

# Algorithmen für Routenplanung

4. Vorlesung, Sommersemester 2023

Michael Zündorf | 3. Mai 2023



# Kürzeste Wege in Straßennetzwerken

Beschleunigungstechniken

- Arc-Flags
- SHARC

**Wie Suche zielgerichtet machen?**

## Wie Suche zielgerichtet machen?

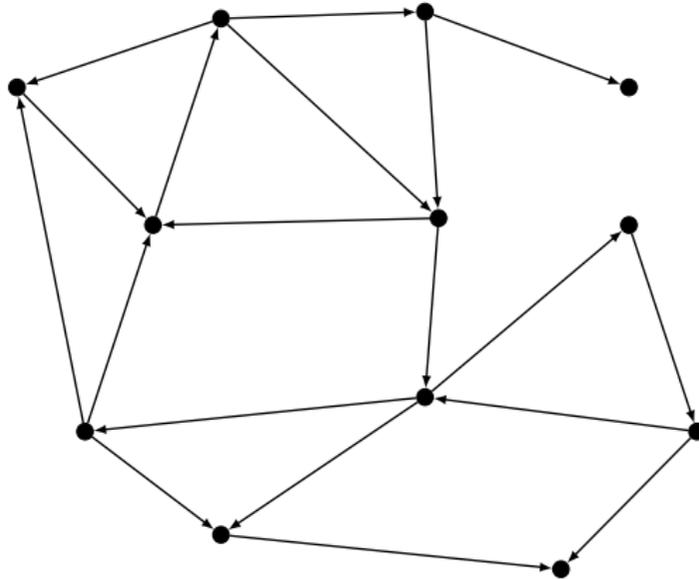
- Reihenfolge in der Knoten besucht werden ändern
- Nichtbeachten von Kanten oder Knoten die in die “falsche” Richtung führen

**Jetzt:** letzteres

# Arc-Flags

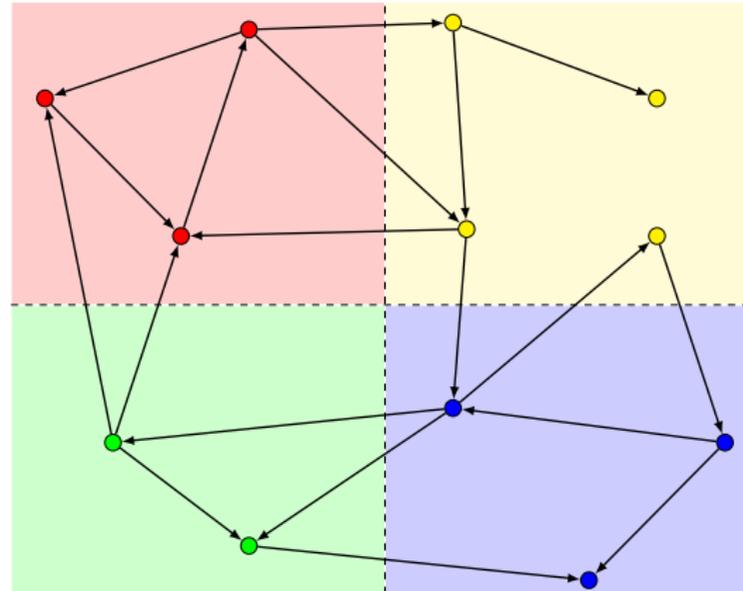
# Arc-Flags: Idee

- partitioniere Graphen in  $k$  Zellen
- hänge Label mit  $k$  Bits an jede Kante
- gibt an, ob Kante  $e$  für Ziele in Zelle  $T$  benötigt wird



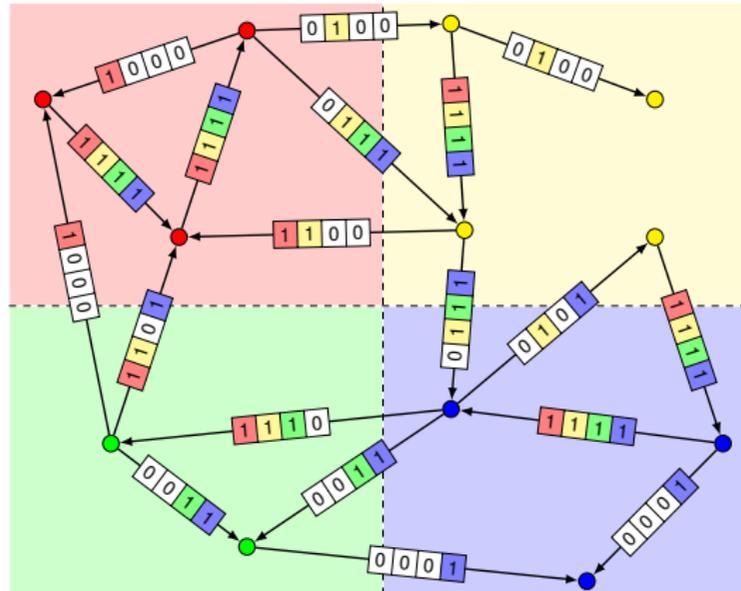
# Arc-Flags: Idee

- partitioniere Graphen in  $k$  Zellen
- hänge Label mit  $k$  Bits an jede Kante
- gibt an, ob Kante  $e$  für Ziele in Zelle  $T$  benötigt wird



# Arc-Flags: Idee

- partitioniere Graphen in  $k$  Zellen
- hänge Label mit  $k$  Bits an jede Kante
- gibt an, ob Kante  $e$  für Ziele in Zelle  $T$  benötigt wird



---

Arc-Flag-Dijkstra( $G = (V, E)$ ,  $s$ ,  $t$ , Arc-Flags  $AF(\cdot)$ )

---

```
1  $d[s] = 0$ 
2  $Q.clear()$ ,  $Q.add(s, 0)$ 
3 while  $!Q.empty()$  do
4    $u \leftarrow Q.deleteMin()$ 
5   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
6     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  and  $AF_T(e) = \text{true}$  then
7        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
8       if  $v \in Q$  then  $Q.decreaseKey(v, d[v])$ 
9       else  $Q.insert(v, d[v])$ 
```

---

# Arc-Flags Vorberechnung

## Zwei Schritte:

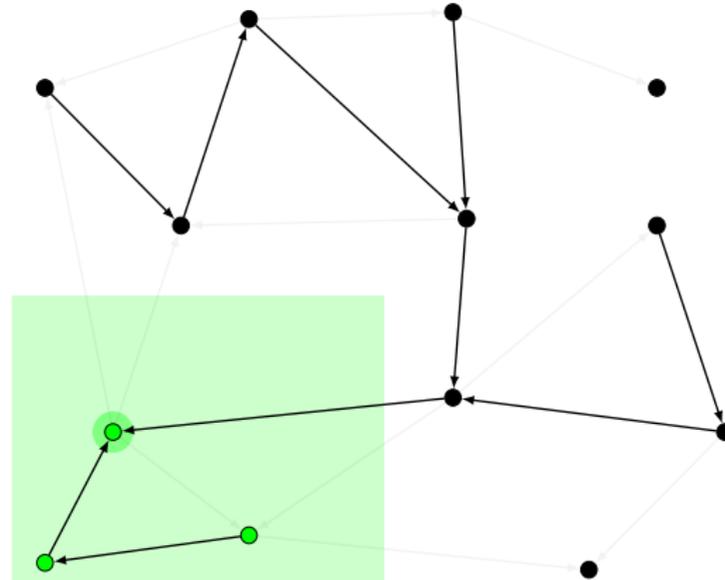
- Partitionierung
- setze korrekte Flaggen

## Zwei Schritte:

- Partitionierung
- setze korrekte Flaggen

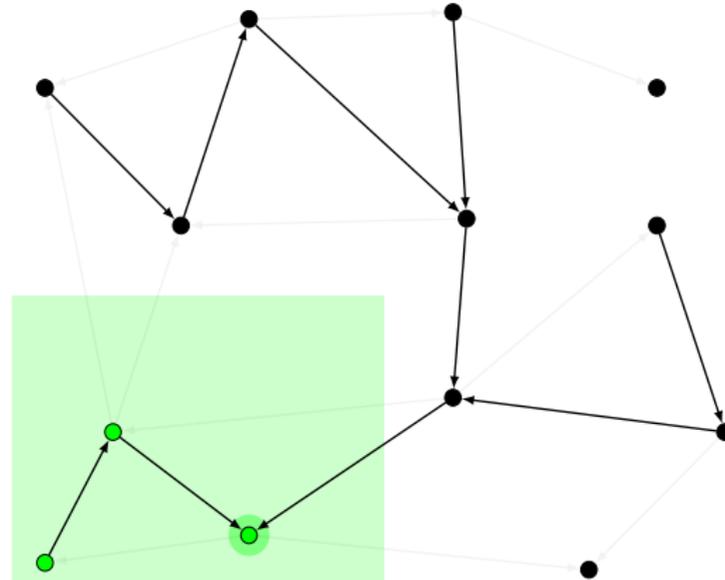
# Flaggenberechnung – Naiv

- von jedem Knoten: konstruiere Rückwärts KW-Baum
- setze Flagge der Region der Wurzel für jede Baumkante
- Berechnung mit all-pairs shortest paths (APSP)



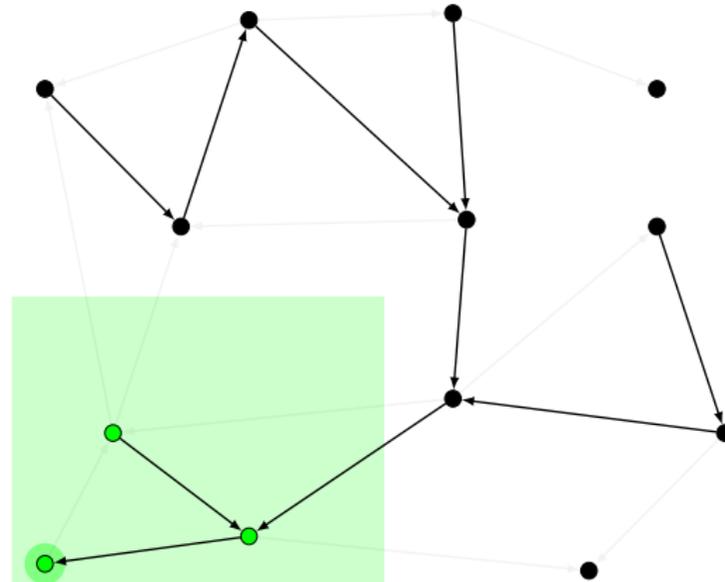
# Flaggenberechnung – Naiv

- von jedem Knoten: konstruiere Rückwärts KW-Baum
- setze Flagge der Region der Wurzel für jede Baumkante
- Berechnung mit all-pairs shortest paths (APSP)



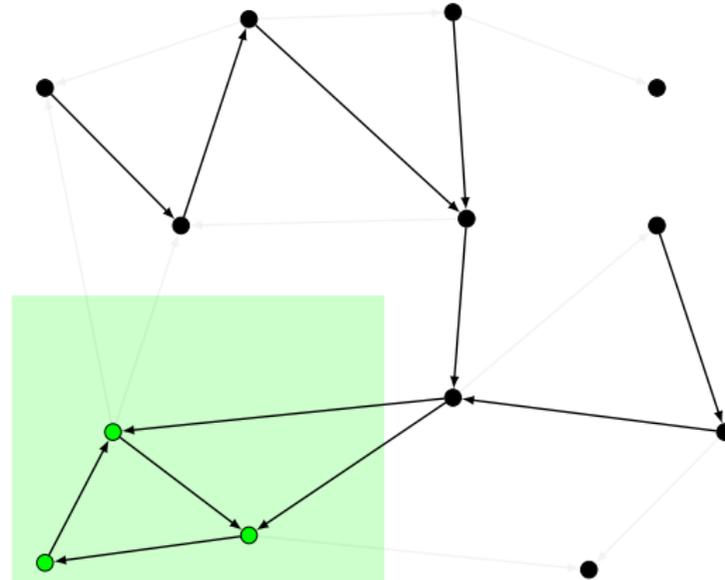
# Flaggenberechnung – Naiv

- von jedem Knoten: konstruiere Rückwärts KW-Baum
- setze Flagge der Region der Wurzel für jede Baumkante
- Berechnung mit all-pairs shortest paths (APSP)



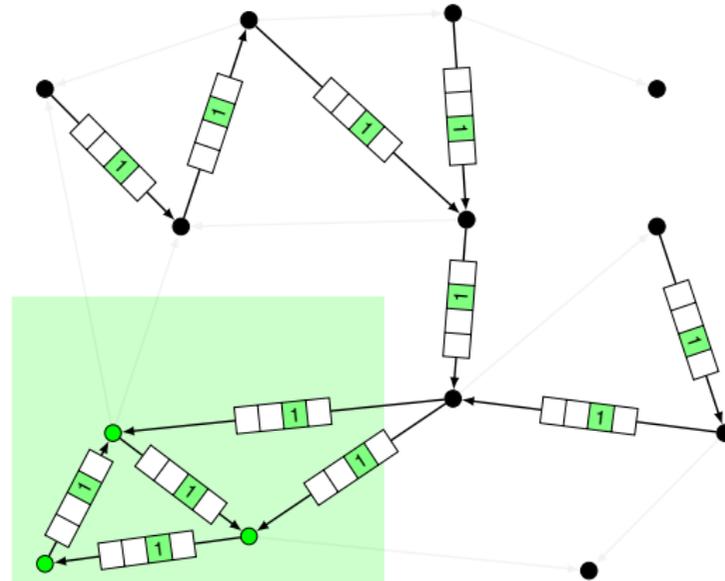
# Flaggenberechnung – Naiv

- von jedem Knoten: konstruiere Rückwärts KW-Baum
- setze Flagge der Region der Wurzel für jede Baumkante
- Berechnung mit all-pairs shortest paths (APSP)



# Flaggenberechnung – Naiv

- von jedem Knoten: konstruiere Rückwärts KW-Baum
- setze Flagge der Region der Wurzel für jede Baumkante
- Berechnung mit all-pairs shortest paths (APSP)



# Flaggenberechnung – Randknoten

**Beobachtung:** Man muss durch Randknoten in die Zelle

**Beobachtung:** Man muss durch Randknoten in die Zelle

- setze Intra-Zellen Kanten auf `true`
- einen Rückwärts Dijkstra-Baum pro Randknoten  $b$
- setze Flagge  $AF_{region(b)}(e) = \text{true}$  wenn  $e$  Baumkante des Baums von  $b$  ist

# Flaggenberechnung: Angehängte Bäume

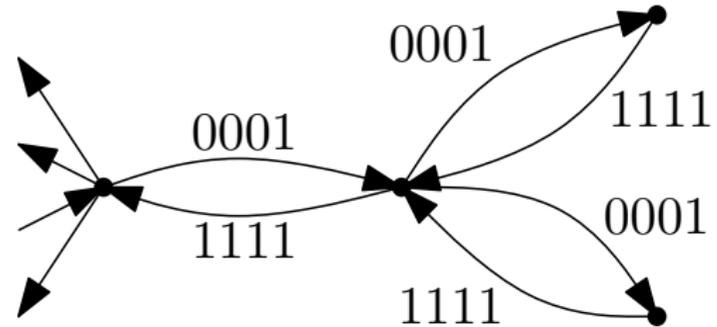
## Beobachtung:

- Für manche Kanten kann man die Flaggen automatisch setzen

## Angehangene Bäume:

- Kanten zur Wurzel hin haben alle Flaggen gesetzt
- Kanten von Wurzel weg haben nur eine Flagge gesetzt
- Also: Entferne Bäume vor Arcs-Flag-Berechnung aus Graph
- Knotenzahl verringert sich um ein Drittel

**Anmerkung:** Alle Knoten eines angehangenen Baumes müssen zur gleichen Zelle wie dessen Wurzel gehören.



In aufsteigender Güte:

- Kürzeste-Wege-Baum von jedem Knoten
- Kürzeste-Wege-Baum von jedem Randknoten
- „Zentralisierte Bäume“  
(nicht Stoff der Vorlesung, ca. Faktor 4 schneller)
- Beschleunigte KW-Baum-Berechnung  
(PHAST, kommt in späterer VL)

## Zwei Schritte:

- Partitionierung
- setze korrekte Flaggen

## Zwei Schritte:

- Partitionierung
- setze korrekte Flaggen

Wie sollte der Graph partitioniert werden?

- Arc-Flags Algorithmus ist korrekt für beliebige Partition.
- wie sieht eine “gute” Partition aus?
- Ziel: Möglichst schnelle Anfragen.
- formal?

Definiere ein Maß, um die Güte einer Partition zu bewerten.

Annahmen:

- Kanten sind kürzeste Wege zwischen ihren Endknoten.
- kürzeste Wege sind eindeutig.

Damit bestimmt die Partition eindeutig, welche Flags gesetzt werden.

## Definition (Suchraumgröße)

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit Gewichtsfunktion  $len: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  
 $\mathcal{C}$  eine Partition von  $G$ , und  $s, t \in V$  zwei Knoten. Dann ist

- $S(s, t) :=$  Anzahl abgearbeiteter Knoten einer  $s$ - $t$ -Anfrage, mit Arc-Flags induziert durch die Partition  $\mathcal{C}$ .
- $S_{\max} := \max_{s, t \in V} S(s, t)$ .

## Definition (Suchraumgröße)

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit Gewichtsfunktion  $len: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  
 $\mathcal{C}$  eine Partition von  $G$ , und  $s, t \in V$  zwei Knoten. Dann ist

- $S(s, t) :=$  Anzahl abgearbeiteter Knoten einer  $s$ - $t$ -Anfrage, mit Arc-Flags induziert durch die Partition  $\mathcal{C}$ .
- $S_{\max} := \max_{s, t \in V} S(s, t)$ .

## MinWorstCasePartition

**Gegeben:** Graph  $G = (V, E, len)$ , natürliche Zahl  $k$ .

**Gesucht:** Partition  $\mathcal{C}$ ,  $|\mathcal{C}| \leq k$ , so dass  $S_{\max}$  minimiert wird.

## Definition (Suchraumgröße)

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit Gewichtsfunktion  $len: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\mathcal{C}$  eine Partition von  $G$ , und  $s, t \in V$  zwei Knoten. Dann ist

- $S(s, t) :=$  Anzahl abgearbeiteter Knoten einer  $s$ - $t$ -Anfrage, mit Arc-Flags induziert durch die Partition  $\mathcal{C}$ .
- $S_{\max} := \max_{s, t \in V} S(s, t)$ .

## MinWorstCasePartition

**Gegeben:** Graph  $G = (V, E, len)$ , natürliche Zahl  $k$ .

**Gesucht:** Partition  $\mathcal{C}$ ,  $|\mathcal{C}| \leq k$ , so dass  $S_{\max}$  minimiert wird.

*Anmerkung:*

Ohne festen Parameter  $k$  ist die optimale Lösung immer eine Partition  $\mathcal{C} = \{\{v\} \mid v \in V\}$  — dies führt aber zu Speicherverbrauch  $\mathcal{O}(nm)$ .

