{dep}})$

```
1  d[s] = 0
2  Q.clear(), Q.insert(s, 0)
3  while !Q.empty() do
4      u ← Q.deleteMin()
5      for all edges e = (u, v) ∈ E do
           // len(e, ·) = f^e_dur(·)
6          if d[u] + len(e, τ_dep + d[u]) < d[v] then
7              d[v] ← d[u] + len(e, τ_dep + d[u])
8              p[v] ← u
9              if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
10             else Q.insert(v, d[v])
```

Zeit-Anfragen

Algorithm 2: `Time-Dijkstra`$(G = (V, E), s, \tau_{\text{dep}})$

```
1  d[s] = τ_dep
2  Q.clear(), Q.insert(s, τ_dep)
3  while !Q.empty() do
4      u ← Q.deleteMin()
5      for all edges e = (u, v) ∈ E do
           // len(e, ·) = f^e_arr(·)
6          if len(e, d[u]) < d[v] then
7              d[v] ← len(e, d[u])
8              p[v] ← u
9              if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
10             else Q.insert(v, d[v])
```

Diskussion Zeit-Anfragen

Beobachtung:

- Nur ein Unterschied zu Dijkstra
- Auswertung der Kanten

Diskussion Zeit-Anfragen

Beobachtung:

- Nur ein Unterschied zu Dijkstra
- Auswertung der Kanten

Non-FIFO-Netzwerke:

- Im Kreis fahren kann sich lohnen
- NP-schwer (wenn Warten an Knoten nicht erlaubt ist)
- Transportnetzwerke sind FIFO-modellierbar

Diskussion Zeit-Anfragen

Beobachtung:

- Nur ein Unterschied zu Dijkstra
- Auswertung der Kanten

Non-FIFO-Netzwerke:

- Im Kreis fahren kann sich lohnen
- NP-schwer (wenn Warten an Knoten nicht erlaubt ist)
- Transportnetzwerke sind FIFO-modellierbar

In unserem Szenario:

- Sicherstellen, dass jede Route FIFO-Eigenschaft erfüllt
- Für alle Trips T_i, T_j der Route muss gelten:
- T_i fährt an *jedem* Stop jeweils vor T_j ab (oder andersherum)

Profil-Anfragen

Gegeben: Startstop s, Zielstop t

Profil-Anfragen

Gegeben: Startstop s, Zielstop t

1. Zeitexpandiert

?

(Geht, aber nicht Teil der VL)

2. Zeitabhängig

Startknoten:

- Stationsknoten s

Zielknoten:

- Stationsknoten t

Anfrage:

- Label-Correcting-Algorithmus von s aus

Profil-Anfragen

Algorithm 3: `Profile-Search`$(G = (V, E), s)$

```
1  d_*[s] = 0
2  Q.clear(), Q.insert(s, 0)
3  while !Q.empty() do
4      u ← Q.deleteMin()
5      for all edges e = (u, v) ∈ E do
6          if d_*[u] ⊕ len(e) ≱ d_*[v] then
7              d_*[v] ← min(d_*[u] ⊕ len(e), d_*[v])
8              if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
9              else Q.insert(v, d[v])
```

Diskussion Profil-Anfragen

Beobachtungen:

- Operationen auf Funktionen
- Knotenlabel: Funktion
- Knotenlabel nicht skalar $\Rightarrow$ keine Totalordnung der Knotenlabel
- Wonach Priority Queue ordnen?
- Priorität im Prinzip frei wählbar
  (z.B.: $\underline{d}[u] \coloneqq$ Minimum der Funktion $d_*[u]$)
- Knoten können mehrfach besucht werden $\Rightarrow$ label-correcting

Operationen

Funktion gegeben durch:

- Menge von Interpolationspunkten
- Abfahrtszeit und Dauer
- $I^f := \{(t_1^f, w_1^f), \ldots, (t_k^f, w_k^f)\}$

3 Operationen notwendig:

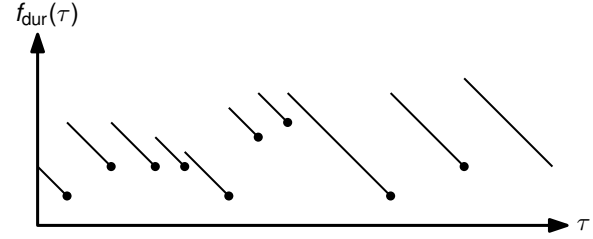
- Auswertung
- Linken $\oplus$
- Minimumsbildung

Public Transport: Auswertung

Auswertung von $f(\tau)$:

- Suche Punkt (t_i, w_i) mit $t_i \geq \tau$ und t_i minimal
- Dann Evaluation durch

$$f(\tau) = w_i + (t_i - \tau)$$

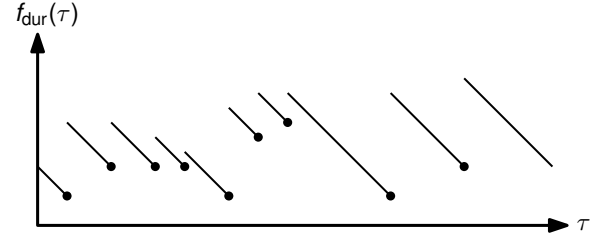


Public Transport: Auswertung

Auswertung von $f(\tau)$:

- Suche Punkt (t_i, w_i) mit $t_i \geq \tau$ und t_i minimal
- Dann Evaluation durch

$$f(\tau) = w_i + (t_i - \tau)$$



Problem:

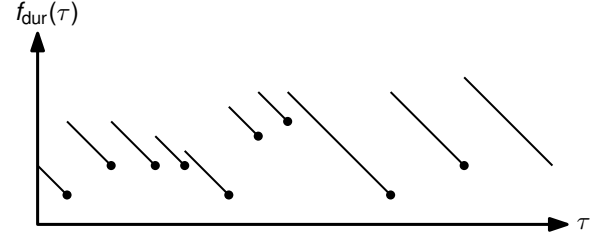
- Finden von t_i
- Theoretisch:
  - Lineare Suche: $\mathcal{O}(|I|)$
  - Binäre Suche: $\mathcal{O}(\log_2 |I|)$

Public Transport: Auswertung

Auswertung von $f(\tau)$:

- Suche Punkt (t_i, w_i) mit $t_i \geq \tau$ und t_i minimal
- Dann Evaluation durch

$$f(\tau) = w_i + (t_i - \tau)$$



Problem:

- Finden von t_i
- Theoretisch:
  - Lineare Suche: $\mathcal{O}(|I|)$
  - Binäre Suche: $\mathcal{O}(\log_2 |I|)$
- Praktisch:
  - ggf. lineare Suche mit Startpunkt $\frac{\tau}{\Pi} \cdot |I|$
    (wobei Π die Periodendauer ist)
  - Benchmarken!

Linken

Definition

Seien $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ und $g\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ zwei Reisezeit-Funktionen, die die FIFO-Eigenschaft erfüllen. Die Linkoperation $f \oplus g$ ist dann definiert durch

$$f \oplus g \coloneqq f + g \circ (\mathrm{id} + f)$$

Oder

$$(f \oplus g)(\tau) \coloneqq f(\tau) + g(\tau + f(\tau))$$

Linken

Definition

Seien $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ und $g\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ zwei Ankunftszeit-Funktionen, die die FIFO-Eigenschaft erfüllen. Die Linkoperation $f \oplus g$ ist dann definiert durch

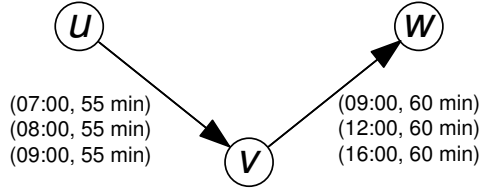
$$f \oplus g \coloneqq g \circ f$$

Oder

$$(f \oplus g)(\tau) \coloneqq g(f(\tau))$$

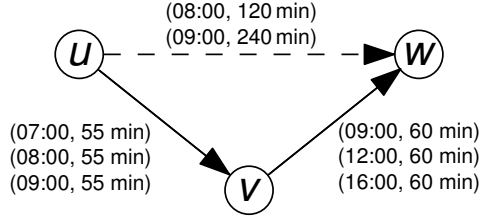
Public Transport: Link

Linken zweier Funktionen f und g:



Public Transport: Link

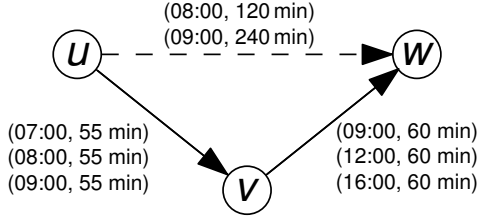
Linken zweier Funktionen f und g:



Public Transport: Link

Linken zweier Funktionen f und g:

- Für jeden Punkt (t_i^f, w_i^f) bestimme:
  Verbindungspunkt (t_j^g, w_j^g) mit $t_j^g \geq t_i^f + w_i^f$ minimal
  (Erste Verbindung, die man auf g erreichen kann)

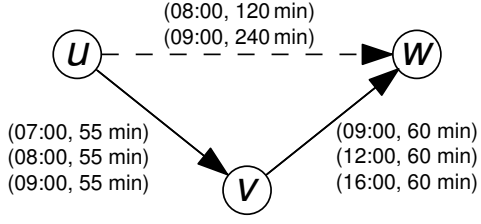


Public Transport: Link

Linken zweier Funktionen f und g:

- Für jeden Punkt (t_i^f, w_i^f) bestimme:
  Verbindungspunkt (t_j^g, w_j^g) mit $t_j^g \geq t_i^f + w_i^f$ minimal
  (Erste Verbindung, die man auf g erreichen kann)

- Füge $(t_i^f, t_j^g - t_i^f + w_j^g)$ zum Ergebnis hinzu

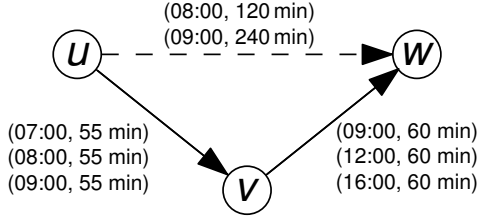


Public Transport: Link

Linken zweier Funktionen f und g:

- Für jeden Punkt (t_i^f, w_i^f) bestimme:
  Verbindungspunkt (t_j^g, w_j^g) mit $t_j^g \geq t_i^f + w_i^f$ minimal
  (Erste Verbindung, die man auf g erreichen kann)

- Füge $(t_i^f, t_j^g - t_i^f + w_j^g)$ zum Ergebnis hinzu
- Wenn zwei Punkte den gleichen Verbindungspunkt haben:
  Behalte nur den mit größerem t_i^f



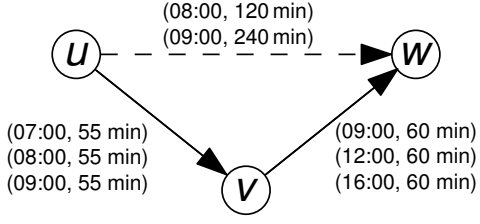
Public Transport: Link

Linken zweier Funktionen f und g:

- Für jeden Punkt (t_i^f, w_i^f) bestimme:
  Verbindungspunkt (t_j^g, w_j^g) mit $t_j^g \geq t_i^f + w_i^f$ minimal
  (Erste Verbindung, die man auf g erreichen kann)

- Füge $(t_i^f, t_j^g - t_i^f + w_j^g)$ zum Ergebnis hinzu
- Wenn zwei Punkte den gleichen Verbindungspunkt haben:
  Behalte nur den mit größerem t_i^f

$\Rightarrow$ Sweep-Algorithmus



Public Transport: Diskussion Link

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Public Transport: Diskussion Link

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Speicherverbrauch:

- Gelinkte Funktion hat $\leq \min\{|I^f|, |I^g|\}$ Interpolationspunkte

Public Transport: Diskussion Link

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Speicherverbrauch:

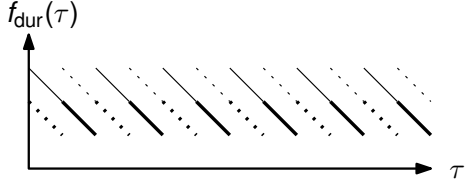
- Gelinkte Funktion hat $\leq \min\{|I^f|, |I^g|\}$ Interpolationspunkte

Auf Straßengraphen (zum Vergleich):

- Laufzeit auch $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$
- Aber $\approx |I^f| + |I^g|$ Interpolationspunkte

Public Transport: Merge

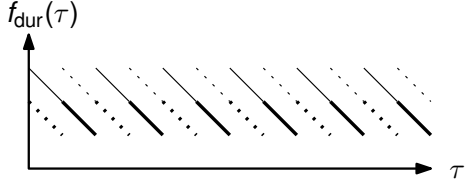
Minimum zweier Funktionen f und g:



Public Transport: Merge

Minimum zweier Funktionen f und g:

- Für alle (t_i^f, w_i^f): Behalte Punkt, wenn $w_i^f \leq g(t_i^f)$
- Für alle (t_j^g, w_j^g): Behalte Punkt, wenn $w_j^g \leq f(t_j^g)$
  (Bei Gleichheit Duplikate entfernen)
- Keine Schnittpunkte möglich!



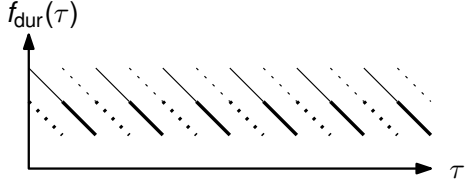
Public Transport: Merge

Minimum zweier Funktionen f und g:

- Für alle (t_i^f, w_i^f): Behalte Punkt, wenn $w_i^f \leq g(t_i^f)$
- Für alle (t_j^g, w_j^g): Behalte Punkt, wenn $w_j^g \leq f(t_j^g)$
  (Bei Gleichheit Duplikate entfernen)
- Keine Schnittpunkte möglich!

Vorgehen:

- Linearer Sweep



Public Transport: Diskussion Merge

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Public Transport: Diskussion Merge

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Speicherverbrauch:

- Keine Schnittpunkte

$\Rightarrow$ Minimum-Funktion hat maximal $|I^f| + |I^g|$ Interpolationspunkte

Public Transport: Diskussion Merge

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Speicherverbrauch:

- Keine Schnittpunkte

$\Rightarrow$ Minimum-Funktion hat maximal $|I^f| + |I^g|$ Interpolationspunkte

Auf Straßengraphen (zum Vergleich):

- Laufzeit auch $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$
- Aber mehr als $|I^f| + |I^g|$ Interpolationspunkte (Schnittpunkte!)

Self-Pruning Connection-Setting (SPCS)

Profil-Anfragen

Gegeben:
Zeitabhängiges Netzwerk $G = (V, E)$ und Startstop s.

Profil-Anfragen

Gegeben:
Zeitabhängiges Netzwerk $G = (V, E)$ und Startstop s.

Problem (Profil-Anfrage):
Berechne Reisezeitfunktion $\text{dist}_s(v, \tau)$ für alle $\tau \in \Pi$ und $v \in V$:
Länge des kürzesten Weges von s nach v in G zur Abfahrtszeit τ

Profil-Anfragen

Gegeben:
Zeitabhängiges Netzwerk $G = (V, E)$ und Startstop s.

Problem (Profil-Anfrage):
Berechne Reisezeitfunktion $\text{dist}_s(v, \tau)$ für alle $\tau \in \Pi$ und $v \in V$:
Länge des kürzesten Weges von s nach v in G zur Abfahrtszeit τ

Bisheriger Ansatz:
Erweitere Dijkstras Algorithmus zu Label-Correcting-Algorithmus

- Benutze Funktionen statt Konstanten
- Verliert Label-Setting-Eigenschaft von Dijkstra
- Deutlich langsamer als Dijkstra ($\approx$ Faktor 50)

Hauptidee

Beobachtung: Jede Journey ab s (irgendwohin) beginnt mit einer initialen Connection an s.

Hauptidee

Beobachtung: Jede Journey ab s (irgendwohin) beginnt mit einer initialen Connection an s.

Naiver Ansatz

Für jede ausgehende Connection c_i an s:
Separate Zeitanfrage mit Abfahrtszeit $\tau_{\text{dep}}(c_i)$.

Hauptidee

Beobachtung: Jede Journey ab s (irgendwohin) beginnt mit einer initialen Connection an s.

Naiver Ansatz

Für jede ausgehende Connection c_i an s:
Separate Zeitanfrage mit Abfahrtszeit $\tau_{\text{dep}}(c_i)$.

