Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Routenplanung

11. Vorlesung, Sommersemester 2023

Michael Zündorf | 5. Juni 2023

Anfrageszenarien

Punkt-zu-Punkt

- zwei Punkte $\rightarrow$ kürzester Weg
- wird für Routenplanung benutzt
- Beschleunigungstechniken

Anfrageszenarien

Punkt-zu-Punkt

- zwei Punkte $\rightarrow$ kürzester Weg
- wird für Routenplanung benutzt
- Beschleunigungstechniken

All-Pairs

- Distanzen zwischen allen Knotenpaaren
- wird für Vorberechnung benutzt

Anfrageszenarien

Punkt-zu-Punkt

- zwei Punkte $\rightarrow$ kürzester Weg
- wird für Routenplanung benutzt
- Beschleunigungstechniken

All-Pairs

- Distanzen zwischen allen Knotenpaaren
- wird für Vorberechnung benutzt

One-to-All

- ein Knoten $\rightarrow$ Distanzen zu allen Knoten
- wird für Vorberechnung benutzt

Anfrageszenarien

Punkt-zu-Punkt

- zwei Punkte → kürzester Weg
- wird für Routenplanung benutzt
- Beschleunigungstechniken

All-Pairs

- Distanzen zwischen allen Knotenpaaren
- wird für Vorberechnung benutzt

One-to-All

- ein Knoten → Distanzen zu allen Knoten
- wird für Vorberechnung benutzt

One-to-Many

- ein (variierender) Knoten und eine (feste) Menge → Distanz zu allen Knoten in der Menge
- wichtig für POI

Anfrageszenarien

Punkt-zu-Punkt

- zwei Punkte → kürzester Weg
- wird für Routenplanung benutzt
- Beschleunigungstechniken

One-to-Many

- ein (variierender) Knoten und eine (feste) Menge → Distanz zu allen Knoten in der Menge
- wichtig für POI

All-Pairs

- Distanzen zwischen allen Knotenpaaren
- wird für Vorberechnung benutzt

One-to-All

- ein Knoten → Distanzen zu allen Knoten
- wird für Vorberechnung benutzt

Many-to-Many

- zwei Mengen → Distanztabelle
- wichtig für Vehicle Routing

Klassische Lehrbuchalgorithmen

Kürzeste Wege von einem Startknoten aus (single-source):

- Dijkstras Algorithmus [Dij59, Dan62]
- Bellman-Ford-Algorithmus [Bel58, FF62]

Kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren (all-pairs):

- n-mal Dijkstra oder Bellman-Ford
- Floyd-Warshall-Algorithmus [Flo62, War62]
- Johnsons Algorithmus [Joh77]

Struktur eines kürzesten Pfades

- Sei $P_{st}^k = (s, v_1, \ldots, v_j, t)$ ein kürzester s-t-Pfad, für den alle Zwischenknoten v_i in der Menge $\{1, \ldots, k\}$ liegen
- Beobachtung:
  - Wenn $k \notin P_{st}^k$, dann ist P_{st}^k auch ein P_{st}^{k-1}
  - Wenn $k \in P_{st}^k$, dann ist P_{st}^k die Konkatenation von P_{sk}^{k-1} und P_{kt}^{k-1}
- Sei $d_k(s, t)$ die Länge eines P_{st}^k, dann gilt:

Struktur eines kürzesten Pfades

- Sei $P_{st}^k = (s, v_1, \ldots, v_j, t)$ ein kürzester s-t-Pfad, für den alle Zwischenknoten v_i in der Menge $\{1, \ldots, k\}$ liegen
- Beobachtung:
  - Wenn $k \notin P_{st}^k$, dann ist P_{st}^k auch ein P_{st}^{k-1}
  - Wenn $k \in P_{st}^k$, dann ist P_{st}^k die Konkatenation von P_{sk}^{k-1} und P_{kt}^{k-1}
- Sei $d_k(s,t)$ die Länge eines P_{st}^k, dann gilt:

$$d_k(s,t) = \begin{cases} \ell(s,t) & \text{wenn } k = 0 \\ \min\{d_{k-1}(s,t), d_{k-1}(s,k) + d_{k-1}(k,t)\} & \text{wenn } k \geq 1 \end{cases}$$

Floyd-Warshall-Algorithmus

FloydWarshall($G = (V, E), \ell : E \to \mathbb{R}$)

```
1  set d[s][t] ← ∞ for all s, t ∈ V
2  set parent[s][t] ← ⊥ for all s, t ∈ V
3  foreach vertex u ∈ V do d[u][u] ← 0
4  foreach edge e = (u, v) ∈ E do  d[u][v] ← ℓ(e)     parent[u][v] ← u
5  for k ← 1 to n do
6      foreach vertex s ∈ V do
7          foreach vertex t ∈ V do
8              if d[s][k] + d[k][t] < d[s][t] then
9                  d[s][t] ← d[s][k] + d[k][t]
10                 parent[s][t] ← parent[k][t]
```

Floyd-Warshall-Algorithmus

FloydWarshall($G = (V, E), \ell : E \to \mathbb{R}$)

```
1  set d[s][t] ← ∞ for all s, t ∈ V
2  set parent[s][t] ← ⊥ for all s, t ∈ V
3  foreach vertex u ∈ V do d[u][u] ← 0
4  foreach edge e = (u, v) ∈ E do  d[u][v] ← ℓ(e)    parent[u][v] ← u
5  for k ← 1 to n do
6      foreach vertex s ∈ V do
7          foreach vertex t ∈ V do
8              if d[s][k] + d[k][t] < d[s][t] then
9                  d[s][t] ← d[s][k] + d[k][t]
10                 parent[s][t] ← parent[k][t]
```

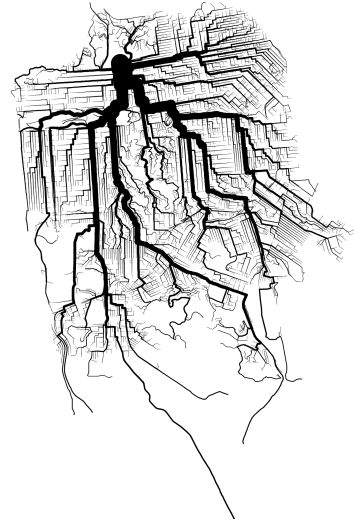
Zeit: $O(n^3)$ (aber kleiner konstanter Faktor) Platz: $O(n^2)$

PHAST

Kürzeste-Wege Bäume

Anfrage:

- gegeben ein nichtnegativ gewichteter gerichteter Graph und Knoten s
- berechne Distanzen von s zu *allen* anderen Knoten



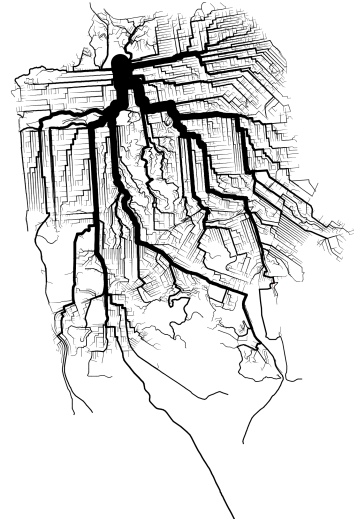
Kürzeste-Wege Bäume

Anfrage:

- gegeben ein nichtnegativ gewichteter gerichteter Graph und Knoten s
- berechne Distanzen von s zu *allen* anderen Knoten

Lösung:

- Dijkstra [Dij59]



Kürzeste-Wege Bäume

Anfrage:

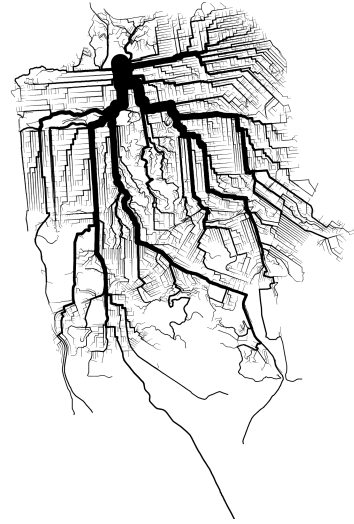
- gegeben ein nichtnegativ gewichteter gerichteter Graph und Knoten s
- berechne Distanzen von s zu *allen* anderen Knoten

Lösung:

- Dijkstra [Dij59]

Eigenschaften:

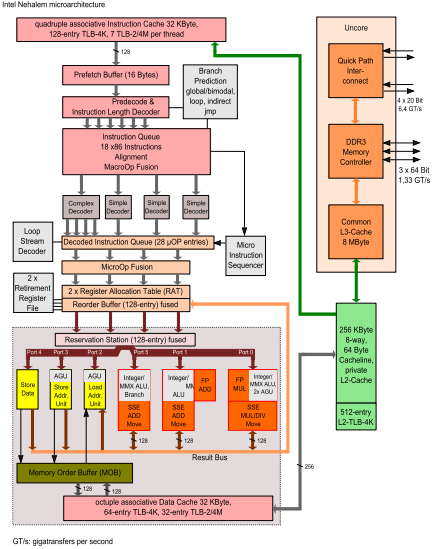
- $O(m + n \log n)$ mit Fibonacci Heaps [FT87]
- linear (mit kleinen Konstanten) in Praxis [Gol01]
- Ausnutzung von moderner Hardware schwierig



Moderne CPU Architektur

Einige Fakten:

- viele Kerne
- mehr Kerne als Speichercontroller
- Hyperthreading
- Multi-Sockel-Systeme
- steile Speicherhierarchie
- Cache coherency



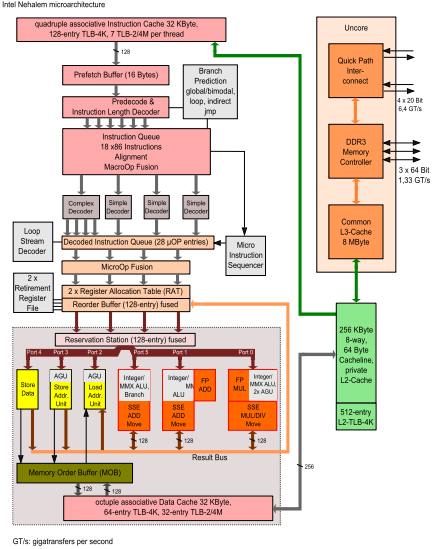
Moderne CPU Architektur

Einige Fakten:

- viele Kerne
- mehr Kerne als Speichercontroller
- Hyperthreading
- Multi-Sockel-Systeme
- steile Speicherhierarchie
- Cache coherency

Hauptherausforderungen:

- Parallelisierung
- Speicherzugriff

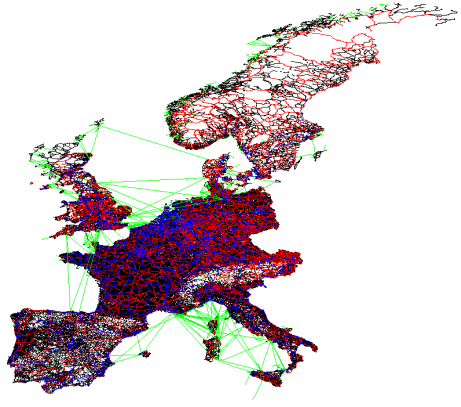


Ausnutzen von moderner Hardware

Datenlokalität

- Eingabe: West Europa
- 18M Knoten, 23M Straßen

  Dijkstra: ≈ 3.0 s $\Rightarrow$ nicht real-time



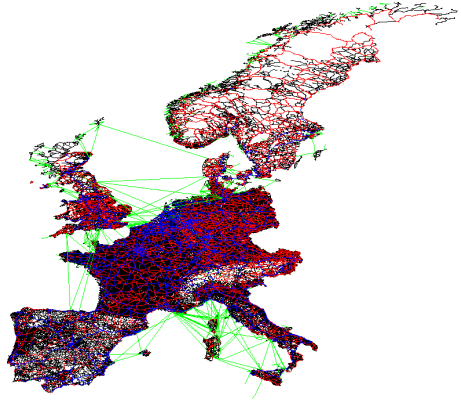
Core-i7 workstation (2.66 GHz)

Ausnutzen von moderner Hardware

Datenlokalität

- Eingabe: West Europa
- 18M Knoten, 23M Straßen

Dijkstra:	$\approx$ 3.0 s	$\Rightarrow$ nicht real-time
$n + m$ clock cycles:	$\approx$ 15 ms	$\Rightarrow$ viel schneller



Core-i7 workstation (2.66 GHz)

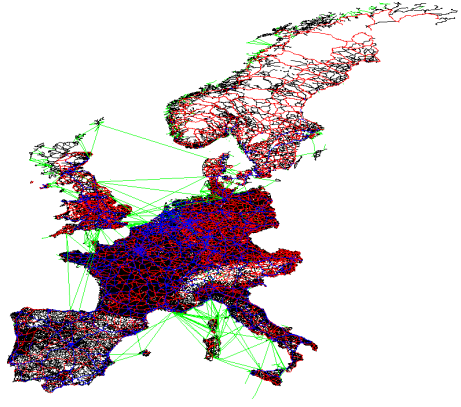
Ausnutzen von moderner Hardware

Datenlokalität

- Eingabe: West Europa
- 18M Knoten, 23M Straßen

Dijkstra:	≈ 3.0 s	$\Rightarrow$ nicht real-time
$n + m$ clock cycles:	≈ 15 ms	$\Rightarrow$ viel schneller
BFS:	≈ 2.0 s	

- Verlangsamung kommt nicht durch Priorityqueue allein



Core-i7 workstation (2.66 GHz)

Ausnutzen von moderner Hardware

Datenlokalität

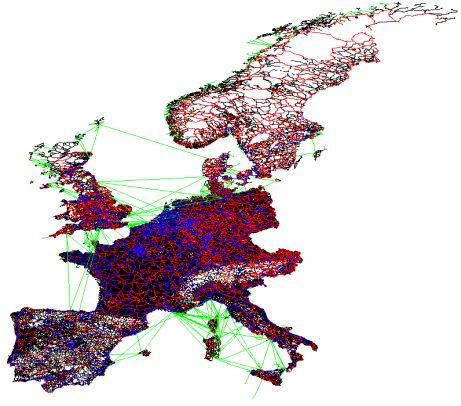
- Eingabe: West Europa
- 18M Knoten, 23M Straßen

Dijkstra:	≈ 3.0 s	$\Rightarrow$ nicht real-time
$n + m$ clock cycles:	≈ 15 ms	$\Rightarrow$ viel schneller
BFS:	≈ 2.0 s	

- Verlangsamung kommt nicht durch Priorityqueue allein

Parallelisierung:

- Spekulation
- Δ-stepping [MS03]
- mehr Operationen als Dijkstra
- keine große Beschleunigung auf dünnen Graphen