Für Graph  $G = (V, E)$ , Gewichtsfunktion  $len$ , Partition  $\mathcal{C}$  von  $G$ :

## Lemma

*Für jedes  $s \in V$ ,  $T \in \mathcal{C}$  gibt einen Knoten  $t \in V$ , so dass eine  $s$ - $t$ -Anfrage alle (erreichbaren) Knoten aus  $T$  abarbeitet (auch bei aktiviertem Stoppkriterium).*

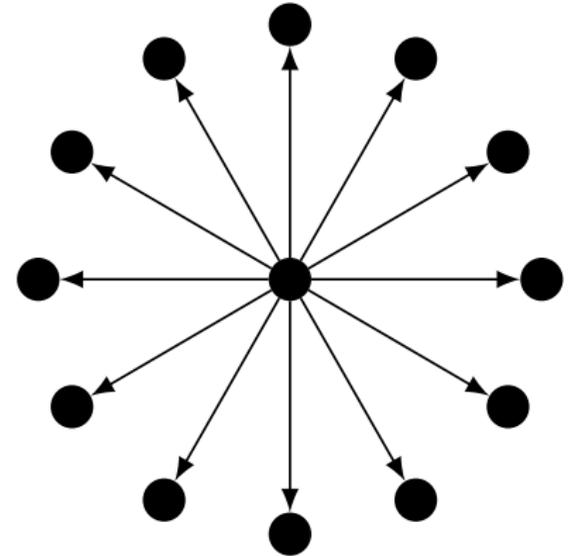
### **Beweis:**

Annahme: Eindeutiges tie breaking für priority queue

- für festes  $s$  werden alle Knoten aus  $T$  in einer festen Reihenfolge abgearbeitet
- setze  $t :=$  letzter Knoten in dieser Reihenfolge

Erster Schritt: Sterne, Kanten von der Wurzel weggerichtet.

Wie groß ist  $S_{\max} := \max_{s,t \in V}$  (für beliebige Partition)?



Erster Schritt: Sterne, Kanten von der Wurzel weggerichtet.

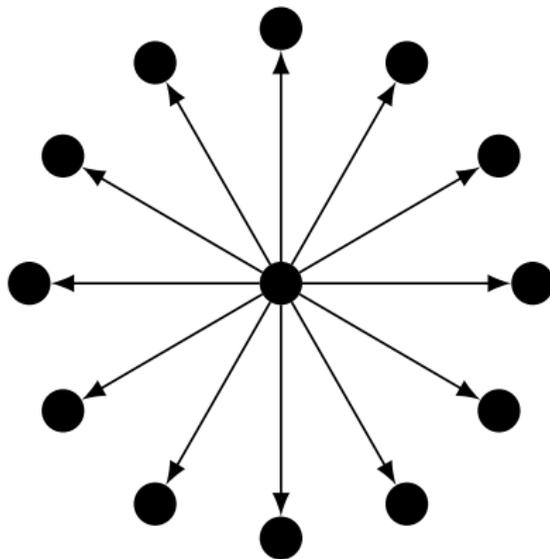
Wie groß ist  $S_{\max} := \max_{s,t \in V}$  (für beliebige Partition)?

Fallunterscheidung:

- 1 Knoten  $s$  ist Blatt:  $S(s, t) = 1$  für beliebige  $t$ .
- 2 Knoten  $s$  ist die Wurzel: für jede Zelle  $T$  gibt es eine  $s$ - $t$ -Query, so dass alle Knoten aus  $T$  abgearbeitet werden.

$\Rightarrow S_{\max} = 1 + \max_{T \in \mathcal{C}} |T \setminus \{r\}|$  (für Stern mit Wurzel  $r$ ).

$\Rightarrow$  Minimal wenn Blätter gleichmäßig auf Zellen der Partition verteilt.



Erster Schritt: Sterne, Kanten von der Wurzel weggerichtet.

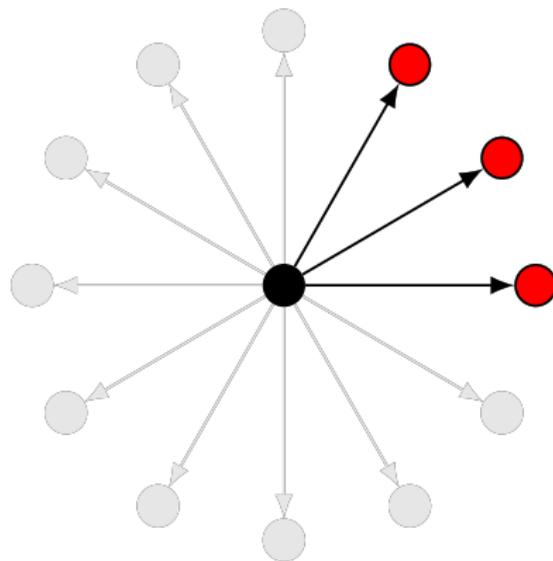
Wie groß ist  $S_{\max} := \max_{s,t \in V}$  (für beliebige Partition)?

Fallunterscheidung:

- 1 Knoten  $s$  ist Blatt:  $S(s, t) = 1$  für beliebige  $t$ .
- 2 Knoten  $s$  ist die Wurzel: für jede Zelle  $T$  gibt es eine  $s$ - $t$ -Query, so dass alle Knoten aus  $T$  abgearbeitet werden.

$\Rightarrow S_{\max} = 1 + \max_{T \in \mathcal{C}} |T \setminus \{r\}|$  (für Stern mit Wurzel  $r$ ).

$\Rightarrow$  Minimal wenn Blätter gleichmäßig auf Zellen der Partition verteilt.



Erster Schritt: Sterne, Kanten von der Wurzel weggerichtet.

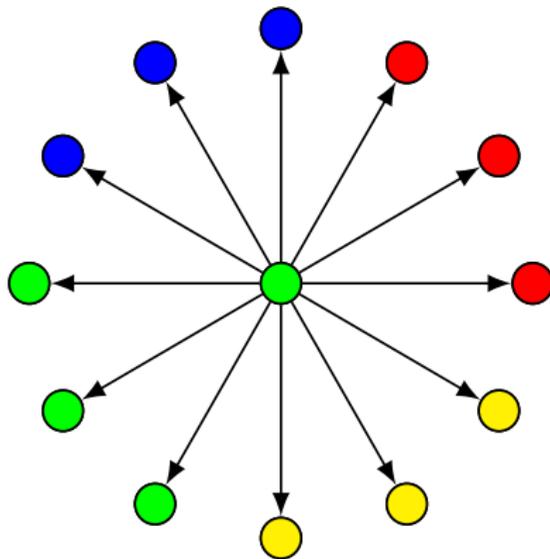
Wie groß ist  $S_{\max} := \max_{s,t \in V}$  (für beliebige Partition)?

Fallunterscheidung:

- 1 Knoten  $s$  ist Blatt:  $S(s, t) = 1$  für beliebige  $t$ .
- 2 Knoten  $s$  ist die Wurzel: für jede Zelle  $T$  gibt es eine  $s$ - $t$ -Query, so dass alle Knoten aus  $T$  abgearbeitet werden.

$\Rightarrow S_{\max} = 1 + \max_{T \in \mathcal{C}} |T \setminus \{r\}|$  (für Stern mit Wurzel  $r$ ).

$\Rightarrow$  Minimal wenn Blätter gleichmäßig auf Zellen der Partition verteilt.



## Satz

MinWorstCasePartition ist  $\mathcal{NP}$ -schwer für gerichtete Bäume mit Höhe 2, sogar wenn alle Kanten Einheitsgewicht haben.

## Satz

MinWorstCasePartition ist  $\mathcal{NP}$ -schwer für gerichtete Bäume mit Höhe 2, sogar wenn alle Kanten Einheitsgewicht haben.

Betrachte Entscheidungsproblem:

## MinWorstCasePartition-Dec

**Gegeben:** Graph  $G = (V, E, \text{len})$ , natürliche Zahlen  $k, S^*$ .

**Gesucht:** Existiert  $\mathcal{C}$ ,  $|\mathcal{C}| \leq k$ , so dass  $S_{\max} \leq S^*$ ?

Reduktion vom stark  $\mathcal{NP}$ -schweren Entscheidungsproblem 3-Partition.

## 3-Partition

### Gegeben:

- Menge  $S = \{s_1, \dots, s_{3m}\}$ ,
- natürliche Zahl  $B$ ,
- Gewichtsfunktion  $\omega: S \rightarrow \{1, \dots, B\}$ , so dass  $\sum_{i=1}^{3m} \omega(s_i) = mB$ .

**Gesucht:** Kann  $S$  in  $m$  Mengen  $S_i$  partitioniert werden, so dass  $|S_i| = 3$  für alle  $i$  und  $\sum_{s \in S_i} \omega(s) = B$ ?

Sogar  $\mathcal{NP}$ -schwer, wenn  $\frac{B}{4} < \omega(s_i) < \frac{B}{2}$  für alle  $s_i$ .

Beispielinstanz:

$m = 2, |S| = 6, B = 11$  und Gewichte 3, 3, 3, 4, 4, 5.

Reduktion vom stark  $\mathcal{NP}$ -schweren Entscheidungsproblem 3-Partition.

## 3-Partition

### Gegeben:

- Menge  $S = \{s_1, \dots, s_{3m}\}$ ,
- natürliche Zahl  $B$ ,
- Gewichtsfunktion  $\omega: S \rightarrow \{1, \dots, B\}$ , so dass  $\sum_{i=1}^{3m} \omega(s_i) = mB$ .

**Gesucht:** Kann  $S$  in  $m$  Mengen  $S_i$  partitioniert werden, so dass  $|S_i| = 3$  für alle  $i$  und  $\sum_{s \in S_i} \omega(s) = B$ ?

Sogar  $\mathcal{NP}$ -schwer, wenn  $\frac{B}{4} < \omega(s_i) < \frac{B}{2}$  für alle  $s_i$ .

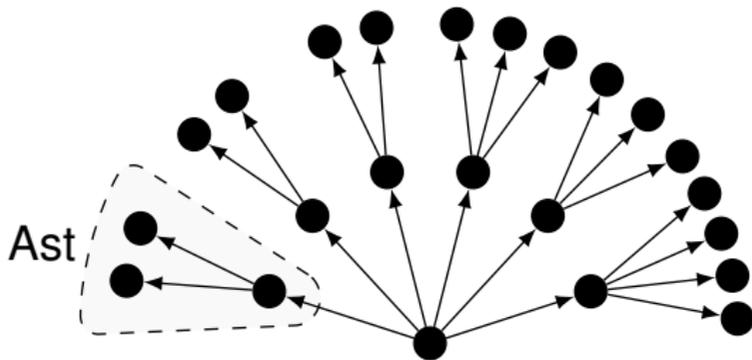
Beispielinstanz:

$m = 2$ ,  $|S| = 6$ ,  $B = 11$  und Gewichte **3, 3, 3, 4, 4, 5**.

**Reduktion:** Erzeuge Baum mit

- Wurzel  $r$ ,
- einem Mittelknoten pro Element  $s_i$  aus  $S$ ,
- an jedem Mittelknoten jeweils  $\omega(s_i) - 1$  Blätter.

Beispielinstanz:  $m = 2$ ,  $|S| = 6$ ,  $B = 11$  und Gewichte 3, 3, 3, 4, 4, 5.

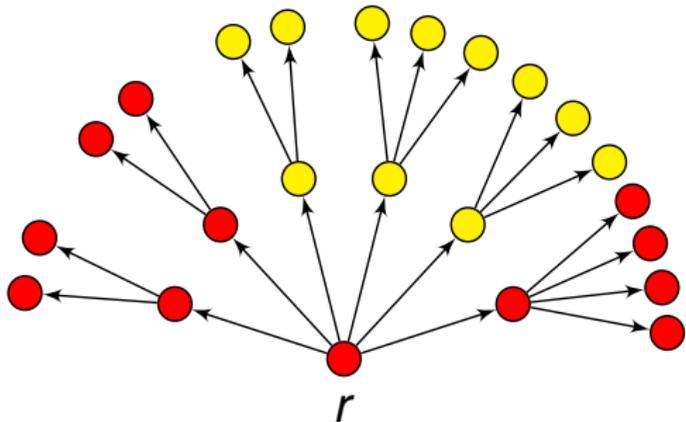


*Behauptung:*  $(S, B)$  ist erfüllbare 3-Partition-Instanz genau dann, wenn  $S_{\max} \leq B + 1$  für Partitionen mit  $m$  Zellen.

$\Rightarrow (S, B)$  erfüllbar.

Zu zeigen:  $S_{\max} \leq B + 1$ .

- Weise jeder Zelle drei Äste zu, die einem Tripel der Lösung entsprechen.
- Im Beispiel:  $\{3, 3, 5\}, \{3, 4, 4\}$ .



Queries mit Startknoten  $s \neq r$ :  $S(s, t) < \frac{B}{2}$ .

Queries mit Startknoten  $r$ : Nur  $r$  selbst und Knoten innerhalb der Zielzelle werden abgearbeitet.

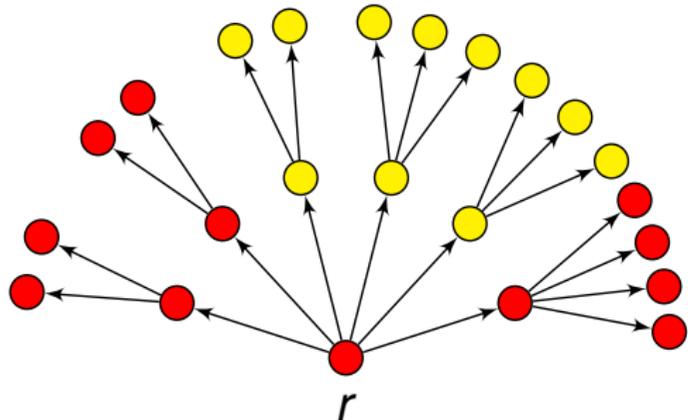
$\Rightarrow S_{\max} \leq B + 1$ .

⇐) **Es gilt**  $S_{\max} \leq B + 1$ .

Zu zeigen:  $(S, B)$  erfüllbar.

Wir erhalten eine Lösung für 3-Partition, falls ...

- jede Zelle genau  $B$  Astknoten enthält.
- jeder Ast genau einer Zelle zugeordnet ist.



Pro Zelle  $T$  gibt es eine Query von  $r$ , die  $T$  komplett abarbeitet.

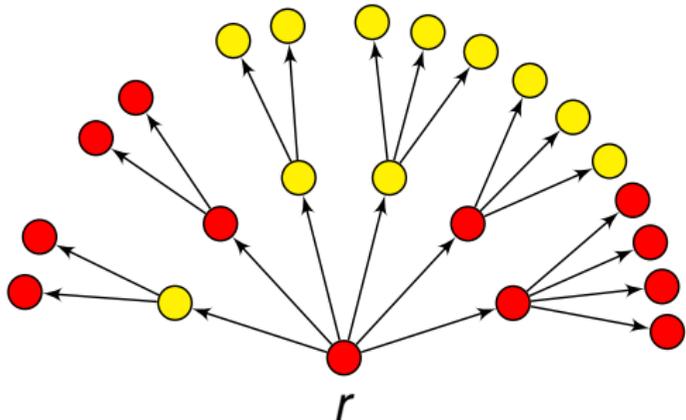
⇒ Wegen  $S_{\max} \leq B + 1$  enthält keine Zelle mehr als  $B$  Astknoten.

⇐) **Es gilt**  $S_{\max} \leq B + 1$ .

Zu zeigen:  $(S, B)$  erfüllbar.

Wir erhalten eine Lösung für 3-Partition, falls ...

- jede Zelle genau  $B$  Astknoten enthält.
- jeder Ast genau einer Zelle zugeordnet ist.



Annahme: ein Ast enthält Knoten aus verschiedenen Zellen.

⇒ ∃ Blatt, dessen Zelle  $T$  nicht der Zelle des Mittelknoten entspricht.

⇒ Worst-Case Query nach  $T$  arbeitet diesen Mittelknoten ab.

⇒  $S_{\max} > B + 1$ . ⚡

□

# Übersicht: Worst-Case

Gerichtet:

|                           |   |                        |
|---------------------------|---|------------------------|
| Sterne                    |  | $\mathcal{O}(n)$       |
| Bäume ( $h \leq 2$ )      |  | $\mathcal{NP}$ -schwer |
| Pfade                     |  | $\mathcal{O}(n)$       |
| Bäume ( $\Delta \leq 3$ ) |  | $\mathcal{NP}$ -schwer |
| Kreise                    |  | $\mathcal{O}(n)$       |

Ungerichtet:

|                           |   |                        |
|---------------------------|---|------------------------|
| Sterne                    |  | $\mathcal{O}(n)$       |
| Bäume ( $h \leq 2$ )      |  | $\mathcal{NP}$ -schwer |
| Pfade                     |  | $\mathcal{O}(n)$       |
| Bäume ( $\Delta \leq 3$ ) |  | $\mathcal{NP}$ -schwer |
| Kreise                    |  | ?                      |

- Ähnliche Resultate für andere Graphklassen (beschränkter Grad, ungerichtet).
- Beweisideen in den meisten Fällen ähnlich.
- Problem `MinWorstCasePartition` ist selbst für stark eingeschränkte Graphklassen  $\mathcal{NP}$ -schwer.

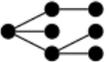
# Übersicht: Average-Case

Alternativ: Minimiere erwarteten Suchraum  $S_{\text{avg}} := \sum_{s,t \in V} S(s, t) / n^2$ .

Gerichtet:

|                           |   |                        |
|---------------------------|---|------------------------|
| Sterne                    |  | $\mathcal{O}(n)$       |
| Bäume ( $h \leq 2$ )      |  | $\mathcal{NP}$ -schwer |
| Pfade                     |  | $\mathcal{O}(n)$       |
| Bäume ( $\Delta \leq 3$ ) |  | ?                      |
| Kreise                    |  | $\mathcal{O}(n)$       |

Ungerichtet:

|                           |   |                        |
|---------------------------|---|------------------------|
| Sterne                    |  | $\mathcal{O}(n)$       |
| Bäume ( $h \leq 2$ )      |  | $\mathcal{NP}$ -schwer |
| Pfade                     |  | $\mathcal{O}(n)$       |
| Bäume ( $\Delta \leq 3$ ) |  | ?                      |
| Kreise                    |  | ?                      |

- Beweise analog zum Worst Case.
- Auch hier Schwereresultate für stark eingeschränkte Graphen.

⇒ Verwende Heuristiken.

*Anmerkung:*

Für viele Beschleunigungstechniken in dieser Vorlesung gibt es vergleichbare Schwereresultate.

