Karlsruher Institut für Technologie

# Algorithmen für Routenplanung

## 1. Vorlesung, Sommersemester 2023

Michael Zündorf | 19. April 2023

# Organisatorisches

## Vorlesung

- Montags 14:00–15:30 Uhr
- Mittwochs 11:30–13:00 Uhr

## Prüfung

- Prüfbar im Master
- Im Master: 5 ECTS
- VF: Algorithmentechnik

# Dozenten

Dorothea
Wagner

Adrian
Feilhauer

Jonas
Sauer

Michael
Zündorf

**Vorlesungswebseite**

i11www.iti.kit.edu/teaching/sommer2023/routenplanung/index

# Organisatorisches

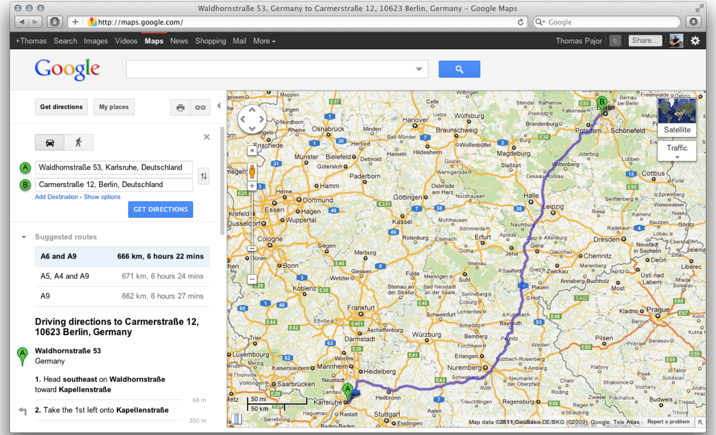
**Terminübersicht:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mittwoch | 19.4. | Michael | Einführung, Grundlagen, Dijkstras Algorithmus |
| Montag | 24.4. | Michael | Kontraktion & TopoCore |
| Mittwoch | 26.4. | Michael | A*, ALT, CALT |
| Montag | 3.5. | Michael | Arc-Flags, SHARC |
| Mittwoch | 8.5. | Adrian | CH |

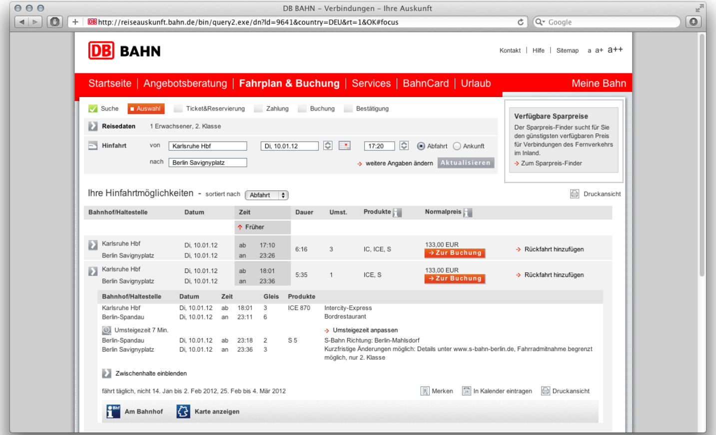
...

# Routenplanung in der Anwendung

# Routenplanung in der Anwendung



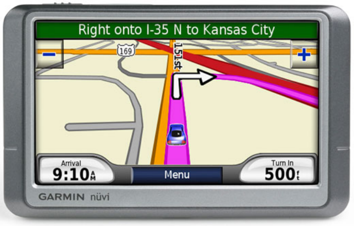
# Routenplanung in der Anwendung



# Routenplanung in der Anwendung

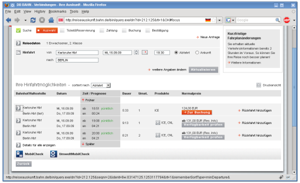
# Motivation Routenplanung

Karlsruher Institut für Technologie




## Wichtiger Anwendungsbereich

- Navigationssysteme
- Kartendienste: Google Maps, Bing Maps, ...
- Fahrplanauskunftssysteme



## Viele kommerzielle Systeme

- Nutzen heuristische Methoden
- Betrachten nur Teile des Transportnetzwerkes
- Geben keine Qualitätsgarantien

Wir untersuchen Methoden zur Routenplanung in Transportnetzwerken
mit beweisbar optimalen Lösungen

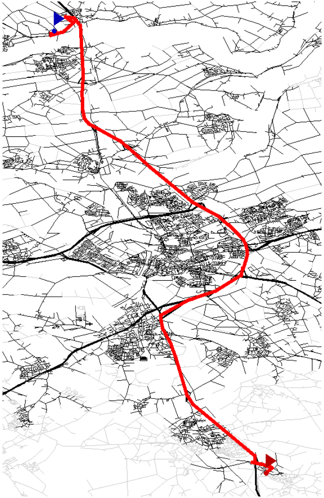
# Problemstellung

**Anfrage:**

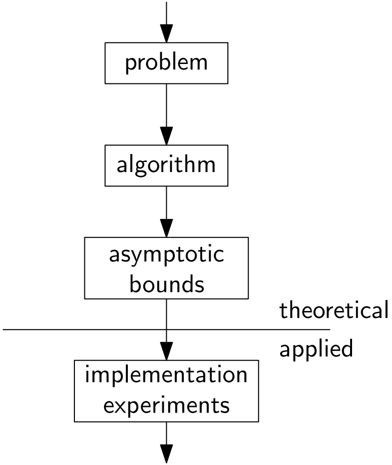
- Finde beste Verbindung in Transportnetz

**Modellierung:**

- Netzwerk als Graph $G = (V, E)$
- Kantengewichte sind Reisezeit
- Kürzeste Wege in $G$ entsprechen schnellsten Verbindungen



# Klassischer Algorithmenentwurf



# Problemstellung

**Anfrage:**

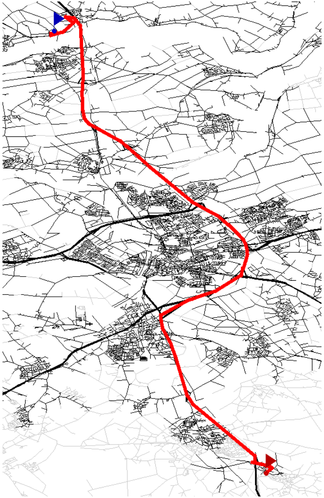
- Finde beste Verbindung in Transportnetz

**Modellierung:**

- Netzwerk als Graph $G = (V, E)$
- Kantengewichte sind Reisezeit
- Kürzeste Wege in $G$ entsprechen schnellsten Verbindungen
- Klassisches Problem (Dijkstra [Dij59])