Core-i7 workstation (2.66 GHz)

Ausnutzen von moderner Hardware

Datenlokalität

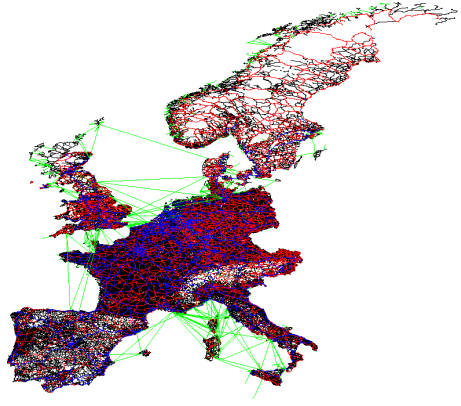
- Eingabe: West Europa
- 18M Knoten, 23M Straßen

Dijkstra:	≈ 3.0 s	$\Rightarrow$ nicht real-time
$n + m$ clock cycles:	≈ 15 ms	$\Rightarrow$ viel schneller
BFS:	≈ 2.0 s	

- Verlangsamung kommt nicht durch Priorityqueue allein

Parallelisierung:

- Spekulation
- Δ-stepping [MS03]
- mehr Operationen als Dijkstra
- keine große Beschleunigung auf dünnen Graphen
- Berechnen von mehreren Bäumen ist einfach



Core-i7 workstation (2.66 GHz)

Datenlokalität

Idee:

- Umordnen der Knoten im Graphen

Datenlokalität

Idee:

- Umordnen der Knoten im Graphen

		time per tree [ms]		
algorithm	details	random	input	DFS
Dijkstra	binary heap	11159	5859	5180
	Dial	7767	3538	2908
	smart queue	7991	3556	2826
BFS	—	6060	2445	2068

(**Achtung:** one-to-all & älterer Rechner)

Datenlokalität

Idee:

- Umordnen der Knoten im Graphen

		time per tree [ms]		
algorithm	details	random	input	DFS
Dijkstra	binary heap	11159	5859	5180
	Dial	7767	3538	2908
	smart queue	7991	3556	2826
BFS	—	6060	2445	2068

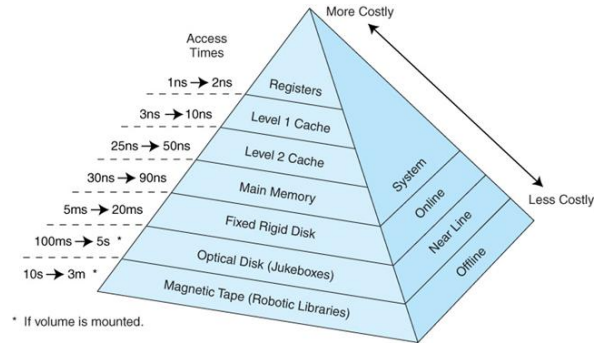
(**Achtung:** one-to-all & älterer Rechner)

$\Rightarrow$ besser, aber nicht ausreichend

Datenlokalität

Dijkstras Algorithmus:

- moderne Hardware nicht ausgenutzt
- Hauptprobleme:
  - Datenlokalität
  - Parallelisierung



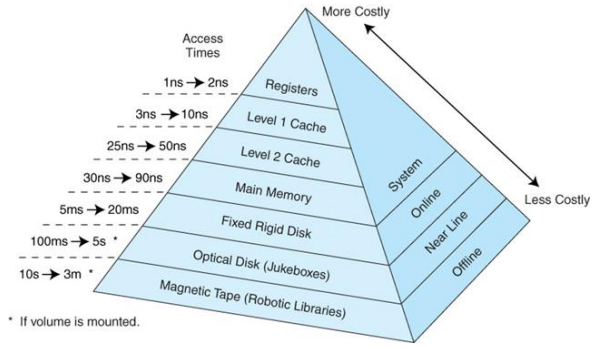
Datenlokalität

Dijkstras Algorithmus:

- moderne Hardware nicht ausgenutzt
- Hauptprobleme:
  - Datenlokalität
  - Parallelisierung

Fragen:

- Kombination mit Vorberechnung?
- Ansatzpunkt?



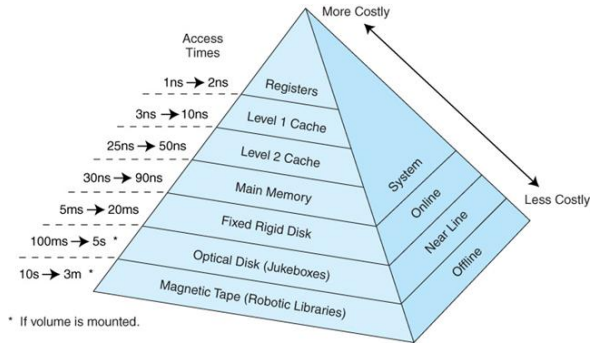
Datenlokalität

Dijkstras Algorithmus:

- moderne Hardware nicht ausgenutzt
- Hauptprobleme:
  - Datenlokalität
  - Parallelisierung

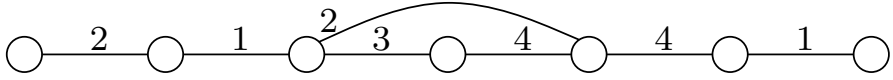
Fragen:

- Kombination mit Vorberechnung?
- Ansatzpunkt?



PHAST: Hardware-Accelerated Shortest path Trees

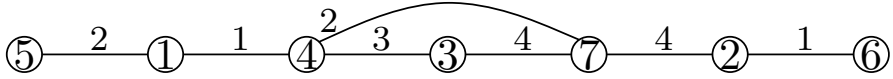
Contraction Hierarchies
Vorberechnung:



Contraction Hierarchies

Vorberechnung:

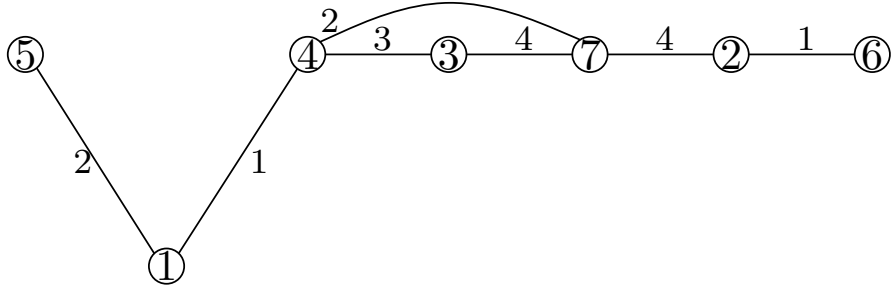
- ordne Knoten nach Wichtigkeit



Contraction Hierarchies

Vorberechnung:

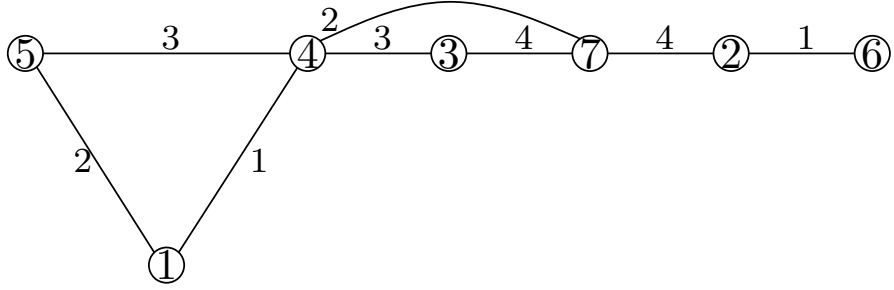
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorberechnung:

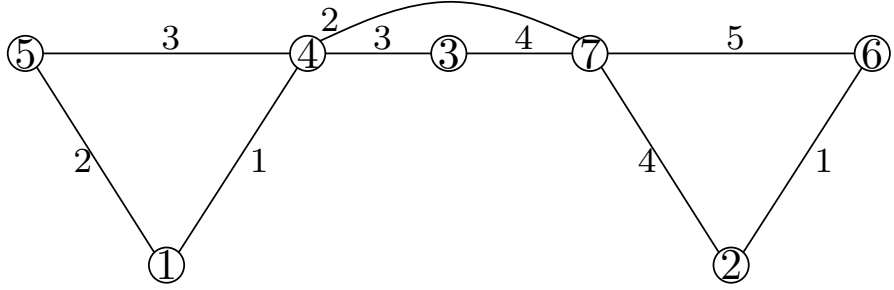
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorberechnung:

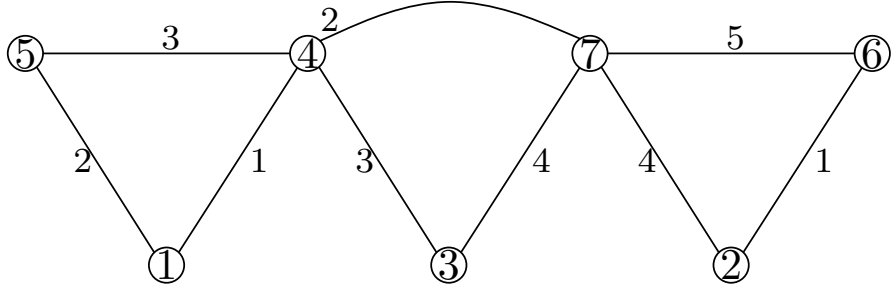
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorberechnung:

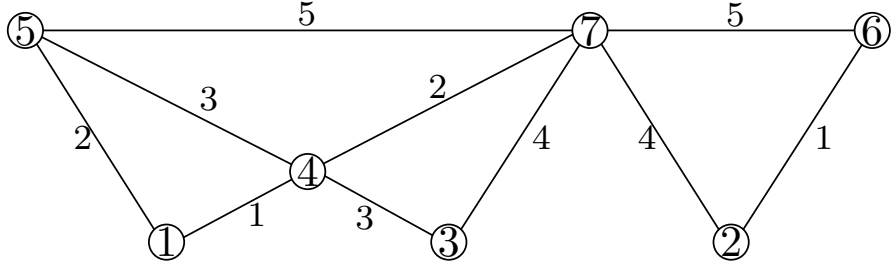
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorberechnung:

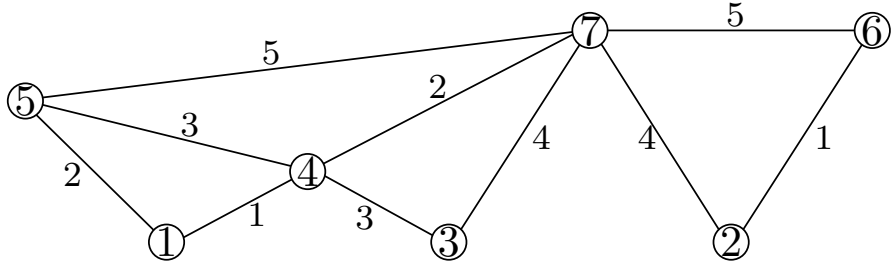
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorberechnung:

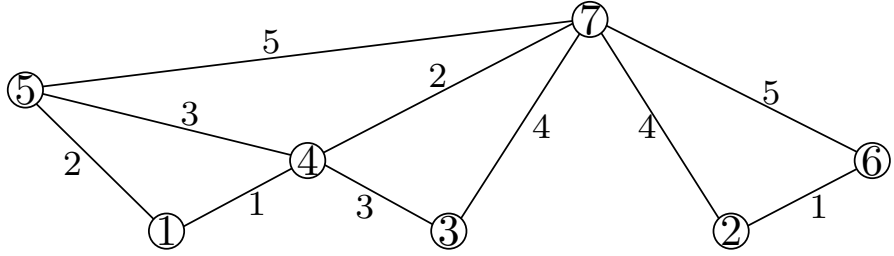
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorberechnung:

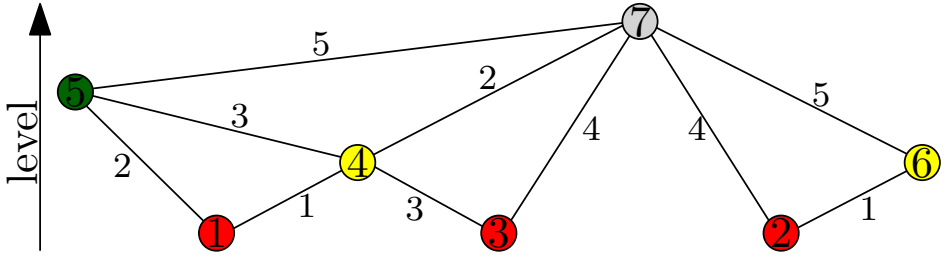
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorberechnung:

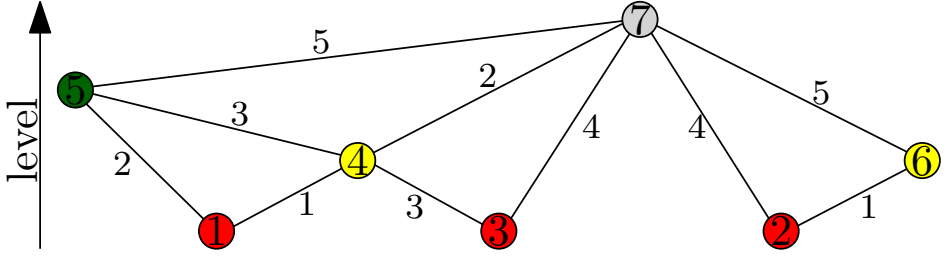
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu
- Levelzuordnung (ca. 150 in Straßennetzwerken)
  - Level $\neq$ Wichtigkeit
  - Level von v = max Level der Abwärtsnachbarn $+1$



Contraction Hierarchies

Punkt-zu-Punkt-Anfragen

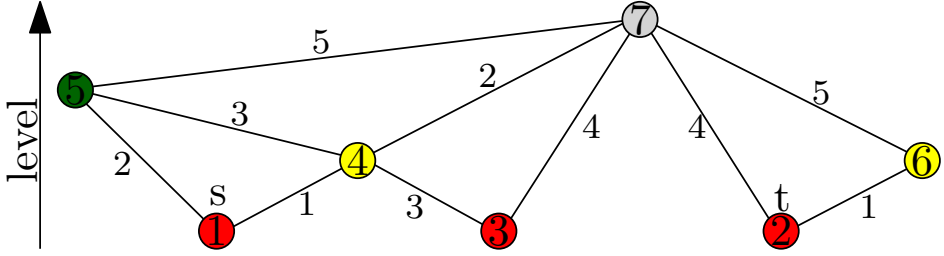
- modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten



Contraction Hierarchies

Punkt-zu-Punkt-Anfragen

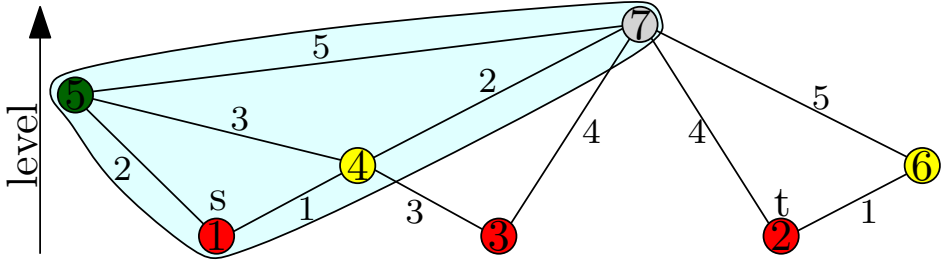
- modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten



Contraction Hierarchies

Punkt-zu-Punkt-Anfragen

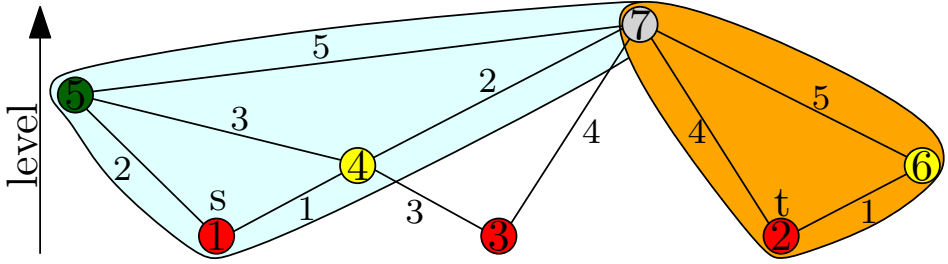
- modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten



Contraction Hierarchies

Punkt-zu-Punkt-Anfragen

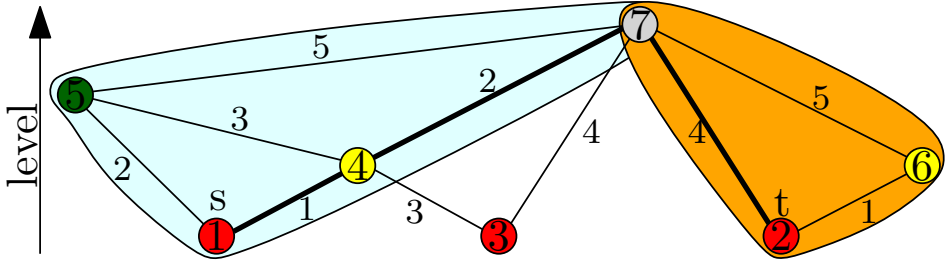
- modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten



Contraction Hierarchies

Punkt-zu-Punkt-Anfragen

- modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten



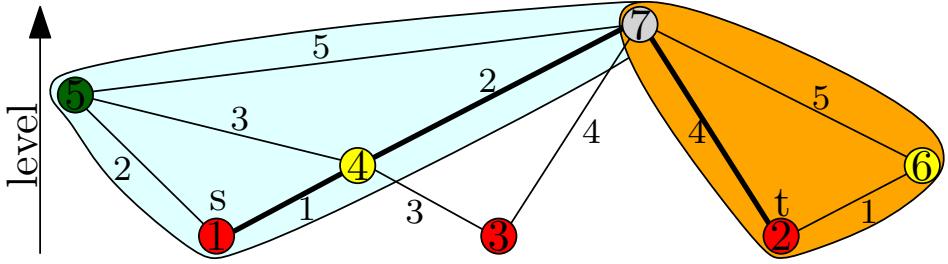
Contraction Hierarchies

Punkt-zu-Punkt-Anfragen

- modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten

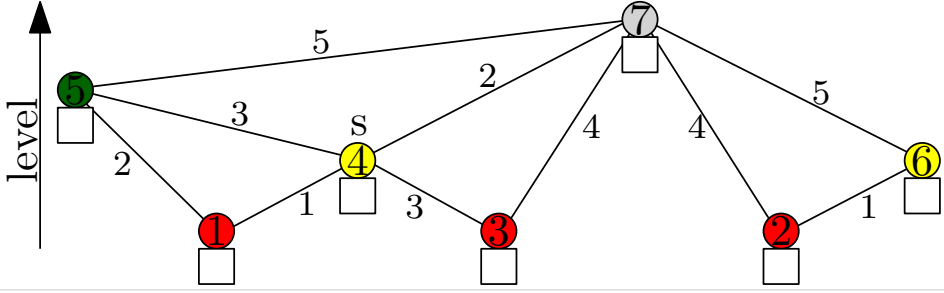
Korrektheit:

- es gibt einen wichtigsten Knoten auf dem Pfad
- dieser wird von Vorwärts- und Rückwärtssuche gescannt



Neuer Anfragealgorithmus

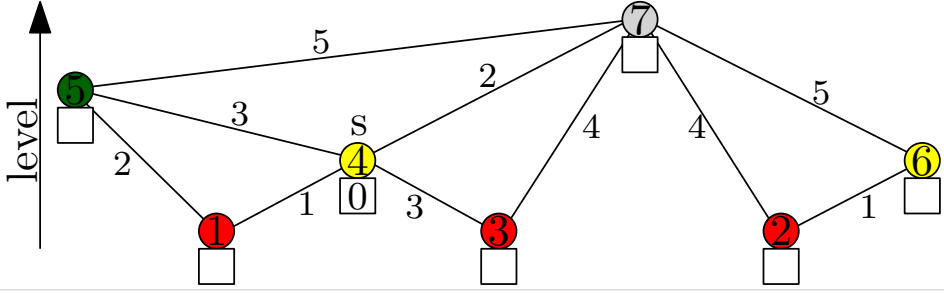
One-to-all-Suche von s:



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s:

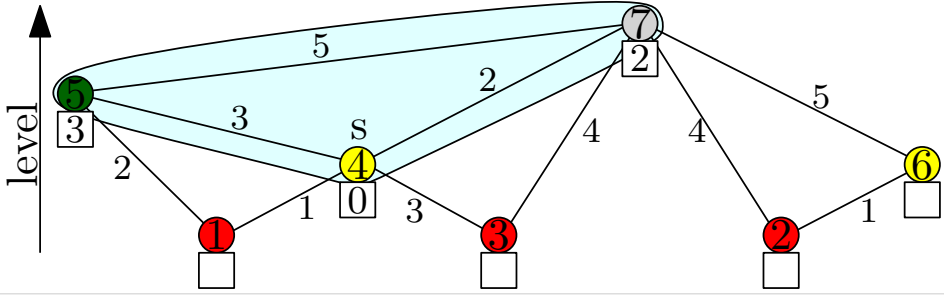
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s:

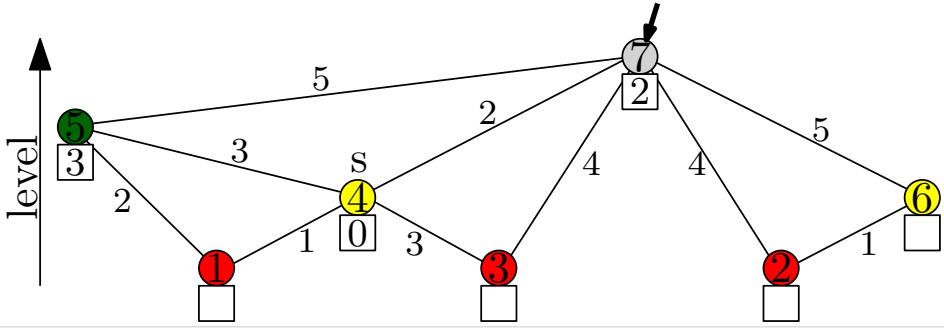
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s:

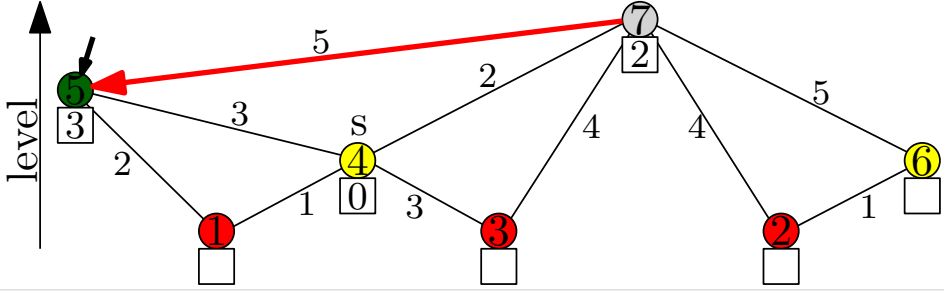
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in inverser Levelordnung:
  - checke eingehende Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
  - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s:

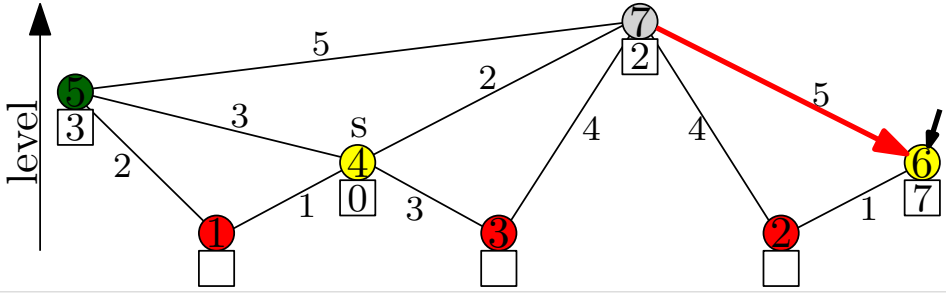
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in inverser Levelordnung:
  - checke eingehende Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
  - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s:

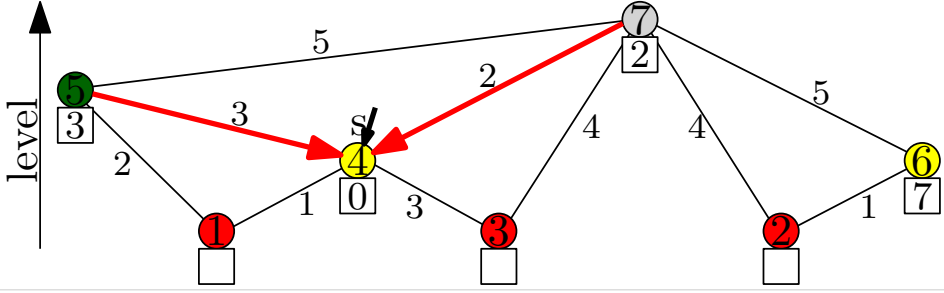
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in inverser Levelordnung:
  - checke eingehende Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
  - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s:

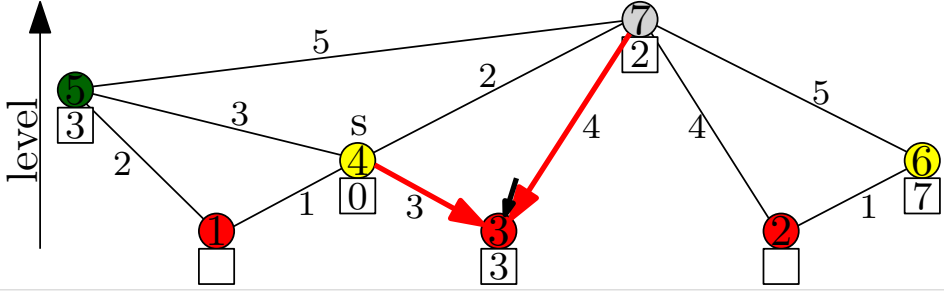
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in inverser Levelordnung:
  - checke eingehende Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
  - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s:

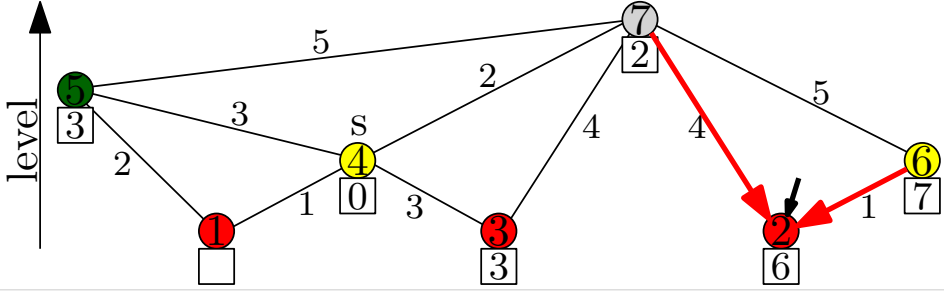
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in inverser Levelordnung:
  - checke eingehende Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
  - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s:

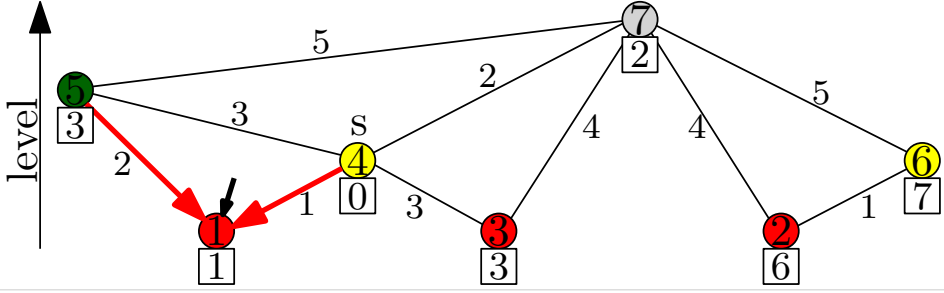
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in inverser Levelordnung:
  - checke eingehende Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
  - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s:

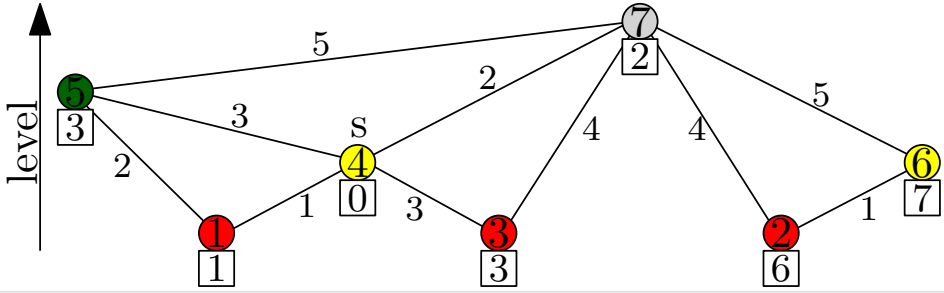
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in inverser Levelordnung:
  - checke eingehende Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
  - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s:

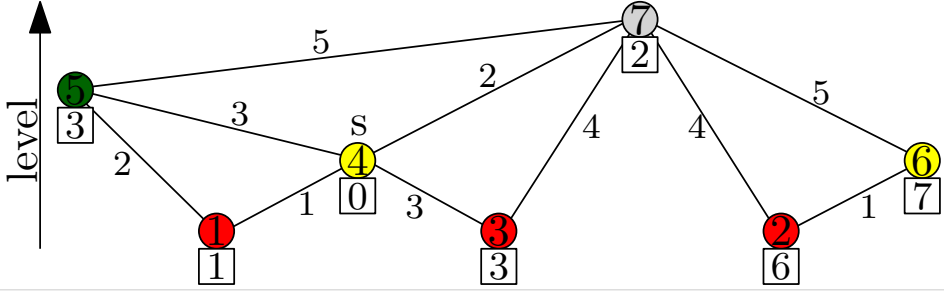
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in inverser Levelordnung:
  - checke eingehende Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
  - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$
- top-down Bearbeitung ohne Priority Queue (ca. 2.0 s)



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s:

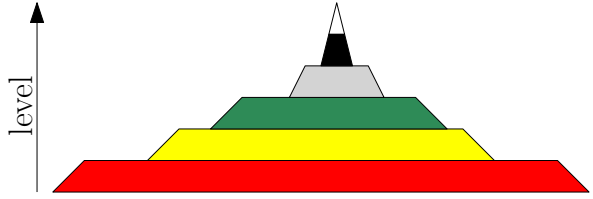
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in inverser Levelordnung:
  - checke eingehende Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
  - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$
- top-down Bearbeitung ohne Priority Queue (ca. 2.0 s)
- genauso schnell wie BFS. Warum das Ganze?