# Heuristiken

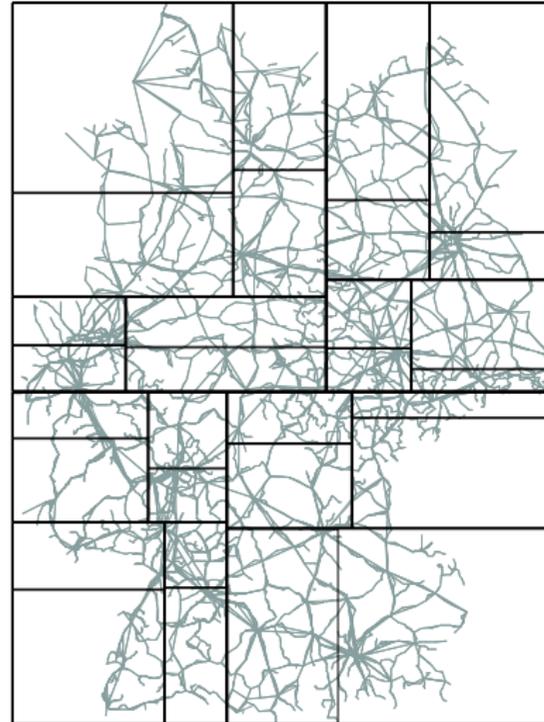
## Anforderungen:

- balanciert

## mögliche Partitionen:

- Gitter
- Quad-Baum
  - iterativ in 4 Zellen unterteilen
- kd-Baum
  - Verallgemeinerung von Quad-Baum

## weitere Anforderungen?

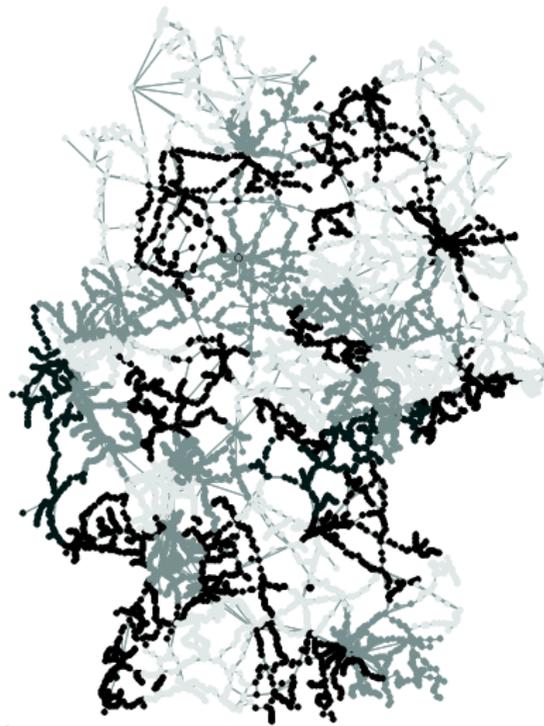


## Anforderungen:

- ausbalanciert
- wenige Randknoten
- zusammenhängend

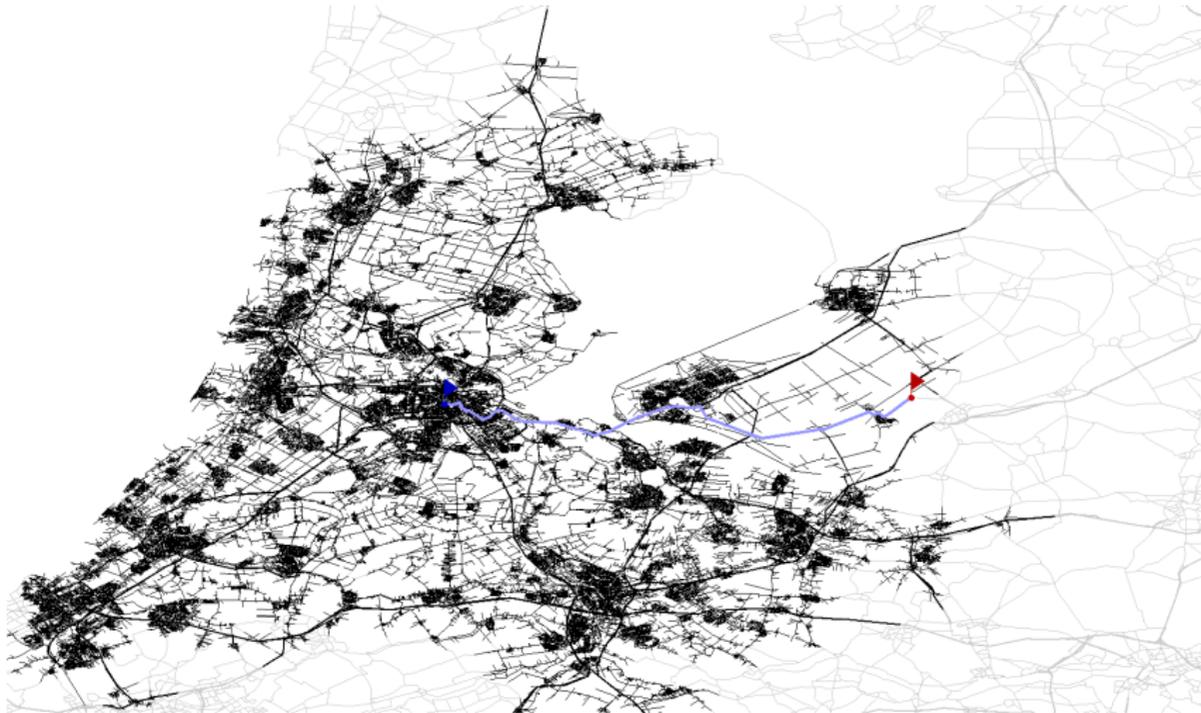
## Black-Box Partitionierer (METIS, ...):

- benutzen keine Einbettung
- oft: teilen rekursiv Graphen in  $k$  Teile mit kleinem Schnitt
- bringen gute Lösungen für Arc-Flags

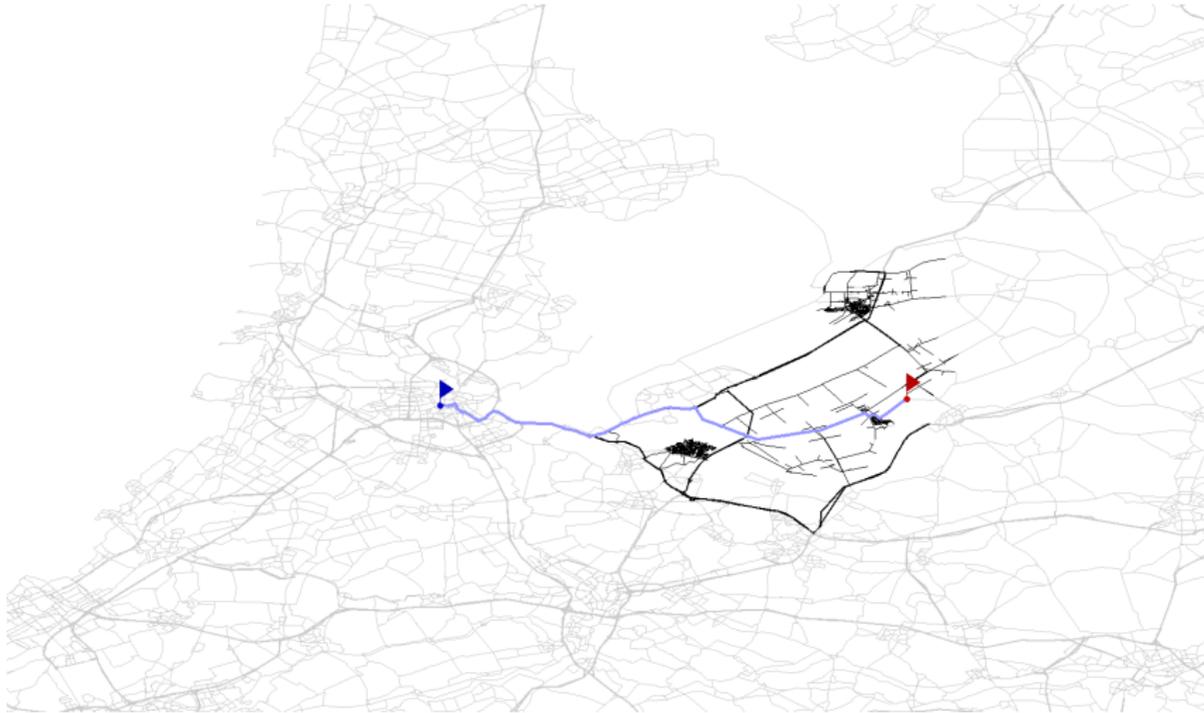


# Arc-Flags Eigenschaften

# Suchraum – Dijkstra



# Suchraum – Arc-Flags



## Korrektheit

ArcFlagsDijkstra ist korrekt

**zu zeigen:** für jeden kürzesten  $s$ - $t$ -Weg  $P = (s = u_1, \dots, u_k = t)$  haben alle Kanten  $(u_i, u_{i+1})$  die Flagge  $AF_T(u_i, u_{i+1})$  gesetzt.

- für alle  $(u_i, u_{i+1})$  in  $T$  trivial
- sei  $u_j$  der letzte Knoten auf  $P$  in  $T$
- $u_j$  also Randknoten und somit Rückwärtsbaum gebaut von  $u_j$
- $P' = (u_1, \dots, u_j)$  ist Subpfad von  $P$  und somit ein kürzester Weg von  $u_1$  nach  $u_j$
- somit Baumkanten mit gesetzten Flaggen

## Vorteile:

- einfacher Anfrage Algorithmus
- leicht on-top auf bestehende Systeme zu setzen
- ausreichende Beschleunigung

## Nachteile:

- hohe Vorberechnungsdauer
- weitere?

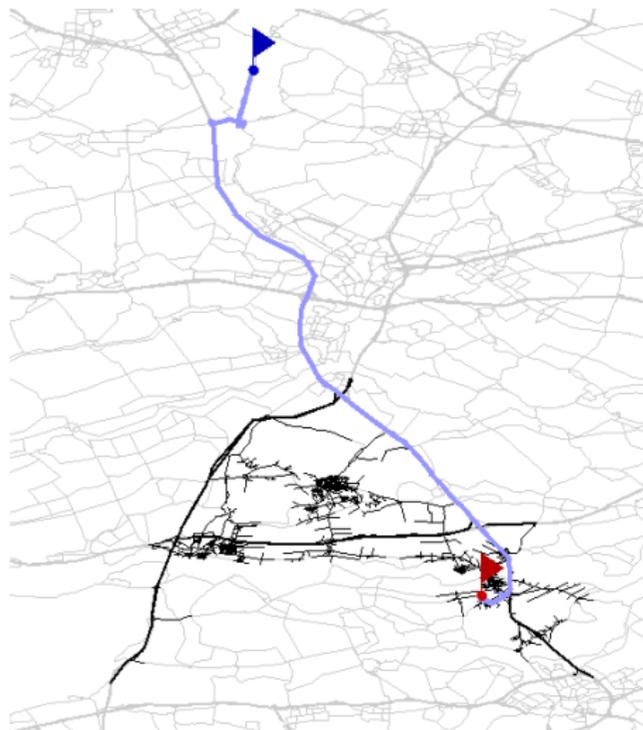
# Coning-Effekt

## Beobachtung:

- lange Zeit nur eine Kante wichtig
- daher nur ein Knoten in der Queue
- aber: je näher an der Zelle, desto mehr Kanten werden wichtig
- Suche fächert sich auf
- in Zelle werden dann alle Kanten relaxiert

## Zwei Ansätze:

- bidirektionale Flags
- multi-level Flags



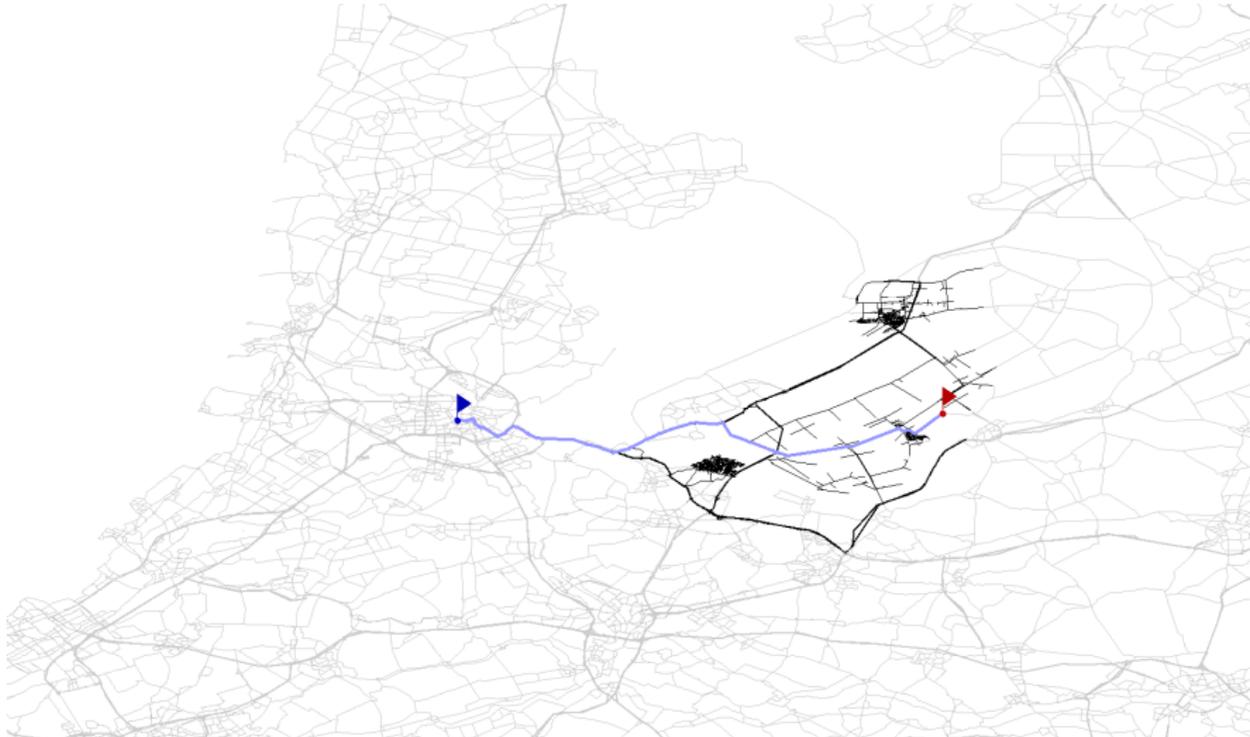
## Vorbereitung:

- Vorwärts- und Rückwärtsflaggen
- Rückwärtsflaggen analog für eingehende Kanten berechnet
- Vorbereitungszeit in gerichteten Graphen: Faktor 2

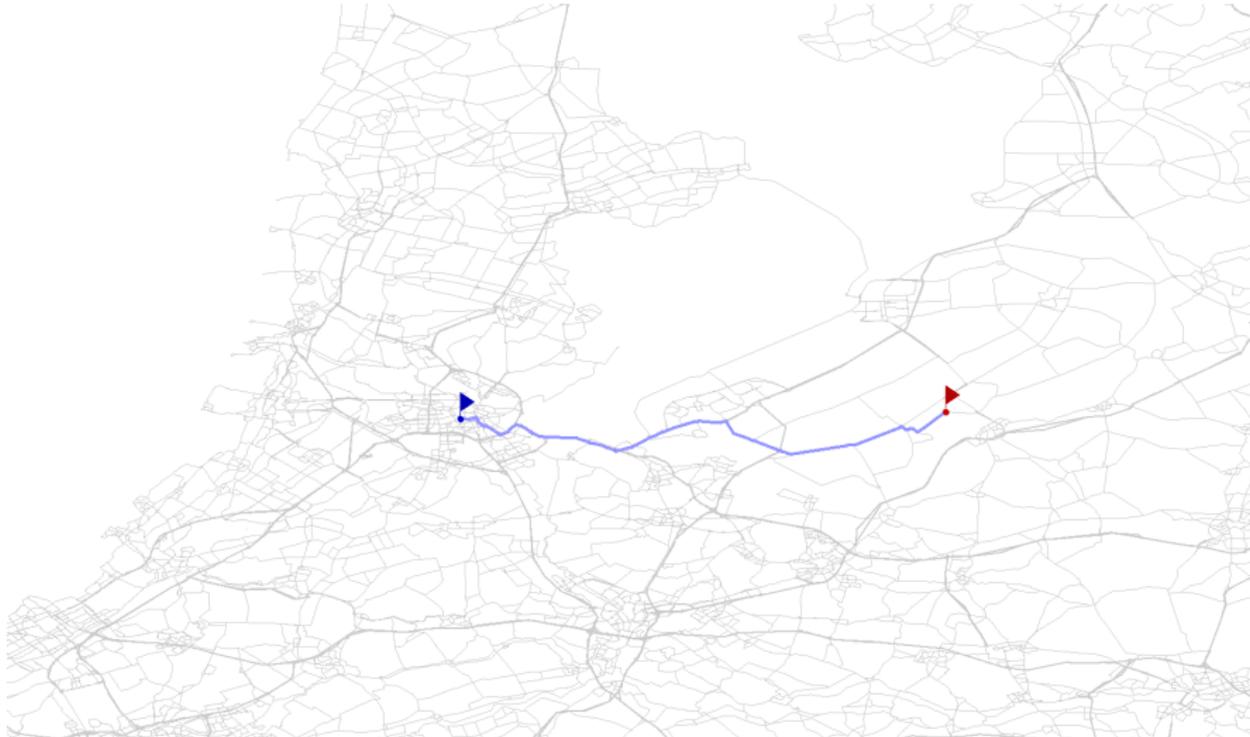
## Anfrage:

- bidirektional:
  - Vorwärtssuche relaxiert nur Kanten mit Flagge für  $T$
  - Rückwärtssuche nur Kanten mit Flaggen für  $S$
- normales Stopp-Kriterium von bidirektionalem Dijkstra

# Suchraum – Arc-Flags



# Suchraum – Bidirektionale Arc-Flags



# Multi-Level Arc-Flags

## Problem:

- Anfragen in einer Zelle ohne Beschleunigung
- viele Real-Welt Anfragen sind lokal

## Multi-Level Arc-Flags:

- Multi-Level Partition
- berechne partielle Flaggen



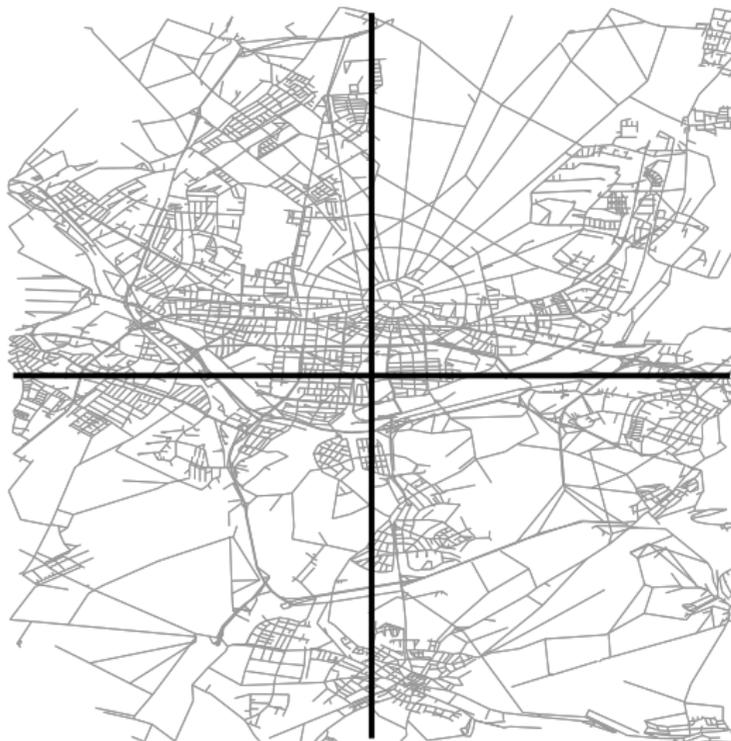
# Multi-Level Arc-Flags

## Problem:

- Anfragen in einer Zelle ohne Beschleunigung
- viele Real-Welt Anfragen sind lokal