**Probleme:**

- Transportnetzwerke sind riesig
- Dijkstras Algorithmus zu langsam
  ($>$ 1 Sekunde)



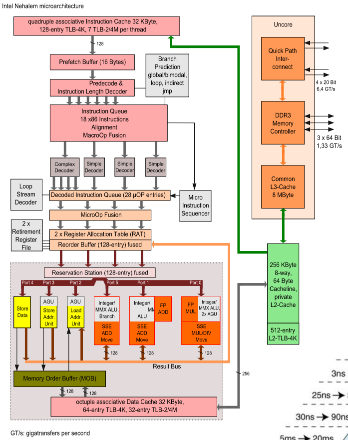
# Moderne CPU Architektur

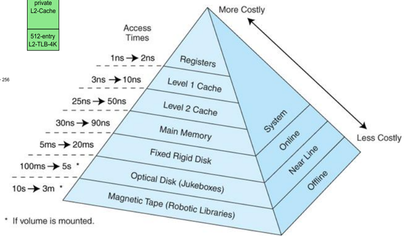
## Einige Fakten:

- steile Speicherhierarchie
- viele Kerne
- mehr Kerne als Speicherkontroller
- Cache-Kohärenz
- SIMD (SSE, AVX)

## Hauptherausforderungen:

- Speicherzugriff/Datenlokalität
- Parallelisierung
  - Nicht nur race-conditions, etc.
  - auch Speicherzugriff
    z.B. “false-sharing” (Cache-Kohärenz)



# Lücke Theorie vs. Praxis

| **Theorie** | vs. | **Praxis** |
| --- | --- | --- |
| einfach | Problem-Modell | komplex |
| einfach | Maschinenmodell | komplex |
| komplex | Algorithmen | einfach |
| fortgeschritten | Datenstrukturen | einfach |
| worst-case | Komplexitäts-Messung | typische Eingaben |
| asymptotisch | Effizienz | konstante Faktoren |

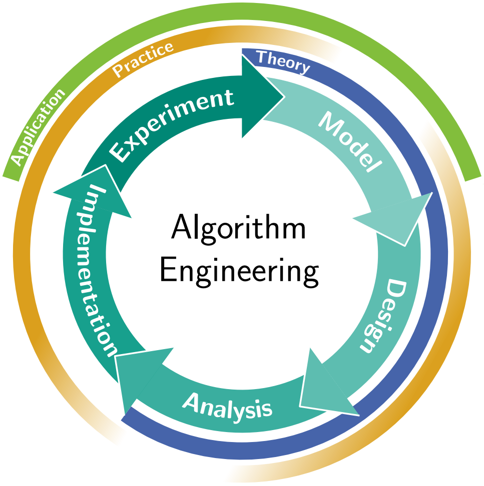
# Lücke Theorie vs. Praxis

| Theorie | vs. | Praxis |
|---|---|---|
| einfach | Problem-Modell | komplex |
| einfach | Maschinenmodell | komplex |
| komplex | Algorithmen | einfach |
| fortgeschritten | Datenstrukturen | einfach |
| worst-case | Komplexitäts-Messung | typische Eingaben |
| asymptotisch | Effizienz | konstante Faktoren |

**Routenplanung:**

- sehr anwendungsnahes Gebiet
- Eingaben sind echte Daten
  - Straßengraphen
  - Eisenbahn (Fahrpläne)
  - Flugpläne

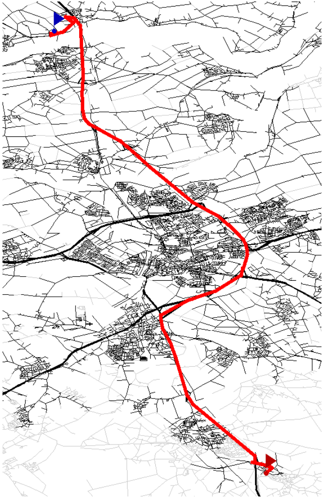
# Algorithm Engineering



# Beschleunigungstechniken

**Beobachtung:**

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen



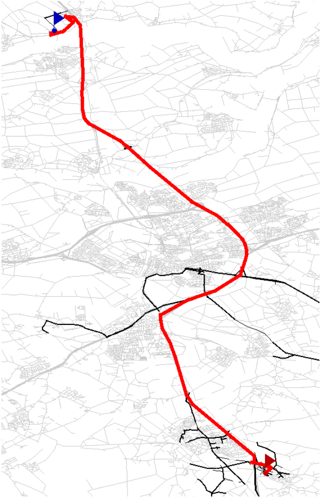
# Beschleunigungstechniken

**Beobachtung:**

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen

**Idee:**

- Zwei Phasen
  - Offline: Generiere Zusatzinformation in Vorberechnung
  - Online: Beschleunige Anfrage mit dieser Information
- Drei Kriterien: Vorberechnungsplatz, Vorberechnungszeit, Beschleunigung

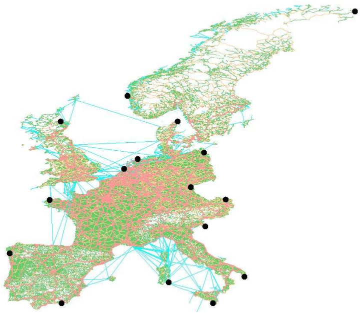


# Experimentelle Evaluation

**Eingabe:** Straßennetzwerk von Europa

- 18 Mio. Knoten, 42 Mio. Kanten

| | Vorberechnung | | Anfragen | |
|---|---|---|---|---|
| Algorithmus | Zeit [h:m] | Platz [GiB] | Zeit [$\mu$s] | Beschleun. |
| Dijkstra [Dij59] | — | — | 2 550 000 | — |
| ALT [GH05, GW05] | 0:42 | 2.2 | 24 521 | 104 |
| CRP [DGPW11] | $\ll$ 0:01 | $<$ 0.1 | 1 650 | 1 545 |
| Arc-Flags [Lau04] | 0:20 | 0.3 | 408 | 6 250 |
| CH [GSSD08] | 0:05 | 0.2 | 110 | 23 181 |
| TNR [ALS13] | 0:20 | 2.1 | 1.25 | 2 040 000 |
| HL [ADGW12] | 0:37 | 18.4 | 0.56 | 4 553 571 |