Nachteile:

- Zu viele redundante Berechnungen
- Nicht jede initiale Connection an s trägt zu $\text{dist}_s(v, \cdot)$ bei
  Langsame Züge für weite Reisen machen wenig Sinn

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6:30 8:30	7:04 8:30	9:26 14:28	10:34 14:28	11:08 14:28	12:42 14:28	13:01 16:46	13:58 16:46	16:46 23:30	18:24 23:30	19:20 23:30	21:08 23:30

Hauptidee

Beobachtung: Jede Journey ab s (irgendwohin) beginnt mit einer initialen Connection an s.

Naiver Ansatz

Für jede ausgehende Connection c_i an s:
Separate Zeitanfrage mit Abfahrtszeit $\tau_{\text{dep}}(c_i)$.

Nachteile:

- Zu viele redundante Berechnungen
- Nicht jede initiale Connection an s trägt zu $\text{dist}_s(v, \cdot)$ bei
  Langsame Züge für weite Reisen machen wenig Sinn

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6:30	7:04	9:26	10:34	11:08	12:42	13:01	13:58	16:46	18:24	19:20	21:08
8:30	8:30	14:28	14:28	14:28	14:28	16:46	16:46	23:30	23:30	23:30	23:30

Hauptidee

Beobachtung: Jede Journey ab s (irgendwohin) beginnt mit einer initialen Connection an s.

Naiver Ansatz

Für jede ausgehende Connection c_i an s:
Separate Zeitanfrage mit Abfahrtszeit $\tau_{\text{dep}}(c_i)$.

Nachteile:

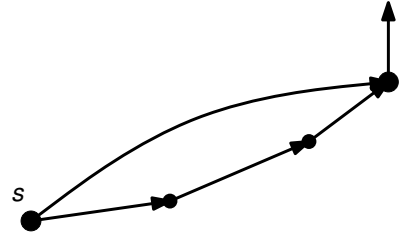
- Zu viele redundante Berechnungen
- Nicht jede initiale Connection an s trägt zu $\text{dist}_s(v, \cdot)$ bei
  Langsame Züge für weite Reisen machen wenig Sinn

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6:30 8:30	7:04 8:30	9:26 14:28	10:34 14:28	11:08 14:28	12:42 14:28	13:01 16:46	13:58 16:46	16:46 23:30	18:24 23:30	19:20 23:30	21:08 23:30

(“Connection reduction”)

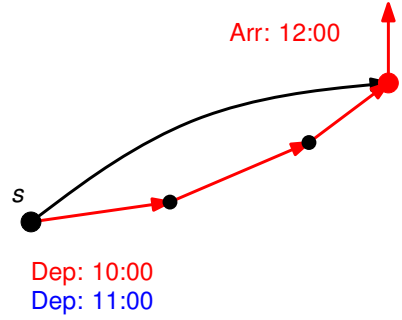
Self-Pruning

Beobachtung:
Initiale Connections können sich dominieren.



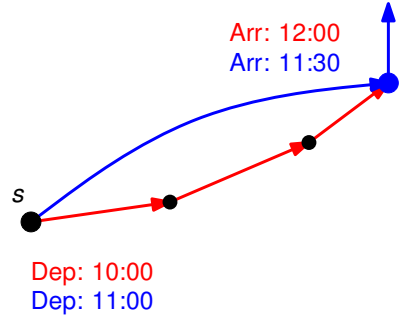
Self-Pruning

Beobachtung:
Initiale Connections können sich dominieren.



Self-Pruning

Beobachtung:
Initiale Connections können sich dominieren.

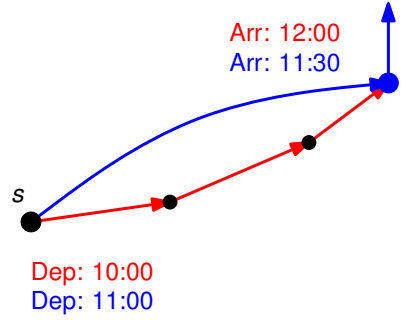


Self-Pruning

Beobachtung:
Initiale Connections können sich dominieren.

Self-Pruning (SP):

- Benutze eine gemeinsame Queue
- Sortiere initiale Connections c_i aufsteigend nach Abfahrtszeit
- Speichere an erreichten Knoten Index der initialen Connection
- Keys sind Ankunftszeiten



Beim Settlen von Knoten v und Conn.-Index i:
Falls v bereits gesettled mit initialer Connection $j > i$, **prune** i an v

Self-Pruning II

Integration von Self-Pruning:

- Verwalte Label maxconn(v) an jedem Knoten v
  Gibt maximale initiale Connection an, mit der v gesettled wurde
- Update maxconn(v) beim Settlen von v

Self-Pruning II

Integration von Self-Pruning:

- Verwalte Label maxconn(v) an jedem Knoten v
  Gibt maximale initiale Connection an, mit der v gesettled wurde
- Update maxconn(v) beim Settlen von v

Beim Settlen von Knoten v und Conn.-Index i:
Falls v bereits gesettled mit initialer Connection $j > i$, **prune** i an v

Self-Pruning II

Integration von Self-Pruning:

- Verwalte Label maxconn(v) an jedem Knoten v
  Gibt maximale initiale Connection an, mit der v gesettled wurde
- Update maxconn(v) beim Settlen von v

Beim Settlen von Knoten v und Conn.-Index i:
Falls maxconn(v) $> i$, **prune** i an v

Self-Pruning II

Integration von Self-Pruning:

- Verwalte Label maxconn(v) an jedem Knoten v
  Gibt maximale initiale Connection an, mit der v gesettled wurde
- Update maxconn(v) beim Settlen von v

Beim Settlen von Knoten v und Conn.-Index i:
Falls maxconn(v) $> i$, **prune** i an v

Dijkstras Label-Setting-Eigenschaft pro initialer Connection wiederhergestellt

Self-Pruning II

Integration von Self-Pruning:

- Verwalte Label maxconn(v) an jedem Knoten v
  Gibt maximale initiale Connection an, mit der v gesettled wurde
- Update maxconn(v) beim Settlen von v

Beim Settlen von Knoten v und Conn.-Index i:
Falls maxconn(v) $> i$, **prune** i an v

Dijkstras Label-Setting-Eigenschaft pro initialer Connection wiederhergestellt

$\Rightarrow$ Self-Pruning Connection-Setting Algorithmus (SPCS)

Stoppkriterium

(Falls Zielknoten t gegeben)

Dijkstras Algorithmus:
Breche die Suche ab, sobald t abgearbeitet wurde.

Stoppkriterium

(Falls Zielknoten t gegeben)

Dijkstras Algorithmus:
Breche die Suche ab, sobald t abgearbeitet wurde.

kann adaptiert werden durch

Self-Pruning Connection-Setting:

- Verwalte Label $T_m := -\infty$

Stoppkriterium

(Falls Zielknoten t gegeben)

Dijkstras Algorithmus:
Breche die Suche ab, sobald t abgearbeitet wurde.

kann adaptiert werden durch

Self-Pruning Connection-Setting:

- Verwalte Label $T_m := -\infty$
- Wenn t mit initialer Connection i gesettled wird, setze $T_m := \max\{T_m, i\}$

Stoppkriterium

(Falls Zielknoten t gegeben)

Dijkstras Algorithmus:
Breche die Suche ab, sobald t abgearbeitet wurde.

kann adaptiert werden durch

Self-Pruning Connection-Setting:

- Verwalte Label $T_m := -\infty$
- Wenn t mit initialer Connection i gesettled wird, setze $T_m := \max\{T_m, i\}$
- Prune alle Labels mit init. Connection $j \leq T_m$ (an jedem Knoten)

Stoppkriterium

(Falls Zielknoten t gegeben)

Dijkstras Algorithmus:
Breche die Suche ab, sobald t abgearbeitet wurde.

kann adaptiert werden durch

Self-Pruning Connection-Setting:

- Verwalte Label $T_m := -\infty$
- Wenn t mit initialer Connection i gesettled wird, setze $T_m := \max\{T_m, i\}$
- Prune alle Labels mit init. Connection $j \leq T_m$ (an jedem Knoten)
- Halte an, wenn Priority-Queue leer läuft

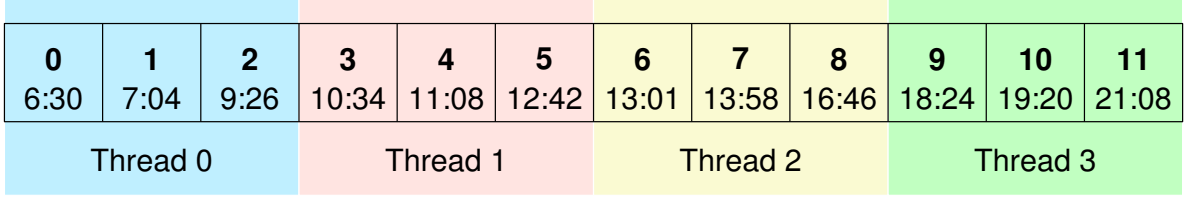
Parallelisierung: Idee

Gegeben:
Shared-Memory-Parallelisierung mit p Cores

Parallelisierung: Idee

Gegeben:
Shared-Memory-Parallelisierung mit p Cores

Idee:
Verteile initiale Connections c_i von s auf verschiedene Threads



- Jeder Thread führt SPCS auf seiner Teilmenge der Connections aus
- Ergebnisse werden im Anschluss zu $\text{dist}_s(v, \cdot)$ zusammengeführt
- Führe Connection Reduction auf gemergtem Ergebnis durch

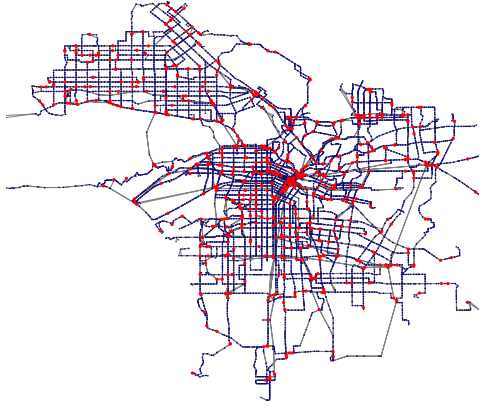
Eingabe

Netzwerk von **Los Angeles**:

- 15 581 Stops
- 1 046 580 Connections

Zugnetz von **Europa**:

- 30 517 Stops
- 1 775 533 Connections



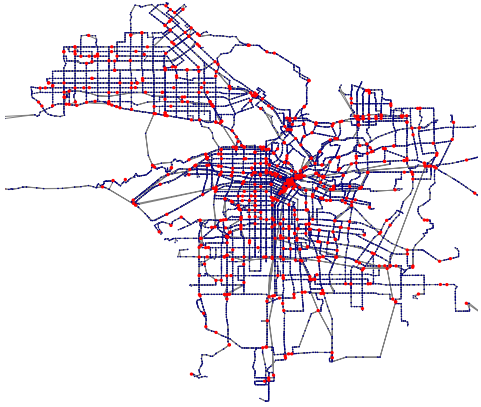
Eingabe

Netzwerk von **Los Angeles**:

- 15 581 Stops
- 1 046 580 Connections

Zugnetz von **Europa**:

- 30 517 Stops
- 1 775 533 Connections



Auswertung von 1 000 Anfragen
Wähle Start- und Zielstops zufällig gleichverteilt

One-to-All-Anfragen

		Los Angeles				Europe			
	p	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev
PSPCS	1	2.5 M	1209.0	1.0	—	3.3 M	2152.0	1.0	—
	2	2.5 M	690.0	1.8	14.7 %	3.1 M	1054.2	2.0	16.1 %
	4	2.5 M	417.4	2.9	18.2 %	3.4 M	673.8	3.2	24.4 %
	8	2.5 M	267.7	4.5	20.0 %	4.2 M	510.9	4.2	23.8 %
LC	1	18.9 M	1482.1	—	—	17.4 M	2497.1	—	—

One-to-All-Anfragen

		Los Angeles				Europe			
	p	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev
PSPCS	1	2.5 M	1209.0	1.0	—	3.3 M	2152.0	1.0	—
	2	2.5 M	690.0	1.8	14.7 %	3.1 M	1054.2	2.0	16.1 %
	4	2.5 M	417.4	2.9	18.2 %	3.4 M	673.8	3.2	24.4 %
	8	2.5 M	267.7	4.5	20.0 %	4.2 M	510.9	4.2	23.8 %
LC	1	18.9 M	1482.1	—	—	17.4 M	2497.1	—	—

- PSPCS betrachtet deutlich weniger Connections als LC

One-to-All-Anfragen

		Los Angeles				Europe			
	p	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev
PSPCS	1	2.5 M	1209.0	1.0	—	3.3 M	2152.0	1.0	—
	2	2.5 M	690.0	1.8	14.7 %	3.1 M	1054.2	2.0	16.1 %
	4	2.5 M	417.4	2.9	18.2 %	3.4 M	673.8	3.2	24.4 %
	8	2.5 M	267.7	4.5	20.0 %	4.2 M	510.9	4.2	23.8 %
LC	1	18.9 M	1482.1	—	—	17.4 M	2497.1	—	—

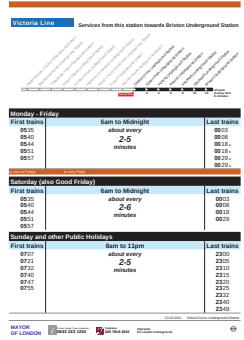
- PSPCS betrachtet deutlich weniger Connections als LC
- PSPCS skaliert sehr gut mit zunehmender Anzahl Cores

Multi-Label-Correcting
(MLC)

Bis jetzt...

Erinnerung: Ein Fahrplan besteht aus

- Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, ...),
- Routen (Bus-, U-Bahn-Linien, ...),
- Trips mit Abfahrt-/Ankunftszeiten,
- und Fußwegen zum Umsteigen.


Victoria Line

Services from this station towards Brixton Underground Station

Monday - Friday

First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-5	0008
0544	minutes	0016,
0551		0016,
0557		0029,
		0029,

Saturday (also Good Friday)

First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-6	0008
0544	minutes	0018
0551		0029
0557		

Sunday and other Public Holidays

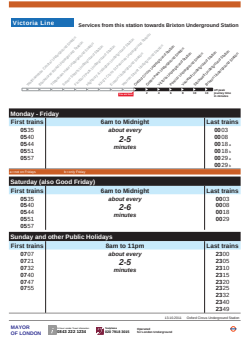
First trains	8am to 11pm	Last trains
0707	about every	2300
0721	2-5	2305
0732	minutes	2310
0740		2315
0747		2320
0755		2325
		2332
		2340
		2349

MAYOR OF LONDON

Bis jetzt...

Erinnerung: Ein Fahrplan besteht aus

- Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, ...),
- Routen (Bus-, U-Bahn-Linien, ...),
- Trips mit Abfahrt-/Ankunftszeiten,
- und Fußwegen zum Umsteigen.


Victoria Line

Services from this station towards Brixton Underground Station

Monday - Friday

First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-5	0008
0544	minutes	0016,
0551		0016,
0557		0029,
		0029,

Saturday (also Good Friday)

First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-6	0008
0544	minutes	0018
0551		0029
0557		

Sunday and other Public Holidays

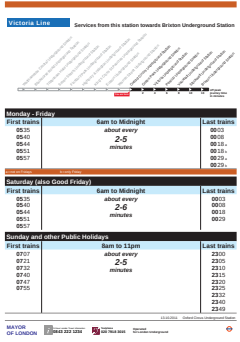
First trains	8am to 11pm	Last trains
0707	about every	2300
0721	2-5	2305
0732	minutes	2310
0740		2315
0747		2320
0755		2325
		2332
		2340
		2349

MAYOR OF LONDON

Earliest Arrival Problem:
Gegeben Stops s, t und Abfahrtszeit τ, berechne

- Journey zu t, die an s nicht früher als τ abfährt
- und an t frühestmöglich ankommt.

Bis jetzt...


Victoria Line

Services from this station towards Brixton Underground Station

Monday - Friday

First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-5	0008
0544	minutes	0016,
0551		0016,
0557		0029,
		0029,

Saturday (also Good Friday)

First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-6	0008
0544	minutes	0018
0551		0029
0557		

Sunday and other Public Holidays

First trains	8am to 11pm	Last trains
0707	about every	2300
0721	2-5	2305
0732	minutes	2310
0740		2315
0747		2320
0755		2325
		2332
		2340
		2349

MAYOR OF LONDON

Erinnerung: Ein Fahrplan besteht aus

- Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, ...),
- Routen (Bus-, U-Bahn-Linien, ...),
- Trips mit Abfahrt-/Ankunftszeiten,
- und Fußwegen zum Umsteigen.