## Multi-Level Arc-Flags:

- Multi-Level Partition
- berechne partielle Flaggen



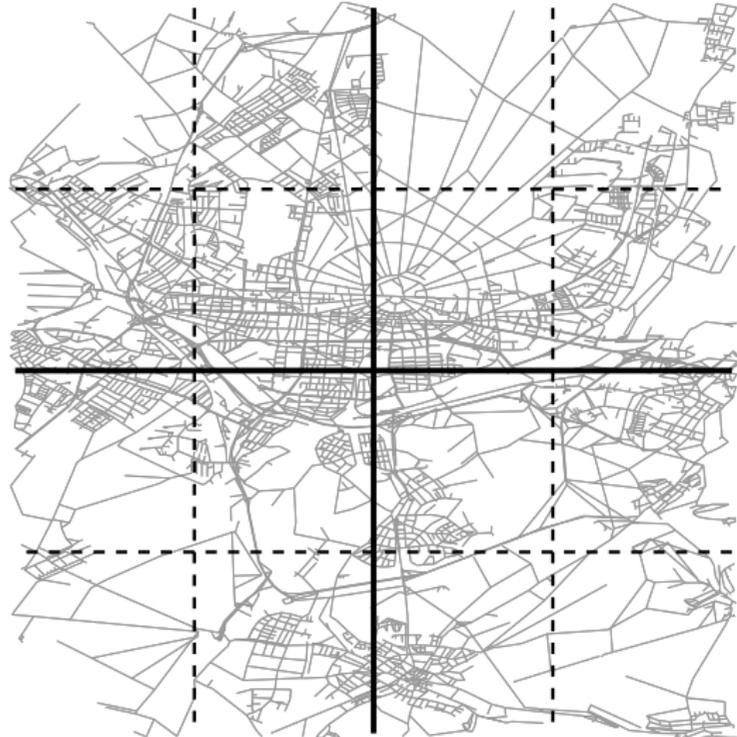
# Multi-Level Arc-Flags

## Problem:

- Anfragen in einer Zelle ohne Beschleunigung
- viele Real-Welt Anfragen sind lokal

## Multi-Level Arc-Flags:

- Multi-Level Partition
- berechne partielle Flaggen



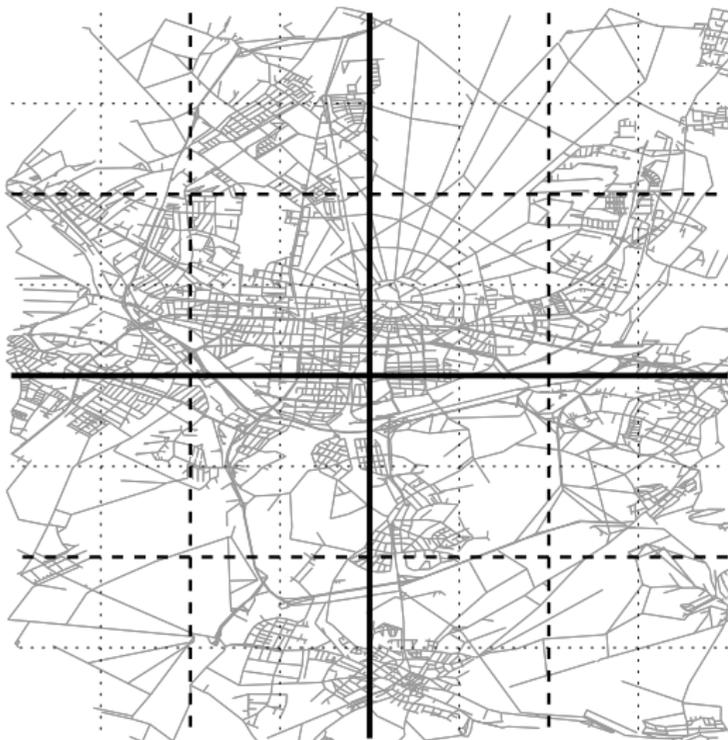
# Multi-Level Arc-Flags

## Problem:

- Anfragen in einer Zelle ohne Beschleunigung
- viele Real-Welt Anfragen sind lokal