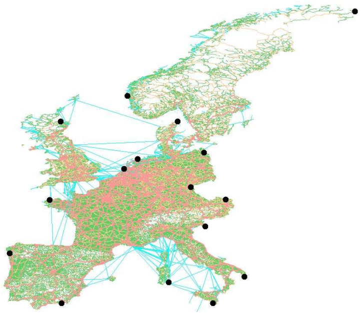


# Experimentelle Evaluation

**Eingabe:** Straßennetzwerk von Europa

- 18 Mio. Knoten, 42 Mio. Kanten

| | Vorberechnung | | Anfragen | |
|---|---|---|---|---|
| Algorithmus | Zeit [h:m] | Platz [GiB] | Zeit [$\mu$s] | Beschleun. |
| Dijkstra [Dij59] | — | — | 2 550 000 | — |
| ALT [GH05, GW05] | 0:42 | 2.2 | 24 521 | 104 |
| CRP [DGPW11] | $\ll$ 0:01 | $<$ 0.1 | 1 650 | 1 545 |
| Arc-Flags [Lau04] | 0:20 | 0.3 | 408 | 6 250 |
| CH [GSSD08] | 0:05 | 0.2 | 110 | 23 181 |
| TNR [ALS13] | 0:20 | 2.1 | 1.25 | 2 040 000 |
| HL [ADGW12] | 0:37 | 18.4 | 0.56 | 4 553 571 |



Mittlerweile im Einsatz bei Bing, Google, Apple, Tomtom, ...

# Schwerpunkte der Vorlesung

- Algorithm Engineering + ein bisschen Theorie
- Beschleunigungstechniken
- Implementierungsdetails
- Ergebnisse auf Real-Welt Daten
- Aktuellster Stand der Forschung (Veröffentlichungen bis 2021)
- Ideale Grundlage für Masterarbeiten

# Was diese Vorlesung nicht ist

**keine Algorithmen III**

- Vertiefung von kürzesten Wegen (Dijkstra)
  - Grundlage ist der Stoff von Algo I;
    heute nochmal Crashkurs
- Grundvorlesung “vereinfachen” Wahrheit oft
- Implementierung
- Betonung auf Messergebnisse

**keine reine Theorievorlesung**

- relativ wenig Beweise (wenn doch, eher kurz)
- reale Leistung vor Asymptotik
- Vielen vorkommende Optimierungsproblemen sind $\mathcal{NP}$-schwer

# Inhalt der Vorlesung

**1. Grundlagen**

- Algorithm Engineering
- Graphen, Modelle, usw.
- Kürzeste Wege
- Dijkstra's Algorithmus

**2. Beschleunigung von (statischen) Punkt-zu-Punkt Anfragen**

- Zielgerichtete Verfahren
- Hierarchische Techniken
- Many-to-many-Anfragen und Distanztabellen
- Kombinationen

# Inhalt der Vorlesung

**3. Theorie**

- Theoretische Charakterisierung von Straßennetzwerken
- Highway-Dimension
- Komplexität von Beschleunigungstechniken

**4. Fortgeschrittene Szenarien**

- Schnelle many-to-many und all-pairs shortest-paths
- Alternativrouten
- Zeitabhängige Routenplanung
- Fahrplanauskunft
- Routenplanung für Elektroautos
- Multi-modale Routenplanung

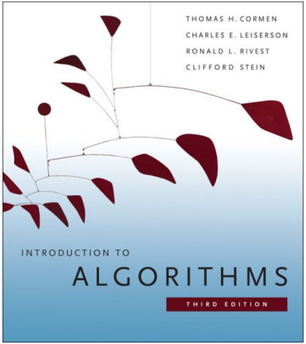
# Nützliche Vorkenntnisse

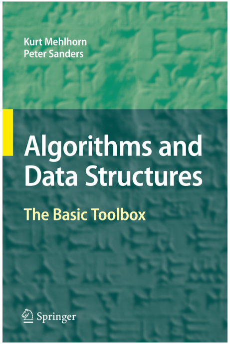
- Informatik I/II oder Algorithmen I
- Algorithmentechnik oder Algorithmen II (muss aber nicht sein)
- ein bisschen Rechnerarchitektur
- passive Kenntnisse von C++/Java

**Vertiefungsgebiet:** Algorithmentechnik, ~~Theoretische Grundlagen~~

# Material

- Folien
- wissenschaftliche Aufsätze (siehe Vorlesunghomepage)
- Basiskenntnisse:



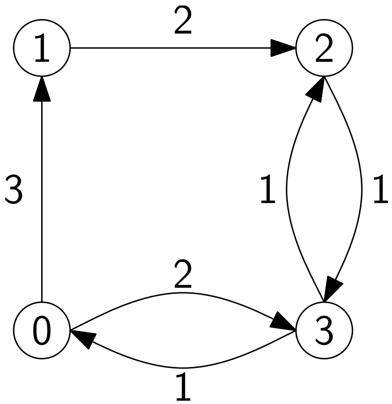



# 1. Grundlagen

# Graph-Repräsentationen

**Drei klassische Ansätze:**

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray

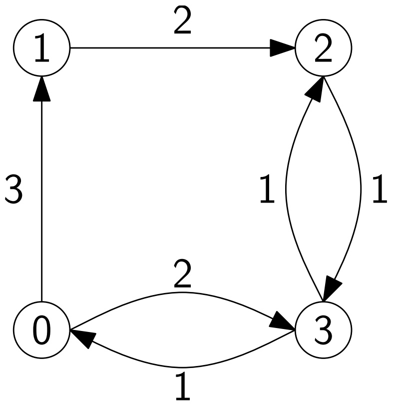


# Graph-Repräsentationen

**Drei klassische Ansätze:**

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray

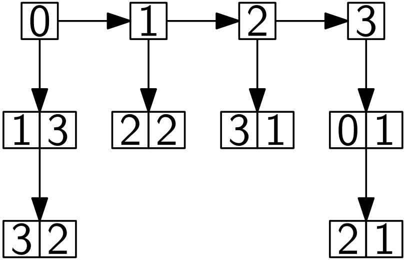
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | – | 3 | – | 2 |
| 1 | – | – | 2 | – |
| 2 | – | – | – | 1 |
| 3 | 1 | – | 1 | – |