Analyse

Beobachtung:

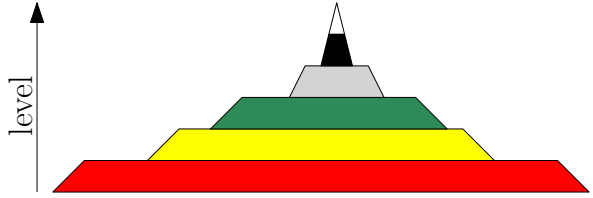
- top-down Prozess ist der Flaschenhals



Analyse

Beobachtung:

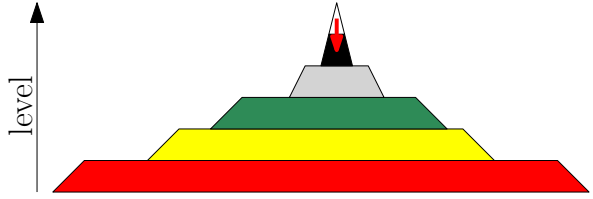
- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient



Analyse

Beobachtung:

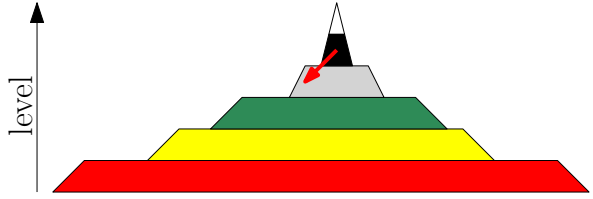
- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient



Analyse

Beobachtung:

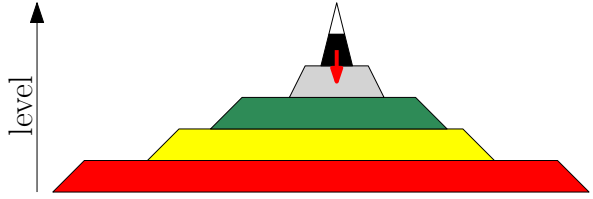
- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient



Analyse

Beobachtung:

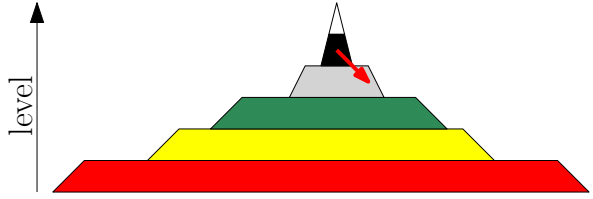
- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient



Analyse

Beobachtung:

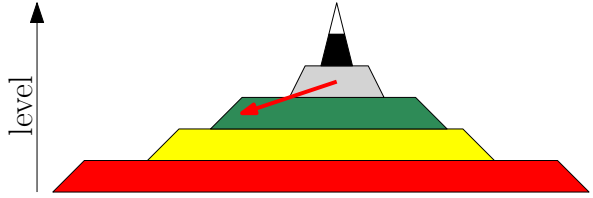
- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient



Analyse

Beobachtung:

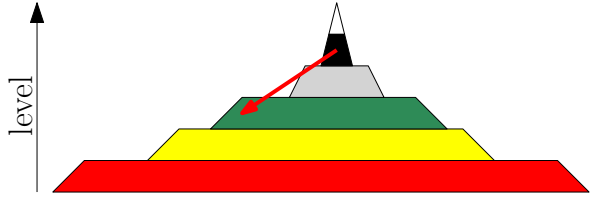
- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient



Analyse

Beobachtung:

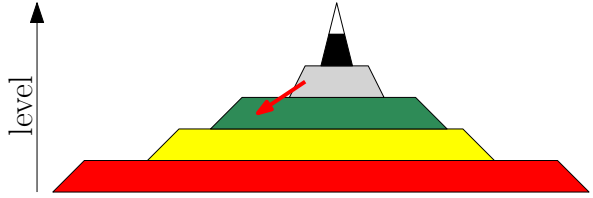
- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient



Analyse

Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient
- Zugriffsmuster sind unabhängig von s



Analyse

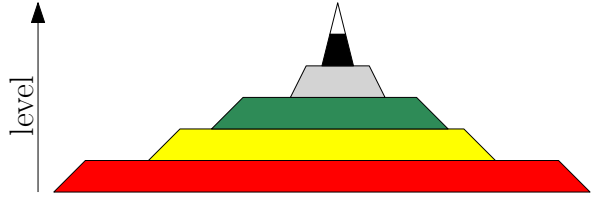
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient
- Zugriffsmuster sind unabhängig von s

Idee:

- speichere $G_\uparrow$ und $G_\downarrow$ separat
- Umordnung der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level

$\Rightarrow$ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem sequenziellen Sweep



Analyse

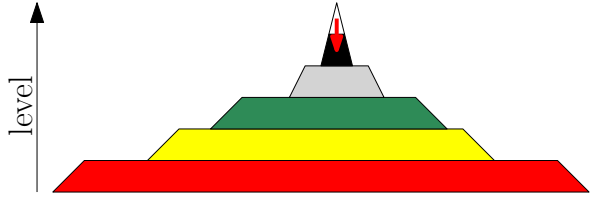
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient
- Zugriffsmuster sind unabhängig von s

Idee:

- speichere $G_\uparrow$ und $G_\downarrow$ separat
- Umordnung der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level

$\Rightarrow$ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem sequenziellen Sweep



Analyse

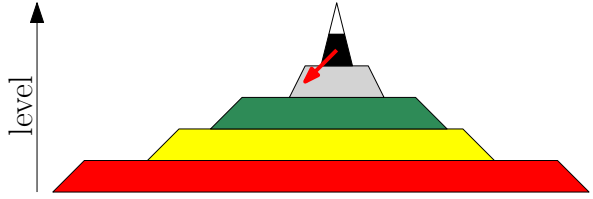
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient
- Zugriffsmuster sind unabhängig von s

Idee:

- speichere $G_\uparrow$ und $G_\downarrow$ separat
- Umordnung der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level

$\Rightarrow$ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem sequenziellen Sweep



Analyse

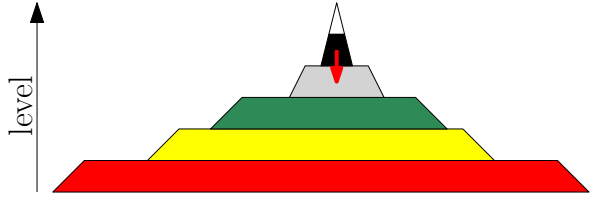
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient
- Zugriffsmuster sind unabhängig von s

Idee:

- speichere $G_\uparrow$ und $G_\downarrow$ separat
- Umordnung der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level

$\Rightarrow$ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem sequenziellen Sweep



Analyse

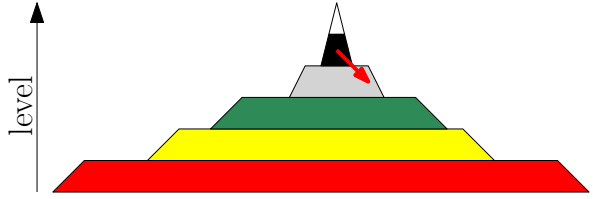
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient
- Zugriffsmuster sind unabhängig von s

Idee:

- speichere $G_\uparrow$ und $G_\downarrow$ separat
- Umordnung der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level

$\Rightarrow$ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem sequenziellen Sweep



Analyse

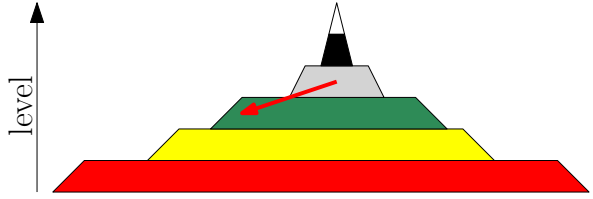
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient
- Zugriffsmuster sind unabhängig von s

Idee:

- speichere $G_\uparrow$ und $G_\downarrow$ separat
- Umordnung der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level

$\Rightarrow$ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem sequenziellen Sweep



Analyse

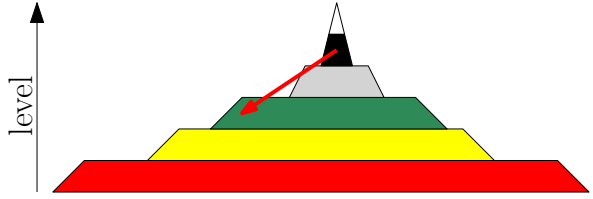
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient
- Zugriffsmuster sind unabhängig von s

Idee:

- speichere $G_\uparrow$ und $G_\downarrow$ separat
- Umordnung der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level

$\Rightarrow$ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem sequenziellen Sweep



Analyse

Beobachtung:

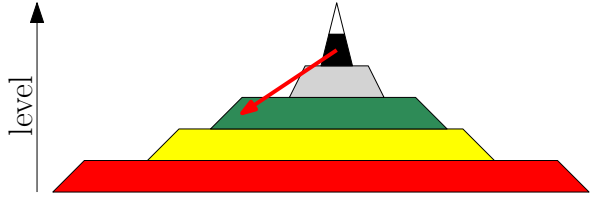
- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient
- Zugriffsmuster sind unabhängig von s

Idee:

- speichere $G_\uparrow$ und $G_\downarrow$ separat
- Umordnung der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level

$\Rightarrow$ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem sequenziellen Sweep

$\Rightarrow$ 172 ms pro Baum



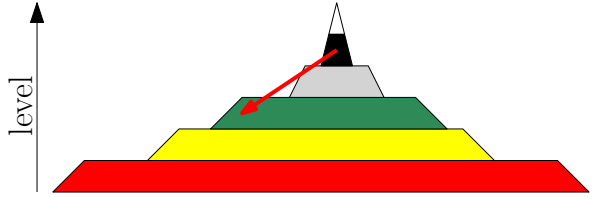
Analyse

Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch ineffizient
- Zugriffsmuster sind unabhängig von s

Idee:

- speichere $G_\uparrow$ und $G_\downarrow$ separat
- Umordnung der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level

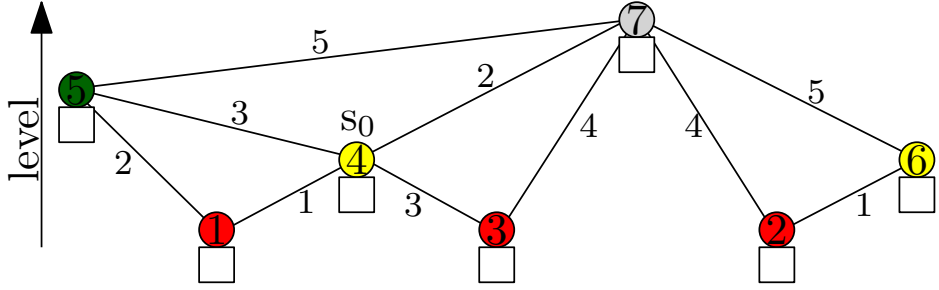


$\Rightarrow$ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem sequenziellen Sweep

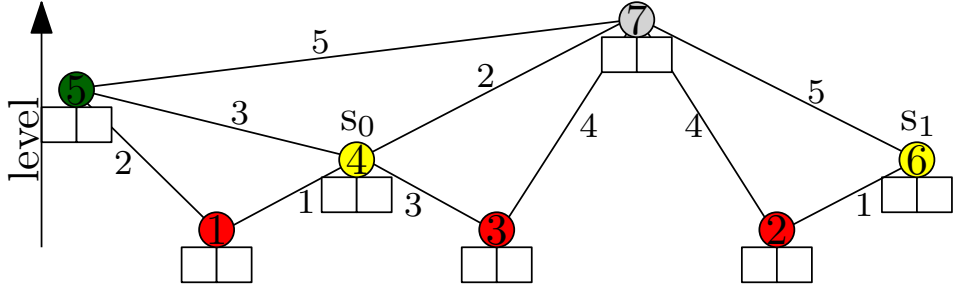
$\Rightarrow$ 172 ms pro Baum

- lesen der Distanzen semi-effizient (Kanten sortieren nach Tail-Rank)

Szenario: Multiple Startknoten

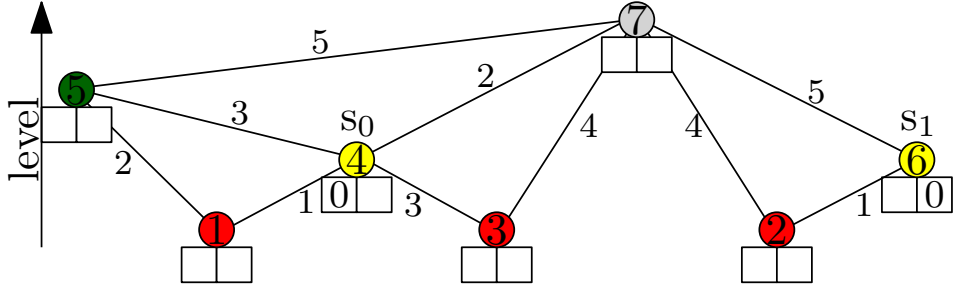


Szenario: Multiple Startknoten



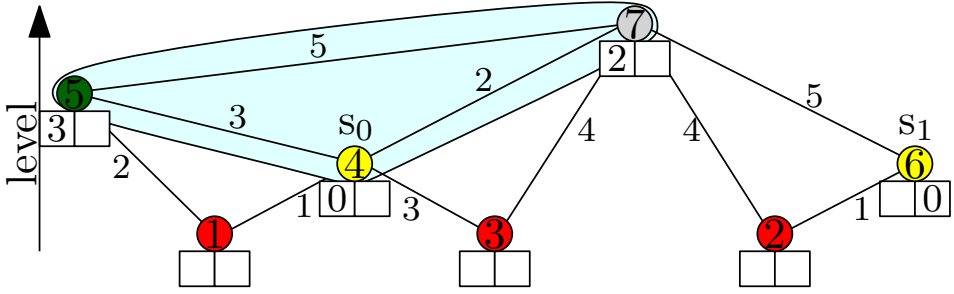
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen



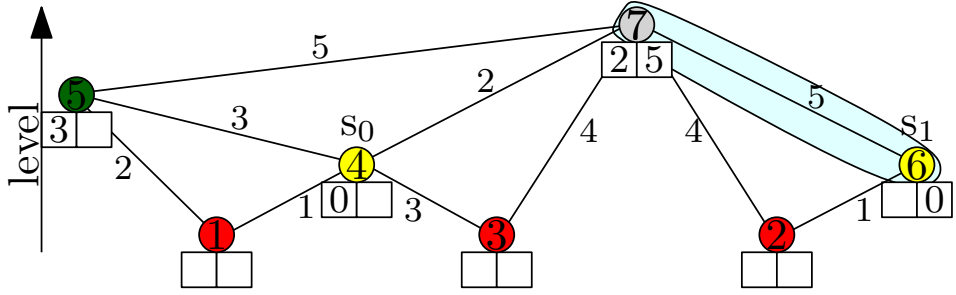
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen



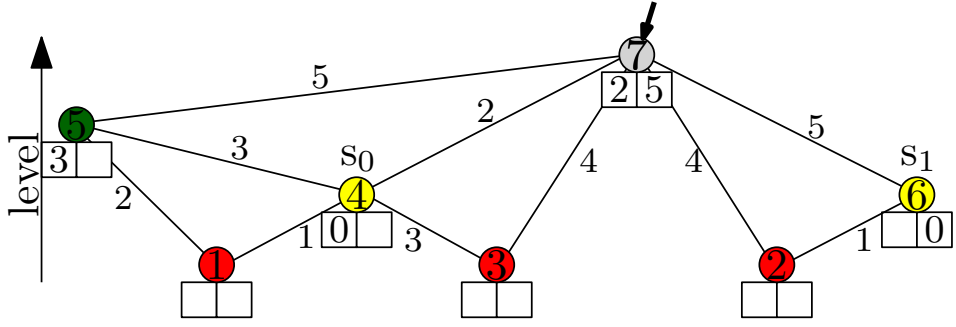
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen



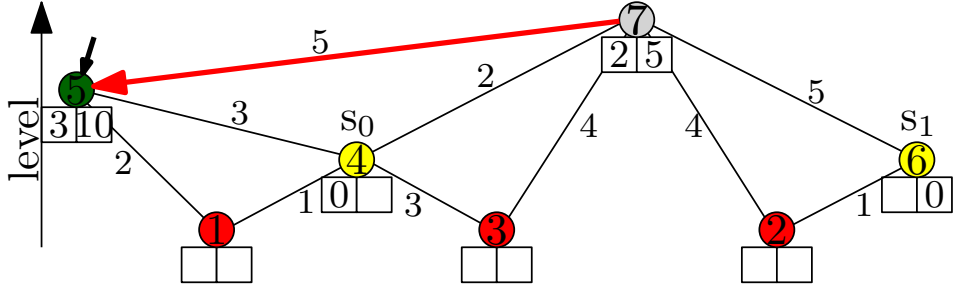
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



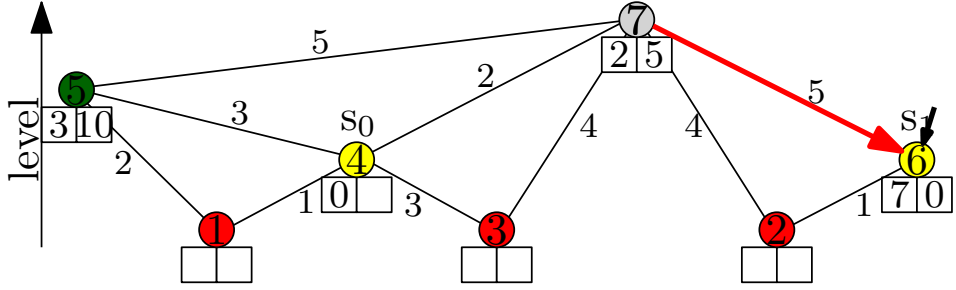
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



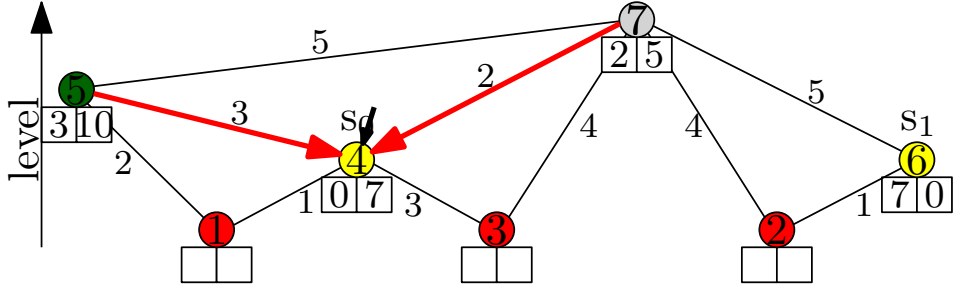
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



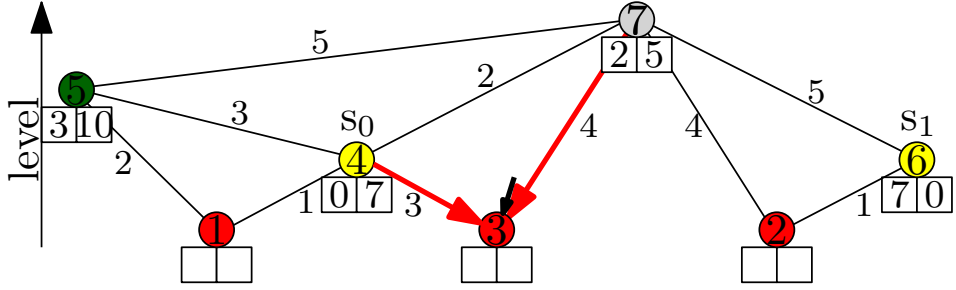
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



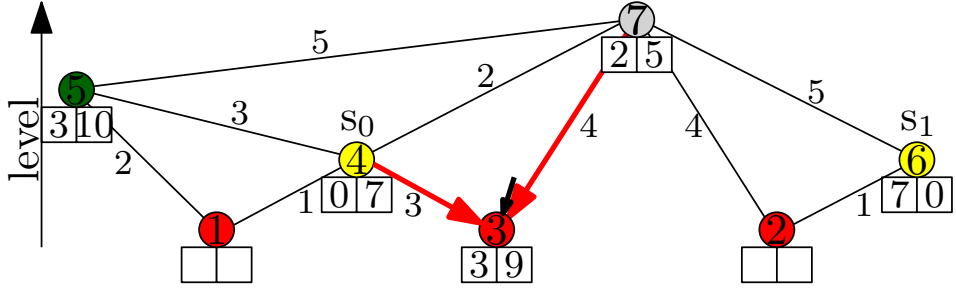
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



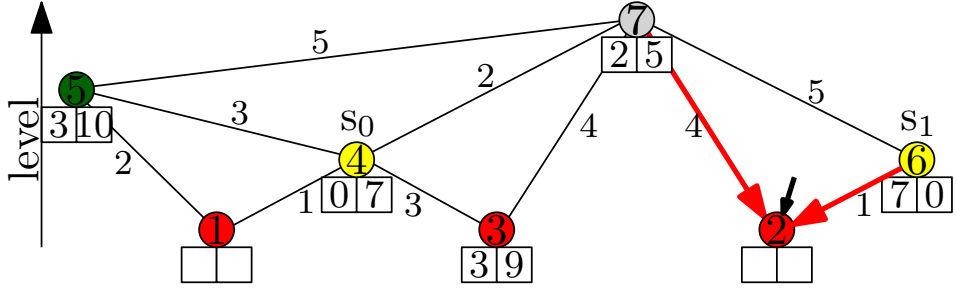
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



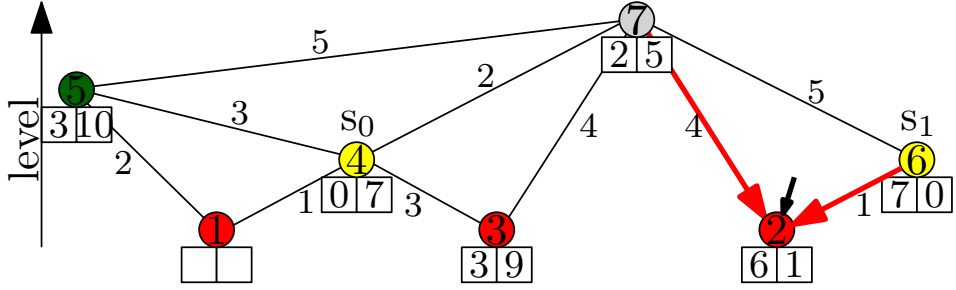
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten
- Vorteil: Mehr Daten pro Lesezugriff
- 96.8 ms pro Baum ($k = 16$)

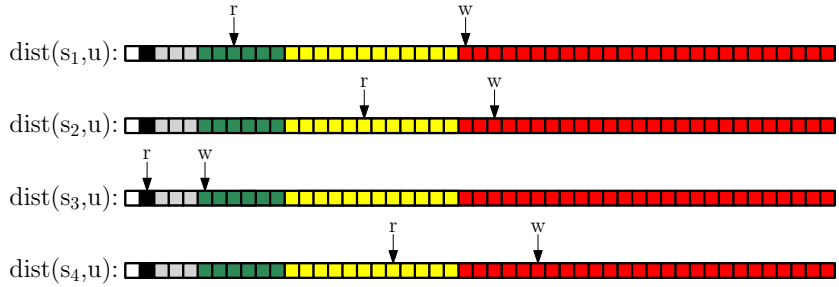


SIMD/SSE

- Bei mehreren Bäumen: PHAST-Operationen können mit SSE umgesetzt werden
- scanne 4 Distanzlabel auf einmal
- 37.1 ms pro Baum ($k = 16$)

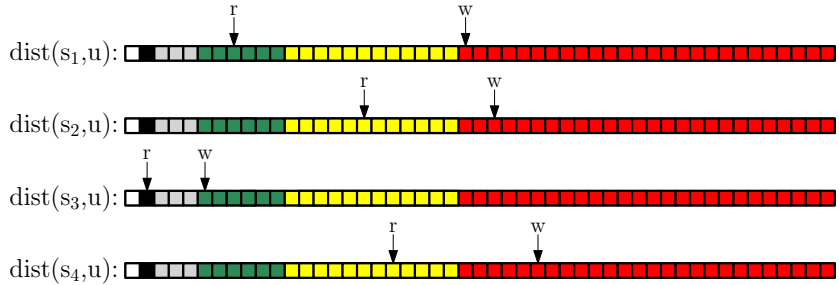
Parallelisierung

- Jeder Thread arbeitet unterschiedliche Startknoten ab



Parallelisierung

- Jeder Thread arbeitet unterschiedliche Startknoten ab

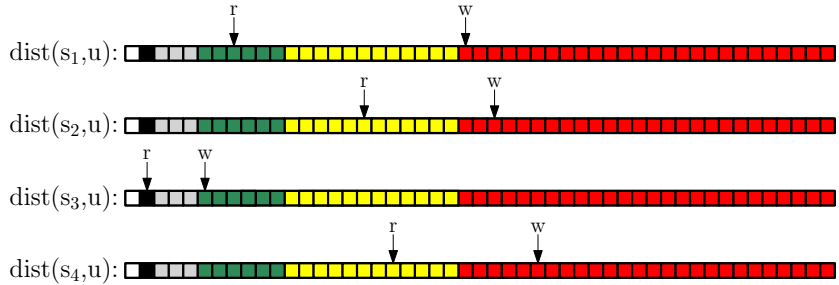


Ergebnisse:

- 16 Startenknoten pro Sweep (updates via SSE)
- multi-core nach Startknoten $\Rightarrow$ 64 Startknoten parallel (4 cores)
- 18.8 ms per Baum

Parallelisierung

- Jeder Thread arbeitet unterschiedliche Startknoten ab

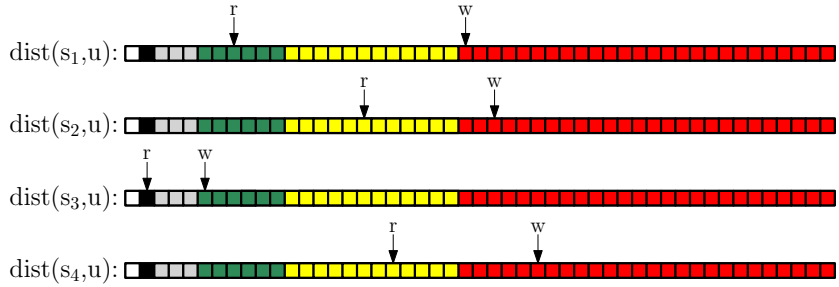


Ergebnisse:

- 16 Startenknoten pro Sweep (updates via SSE)
- multi-core nach Startknoten $\Rightarrow$ 64 Startknoten parallel (4 cores)
- 18.8 ms per Baum
- Warum kein perfekter Speedup?