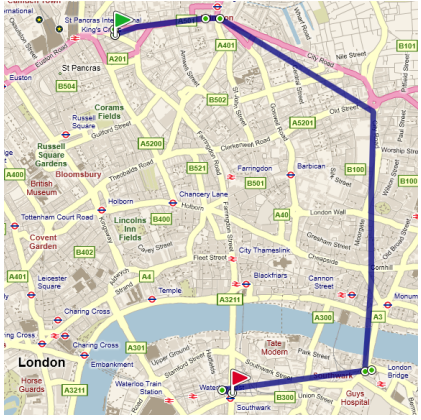
Earliest Arrival Problem:
Gegeben Stops s, t und Abfahrtszeit τ, berechne

- Journey zu t, die an s nicht früher als τ abfährt
- und an t frühestmöglich ankommt.

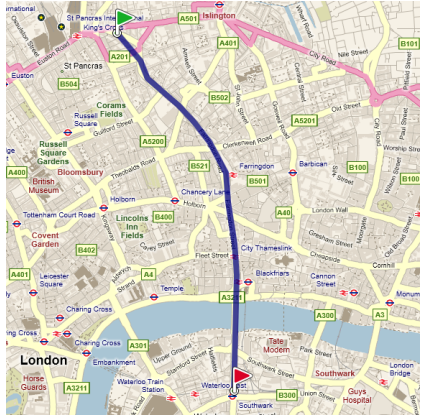
Reicht uns das?

Einbeziehen von Umstiegen

Umstiege zu betrachten ist wichtig!



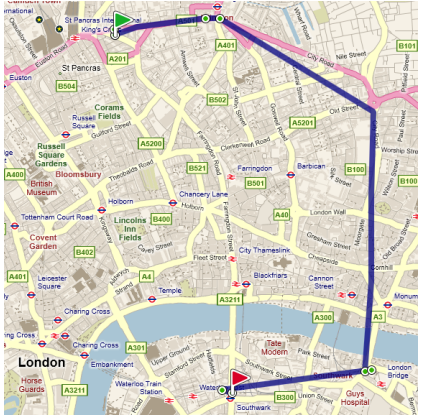
Ankunft 11:08 Uhr, 2 Umstiege



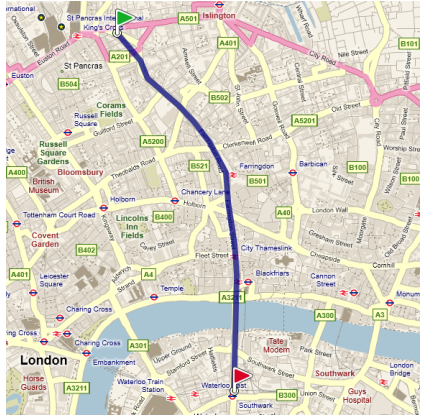
Ankunft 11:09 Uhr, 0 Umstiege

Einbeziehen von Umstiegen

Umstiege zu betrachten ist wichtig!



Ankunft 11:08 Uhr, 2 Umstiege



Ankunft 11:09 Uhr, 0 Umstiege

Berechne „gute“ Journeys für Ankunftszeit und Anzahl Umstiege.

Wiederholung – Pareto-Menge

Definition (Pareto-Optimum)

Gegeben eine Menge M von n-Tupeln:

$$\text{Tupel } m_i = (x_1, \ldots, x_n) \in M \text{ heißt Pareto-Optimum}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\nexists m_j \in M\colon\ m_j \neq m_i \text{ und } m_i \text{ ist in keinem Wert besser als } m_j$$
$$(m_j \text{ dominiert } m_i)$$

Wiederholung – Pareto-Menge

Definition (Pareto-Optimum)

Gegeben eine Menge M von n-Tupeln:

$$\text{Tupel } m_i = (x_1, \ldots, x_n) \in M \text{ heißt Pareto-Optimum}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\nexists m_j \in M\colon\ m_j \neq m_i \text{ und } m_i \text{ ist in keinem Wert besser als } m_j$$
$$(m_j \text{ dominiert } m_i)$$

Menge M heißt Pareto-Menge, wenn alle $m \in M$ Pareto-optimal.

Wiederholung – Pareto-Menge

Definition (Pareto-Optimum)

Gegeben eine Menge M von n-Tupeln:

$$\text{Tupel } m_i = (x_1, \ldots, x_n) \in M \text{ heißt Pareto-Optimum}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\nexists m_j \in M\colon\ m_j \neq m_i \text{ und } m_i \text{ ist in keinem Wert besser als } m_j$$
$$(m_j \text{ dominiert } m_i)$$

Menge M heißt Pareto-Menge, wenn alle $m \in M$ Pareto-optimal.

Beispiel: Betrachte Tupel aus Ankunftszeit und # Umstiege.

$M = \{(14{:}00 \text{ Uhr}, 5),\ (15{:}13 \text{ Uhr}, 3),\ (13{:}45 \text{ Uhr}, 4),\ (15{:}15 \text{ Uhr}, 0)\}$

Wiederholung – Pareto-Menge

Definition (Pareto-Optimum)

Gegeben eine Menge M von n-Tupeln:

$$\text{Tupel } m_i = (x_1, \ldots, x_n) \in M \text{ heißt Pareto-Optimum}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\nexists m_j \in M\colon\ m_j \neq m_i \text{ und } m_i \text{ ist in keinem Wert besser als } m_j$$
$$(m_j \text{ dominiert } m_i)$$

Menge M heißt Pareto-Menge, wenn alle $m \in M$ Pareto-optimal.