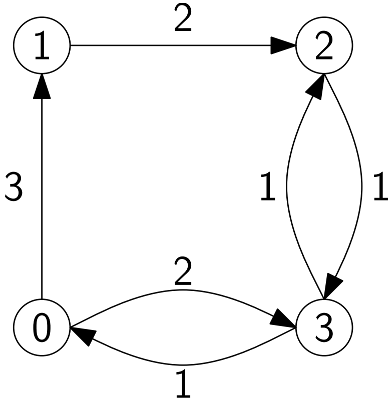


# Graph-Repräsentationen

**Drei klassische Ansätze:**

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray



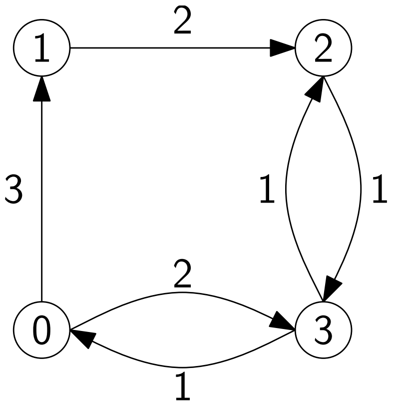
# Graph-Repräsentationen

**Drei klassische Ansätze:**

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| firstEdge | 0 | 2 | 3 | 4 | 6 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| targetNode | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| weight | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |



# Was brauchen wir?

| **Eigenschaften:** | Matrix | Liste | Array |
|---|---|---|---|
| Speicher | $\mathcal{O}(n^2)$ | $\mathcal{O}(n+m)$ | $\mathcal{O}(n+m)$ |
| Ausgehende Kanten iterieren | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ |
| Kantenzugriff $(u, v)$ | $\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ |
| Effizienz (Speicherlayout) | $+$ | $-$ | $+$ |
| Updates (neue Kante) | $+$ | $+$ | $-$ |
| Updates (Gewicht) | $+$ | $+$ | $+$ |

# Was brauchen wir?

| **Eigenschaften:** | Matrix | Liste | Array |
|---|---|---|---|
| Speicher | $\mathcal{O}(n^2)$ | $\mathcal{O}(n+m)$ | $\mathcal{O}(n+m)$ |
| Ausgehende Kanten iterieren | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ |
| Kantenzugriff $(u, v)$ | $\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ |
| Effizienz (Speicherlayout) | $+$ | $-$ | $+$ |
| Updates (neue Kante) | $+$ | $+$ | $-$ |
| Updates (Gewicht) | $+$ | $+$ | $+$ |

**Fragen:**

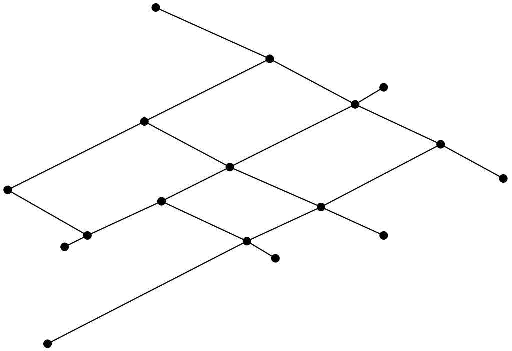
- Was brauchen wir?
- Was muss nicht super effizient sein?
- erstmal Modelle anschauen!

# Modellierung (Straßengraphen)

# Modellierung (Straßengraphen)

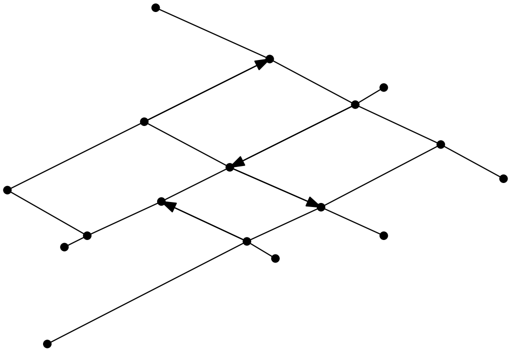
# Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen



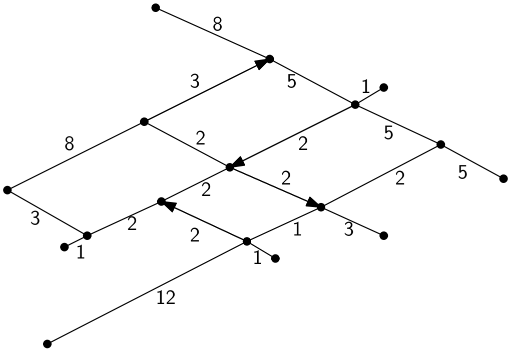
# Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen
- Einbahnstraßen



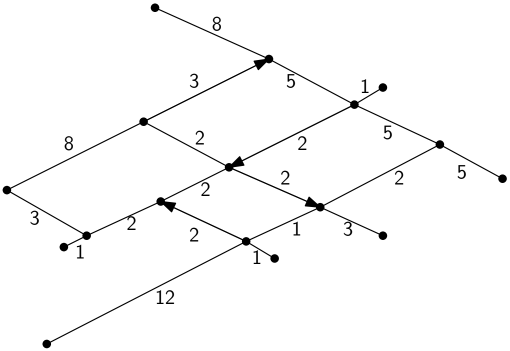
# Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen
- Einbahnstraßen
- Metrik ist Reisezeit



# Modellierung (Straßengraphen)

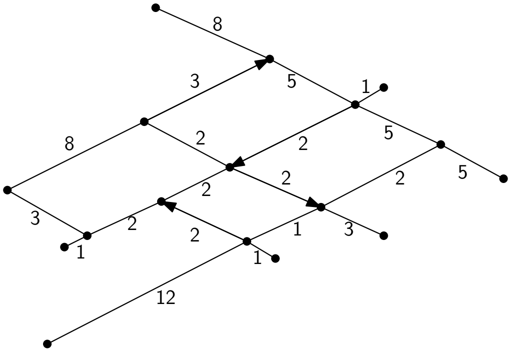
**Eigenschaften (sammeln):**



# Modellierung (Straßengraphen)

**Eigenschaften:**

- dünn
- (fast) ungerichtet
- geringer Knotengrad
- Kantenzüge
- Hierarchie (Autobahnen!)