Parallelisierung

- Jeder Thread arbeitet unterschiedliche Startknoten ab

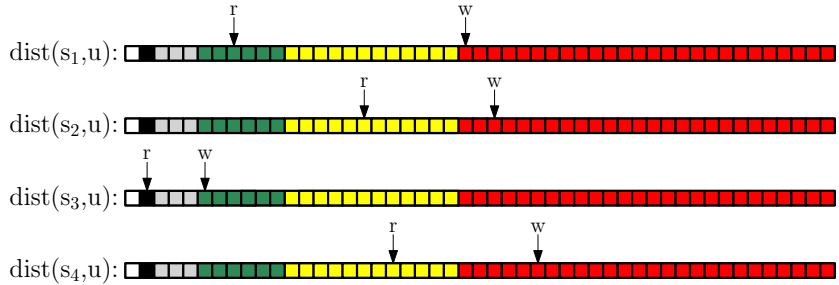


Ergebnisse:

- 16 Startenknoten pro Sweep (updates via SSE)
- multi-core nach Startknoten $\Rightarrow$ 64 Startknoten parallel (4 cores)
- 18.8 ms per Baum
- Warum kein perfekter Speedup?
- lower bound tests zeigen: nah an Speicherbandbreite

Parallelisierung

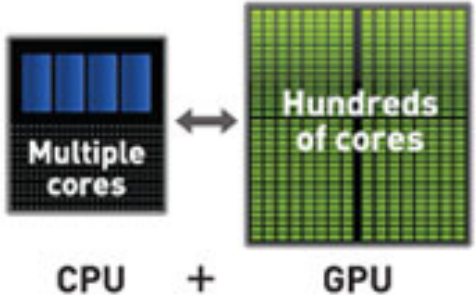
- Jeder Thread arbeitet unterschiedliche Startknoten ab



Ergebnisse:

- 16 Startenknoten pro Sweep (updates via SSE)
- multi-core nach Startknoten $\Rightarrow$ 64 Startknoten parallel (4 cores)
- 18.8 ms per Baum
- Warum kein perfekter Speedup?
- lower bound tests zeigen: nah an Speicherbandbreite
- Kann eine GPU helfen?

GPU Architektur



Intel Xeon X5680:

- 3.33 GHz, oft $\geq$ 10 GB RAM
- 32 GB/s Speicherbandbreite
- 6 Kerne
- SIMD/SSE mit 4 floats/ints per Vektor

NVIDIA GTX 580:

- 772 MHz, 1.5 GB RAM
- 192 GB/s Speicherbandbreite
- 16 Kerne, 32 parallele Threads pro Kern
  $\Rightarrow$ 512 parallele Threads
- eingeschränkte Berechnungen

GPHAST - Ideen

Beobachtungen:

- Aufwärtsuche ist schnell
- Flaschenhals ist der lineare Sweep
- Speicherbandbreite das Problem

GPHAST - Ideen

Beobachtungen:

- Aufwärtsuche ist schnell
- Flaschenhals ist der lineare Sweep
- Speicherbandbreite das Problem

Idee:

- speicher CH und Distanzarray auf der GPU
- Aufwärtssuche auf der CPU
- kopiere besuchte Knoten zur GPU (weniger als 2 kB)
- **Wichtig**: Nur die besuchten kopieren, nicht alle
- linearen Sweep auf der GPU

GPHAST - Ideen

Beobachtungen:

- Aufwärtsuche ist schnell
- Flaschenhals ist der lineare Sweep
- Speicherbandbreite das Problem

Idee:

- speicher CH und Distanzarray auf der GPU
- Aufwärtssuche auf der CPU
- kopiere besuchte Knoten zur GPU (weniger als 2 kB)
- **Wichtig**: Nur die besuchten kopieren, nicht alle
- linearen Sweep auf der GPU

Problem:

- nicht genug Speicher auf GPU, um Tausende von Bäumen parallel zu bearbeiten
- wir müssen eine einzelne Baumberechnung parallelisieren

Paralleler Linearer Sweep

Beobachtung:

- beim Scannen von Level i:
  - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
  - Schreiben von Distanzlabeln in Level i, Lesen von Level $> i$
  - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level-i Knoten ist unabhängig von anderen Level-i Knoten

Paralleler Linearer Sweep

Beobachtung:

- beim Scannen von Level i:
  - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
  - Schreiben von Distanzlabeln in Level i, Lesen von Level $> i$
  - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level-i Knoten ist unabhängig von anderen Level-i Knoten

Paralleler Linearer Sweep

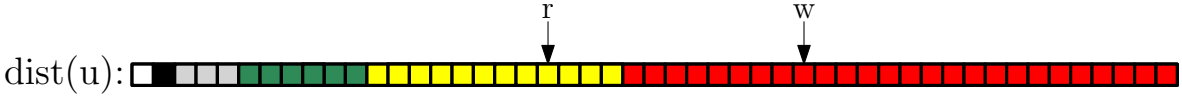
Beobachtung:

- beim Scannen von Level i:
  - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
  - Schreiben von Distanzlabeln in Level i, Lesen von Level $> i$
  - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level-i Knoten ist unabhängig von anderen Level-i Knoten

Paralleler Linearer Sweep

Beobachtung:

- beim Scannen von Level i:
  - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
  - Schreiben von Distanzlabeln in Level i, Lesen von Level $> i$
  - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level-i Knoten ist unabhängig von anderen Level-i Knoten



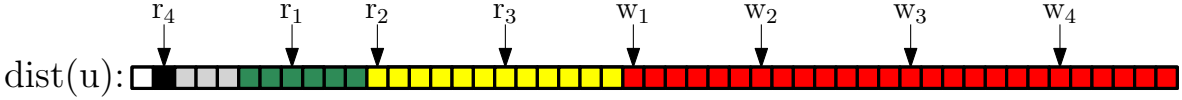
Paralleler Linearer Sweep

Beobachtung:

- beim Scannen von Level i:
  - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
  - Schreiben von Distanzlabeln in Level i, Lesen von Level $> i$
  - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level-i Knoten ist unabhängig von anderen Level-i Knoten

Idee:

- scanne alle Knoten auf Level i parallel
- Synchronization nach jedem Level
- ein Thread pro Knoten



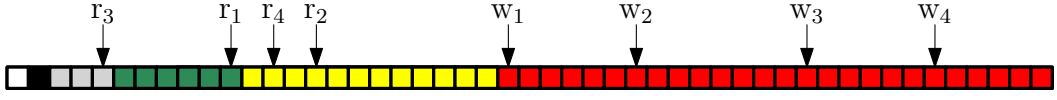
Paralleler Linearer Sweep

Beobachtung:

- beim Scannen von Level i:
  - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
  - Schreiben von Distanzlabeln in Level i, Lesen von Level $> i$
  - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level-i Knoten ist unabhängig von anderen Level-i Knoten

Idee:

- scanne alle Knoten auf Level i parallel
- Synchronization nach jedem Level
- ein Thread pro Knoten



Paralleler Linearer Sweep

Beobachtung:

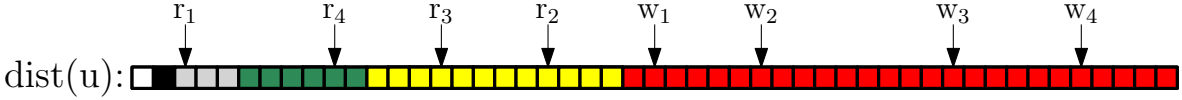
- beim Scannen von Level i:
  - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
  - Schreiben von Distanzlabeln in Level i, Lesen von Level $> i$
  - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level-i Knoten ist unabhängig von anderen Level-i Knoten

Idee:

- scanne alle Knoten auf Level i parallel
- Synchronization nach jedem Level
- ein Thread pro Knoten

results:

- 5.5 ms auf NVIDIA GTX 580
- Beschleunigung von 511 gegenüber Dijkstra



Paralleler Linearer Sweep

Beobachtung:

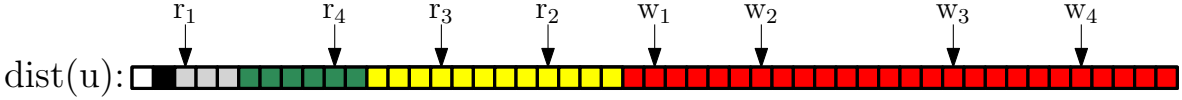
- beim Scannen von Level i:
  - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
  - Schreiben von Distanzlabeln in Level i, Lesen von Level $> i$
  - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level-i Knoten ist unabhängig von anderen Level-i Knoten

Idee:

- scanne alle Knoten auf Level i parallel
- Synchronization nach jedem Level
- ein Thread pro Knoten

results:

- 5.5 ms auf NVIDIA GTX 580
- Beschleunigung von 511 gegenüber Dijkstra
- (mehrere Bäume: 2.2 ms)



PHAST

PHAST auf 4-Kern Workstation (Core-i7 920)

sources/	time per tree [ms]					
sweep	1 core		2 cores		4 cores	
1	171.9		86.7		47.1	
4	121.8	(67.6)	61.5	(35.5)	32.5	(24.4)
8	105.5	(51.2)	53.5	(28.0)	28.3	(20.8)
16	96.8	(37.1)	49.4	(22.1)	25.9	(18.8)

Werte in Klammern mit SSE aktiviert

GPHAST

PHAST auf Nvidia GTX 580

trees / sweep	memory [MB]	time [ms]
1	395	5.53
2	464	3.93
4	605	3.02
8	886	2.52
16	1448	2.21

Weitere Eingaben

		Europe		USA	
algorithm	device	time	distance	time	distance
Dijkstra	4-core workstation	947.72	609.19	1269.12	947.75
	12-core server	288.81	177.58	380.40	280.17
	48-core server	168.49	108.58	229.00	167.77
PHAST	4-core workstation	18.81	22.25	27.11	28.81
	12-core server	7.20	8.27	10.42	10.71
	48-core server	4.03	5.03	6.18	6.58
GPHAST	GTX 580	2.21	3.88	3.41	4.65

Beobachtung:

- Beschleunigung für Distanzmetrik geringer

All-Pairs Shortest Paths

Eingabe: Europa mit Reisezeiten

algorithm	device	time	energy [MJ]
Dijkstra	4-core workstation	197d	
	12-core server	60d	
	48-core server	35d	
PHAST	4-core workstation	94h	
	12-core server	36h	
	48-core server	20h	
GPHAST	GTX 580		

All-Pairs Shortest Paths

Eingabe: Europa mit Reisezeiten

algorithm	device	time	energy [MJ]
Dijkstra	4-core workstation	197d	
	12-core server	60d	
	48-core server	35d	
PHAST	4-core workstation	94h	
	12-core server	36h	
	48-core server	20h	
GPHAST	GTX 580	11h	

All-Pairs Shortest Paths

Eingabe: Europa mit Reisezeiten

algorithm	device	time	energy [MJ]
Dijkstra	4-core workstation	197d	
	12-core server	60d	
	48-core server	35d	
PHAST	4-core workstation	94h	
	12-core server	36h	
	48-core server	20h	
GPHAST	GTX 580	11h	

4-core workstation without GPU: 163 watts
4-core workstation with GPU: 375 watts
12-core server: 332 watts
48-core server: 747 watts

All-Pairs Shortest Paths

Eingabe: Europa mit Reisezeiten

algorithm	device	time	energy [MJ]
Dijkstra	4-core workstation	197d	2780.6
	12-core server	60d	1725.9
	48-core server	35d	2265.5
PHAST	4-core workstation	94h	55.2
	12-core server	36h	43.0
	48-core server	20h	54.2
GPHAST	GTX 580	11h	14.9

4-core workstation without GPU: 163 watts
4-core workstation with GPU: 375 watts
12-core server: 332 watts
48-core server: 747 watts

Baumrekonstruktion

bis jetzt:

- nur Distanzen berechnet, nicht Bäume

Baumrekonstruktion

bis jetzt:

- nur Distanzen berechnet, nicht Bäume

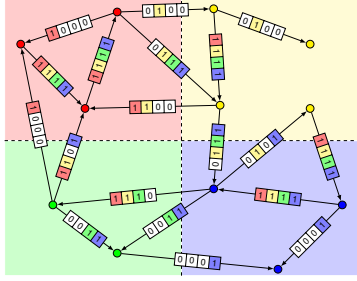
Idee:

- Iteration über alle Kanten (1 Thread pro Kante)
- Wenn $d(v) + \text{len}(v, u) = d(u)$ dann ist v der Vorgänger von u (sofern kürzeste Wege eindeutig sind)

Arc-Flags

Idee:

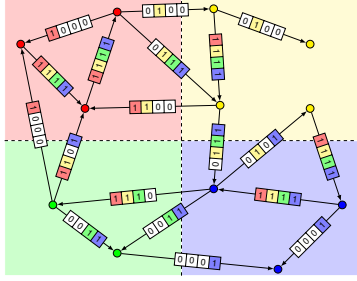
- benutze GPHAST zum Berechnen der Bäume von den Randknoten aus



Arc-Flags

Idee:

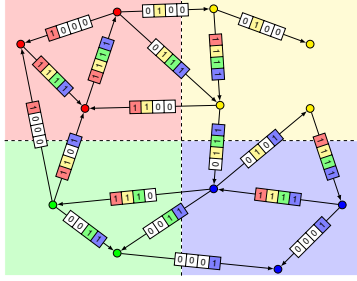
- benutze GPHAST zum Berechnen der Bäume von den Randknoten aus
- setze Flaggen durch zusätzlichen Sweep auf GPU
  Wichtig, weil alle Bäume "auf CPU kopieren" teuer ist



Arc-Flags

Idee:

- benutze GPHAST zum Berechnen der Bäume von den Randknoten aus
- setze Flaggen durch zusätzlichen Sweep auf GPU
  Wichtig, weil alle Bäume "auf CPU kopieren" teuer ist
- Vorberechnung sinkt von 17 Stunden auf 3 Minuten



Hybrid-GPHAST

Beobachtung:

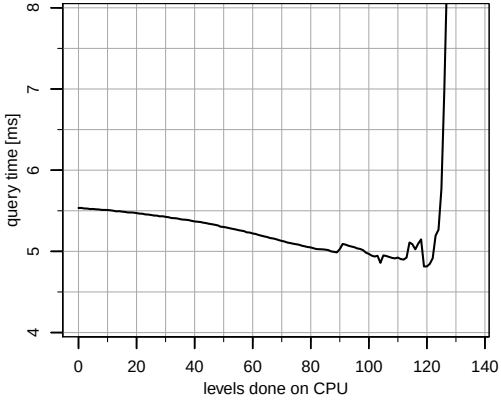
- Synchronization des Level kostet Zeit auf der GPU (5 μs pro Level)
- obere Level sind klein

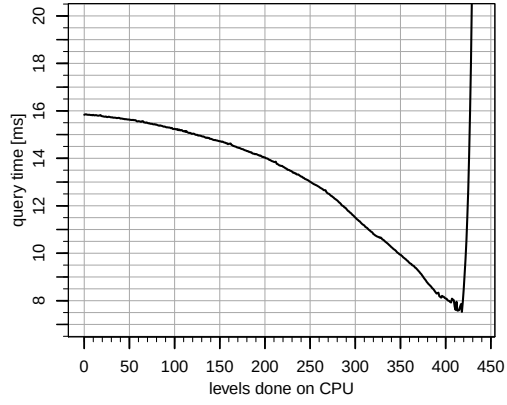
Idee:

- beginne linearen Sweep auf CPU (bis Level k)
- kopiere Suchraum und alle Distanzlabel für Knoten oberhalb k zur GPU
- restlicher Scan auf der GPU

Hybrid-GPHAST: Ergebnisse

Reisezeiten vs. Reisedistanzen





Es lohnt sich, ein paar Level auf der CPU zu berechnen.