Beispiel: Betrachte Tupel aus Ankunftszeit und # Umstiege.

$M = \{(14{:}00 \text{ Uhr}, 5),\ (15{:}13 \text{ Uhr}, 3),\ (13{:}45 \text{ Uhr}, 4),\ (15{:}15 \text{ Uhr}, 0)\}$

Wiederholung – Pareto-Menge

Definition (Pareto-Optimum)

Gegeben eine Menge M von n-Tupeln:

$$\text{Tupel } m_i = (x_1, \ldots, x_n) \in M \text{ heißt Pareto-Optimum}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\nexists m_j \in M\colon\ m_j \neq m_i \text{ und } m_i \text{ ist in keinem Wert besser als } m_j$$
$$(m_j \text{ dominiert } m_i)$$

Menge M heißt Pareto-Menge, wenn alle $m \in M$ Pareto-optimal.

Beispiel: Betrachte Tupel aus Ankunftszeit und # Umstiege.

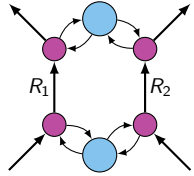
$M = \{(14{:}00 \text{ Uhr}, 5),\ (15{:}13 \text{ Uhr}, 3),\ (13{:}45 \text{ Uhr}, 4),\ (15{:}15 \text{ Uhr}, 0)\}$

Wie effizient berechnen?

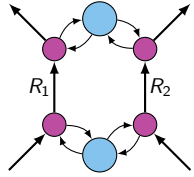
Multi-Label-Correcting – Ansatz

Idee:

- Benutze (zeitabhängiges) Graphmodell
- Grundlage: Dijkstras Algorithmus



Multi-Label-Correcting – Ansatz



Idee:

- Benutze (zeitabhängiges) Graphmodell
- Grundlage: Dijkstras Algorithmus

Aber:

- Label ℓ sind 2-Tupel aus Ankunftszeit und # Umstiege
- An jedem Knoten $v \in V$: Pareto-Menge B_v von Labeln
- Priority Queue verwaltet Label statt Knoten
- Priorität ist Ankunftszeit
  (Wieder: keine Totalordnung der Label $\Rightarrow$ label-correcting)
- Dominanz von Labeln in B_v on-the-fly

Multi-Label-Correcting (MLC)

MLC($G = (V, E), s, \tau_{\text{dep}}$)

1 $B_v \leftarrow \{\}$ for each $v \in V$; $B_s \leftarrow \{(\tau_{\text{dep}}, 0)\}$
2 $Q.clear()$, $Q.insert(s, (\tau_{\text{dep}}, 0))$
3 **while** $!Q.empty()$ **do**
4 u and $\ell = (\tau, tr) \leftarrow Q.deleteMin()$
5 **for** *all edges* $e = (u, v) \in E$ **do**
6 **if** *e is a transfer edge* **then** $tr' \leftarrow tr + 1$
7 **else** $tr' \leftarrow tr$
8 $\ell' \leftarrow (\tau + \text{len}(e, \tau), tr')$
9 **if** ℓ' *is not dominated by any* $\ell'' \in B_v$ **then**
10 $B_v.insert(\ell')$
11 Remove non-Pareto-optimal labels from B_v and Q
12 $Q.insert(v, \ell')$

MLC – Diskussion

Diskussion:

- Pareto-Mengen B_v sind dynamische Datenstrukturen $\rightsquigarrow$ teuer!
- Sehr viele Queue-Operationen
- Testen der Dominanz in $\mathcal{O}(|B_v|)$ möglich
- Stoppkriterium?

MLC – Diskussion

Diskussion:

- Pareto-Mengen B_v sind dynamische Datenstrukturen $\rightsquigarrow$ teuer!
- Sehr viele Queue-Operationen
- Testen der Dominanz in $\mathcal{O}(|B_v|)$ möglich
- Stoppkriterium?

Verbesserungen für MLC:

- Jedes B_v verwaltet bestes ungesettletes Label selbst
  $\Rightarrow$ Priority Queue auf Knoten statt Labeln
- Label-Forwarding:
  Wenn Kante keine Kosten hat, überspringe Queue
- Target-Pruning:
  Verwerfe Label ℓ' an Knoten v, wenn es von B_t dominiert wird

Literatur I


Daniel Delling, Bastian Katz, and Thomas Pajor.
Parallel Computation of Best Connections in Public Transportation Networks.
ACM Journal of Experimental Algorithmics, 17(4):4.1–4.26, July 2012.


Yann Disser, Matthias Müller–Hannemann, and Mathias Schnee.
Multi-Criteria Shortest Paths in Time-Dependent Train Networks.
In Catherine C. McGeoch, editor, *Proceedings of the 7th Workshop on Experimental Algorithms (WEA'08)*, volume 5038 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 347–361. Springer, June 2008.


Daniel Delling, Thomas Pajor, and Dorothea Wagner.
Engineering Time-Expanded Graphs for Faster Timetable Information.
In Ravindra K. Ahuja, Rolf H. Möhring, and Christos Zaroliagis, editors, *Robust and Online Large-Scale Optimization*, volume 5868 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 182–206. Springer, 2009.


Evangelia Pyrga, Frank Schulz, Dorothea Wagner, and Christos Zaroliagis.
Efficient Models for Timetable Information in Public Transportation Systems.
ACM Journal of Experimental Algorithmics, 12(2.4):1–39, 2008.