# Modellierung (Eisenbahngraphen)

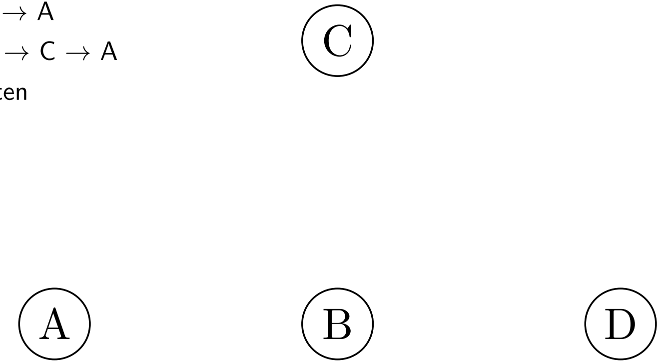
**Beispiel:**

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Zug 2: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Züge operieren alle 10 Minuten

# Modellierung (Eisenbahngraphen)

**Beispiel:**

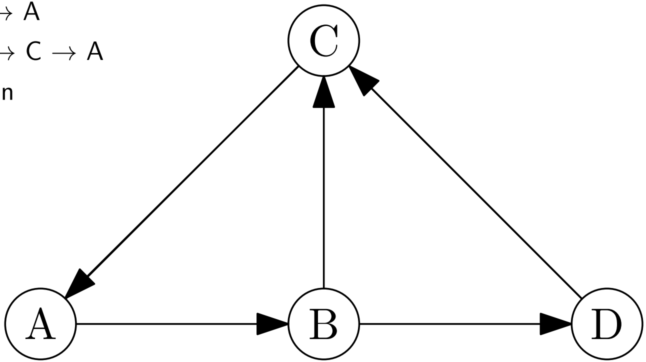
- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Zug 2: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Züge operieren alle 10 Minuten



# Modellierung (Eisenbahngraphen)

**Beispiel:**

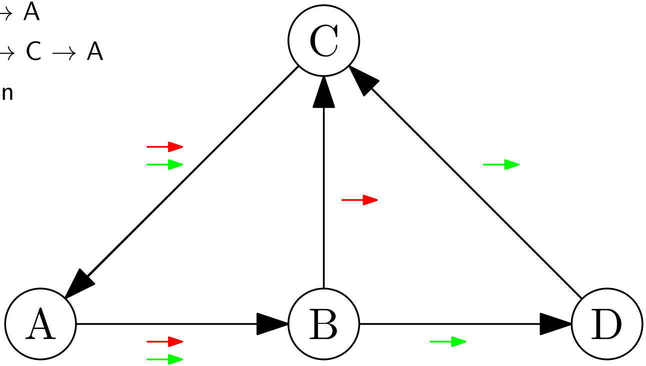
- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A → B → C → A
- Zug 2: Station A → B → D → C → A
- Züge operieren alle 10 Minuten



# Modellierung (Eisenbahngraphen)

**Beispiel:**

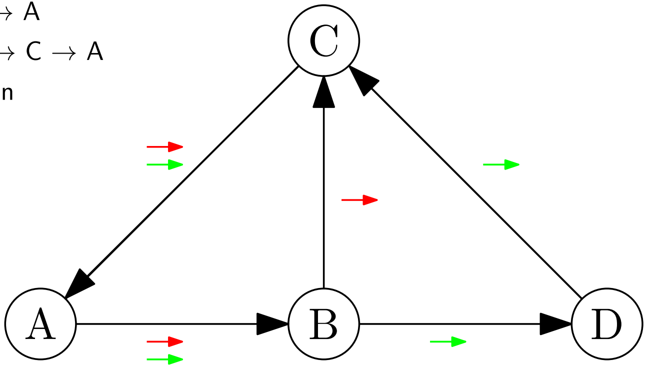
- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Zug 2: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Züge operieren alle 10 Minuten



# Modellierung (Eisenbahngraphen)

**Beispiel:**

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A → B → C → A
- Zug 2: Station A → B → D → C → A
- Züge operieren alle 10 Minuten

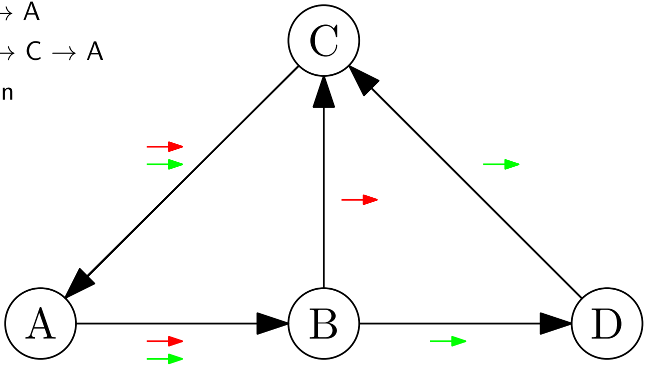



Kanten sind zeitabhängig!
(wann fährt ein Zug wie lange?)

# Modellierung (Eisenbahngraphen)

**Beispiel:**

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A → B → C → A
- Zug 2: Station A → B → D → C → A
- Züge operieren alle 10 Minuten




Kanten sind zeitabhängig!
(wann fährt ein Zug wie lange?)

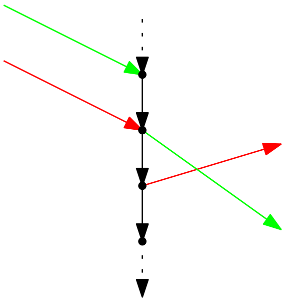
oder roll die Zeit aus

# Zeitexpandiertes Modell

**Vorgehen:**

- Knoten sind Abfahrts-/ Ankunftsereignisse
- Kanten für die Fahrt von Station zu Station
- Wartekanten an den Stationen für Umstiege

**Station B:**

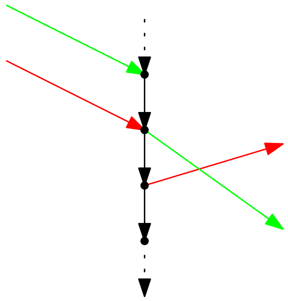


# Zeitexpandiertes Modell

**Vorgehen:**

- Knoten sind Abfahrts-/ Ankunftsereignisse
- Kanten für die Fahrt von Station zu Station
- Wartekanten an den Stationen für Umstiege

**Station B:**



**Diskussion:**

+ keine zeitabhängigen Kanten
– Graph größer

# Eigenschaften von Transportnetzwerken

# Eigenschaften von Transportnetzwerken

- zusammenhängend
- dünn
- gerichtet
- geringer Knotengrad
- meist verborgene Hierarchie (Autobahnen, ICE)
- Einbettung vorhanden (fast planar?)
- Kantengewichte nicht-negativ
- teilweise zeitabhängig
- dünne Separatoren?

# Eigenschaften von Transportnetzwerken

- zusammenhängend
- dünn
- gerichtet
- geringer Knotengrad
- meist verborgene Hierarchie (Autobahnen, ICE)
- Einbettung vorhanden (fast planar?)
- Kantengewichte nicht-negativ
- teilweise zeitabhängig
- dünne Separatoren?