## Multi-Level Arc-Flags:

- Multi-Level Partition
- berechne partielle Flaggen



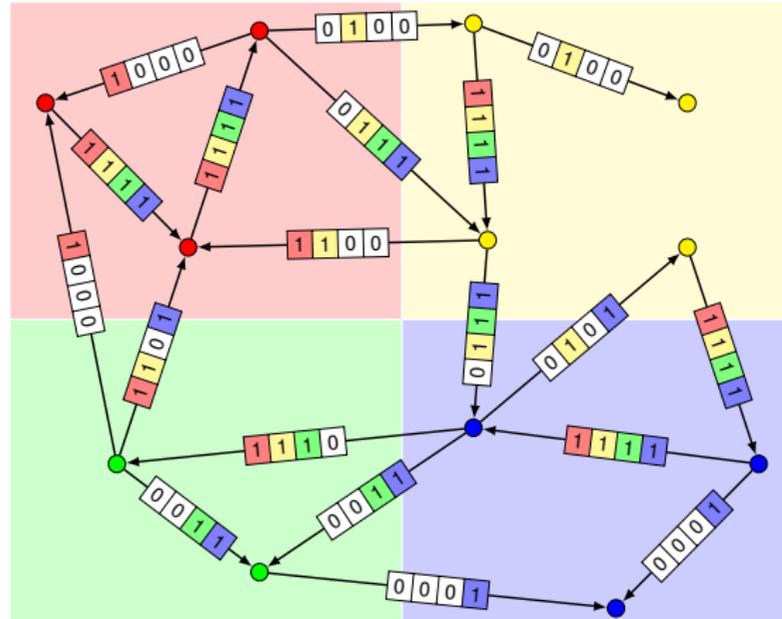


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

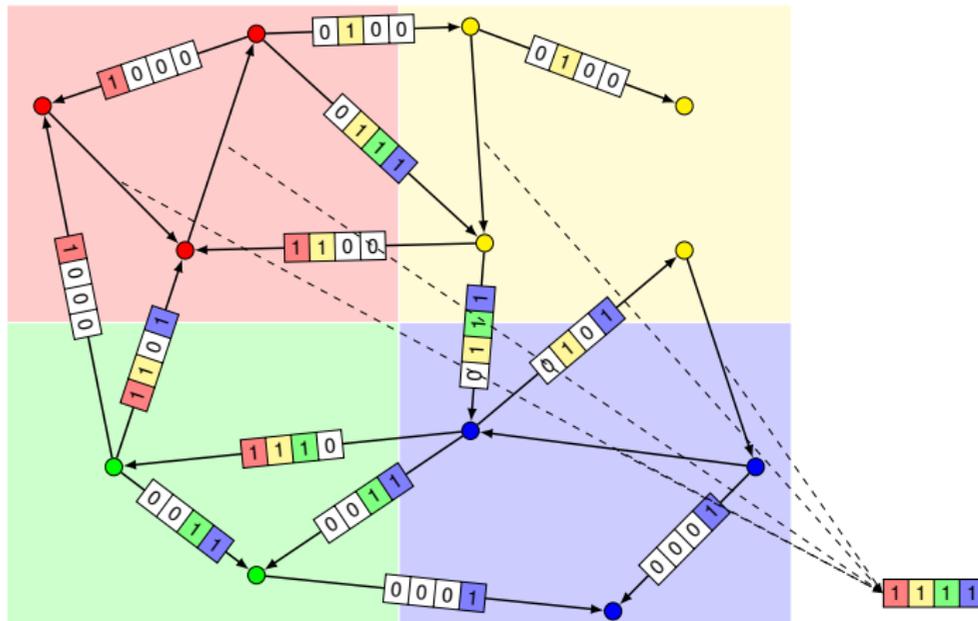


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

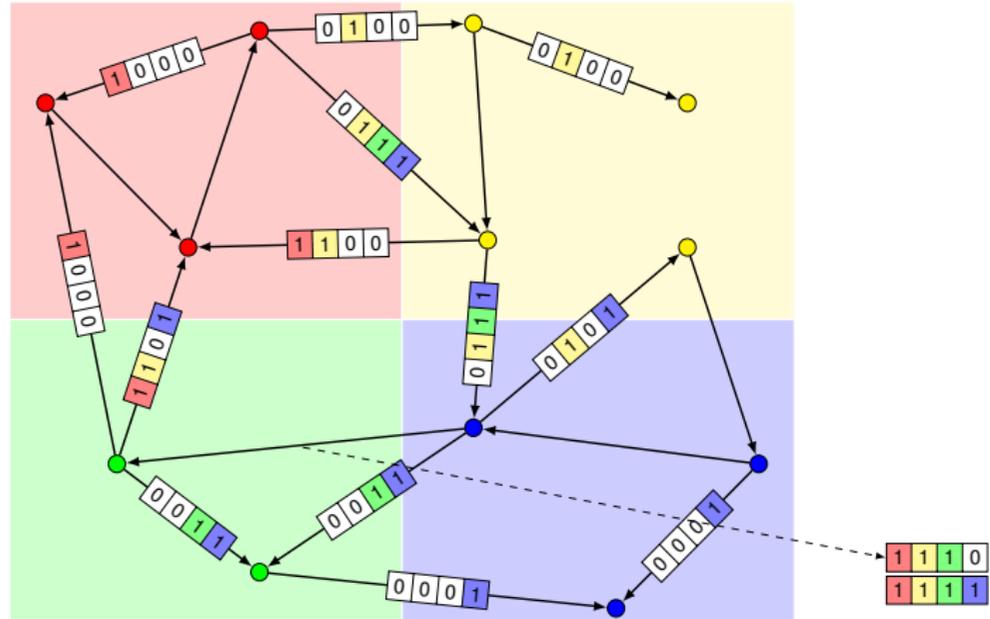


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

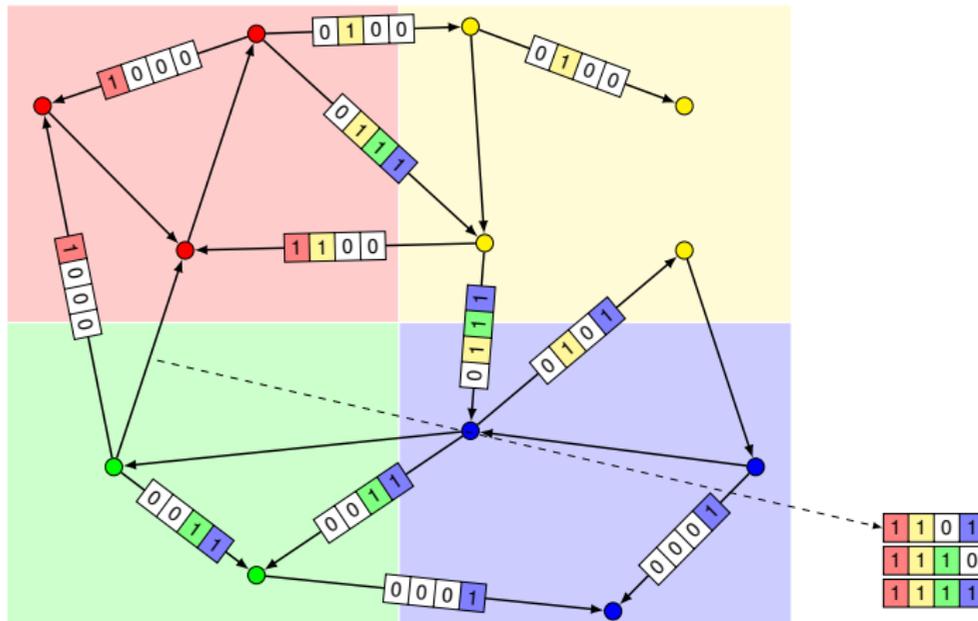


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

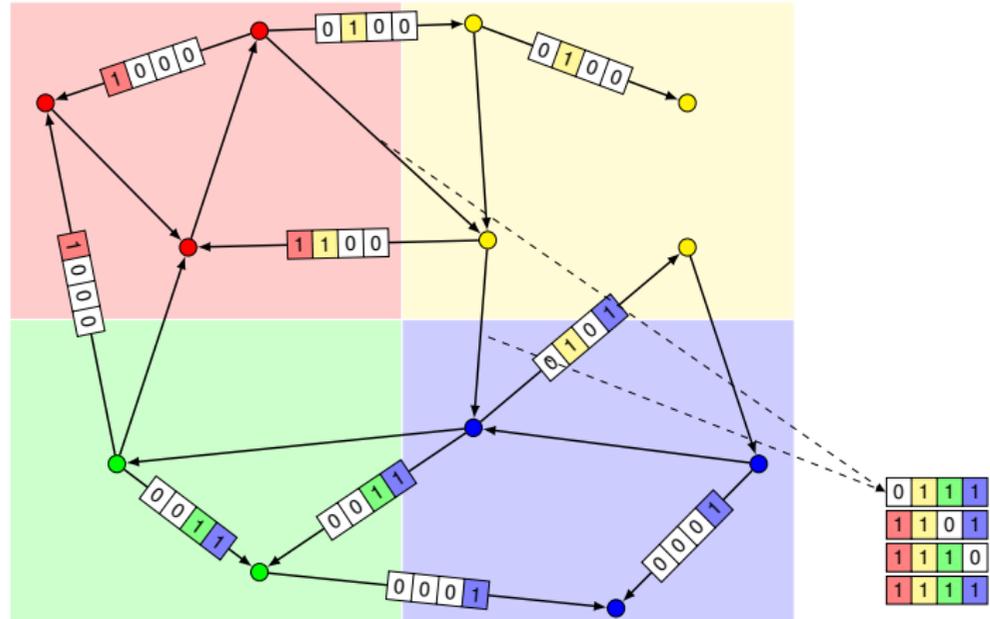


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

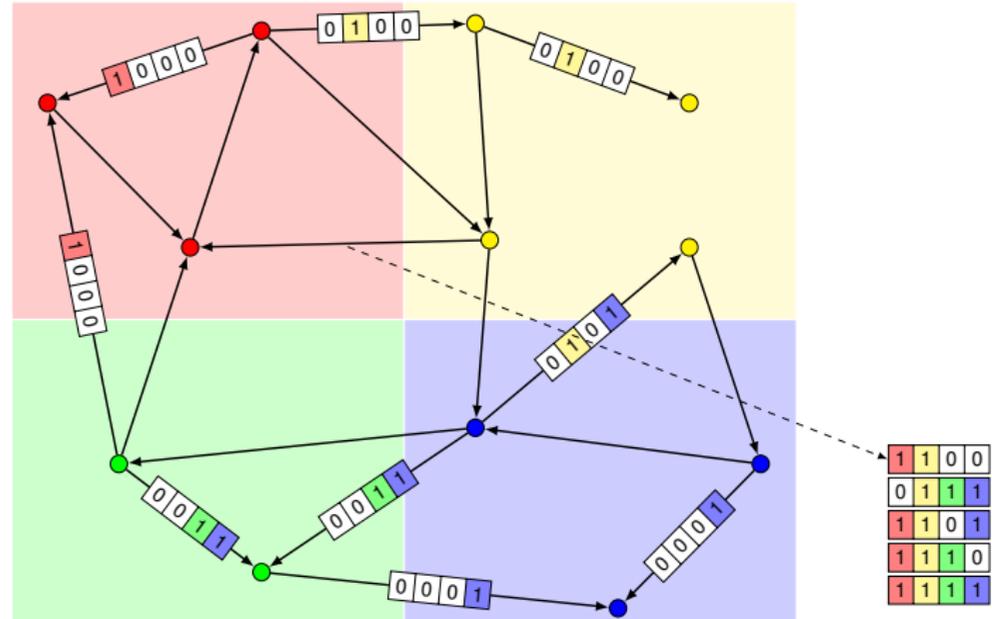


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

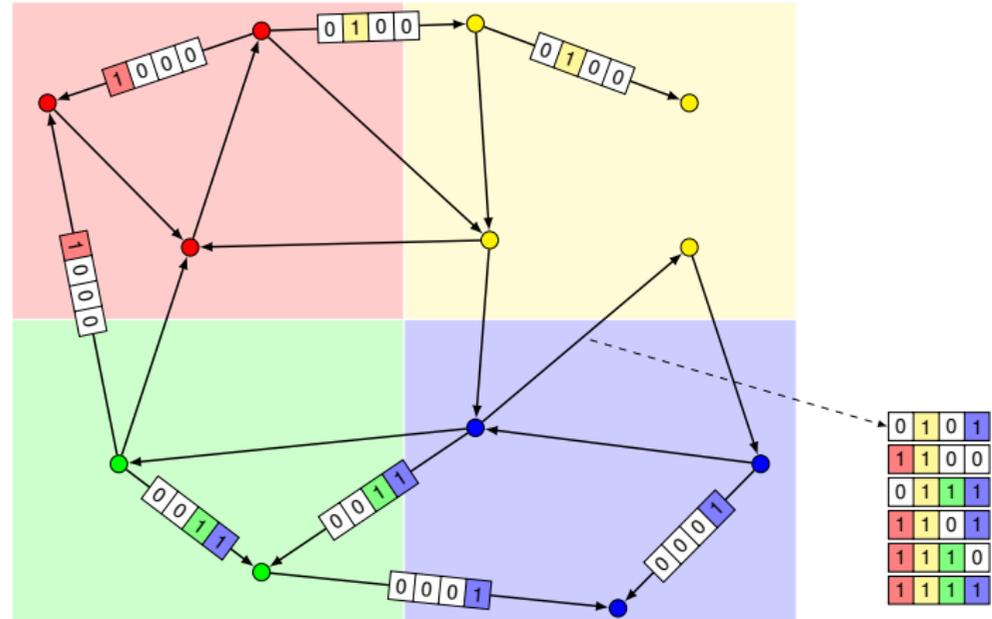


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

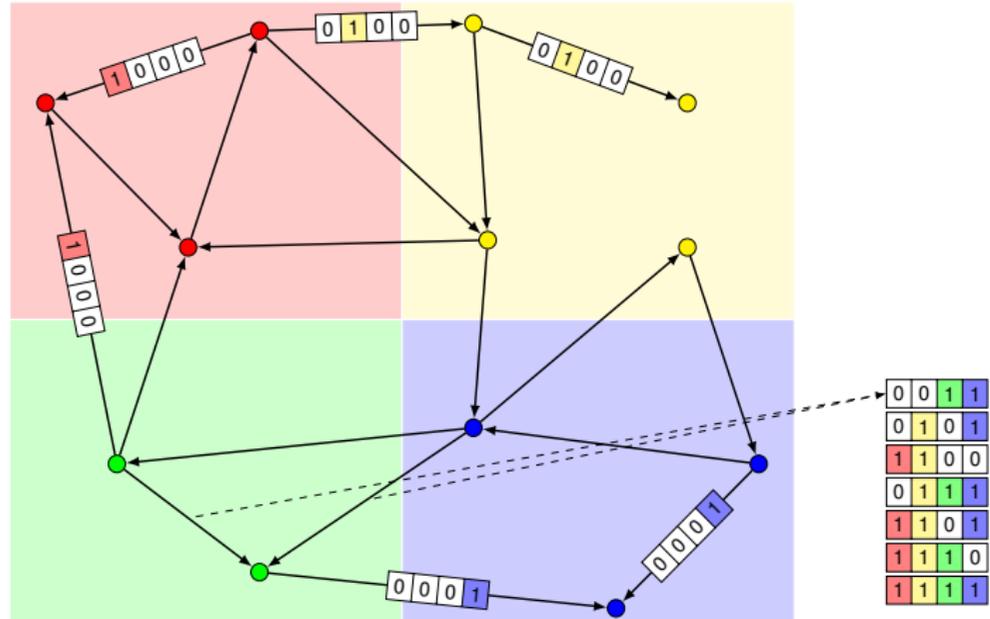


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

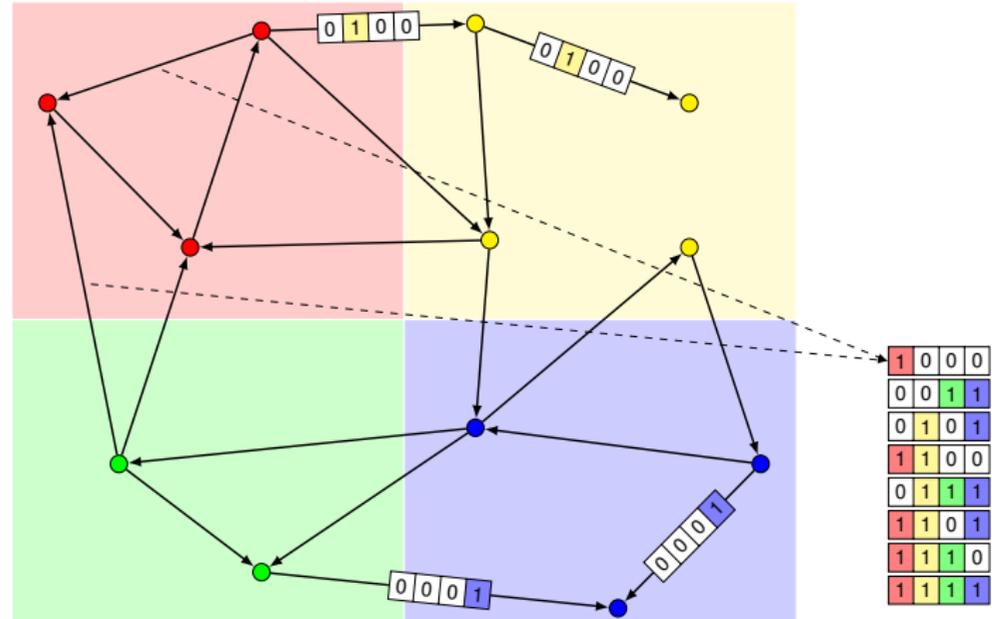


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

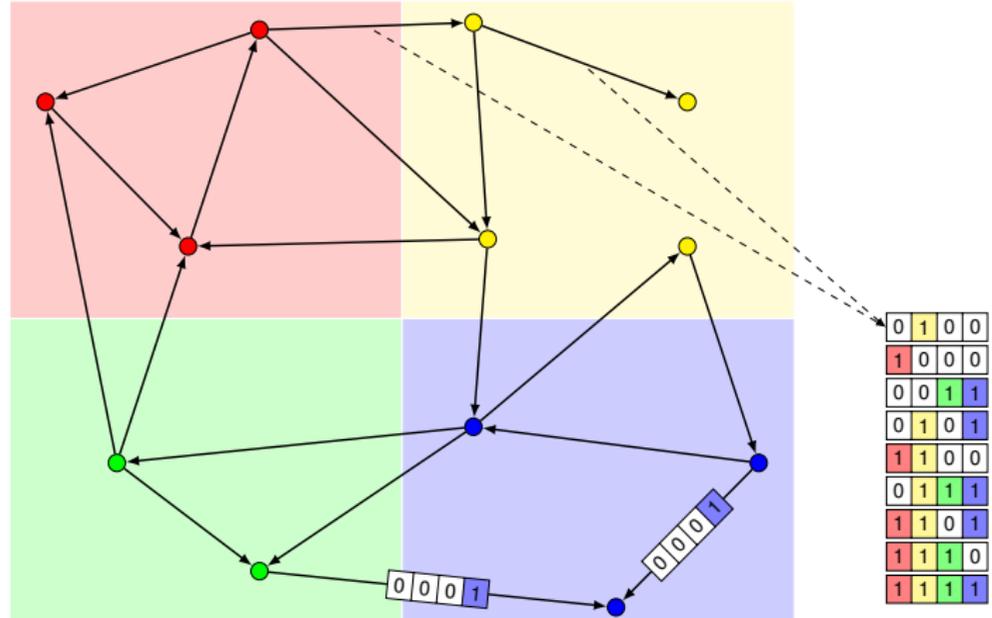


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

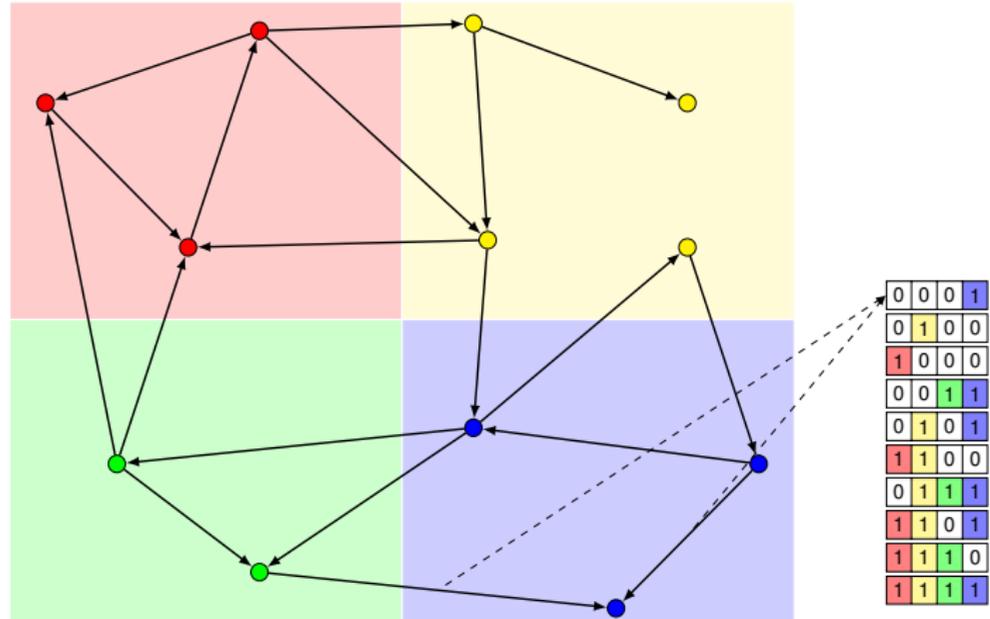


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

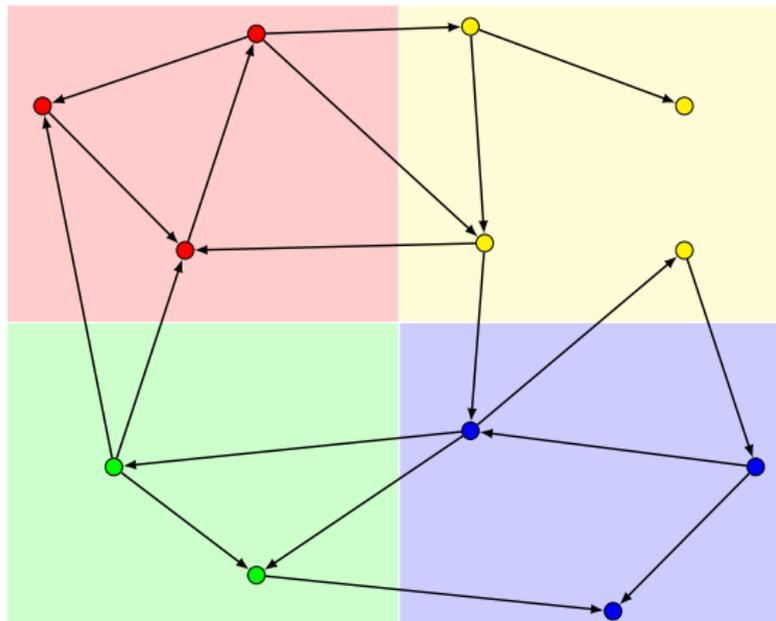


## Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt

## Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5



|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

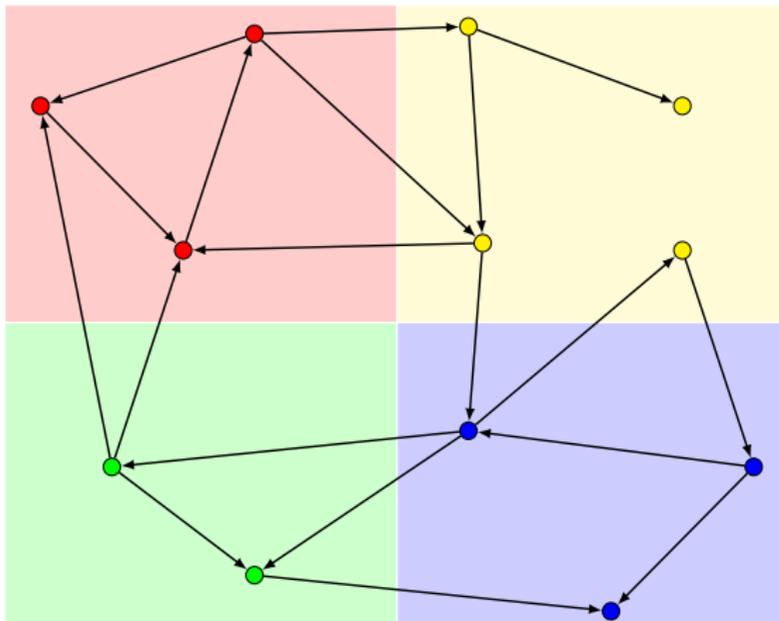
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping



|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

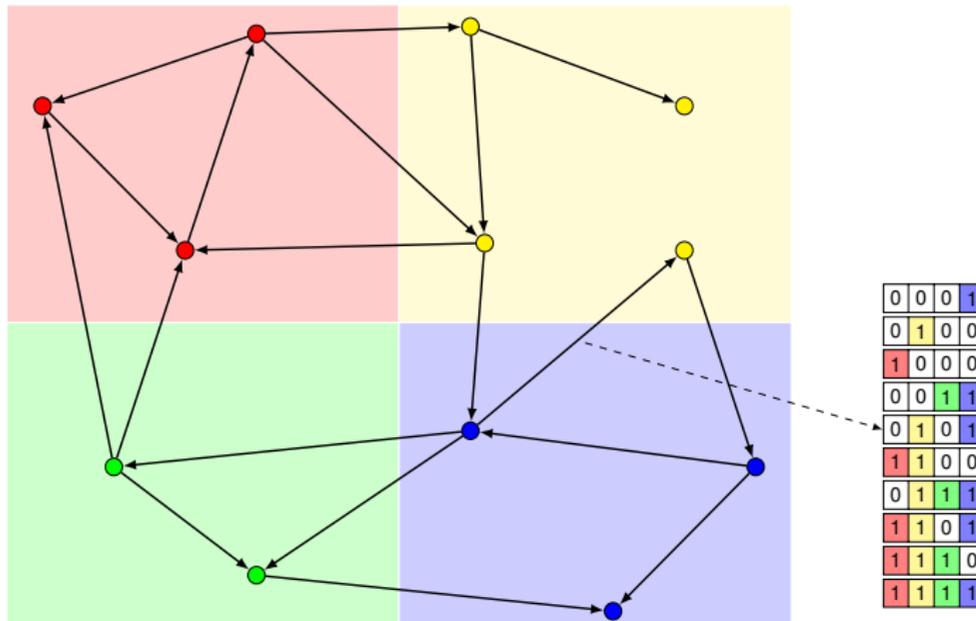
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde "gutes" Mapping



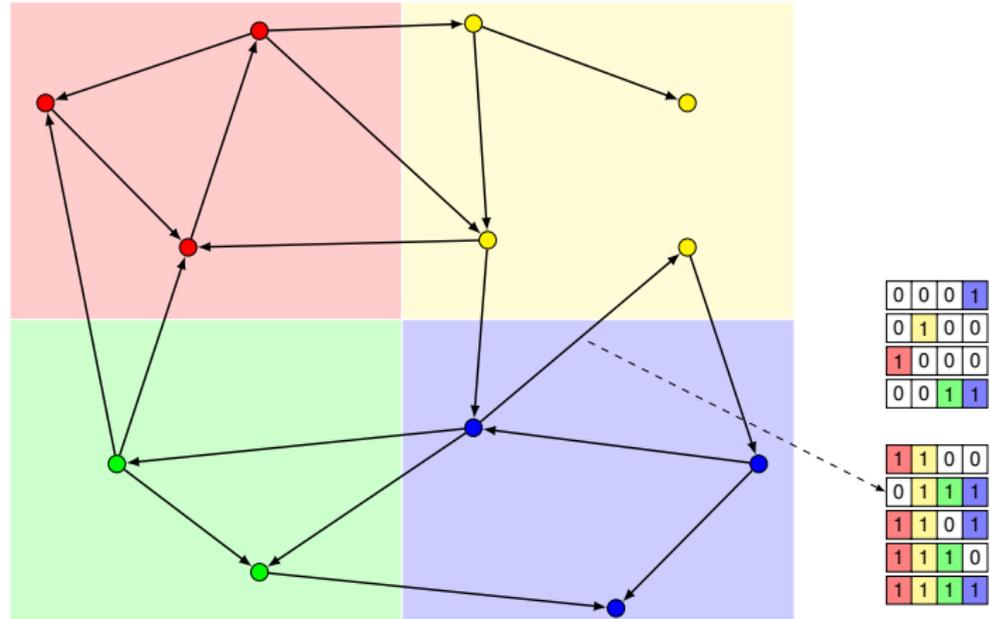
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde "gutes" Mapping



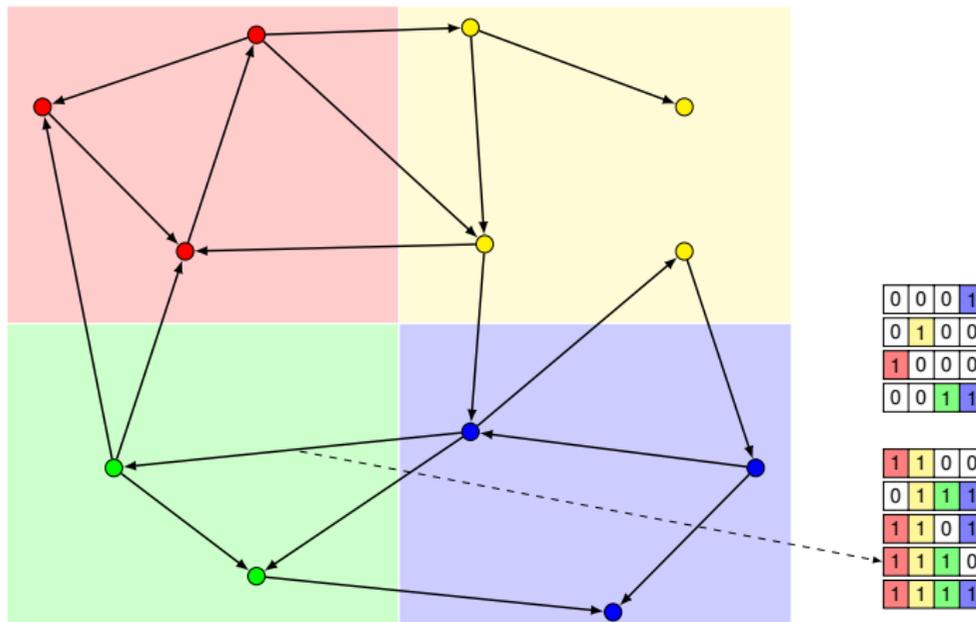
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde "gutes" Mapping



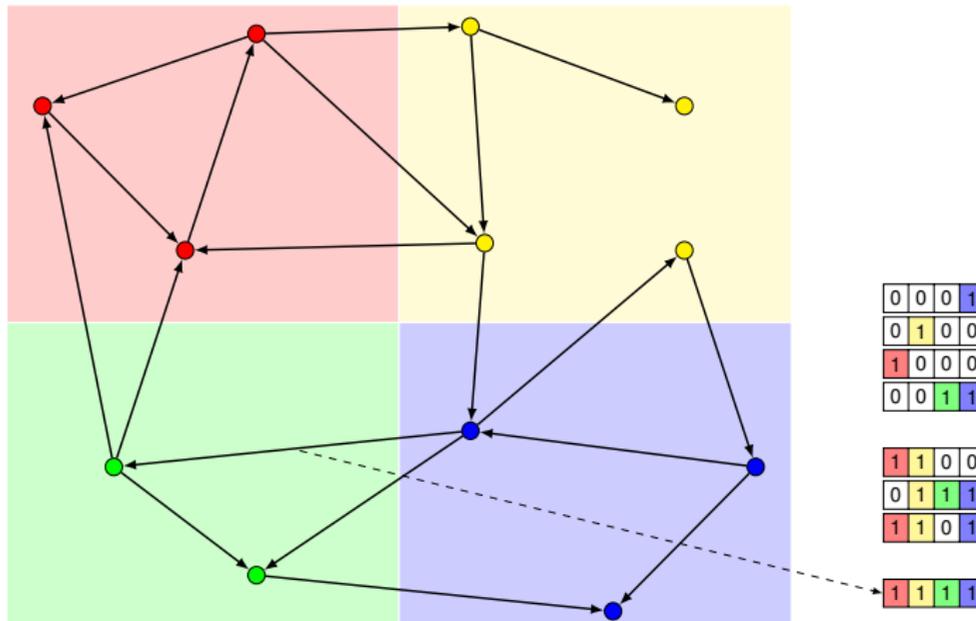
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde "gutes" Mapping



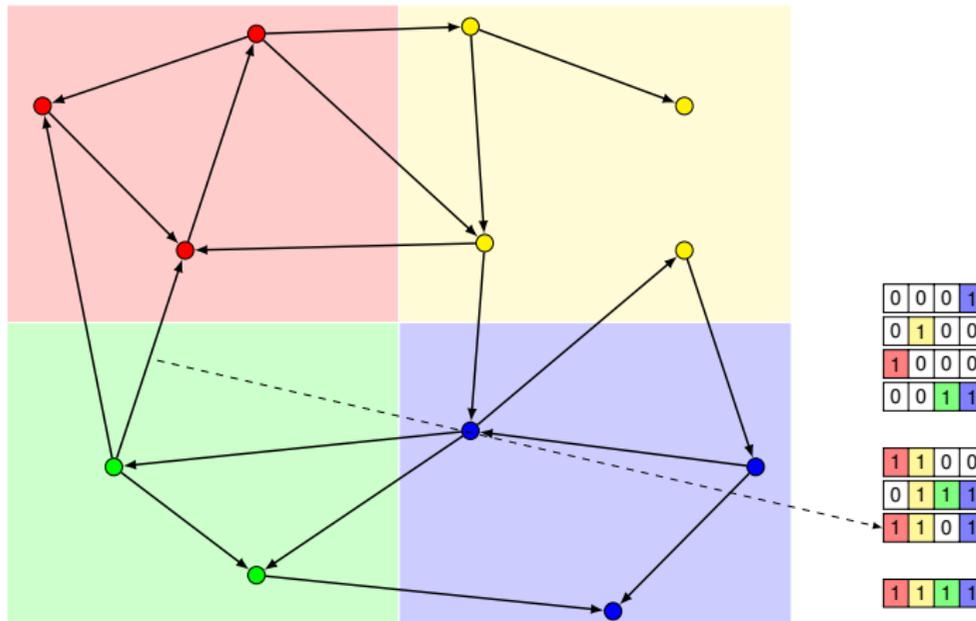
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde "gutes" Mapping