Das One-to-Many Problem

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten s und eine Menge T
- Ausgabe: Distanz von s zu allen $t \in T$
- Annahme: wir fixieren T und variieren s

Das One-to-Many Problem

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten s und eine Menge T
- Ausgabe: Distanz von s zu allen $t \in T$
- Annahme: wir fixieren T und variieren s

offensichtliche Lösungen:

- Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium)
  $\Rightarrow$ Performance stark abhängig von $|T|$ und Verteilung von T

Das One-to-Many Problem

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten s und eine Menge T
- Ausgabe: Distanz von s zu allen $t \in T$
- Annahme: wir fixieren T und variieren s

offensichtliche Lösungen:

- Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium)
  $\Rightarrow$ Performance stark abhängig von $|T|$ und Verteilung von T
- $|T|$ p2p Anfragen (z.B. CH)
  $\Rightarrow$ Performance stark abhängig von $|T|$

Das One-to-Many Problem

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten s und eine Menge T
- Ausgabe: Distanz von s zu allen $t \in T$
- Annahme: wir fixieren T und variieren s

offensichtliche Lösungen:

- Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium)
  - $\Rightarrow$ Performance stark abhängig von $|T|$ und Verteilung von T
- $|T|$ p2p Anfragen (z.B. CH)
  - $\Rightarrow$ Performance stark abhängig von $|T|$
- benutze PHAST (kein Stoppkriterium!)
  - $\Rightarrow$ Overkill (vor allem für kleine T)

Das One-to-Many Problem

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten s und eine Menge T
- Ausgabe: Distanz von s zu allen $t \in T$
- Annahme: wir fixieren T und variieren s

offensichtliche Lösungen:

- Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium)
  $\Rightarrow$ Performance stark abhängig von $|T|$ und Verteilung von T
- $|T|$ p2p Anfragen (z.B. CH)
  $\Rightarrow$ Performance stark abhängig von $|T|$
- benutze PHAST (kein Stoppkriterium!)
  $\Rightarrow$ Overkill (vor allem für kleine T)

Geht das besser?

Bucket CH

während Rückwärtssuchen (target selection phase):

- je $t \in T$:
- starte Suche im Rückwärts-DAG, breche nicht ab
- für jedes erreichte u:
- speichere einen Bucket $\beta(u)$ mit $(t, d(u,t))$
  Alternative Sichtweise: füge gewichtete Abwärtskanten zu erreichbaren Zielknoten ein

während Vorwärtssuche (query phase):

- für jedes erreichte u:
  - scanne Bucket $\beta(u)$
  - aktualisiere Distanzarray D_T
- Abbruchkriterium nur bei (k-)Nearest-Neighbor-Suchen

Bucket CH

während Rückwärtssuchen (target selection phase):

- je $t \in T$:
- starte Suche im Rückwärts-DAG, breche nicht ab
- für jedes erreichte u:
- speichere einen Bucket $\beta(u)$ mit $(t, d(u,t))$
  Alternative Sichtweise: füge gewichtete Abwärtskanten zu erreichbaren Zielknoten ein

während Vorwärtssuche (query phase):

- für jedes erreichte u:
  - scanne Bucket $\beta(u)$
  - aktualisiere Distanzarray D_T
- Abbruchkriterium nur bei (k-)Nearest-Neighbor-Suchen

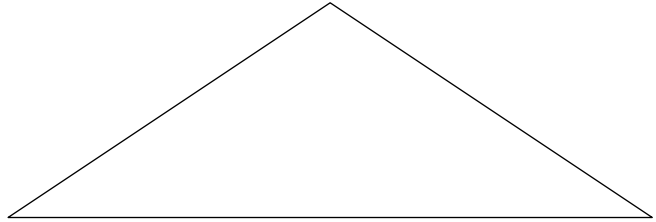
Optimierungen:

- Stall on Demand in Rückwärtssuchen (80% weniger Buckets)
- Buckets nach Distanz sortieren
- Buckets kompakt als Adjazenzarray speichern

RPHAST

Beobachtung PHAST:

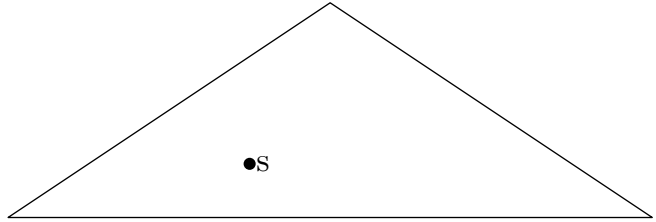
- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



RPHAST

Beobachtung PHAST:

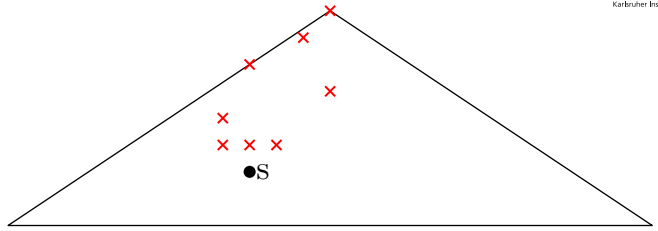
- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



RPHAST

Beobachtung PHAST:

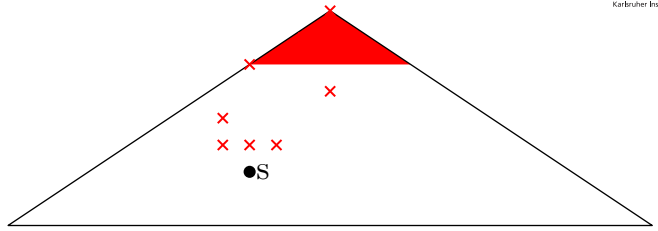
- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



RPHAST

Beobachtung PHAST:

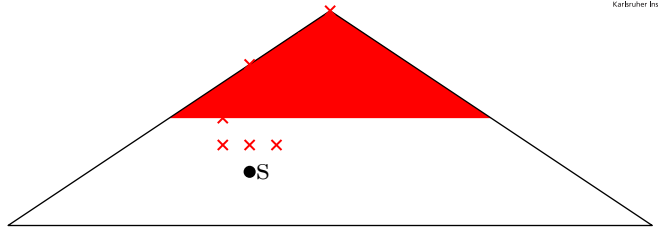
- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



RPHAST

Beobachtung PHAST:

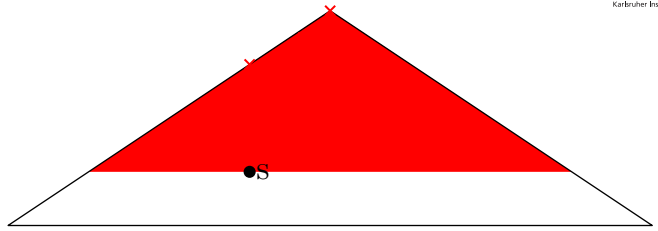
- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



RPHAST

Beobachtung PHAST:

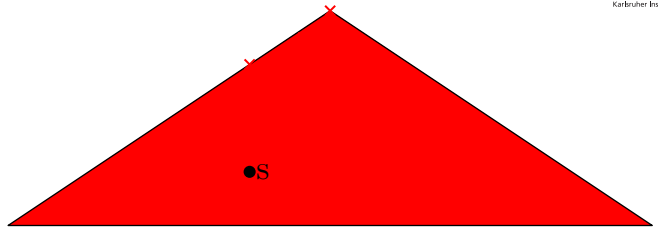
- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



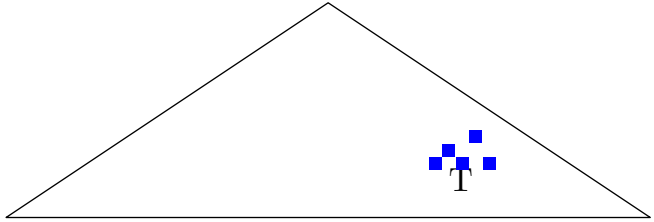
RPHAST

Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



RPHAST



Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

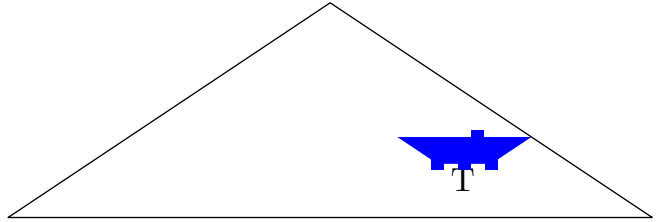
Idee:

- extrahiere relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)

RPHAST

Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



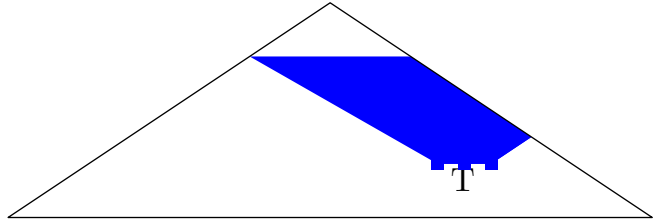
Idee:

- extrahiere relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)

RPHAST

Beobachtung PHAST:

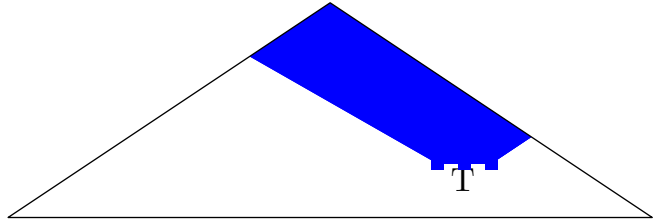
- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



Idee:

- extrahiere relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)

RPHAST



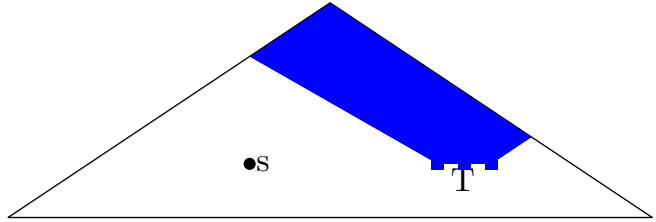
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- extrahiere relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)

RPHAST



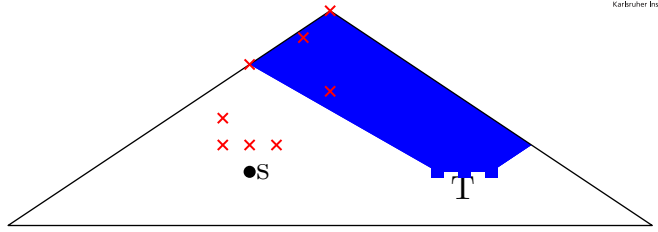
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- extrahiere relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen

RPHAST



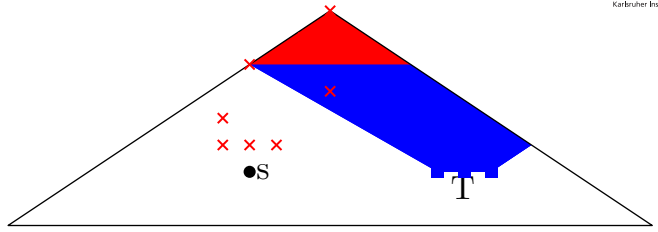
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- extrahiere relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen

RPHAST



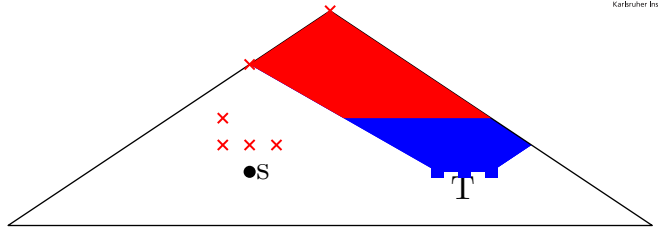
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- extrahiere relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen
- Sweep auf extrahiertem Graphen

RPHAST



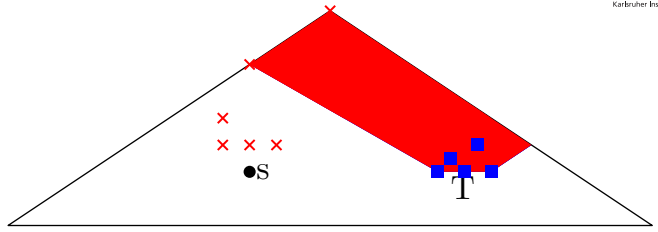
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- extrahiere relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen
- Sweep auf extrahiertem Graphen

RPHAST



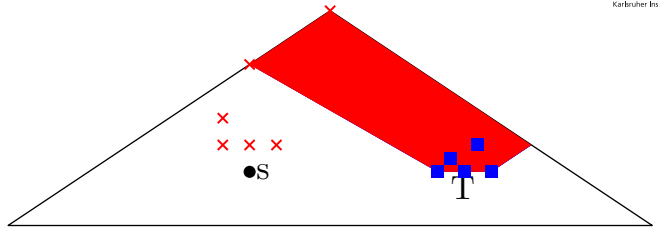
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- extrahiere relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen
- Sweep auf extrahiertem Graphen

RPHAST



Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- extrahiere relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen
- Sweep auf extrahiertem Graphen

$\Rightarrow$

- Startknoten kann im ganzen Graphen liegen
- Größe des extrahierten Graphen hängt von Verteilung und Anzahl T ab
- kann wie PHAST parallelisiert werden
- GPU-Implementierung möglich

Experimente

Problem:
Je nach Szenario liegen die Ziele in einer kleinen Region oder sind über weite Teile des Graphen verteilt.