**Diskussion:**

- berechne beste Verbindungen in solchen Netzwerken
- Adjazenzarray als Graphdatenstruktur

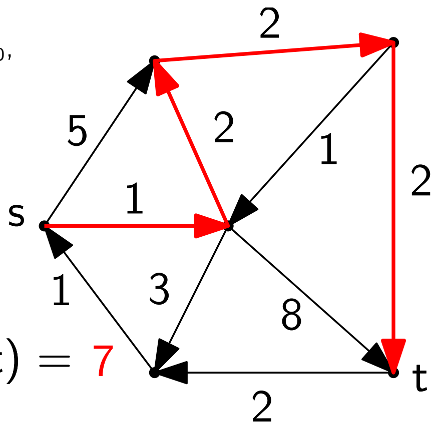
# 2. Kürzeste Wege

# Problemstellung

**Gegeben:**
Graph $G = (V, E, \text{len})$ mit positiver Kantenfunktion $\text{len}\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
Knoten $s, t \in V$

**Mögliche Aufgaben**

- Berechne Distanz $d(s, t)$
- Finde kürzesten $s$-$t$-Pfad $P := (s, \dots, t)$




d(s,t) = 7

# Eigenschaften von kürzesten Wegen

**Azyklität:**

- Kürzeste Wege sind zyklenfrei

**Aufspannungseigenschaft:**

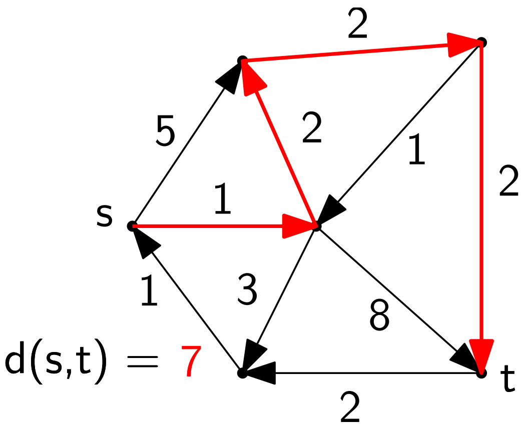
- Alle kürzesten Wege von *s* aus bilden DAG bzw. Baum

**Vererbungseigenschaft:**

- Teilwege von kürzesten Wegen sind kürzeste Wege

**Abstand:**

- Steigender Abstand von Wurzel zu Blättern



# Berechnung kürzester Wege

Komplexität von **Single-Source Shortest Paths** abhängig vom Eingabegraphen.

- In dieser Vorlesung: Kantengewichte (fast) immer nicht-negativ.
- Ein *negativer Zyklus* ist ein Kreis mit negativem Gesamtgewicht.
- Ein *einfacher Pfad* ist ein Pfad bei dem sich kein Knoten wiederholt.

**Problemvarianten**

- Kantengewichte alle positiv:
  Dijkstra's Algorithmus anwendbar (Laufzeit $|V| \log |V| + |E|$)
- Kantengewichte auch negativ, aber kein negativer Zyklus:
  Algorithmus von Bellmann-Ford anwendbar (Laufzeit $|V| \cdot |E|$)
- Kantengewichte beliebig, suche kürzesten einfachen Pfad:
  $\mathcal{NP}$-schwer, Reduktion von „Problem Longest Path“

# Problem Longest Path

## Problem Longest Path

**Gegeben:**

- Gerichteter, gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit gewicht $\text{len}\colon E \to \mathbb{N}$
- Zahl $K \in \mathbb{N}$
- Knoten $s, t \in V$

**Frage:**

- Gibt es einen einfachen $s$-$t$-Pfad der Länge mindestens $K$?

Problem Longest Path ist $\mathcal{NP}$-schwer (siehe [Garey & Johnson 79])

# Der Bellman-Ford Algorithmus

```
Bellman-Ford(G, s)
for v ∈ V do d[v] ← ∞
d[s] ← 0

for i = 1 to |V| − 1 do
    forall edges (u, v) ∈ E do
        if d[u] + len(u, v) < d[v] then
            d[v] ← d[u] + len(u, v)
```

# Der Bellman-Ford Algorithmus

Bellman-Ford($G$, $s$)

```
for v ∈ V do d[v] ← ∞
d[s] ← 0

for i = 1 to |V| − 1 do
    forall edges (u, v) ∈ E do
        if d[u] + len(u, v) < d[v] then
            d[v] ← d[u] + len(u, v)

forall edges (u, v) ∈ E do
    if d[v] > d[u] + len(u, v) then
        negative cycle found
```

# Dijkstras Algorithmus

```
Dijkstra(G = (V, E), s)

forall nodes v ∈ V do
    d[v] = ∞, p[v] = NULL                       // distances, parents
d[s] = 0
Q.clear(), Q.insert(s, 0)                        // container
while !Q.empty() do
    u ← Q.deleteMin()                            // settling node u
    forall edges e = (u, v) ∈ E do
        // relaxing edges
        if d[u] + len(e) < d[v] then
            d[v] ← d[u] + len(e)
            p[v] ← u
            if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
            else Q.insert(v, d[v])
```

# Dijkstras Algorithmus

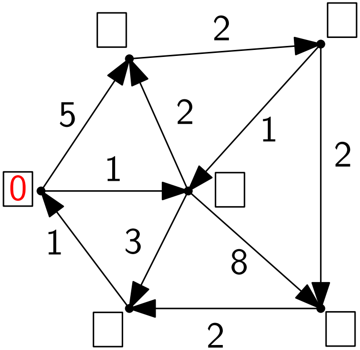
**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