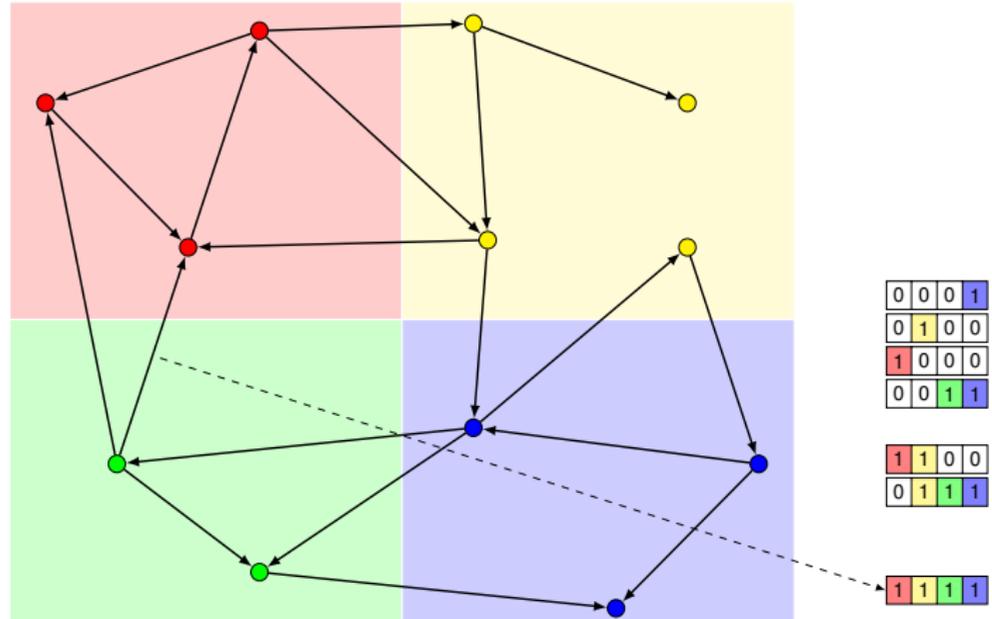
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde "gutes" Mapping



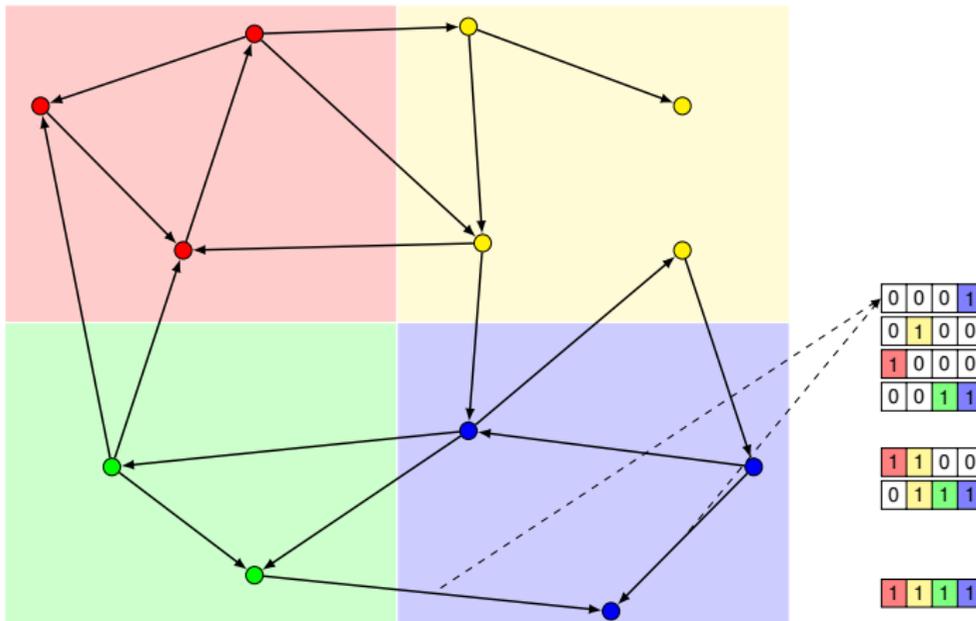
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde "gutes" Mapping



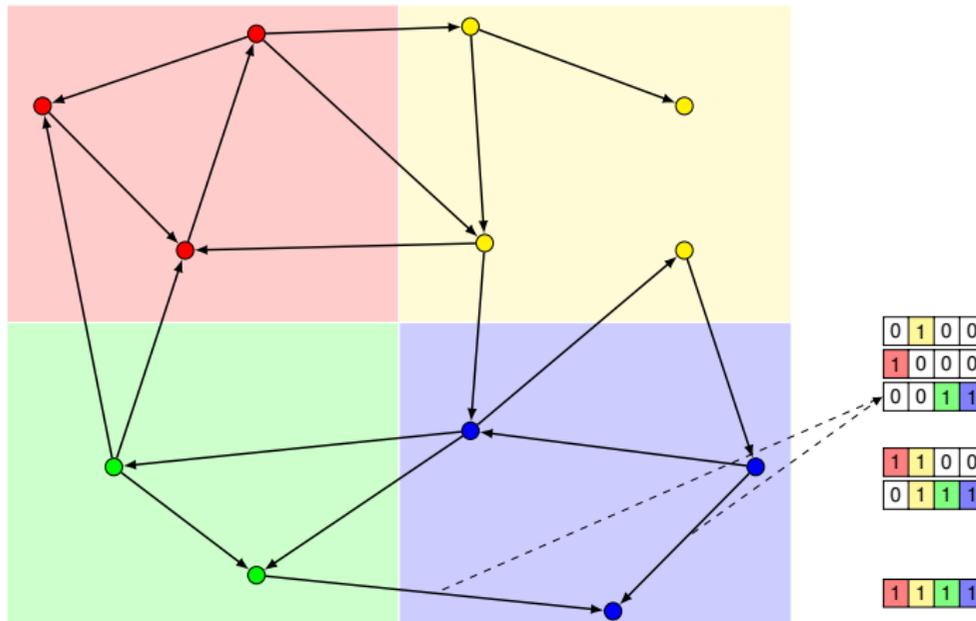
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde "gutes" Mapping



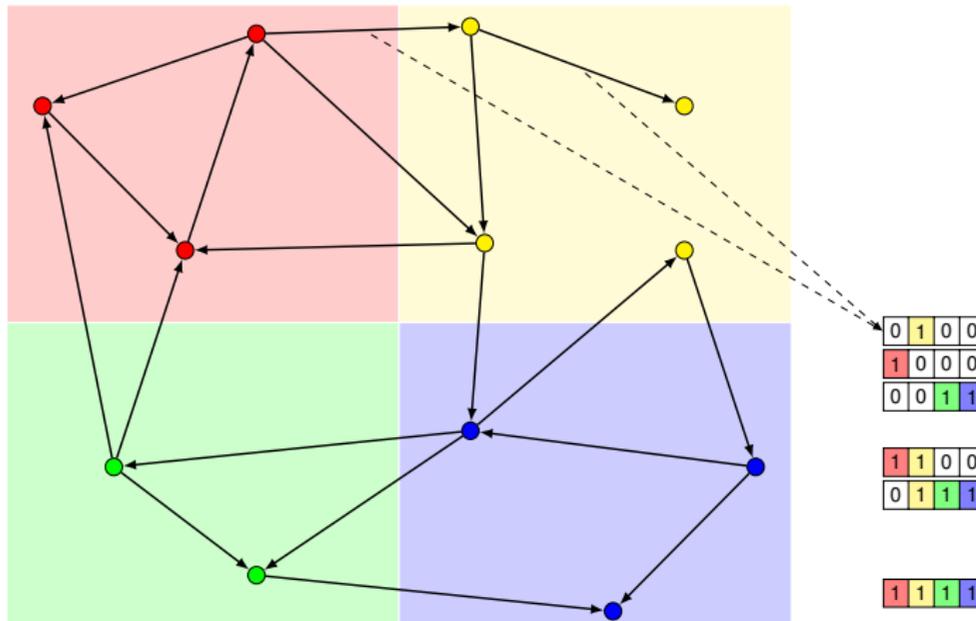
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde "gutes" Mapping



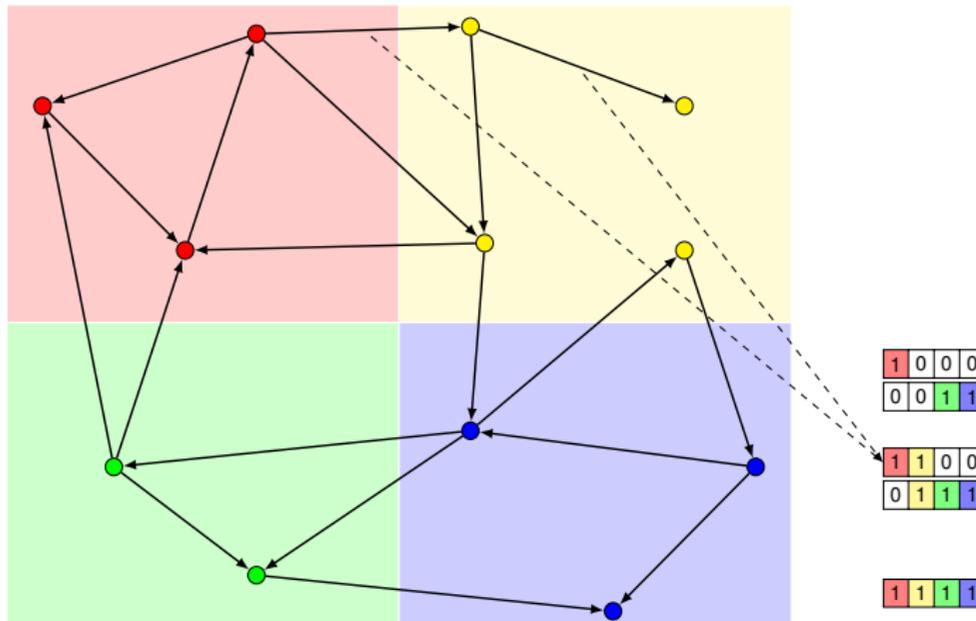
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt  
(Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping



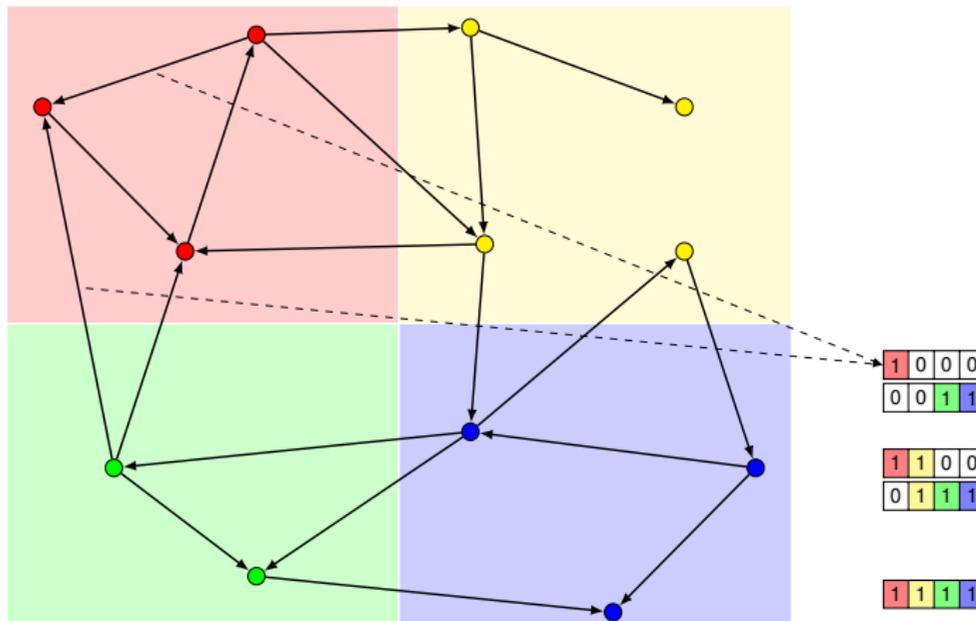
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt  
(Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping



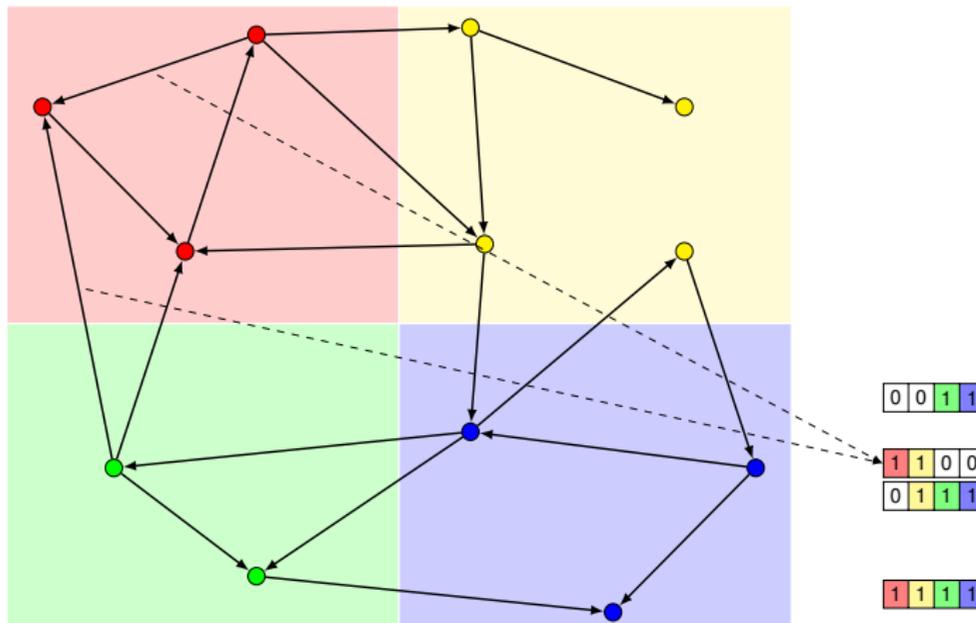
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping



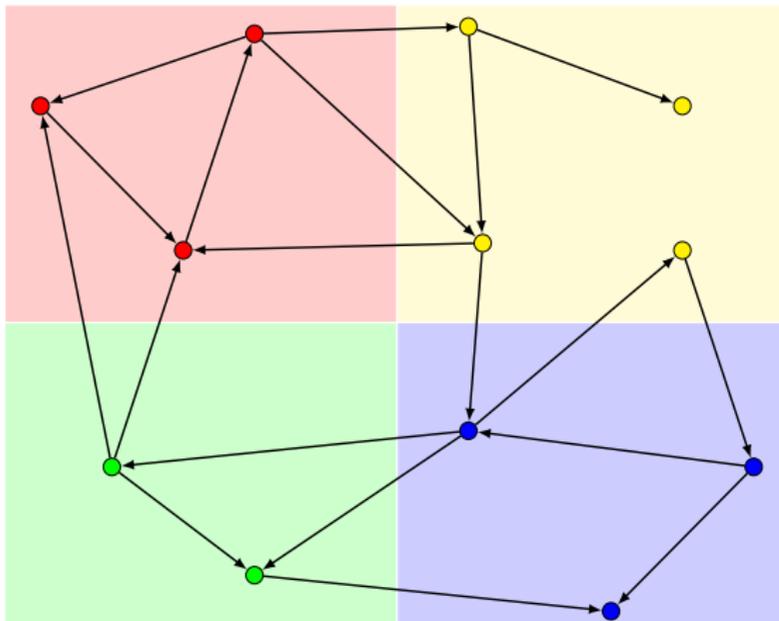
# Flaggenkompression

## Beobachtung:

- flippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- flippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

## Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch flippen einiger bits
- dadurch Kompression der Matrix
- finde "gutes" Mapping



|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|

- kaum Verlust bis zu 60% entfernte Flaggen
- geringer Verlust bis zu 80% entfernte Flaggen
- kippen von niedrig-leveligen Flaggen billiger

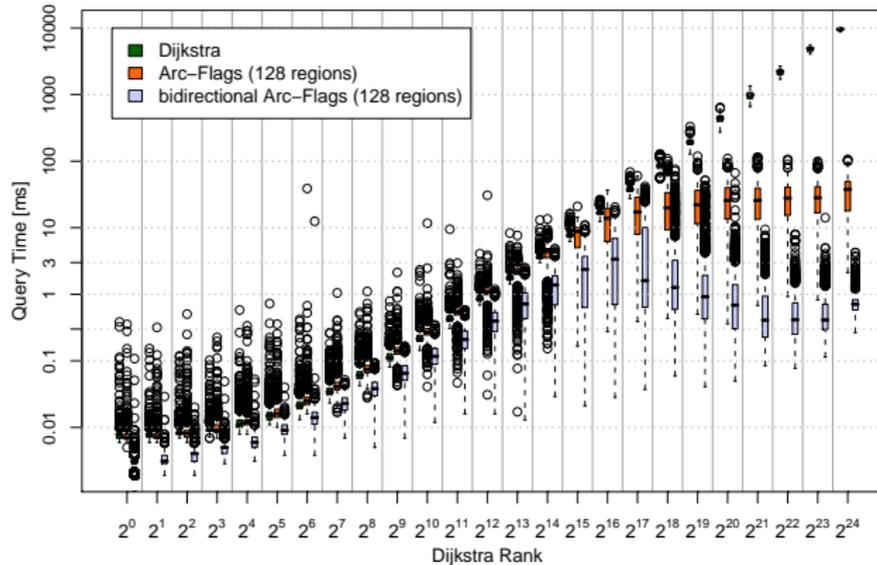
# Zufallsanfragen: Anzahl Regionen

| regions | Prepro     |             | # settled nodes | Query     |         |
|---------|------------|-------------|-----------------|-----------|---------|
|         | time [min] | space [B/n] |                 | time [ms] | spd up  |
| 0       | 0          | 0           | 9 114 385       | 5 591.6   | 1.0     |
| 200     | 1 028      | 19          | 2 369           | 1.6       | 3 494.8 |
| 400     | 1 366      | 20          | 1 868           | 1.2       | 4 659.7 |
| 600     | 1 723      | 21          | 1 700           | 1.1       | 5 083.3 |
| 800     | 1 892      | 23          | 1 642           | 1.4       | 3 994.0 |
| 1000    | 2 156      | 25          | 1 593           | 1.1       | 5 083.3 |