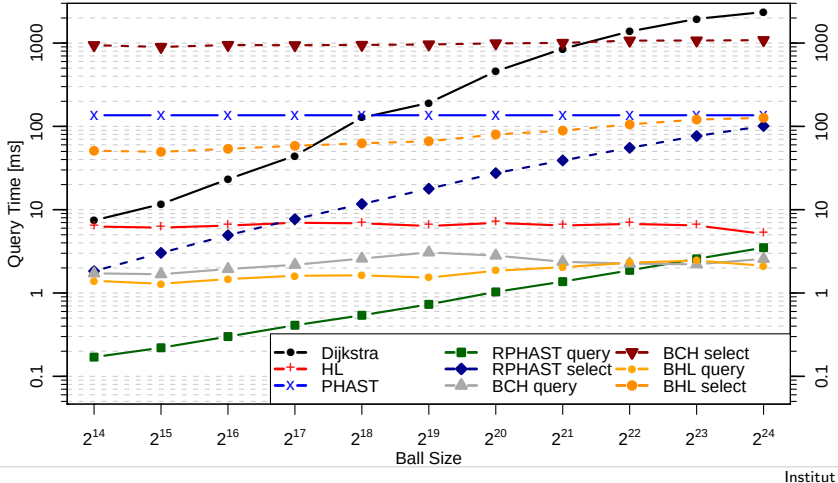
Setup:

- starte Dijkstra von zufälligem Knoten c
- brich nach B besuchten Knoten ab (Ballsize)
- wähle zufällige Zielknotenmenge $T \subseteq B$

Vergleiche Performance von Bucket CH (BCH), Bucket HL (BHL), RPHAST

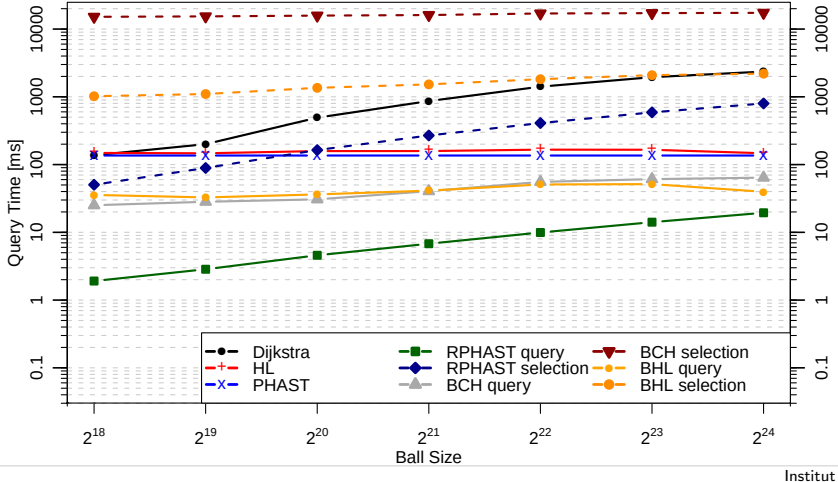
Experimente I

input: Westeuropa (18M Knoten), $|T| = 2^{14}$



Experimente II

input: Westeuropa (18M Knoten), $|T| = 2^{18}$



Inkrementelles Many-to-One

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten t und eine Menge S
- Ausgabe: Distanz von allen $s \in S$ zu t
- Annahme: wir fixieren t und fragen die $s \in S$ der Reihe nach an

Inkrementelles Many-to-One

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten t und eine Menge S
- Ausgabe: Distanz von allen $s \in S$ zu t
- Annahme: wir fixieren t und fragen die $s \in S$ der Reihe nach an

Idee:

- RPHAST aber lazy

Lazy RPHAST

Data: $D^{\downarrow}[v]$: tentative v-t Distanz aus CH Rückwärtssuche
Data: $D[v]$: finale v-t Distanzen, initial $\perp$, nur zurücksetzen wenn t sich ändert

```
1 Function ComputeAndMemoizeDist(u):
2     if D[u] = ⊥ then
3         D[u] ← D↓[u];
4         for uv Aufwärtskante in G+ do
5             D[u] ← min{D[u], w+(uv) + ComputeAndMemoizeDist(v)};
6     return D[u];
```

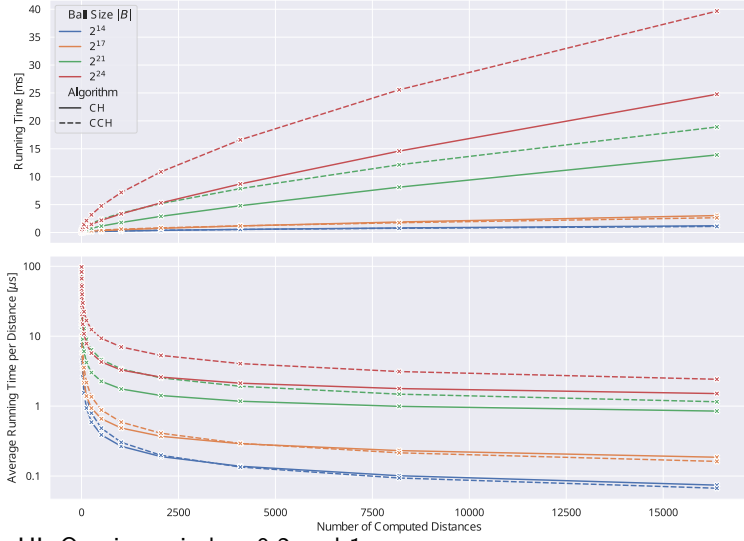
Lazy RPHAST

Data: $D^{\downarrow}[v]$: tentative v-t Distanz aus CH Rückwärtssuche
Data: $D[v]$: finale v-t Distanzen, initial $\perp$, nur zurücksetzen wenn t sich ändert

```
1 Function ComputeAndMemoizeDist(u):
2     if D[u] = ⊥ then
3         D[u] ← D↓[u];
4         for uv Aufwärtskante in G+ do
5             D[u] ← min{D[u], w+(uv) + ComputeAndMemoizeDist(v)};
6     return D[u];
```

- DFS auf CH
- Auf einem DAG ist auch DFS ein Kürzeste-Wege-Algorithmus

Lazy RPHAST



- Zum Vergleich: HL Queries zwischen 0.2 und 1 μs

Inkrementelles Many-to-One

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten t und eine Menge S
- Ausgabe: Distanz von allen $s \in S$ zu t
- Annahme: wir fixieren t und fragen die $s \in S$ der Reihe nach an

Lösung:

- Lazy RPHAST

Wozu?

Inkrementelles Many-to-One

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten t und eine Menge S
- Ausgabe: Distanz von allen $s \in S$ zu t
- Annahme: wir fixieren t und fragen die $s \in S$ der Reihe nach an

Lösung:

- Lazy RPHAST

Wozu?

- Perfektes A* Potential: CH-Potentials
- Baustein für erweiterte Probleme
  - Immer dann nützlich, wenn das Set von Terminalen dynamisch ist

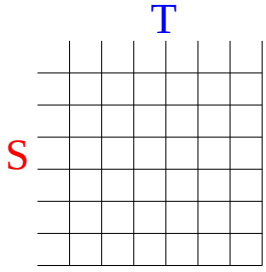
Many-to-Many Kürzeste Wege

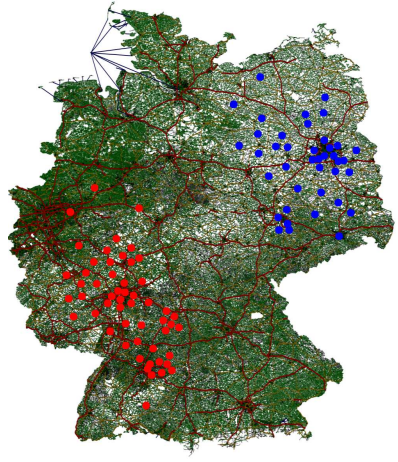
Gegeben:

- Graph
- Knotenmengen $S, T \in V$

Gesucht:

- Distanzmatrix D





Many-to-Many Kürzeste Wege

Gegeben:

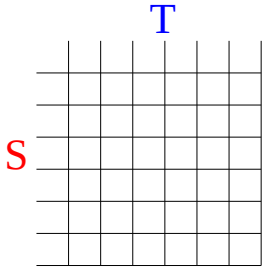
- Graph
- Knotenmengen $S, T \in V$

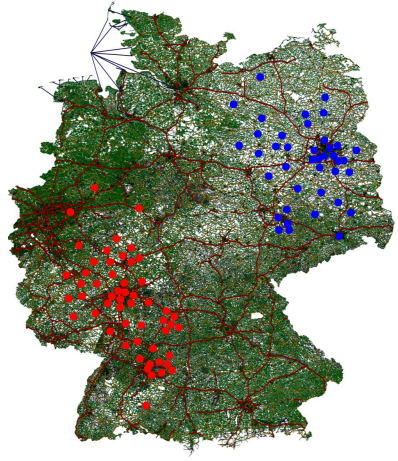
Gesucht:

- Distanzmatrix D

Anwendungen:

- Vehicle routing/Traveling salesman
- Map Matching





Many-to-Many Kürzeste Wege

Gegeben:

- Graph
- Knotenmengen $S, T \in V$

Gesucht:

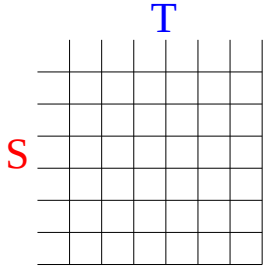
- Distanzmatrix D

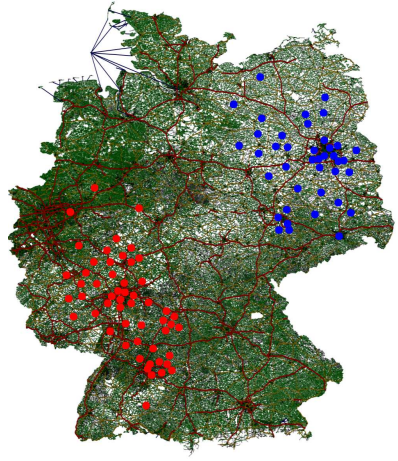
Anwendungen:

- Vehicle routing/Traveling salesman
- Map Matching

Lösung:

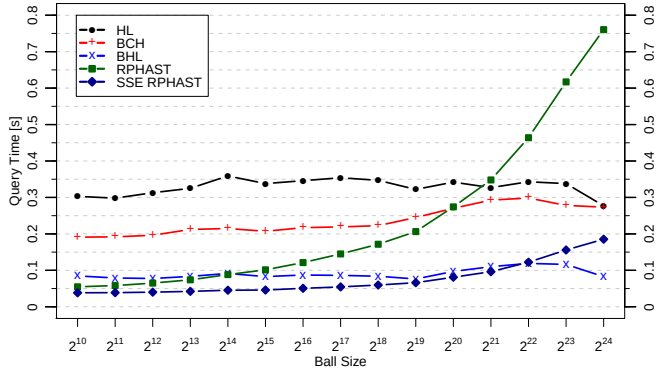
- $|S|$ one-to-many Anfragen
- speichere Distanzen in der Tabelle
- RPHAST kann SIMD Instruktionen nutzen





Experimente I

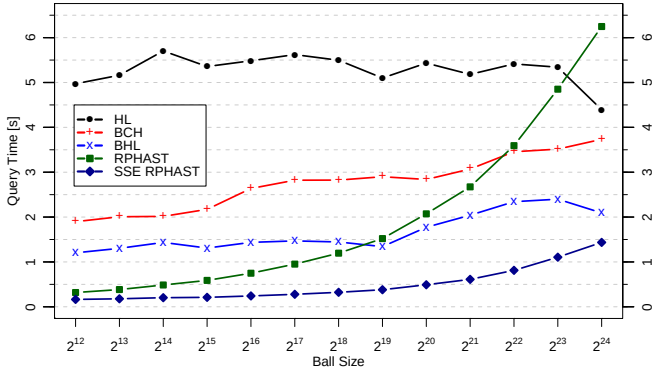
input: Westeuropa (18M Knoten), $|S| = |T| = 2^{10}$



Beobachtung: alle Techniken unter einer Sekunde

Experimente II

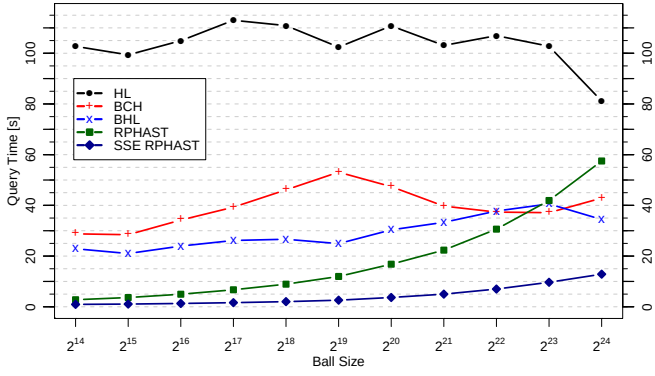
input: Westeuropa (18M Knoten), $|S| = |T| = 2^{12}$



Beobachtung: SSE RPHAST am schnellsten

Experimente III

input: Westeuropa (18M Knoten), $|S| = |T| = 2^{14}$



Beobachtung: SSE PHAST am schnellsten

Literatur I


Ittai Abraham, Daniel Delling, Amos Fiat, Andrew V. Goldberg, and Renato F. Werneck.
HLDB: Location-Based Services in Databases.
In *Proceedings of the 20th ACM SIGSPATIAL International Symposium on Advances in Geographic Information Systems (GIS'12)*, pages 339–348. ACM Press, 2012.
Best Paper Award.


Richard Bellman.
On a Routing Problem.
Quarterly of Applied Mathematics, 16:87–90, 1958.


George B. Dantzig.
Linear Programming and Extensions.
Princeton University Press, 1962.


Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Andreas Nowatzyk, and Renato F. Werneck.
PHAST: Hardware-accelerated shortest path trees.
Journal of Parallel and Distributed Computing, 73(7):940–952, 2013.

Literatur II


Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, and Renato F. Werneck.
Faster Batched Shortest Paths in Road Networks.
In *Proceedings of the 11th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modeling, Optimization, and Systems (ATMOS'11)*, volume 20 of *OpenAccess Series in Informatics (OASIcs)*, pages 52–63, 2011.


Edsger W. Dijkstra.
A Note on Two Problems in Connexion with Graphs.
Numerische Mathematik, 1(1):269–271, 1959.


Lester R. Ford, Jr. and Delbert R. Fulkerson.
Flows in Networks.
Princeton University Press, 1962.


Robert W. Floyd.
Algorithm 97: Shortest path.
Communications of the ACM, 5(6):345, 1962.

Literatur III


Michael L. Fredman and Robert Tarjan.
Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms.
Journal of the ACM, 1987.


Andrew V. Goldberg.
A Simple Shortest Path Algorithm with Linear Average Time.
In *Proceedings of the 9th Annual European Symposium on Algorithms (ESA'01)*, volume 2161 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 230–241, 2001.


Donald B. Johnson.
Efficient Algorithms for Shortest Paths in Sparse Networks.
Journal of the ACM, 24(1):1–13, January 1977.


Sebastian Knopp, Peter Sanders, Dominik Schultes, Frank Schulz, and Dorothea Wagner.
Computing Many-to-Many Shortest Paths Using Highway Hierarchies.
In *Proceedings of the 9th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'07)*, pages 36–45. SIAM, 2007.

Literatur IV


Ulrich Meyer and Peter Sanders.
Δ-Stepping: A Parallelizable Shortest Path Algorithm.
Journal of Algorithms, 49(1):114–152, 2003.


Stephen Warshall.
A Theorem on Boolean Matrices.
Journal of the ACM, 9(1):11–12, 1962.