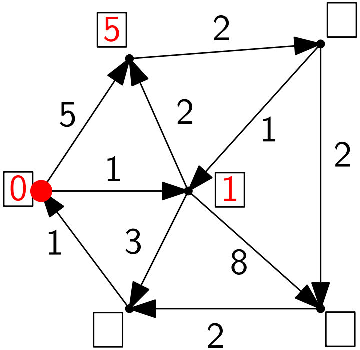



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

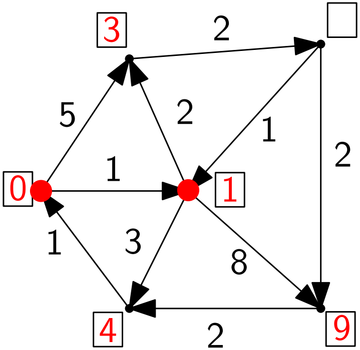



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

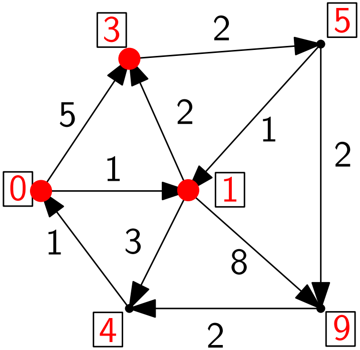



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

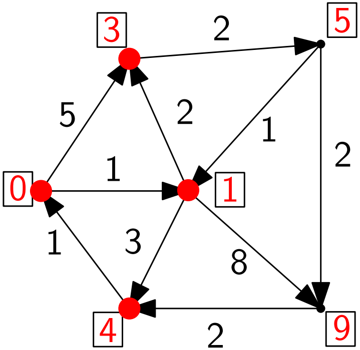



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

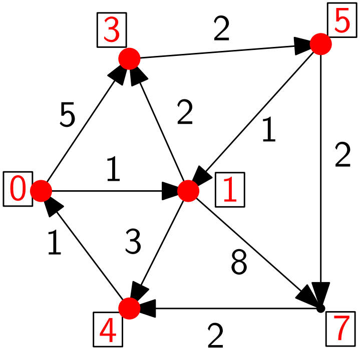



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

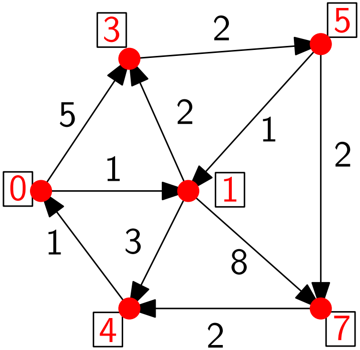



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

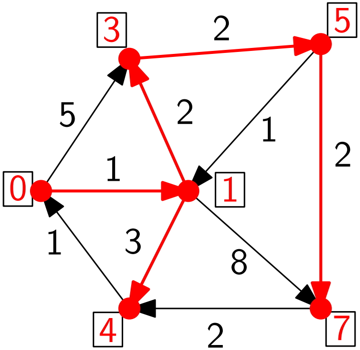



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.




**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Kantenrelaxierung

```
Dijkstra(G = (V, E), s)

forall nodes v ∈ V do
    d[v] = ∞, p[v] = NULL                    // distances, parents
d[s] = 0
Q.clear(), Q.insert(s, 0)                    // container
while !Q.empty() do
    u ← Q.deleteMin()                        // settling node u
    forall edges e = (u, v) ∈ E do
        // relaxing edges
        if d[u] + len(e) < d[v] then
            d[v] ← d[u] + len(e)
            p[v] ← u
            if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
            else Q.insert(v, d[v])
```

# Definitionen

**Kantenrelaxierung:** Der Vorgang

**if** $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

# Definitionen

**Kantenrelaxierung:** Der Vorgang

**if** $d[u] + \mathrm{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \mathrm{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

**Besuchte Knoten:** Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *besucht (visited)* wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt wurde (unabhängig davon, ob er noch in der Queue ist).

# Definitionen

**Kantenrelaxierung:** Der Vorgang

**if** $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

**Besuchte Knoten:** Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *besucht (visited)* wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt wurde (unabhängig davon, ob er noch in der Queue ist).

**Abgearbeitete Knoten:** Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *abgearbeitet (settled)* wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt und wieder extrahiert wurde.

# Komplexität von Dijkstra

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

**forall** *nodes* $v \in V$ **do**
  $d[v] = \infty$, $p[v] = \texttt{NULL}$
$d[s] = 0$, $Q.clear()$, $Q.insert(s, 0)$
**while** $!Q.empty()$ **do**
  $u \leftarrow Q.deleteMin()$
  **forall** *edges* $e = (u, v) \in E$ **do**
    **if** $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$ **then**
      $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$
      $p[v] \leftarrow u$
      **if** $v \in Q$ **then** $Q.decreaseKey(v, d[v])$
      **else** $Q.insert(v, d[v])$

# Komplexität von Dijkstra

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

**forall** *nodes* $v \in V$ **do**
    $d[v] = \infty$, $p[v] = \mathtt{NULL}$    `// n Mal`
$d[s] = 0$, $Q.clear()$, $Q.insert(s, 0)$
**while** $!Q.empty()$ **do**
    $u \leftarrow Q.deleteMin()$
    **forall** *edges* $e = (u, v) \in E$ **do**
        **if** $d[u] + \mathrm{len}(e) < d[v]$ **then**
            $d[v] \leftarrow d[u] + \mathrm{len}(e)$
            $p[v] \leftarrow u$
            **if** $v \in Q$ **then** $Q.decreaseKey(v, d[v])$
            **else** $Q.insert(v, d[v])$

# Komplexität von Dijkstra

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

**forall** *nodes* $v \in V$ **do**
  $d[v] = \infty$, $p[v] = \texttt{NULL}$ // n Mal
$d[s] = 0$, $Q.\mathit{clear}()$, $Q.\mathit{insert}(s, 0)$ // 1 Mal
**while** $!Q.\mathit{empty}()$ **do**
  $u \leftarrow Q.\mathit{deleteMin}()$
  **forall** *edges* $e = (u, v) \in E$ **do**
    **if** $d[u] + \mathrm{len}(e) < d[v]$ **then**
      $d[v] \leftarrow d[u] + \mathrm{len}(e)$
      $p[v] \leftarrow u$
      **if** $v \in Q$ **then** $Q.\mathit{decreaseKey}(v, d[v])$
      **else** $Q.\mathit{insert}(v, d[v])$

# Komplexität von Dijkstra

```
Dijkstra(G = (V, E), s)

forall nodes v ∈ V do
    d[v] = ∞, p[v] = NULL                         // n Mal
d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)               // 1 Mal
while !Q.empty() do
    u ← Q.deleteMin()                             // n Mal
    forall edges e = (u, v) ∈ E do
        if d[u] + len(e) < d[v] then
            d[v] ← d[u] + len(e)
            p[v] ← u
            if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
            else Q.insert(v, d[v])
```

# Komplexität von Dijkstra

```
Dijkstra(G = (V, E), s)
forall nodes v ∈ V do
    d[v] = ∞, p[v] = NULL                              // n Mal
d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                    // 1 Mal
while !Q.empty() do
    u ← Q.deleteMin()                                  // n Mal
    forall edges e = (u, v) ∈ E do
        if d[u] + len(e) < d[v] then
            d[v] ← d[u] + len(e)
            p[v] ← u
            if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])       // m Mal
            else Q.insert(v, d[v])
```

# Komplexität von Dijkstra

```
Dijkstra(G = (V, E), s)

forall nodes v ∈ V do
    d[v] = ∞, p[v] = NULL                              // n Mal
d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                    // 1 Mal
while !Q.empty() do
    u ← Q.deleteMin()                                  // n Mal
    forall edges e = (u, v) ∈ E do
        if d[u] + len(e) < d[v] then
            d[v] ← d[u] + len(e)
            p[v] ← u
            if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])       // m Mal
            else Q.insert(v, d[v])                     // n Mal
```