## Beobachtungen:

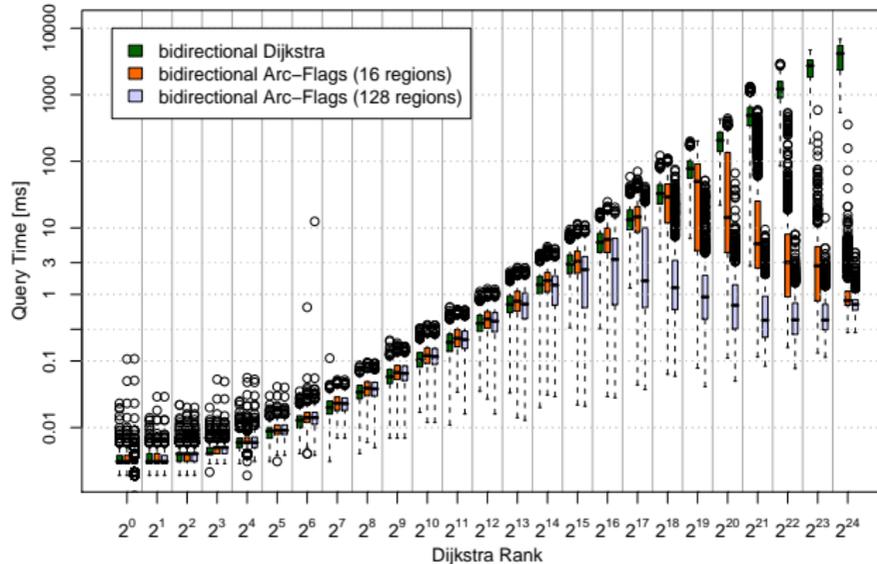
- lange Vorberechnung
- hohe Beschleunigung
- geringer Speicherverbrauch
- mehr als 200 Regionen lohnt sich nicht

# Dijkstra Rank ArcFlags Uni- vs Bidir.



- gegenüber Dijkstra nur Beschleunigung für weite Anfragen
- birektionale Arc-Flags deutlich schneller als unidirektionale

# Dijkstra Rank ArcFlags # Regionen



- gegenüber Dijkstra nur Beschleunigung für weite Anfragen
- 128 Regionen z.T. deutlich besser als 16 (bei  $2^{24}$  fast gleichauf)

## Arc-Flags

- Teile Graphen in  $k$  Regionen
- Flaggen zeigen an, ob Kante wichtig für Zielregion ist
- Einfacher Anfrage-Algorithmus
- Vorbereitung
  - Kürzeste-Wege-Baum von jedem Randknoten
  - Manche Flaggen können automatisch gesetzt werden
- Bidirektional und multi-level Erweiterungen
- Beschleunigung in Größenordnung von  $10^3$
- Nahe Anfragen nicht schneller als Dijkstra
- Hohe Vorberechnungszeit

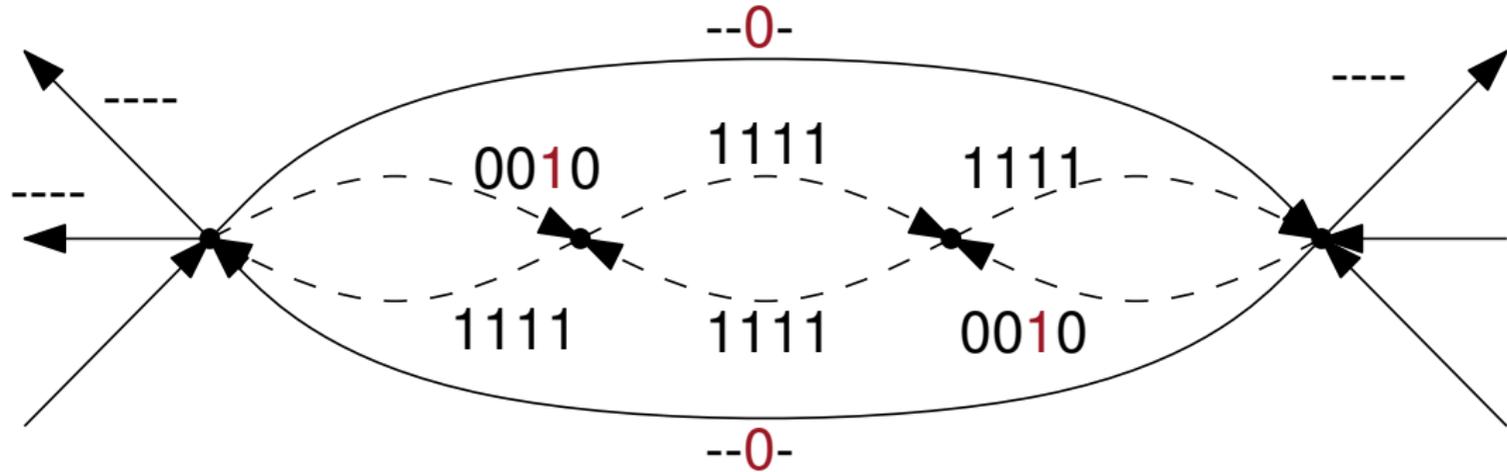
# SHARC

## Motivation:

- unidirektional
- Vorberechnungszeiten von Arc-Flags reduzieren

## Ideen:

- Multi-Level Arc-Flags
- Integration von Kontraktion
- Verfeinern von Flaggen



## Idee:

- sub-optimale Flaggen für entfernte Kanten
- in die Komponente rein: nur **own-cell** Flagge, sonst voll
- Shortcuts: **own-cell** false

⇒

- Vorbereitung nur auf kontrahierten Graph
- sub-optimale Flaggen nur am Anfang und Ende der Query
- Überspringen von Kanten automatisch durch Arc-Flags Query

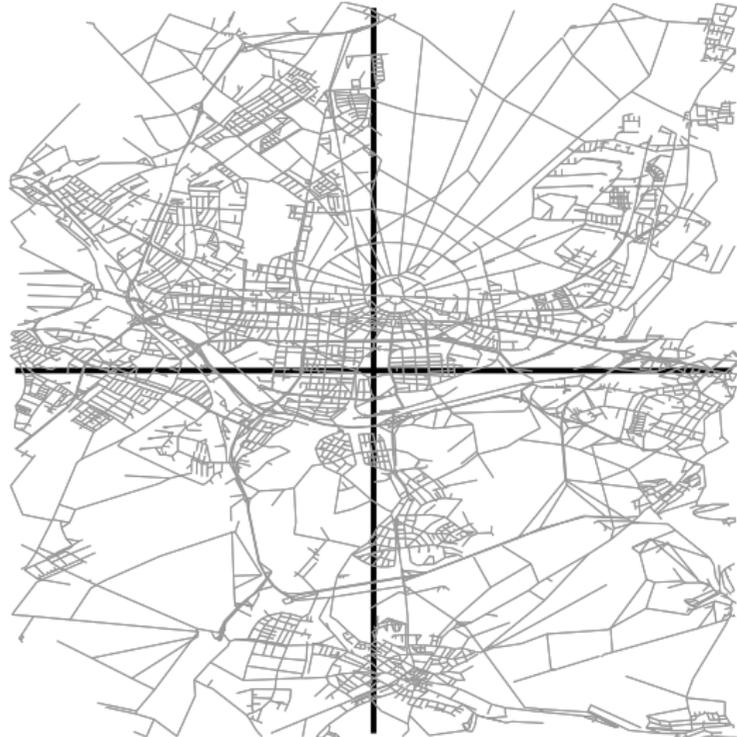
## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition



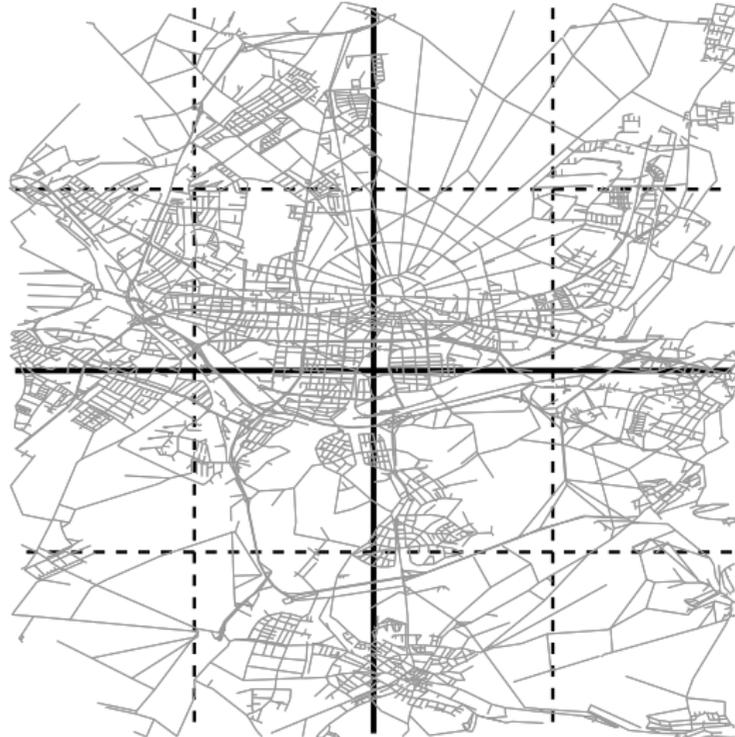
## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition



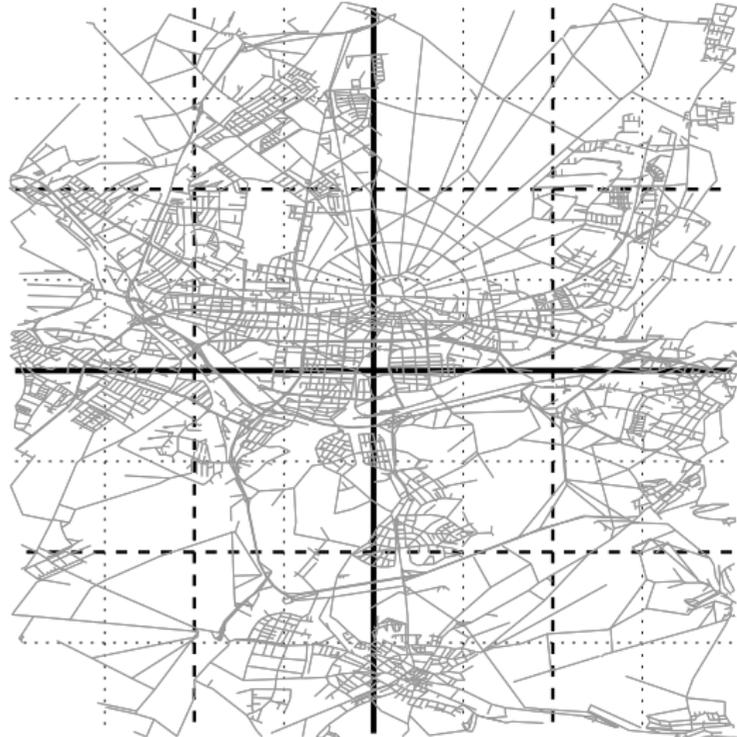
## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition



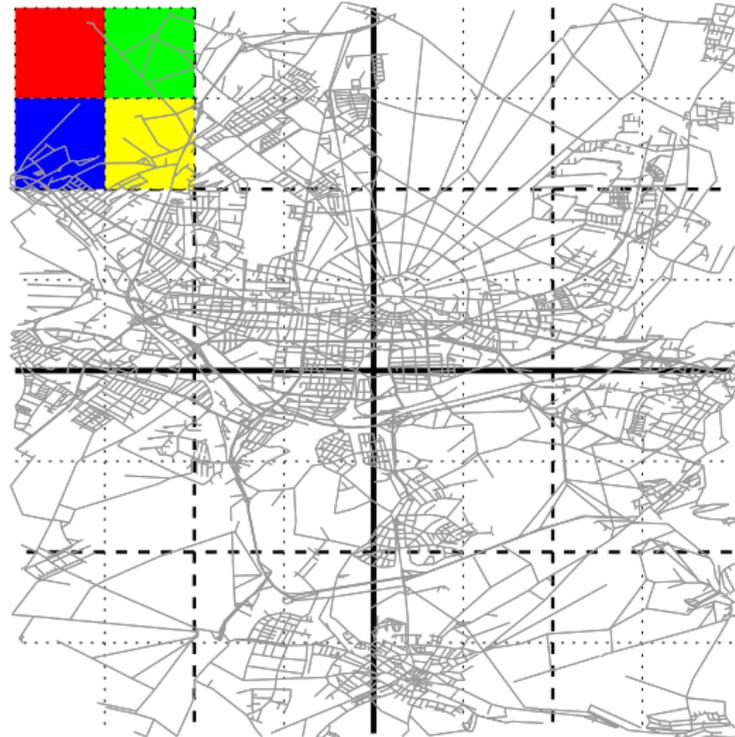
## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen



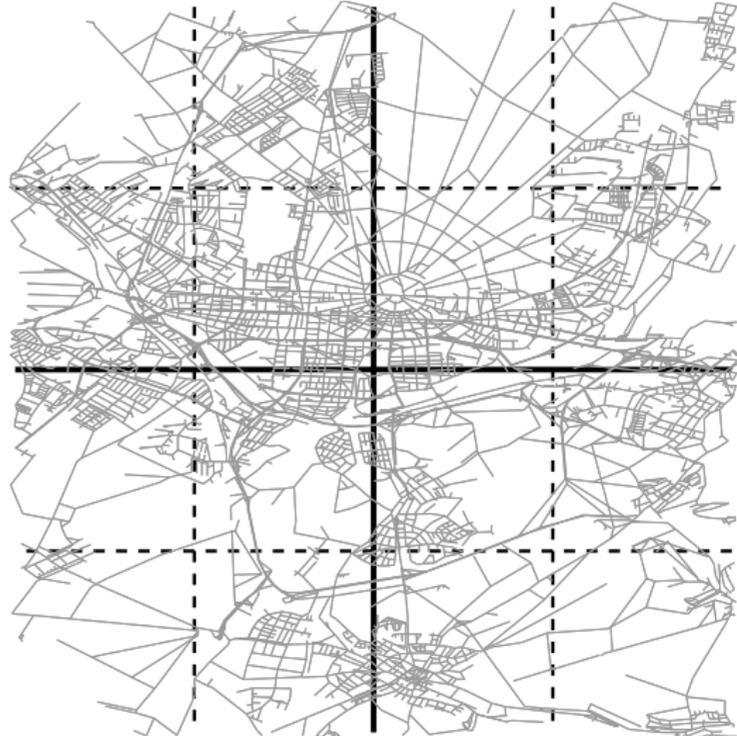
## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - berechne Flaggen



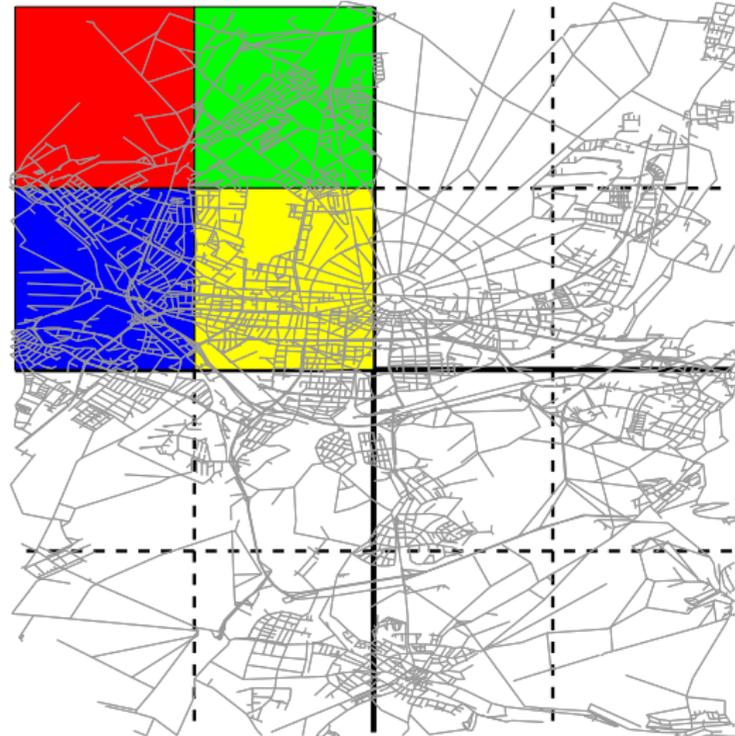
## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen



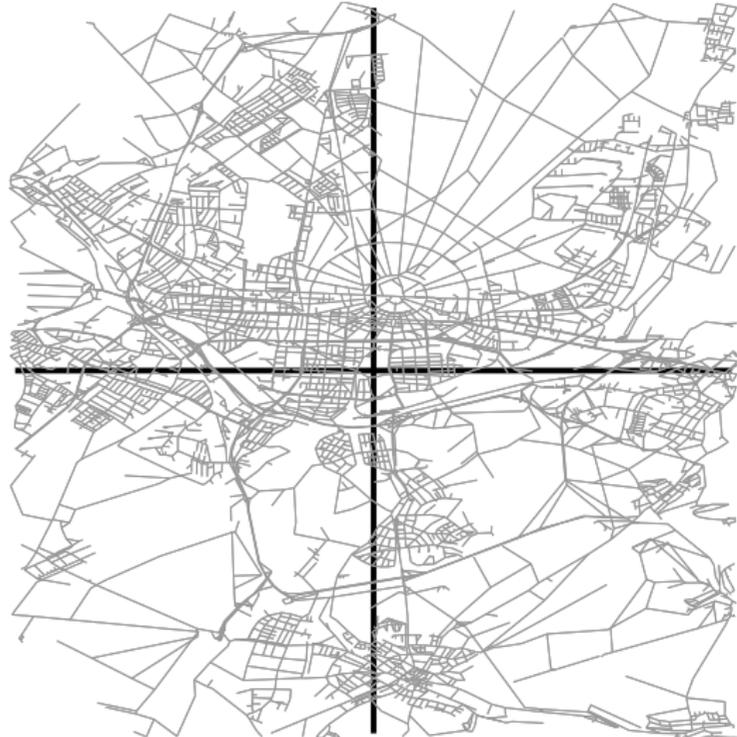
## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - berechne Flaggen



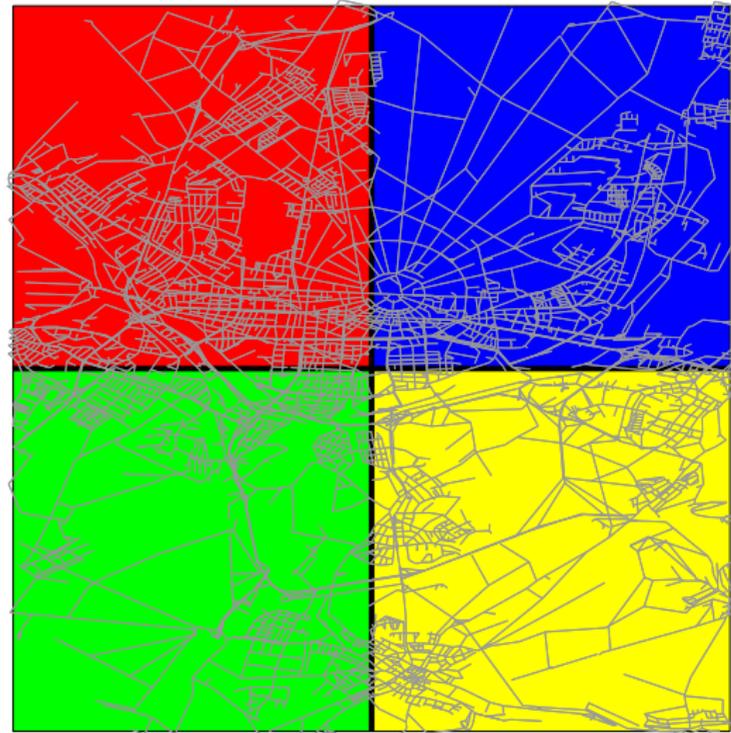
## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen



## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen

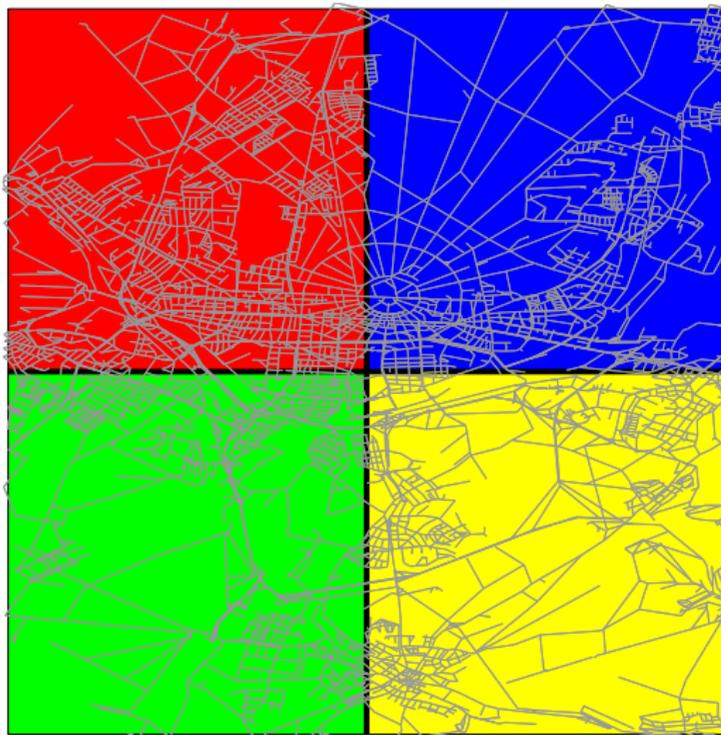


## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen

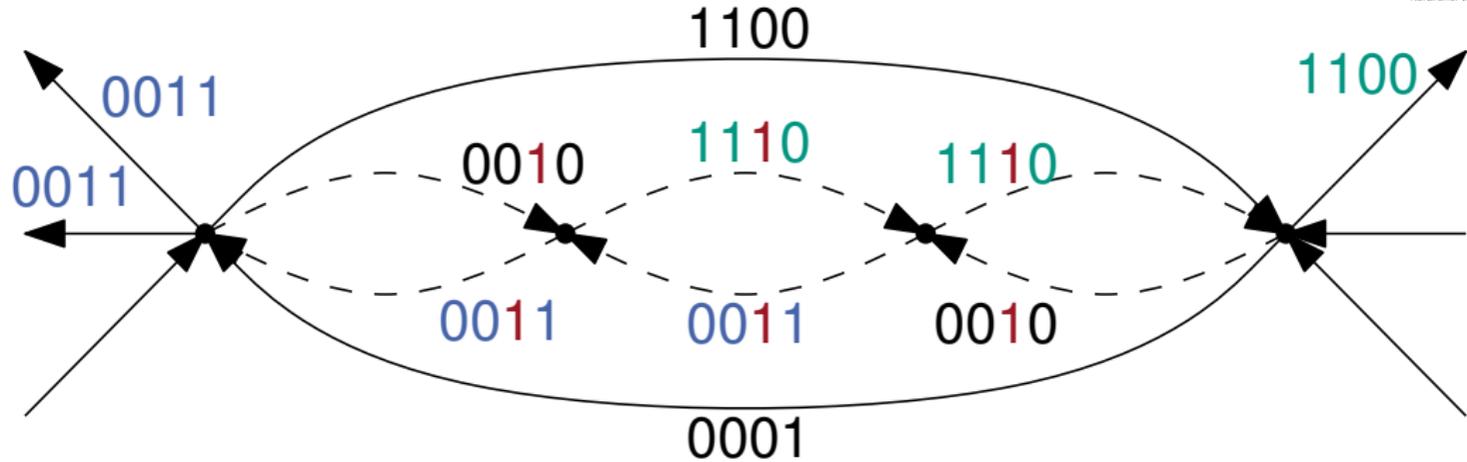
## Anfragen:

- uni- oder bidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)  
LowestCommonSupercell(u,t)
- zielgerichtet (Arc-Flags)





# Verfeinerung



## Beobachtung:

- Flaggen schlechter als nötig
- geht es besser?

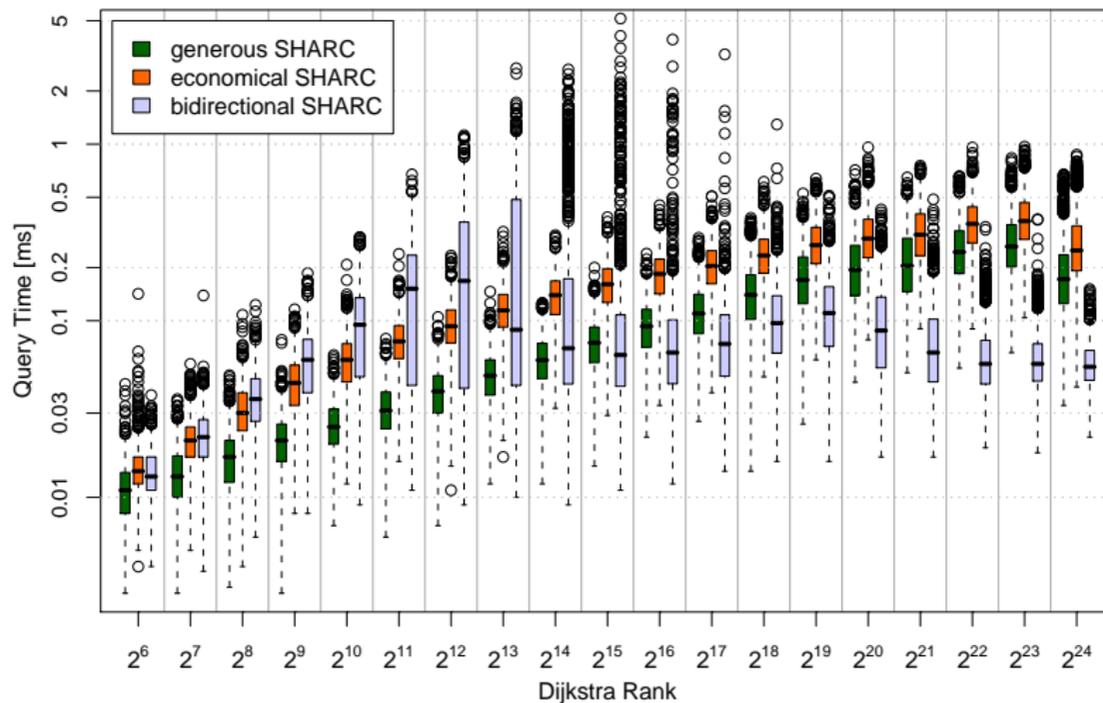
## Idee:

- verfeinere Flaggen
  - propagiere Flaggen von wichtigen zu unwichtigen Kanten
  - mittels lokaler Suche
- ⇒ sehr gute Flaggen

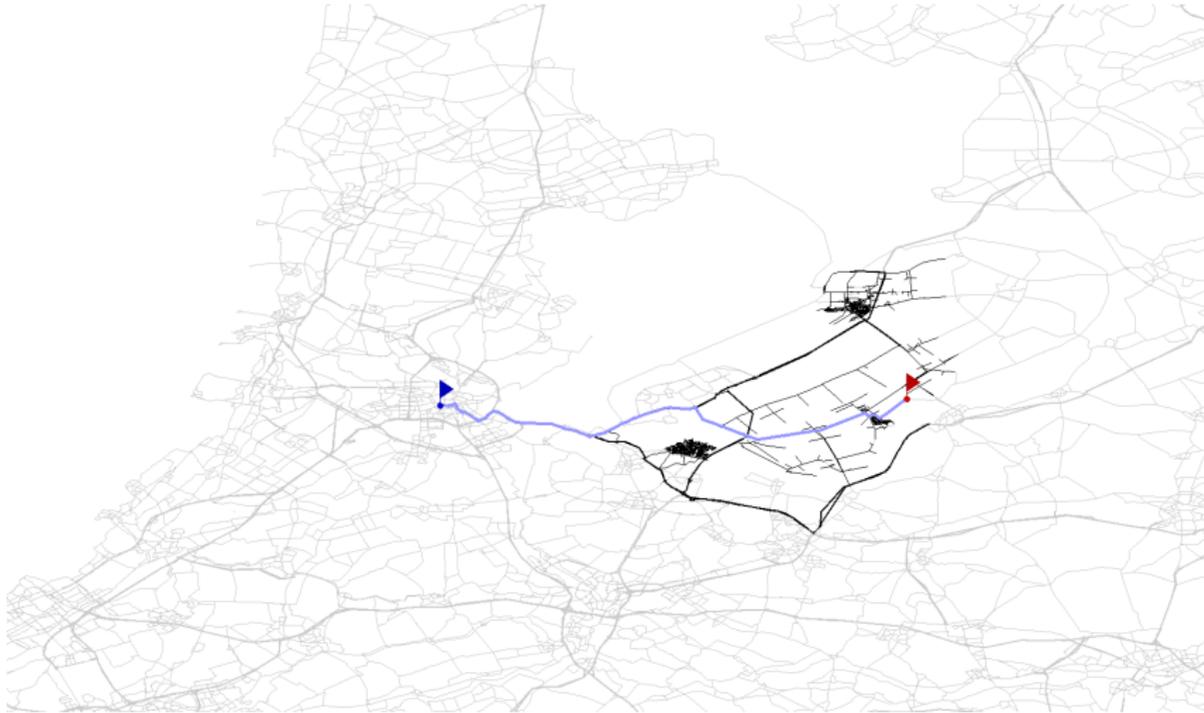
|                     | Europe        |                |                   |                    | USA           |                |                   |                    |
|---------------------|---------------|----------------|-------------------|--------------------|---------------|----------------|-------------------|--------------------|
|                     | Prepro        |                | Query             |                    | Prepro        |                | Query             |                    |
|                     | time<br>[h:m] | space<br>[B/n] | #settled<br>nodes | time<br>[ $\mu$ s] | time<br>[h:m] | space<br>[B/n] | #settled<br>nodes | time<br>[ $\mu$ s] |
| generous SHARC      | 1:21          | 14.5           | 654               | 290                | 0:58          | 18.1           | 865               | 376                |
| bidirectional SHARC | 2:38          | 21.0           | 125               | 65                 | 2:34          | 23.1           | 254               | 118                |
| economical SHARC    | 0:34          | 13.7           | 784               | 355                | 0:38          | 17.2           | 1 230             | 578                |

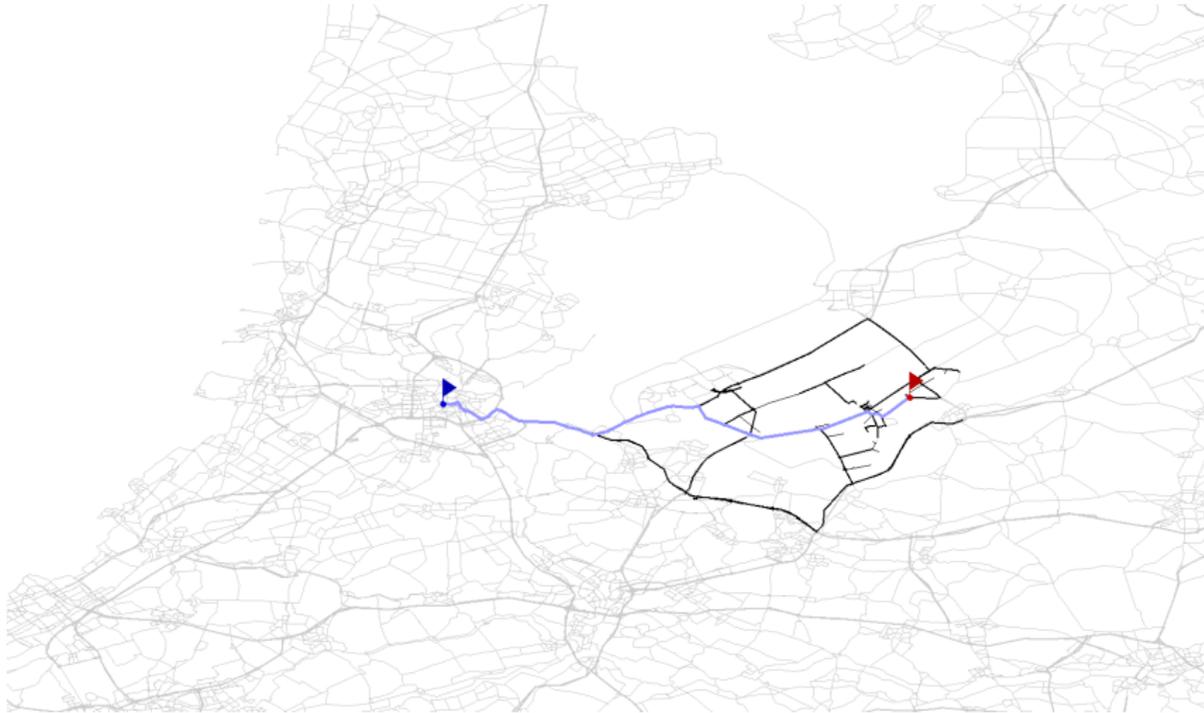
- generous vs economical: unterschiedliche Parametrisierung der Kontraktion und Verfeinerung, Details im Papier
- Um eine Größenordnung schneller als ArcFlags

# Dijkstra Rank SHARC

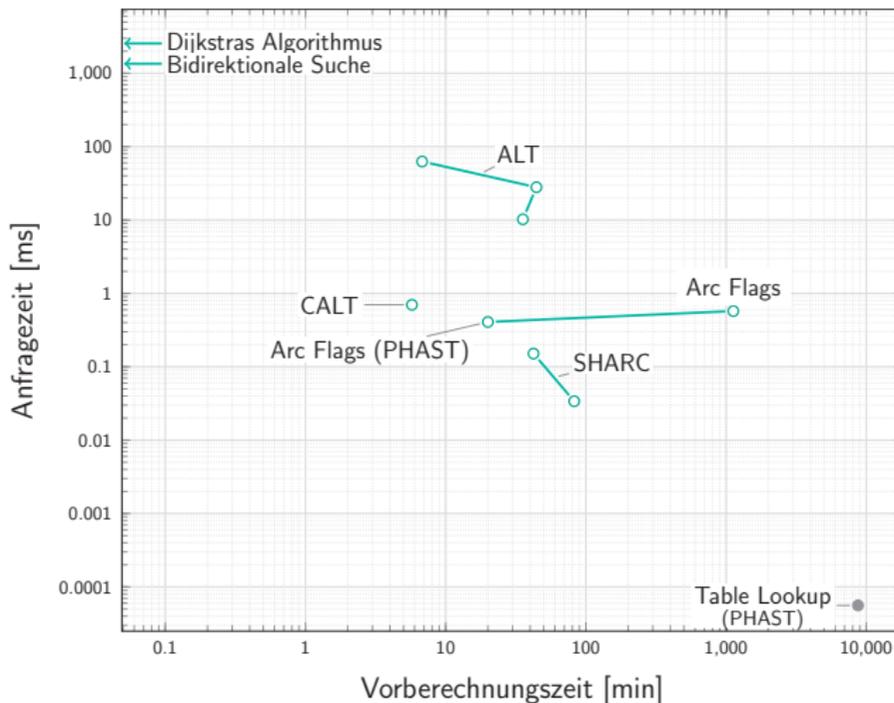


# Suchraum – Arc-Flags

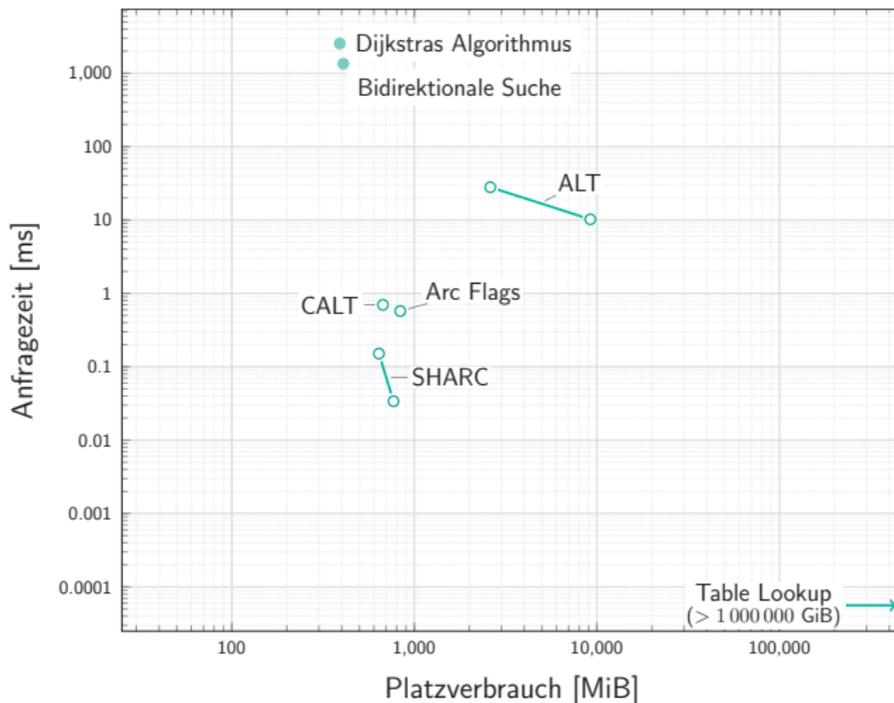




# Übersicht bisherige Techniken



# Übersicht bisherige Techniken



# Montag, 8.5.2023

(Adrian Feilhauer)



Reinhard Bauer, Moritz Baum, Ignaz Rutter, and Dorothea Wagner.

On the Complexity of Partitioning Graphs for Arc-Flags.

*Journal of Graph Algorithms and Applications*, 17(3):265–299, 2013.



Reinhard Bauer and Daniel Delling.

SHARC: Fast and Robust Unidirectional Routing.

*ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 14(2.4):1–29, August 2009.

Special Section on Selected Papers from ALENEX 2008.



Moritz Hilger, Ekkehard Köhler, Rolf H. Möhring, and Heiko Schilling.

Fast Point-to-Point Shortest Path Computations with Arc-Flags.

In Camil Demetrescu, Andrew V. Goldberg, and David S. Johnson, editors, *The Shortest Path Problem: Ninth DIMACS Implementation Challenge*, volume 74 of *DIMACS Book*, pages 41–72. American Mathematical Society, 2009.