# Komplexität von Dijkstra

```
Dijkstra(G = (V, E), s)
forall nodes v ∈ V do
    d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                // 1 Mal
while !Q.empty() do
    u ← Q.deleteMin()                              // n Mal
    forall edges e = (u, v) ∈ E do
        if d[u] + len(e) < d[v] then
            d[v] ← d[u] + len(e)
            p[v] ← u
            if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])   // m Mal
            else Q.insert(v, d[v])                 // n Mal
```

$$T_{\text{Dijkstra}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$$

# Laufzeit Dijkstra

$$T_{\text{Dijkstra}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$$

| Operation | Liste (worst-case) | Binary Heap (worst-case) | Binomial heap (worst-case) | Fibonacci heap (amortized) |
|---|---|---|---|---|
| Init | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ |
| Insert | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| Minimum | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| DeleteMin | $\Theta(n)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ |
| Union | $\Theta(1)$ | $\Theta(k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| DecreaseKey | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| Delete | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ |
| **Dijkstra** | $\mathcal{O}(n^2 + m)$ | $\mathcal{O}((n+m)\log n)$ | $\mathcal{O}((n+m)\log n)$ | $\mathcal{O}(m + n\log n)$ |

# Laufzeit Dijkstra

$$T_{\text{Dijkstra}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$$

| Operation | Liste (worst-case) | Binary Heap (worst-case) | Binomial heap (worst-case) | Fibonacci heap (amortized) |
|---|---|---|---|---|
| Init | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ |
| Insert | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| Minimum | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| DeleteMin | $\Theta(n)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ |
| Union | $\Theta(1)$ | $\Theta(k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| DecreaseKey | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| Delete | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ |
| **Dijkstra** | $\mathcal{O}(n^2 + m)$ | $\mathcal{O}((n+m)\log n)$ | $\mathcal{O}((n+m)\log n)$ | $\mathcal{O}(m + n\log n)$ |
| $m \in \mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | $\mathcal{O}(n\log n)$ | $\mathcal{O}(n\log n)$ | $\mathcal{O}(n\log n)$ |

Transportnetzwerke sind dünn $\Rightarrow$ Binary Heaps

# Laufzeit Dijkstra Experimente

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

| k | Query [sec] |
|---|---|
| 2 | 1.834 |
| 3 | 1.595 |
| 4 | 1.507 |
| 5 | 1.525 |
| 8 | 1.561 |

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

# Laufzeit Dijkstra Experimente

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

| k | Query [sec] |
|---|---|
| 2 | 1.834 |
| 3 | 1.595 |
| 4 | 1.507 |
| 5 | 1.525 |
| 8 | 1.561 |

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

Dijkstra: $\approx 1.5\,\mathrm{s}$ $\Rightarrow$ nicht interaktiv

# Laufzeit Dijkstra Experimente

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

| k | Query [sec] |
|---|---|
| 2 | 1.834 |
| 3 | 1.595 |
| 4 | 1.507 |
| 5 | 1.525 |
| 8 | 1.561 |

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

| | | |
|---|---|---|
| Dijkstra: | $\approx 1.5\,\mathrm{s}$ | $\Rightarrow$ nicht interaktiv |
| $n + m$ CPU clock cycles: | $\approx 20\,\mathrm{ms}$ | $\Rightarrow$ viel schneller |

# Laufzeit Dijkstra Experimente

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

| k | Query [sec] |
|---|---|
| 2 | 1.834 |
| 3 | 1.595 |
| 4 | 1.507 |
| 5 | 1.525 |
| 8 | 1.561 |

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

| | | |
|---|---|---|
| Dijkstra: | $\approx 1.5\,\mathrm{s}$ | $\Rightarrow$ nicht interaktiv |
| $n + m$ CPU clock cycles: | $\approx 20\,\mathrm{ms}$ | $\Rightarrow$ viel schneller |
| BFS: | $\approx 1.2\,\mathrm{s}$ | $\Rightarrow$ an der Queue liegt's nicht |

# Laufzeit Dijkstra Experimente

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

| k | Query [sec] |
|---|---|
| 2 | 1.834 |
| 3 | 1.595 |
| 4 | 1.507 |
| 5 | 1.525 |
| 8 | 1.561 |

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

| | | |
|---|---|---|
| Dijkstra: | $\approx 1.5\,\mathrm{s}$ | $\Rightarrow$ nicht interaktiv |
| $n + m$ CPU clock cycles: | $\approx 20\,\mathrm{ms}$ | $\Rightarrow$ viel schneller |
| BFS: | $\approx 1.2\,\mathrm{s}$ | $\Rightarrow$ an der Queue liegt's nicht |

Performanz von Graphsuchen ist speicher-begrenzt

# Nächster Termin

**Montag, 24. April 2022**

# Bibliographie I


Ittai Abraham, Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, and Renato F. Werneck.
Hierarchical Hub Labelings for Shortest Paths.
In Leah Epstein and Paolo Ferragina, editors, *Proceedings of the 20th Annual European Symposium on Algorithms (ESA'12)*, volume 7501 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 24–35. Springer, 2012.

Julian Arz, Dennis Luxen, and Peter Sanders.
Transit Node Routing Reconsidered.
In *Proceedings of the 12th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'13)*, volume 7933 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 55–66. Springer, 2013.

Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Thomas Pajor, and Renato F. Werneck.
Customizable Route Planning.
In Panos M. Pardalos and Steffen Rebennack, editors, *Proceedings of the 10th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'11)*, volume 6630 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 376–387. Springer, 2011.

Edsger W. Dijkstra.
A Note on Two Problems in Connexion with Graphs.
*Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.

Andrew V. Goldberg and Chris Harrelson.
Computing the Shortest Path: A* Search Meets Graph Theory.
In *Proceedings of the 16th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'05)*, pages 156–165. SIAM, 2005.

Robert Geisberger, Peter Sanders, Dominik Schultes, and Daniel Delling.
Contraction Hierarchies: Faster and Simpler Hierarchical Routing in Road Networks.
In Catherine C. McGeoch, editor, *Proceedings of the 7th Workshop on Experimental Algorithms (WEA'08)*, volume 5038 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 319–333. Springer, June 2008.

# Bibliographie II


Andrew V. Goldberg and Renato F. Werneck.

Computing Point-to-Point Shortest Paths from External Memory.
In *Proceedings of the 7th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'05)*, pages 26–40. SIAM, 2005.

Ulrich Lauther.

An Extremely Fast, Exact Algorithm for Finding Shortest Paths in Static Networks with Geographical Background.
In *Geoinformation und Mobilität - von der Forschung zur praktischen Anwendung*, volume 22, pages 219–230. IfGI prints, 2004.