



Algorithmen für Routenplanung

11. Vorlesung, Sommersemester 2022

Jonas Sauer | 30. Mai 2022



Bisher:

Kürzester Weg

- Eine Metrik

Alternativrouten

- Eine Metrik; nicht kürzeste, dennoch sinnvolle Wege

Bisher:

Kürzester Weg

- Eine Metrik

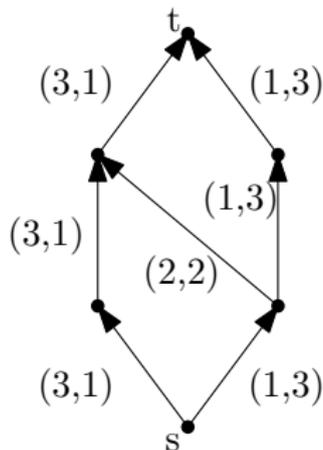
Alternativrouten

- Eine Metrik; nicht kürzeste, dennoch sinnvolle Wege

Jetzt: Mehrere Metriken

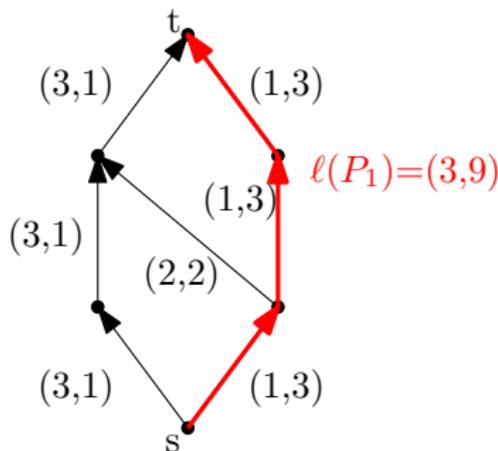
Idee:

- Mehrere Gewichte an Kanten
(z.B. Reisezeit, Kosten, Energieverbrauch)



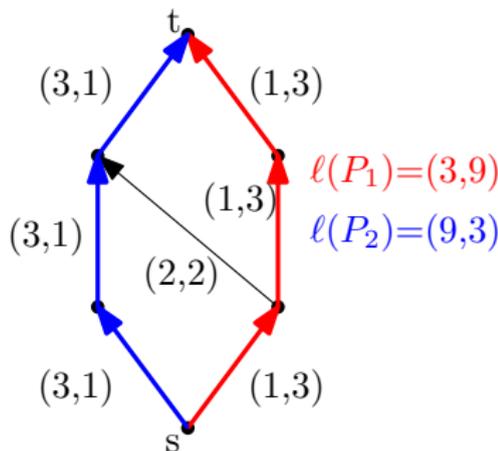
Idee:

- Mehrere Gewichte an Kanten
(z.B. Reisezeit, Kosten, Energieverbrauch)
- Berechne alle **Pareto-optimalen** Pfade
 - Pfad ist Pareto-optimal \Leftrightarrow
Kein anderer Pfad dominiert ihn
 - Pfad dominiert anderen \Leftrightarrow
Jedes Kriterium ist gleich oder besser
 - Grenzfall: Gleich gut in allen Kriterien
(wird unterschiedlich behandelt)



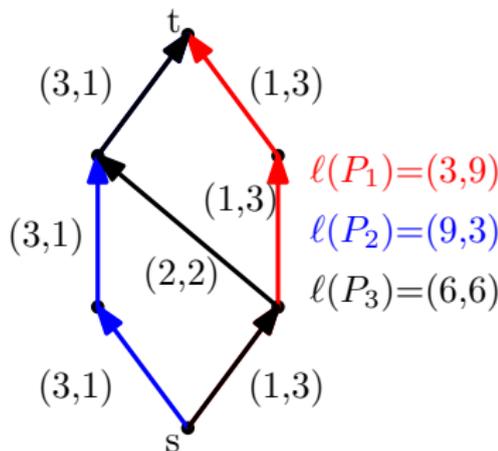
Idee:

- Mehrere Gewichte an Kanten
(z.B. Reisezeit, Kosten, Energieverbrauch)
- Berechne alle **Pareto-optimalen** Pfade
 - Pfad ist Pareto-optimal \Leftrightarrow
Kein anderer Pfad dominiert ihn
 - Pfad dominiert anderen \Leftrightarrow
Jedes Kriterium ist gleich oder besser
 - Grenzfall: Gleich gut in allen Kriterien
(wird unterschiedlich behandelt)



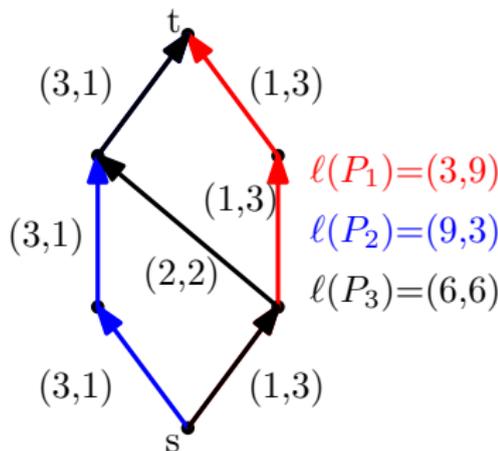
Idee:

- Mehrere Gewichte an Kanten
(z.B. Reisezeit, Kosten, Energieverbrauch)
- Berechne alle **Pareto-optimalen** Pfade
 - Pfad ist Pareto-optimal \Leftrightarrow
Kein anderer Pfad dominiert ihn
 - Pfad dominiert anderen \Leftrightarrow
Jedes Kriterium ist gleich oder besser
 - Grenzfall: Gleich gut in allen Kriterien
(wird unterschiedlich behandelt)



Idee:

- Mehrere Gewichte an Kanten
(z.B. Reisezeit, Kosten, Energieverbrauch)
- Berechne alle **Pareto-optimalen** Pfade
 - Pfad ist Pareto-optimal \Leftrightarrow
Kein anderer Pfad dominiert ihn
 - Pfad dominiert anderen \Leftrightarrow
Jedes Kriterium ist gleich oder besser
 - Grenzfall: Gleich gut in allen Kriterien
(wird unterschiedlich behandelt)



Herausforderung:

- **Viele** Pfade zum Ziel

Definition (Pareto-Dominanz)

Gegeben zwei n -Tupel $m_i = (x_1, \dots, x_n)$ und $m_j = (y_1, \dots, y_n)$:

$$m_i \text{ dominiert } m_j \iff \forall k : x_k \leq y_k \text{ und } \exists \ell : x_\ell < y_\ell$$

(m_i ist in keinem Wert schlechter als m_j und in mindestens einem besser)

Definition (Pareto-Dominanz)

Gegeben zwei n -Tupel $m_i = (x_1, \dots, x_n)$ und $m_j = (y_1, \dots, y_n)$:

$$m_i \text{ dominiert } m_j \iff \forall k : x_k \leq y_k \text{ und } \exists \ell : x_\ell < y_\ell$$

(m_i ist in keinem Wert schlechter als m_j und in mindestens einem besser)

Definition (Pareto-Optimum)

Gegeben eine Menge M von n -Tupeln: Tupel $m_i \in M$ heißt **Pareto-optimal**, wenn es kein anderes $m_j \in M$ gibt, das m_i dominiert.

Menge $M' \subseteq M$ heißt **Pareto-Menge**, wenn alle $m \in M'$ Pareto-optimal.

Definition (Pareto-Dominanz)

Gegeben zwei n -Tupel $m_i = (x_1, \dots, x_n)$ und $m_j = (y_1, \dots, y_n)$:

$$m_i \text{ dominiert } m_j \iff \forall k : x_k \leq y_k \text{ und } \exists \ell : x_\ell < y_\ell$$

(m_i ist in keinem Wert schlechter als m_j und in mindestens einem besser)

Definition (Pareto-Optimum)

Gegeben eine Menge M von n -Tupeln: Tupel $m_i \in M$ heißt **Pareto-optimal**, wenn es kein anderes $m_j \in M$ gibt, das m_i dominiert.

Menge $M' \subseteq M$ heißt **Pareto-Menge**, wenn alle $m \in M'$ Pareto-optimal.

Beispiel: Öffentlicher Verkehr (Ankunftszeit und # Umstiege)

Definition (Pareto-Dominanz)

Gegeben zwei n -Tupel $m_i = (x_1, \dots, x_n)$ und $m_j = (y_1, \dots, y_n)$:

$$m_i \text{ dominiert } m_j \iff \forall k : x_k \leq y_k \text{ und } \exists \ell : x_\ell < y_\ell$$

(m_i ist in keinem Wert schlechter als m_j und in mindestens einem besser)

Definition (Pareto-Optimum)

Gegeben eine Menge M von n -Tupeln: Tupel $m_i \in M$ heißt **Pareto-optimal**, wenn es kein anderes $m_j \in M$ gibt, das m_i dominiert.

Menge $M' \subseteq M$ heißt **Pareto-Menge**, wenn alle $m \in M'$ Pareto-optimal.

Beispiel: Öffentlicher Verkehr (Ankunftszeit und # Umstiege)

$$M = \{(14:00 \text{ Uhr}, 5), (15:13 \text{ Uhr}, 3), (13:45 \text{ Uhr}, 4), (15:15 \text{ Uhr}, 0)\}.$$

Definition (Pareto-Dominanz)

Gegeben zwei n -Tupel $m_i = (x_1, \dots, x_n)$ und $m_j = (y_1, \dots, y_n)$:

$$m_i \text{ dominiert } m_j \iff \forall k : x_k \leq y_k \text{ und } \exists \ell : x_\ell < y_\ell$$

(m_i ist in keinem Wert schlechter als m_j und in mindestens einem besser)

Definition (Pareto-Optimum)

Gegeben eine Menge M von n -Tupeln: Tupel $m_i \in M$ heißt **Pareto-optimal**, wenn es kein anderes $m_j \in M$ gibt, das m_i dominiert.

Menge $M' \subseteq M$ heißt **Pareto-Menge**, wenn alle $m \in M'$ Pareto-optimal.

Beispiel: Öffentlicher Verkehr (Ankunftszeit und # Umstiege)

$$M = \{(14:00 \text{ Uhr}, 5), (15:13 \text{ Uhr}, 3), (13:45 \text{ Uhr}, 4), (15:15 \text{ Uhr}, 0)\}.$$

Definition (Pareto-Dominanz)

Gegeben zwei n -Tupel $m_i = (x_1, \dots, x_n)$ und $m_j = (y_1, \dots, y_n)$:

$$m_i \text{ dominiert } m_j \iff \forall k : x_k \leq y_k \text{ und } \exists \ell : x_\ell < y_\ell$$

(m_i ist in keinem Wert schlechter als m_j und in mindestens einem besser)

Definition (Pareto-Optimum)

Gegeben eine Menge M von n -Tupeln: Tupel $m_i \in M$ heißt **Pareto-optimal**, wenn es kein anderes $m_j \in M$ gibt, das m_i dominiert.

Menge $M' \subseteq M$ heißt **Pareto-Menge**, wenn alle $m \in M'$ Pareto-optimal.

Beispiel: Öffentlicher Verkehr (Ankunftszeit und # Umstiege)

$$M = \{(14:00 \text{ Uhr}, 5), (15:13 \text{ Uhr}, 3), (13:45 \text{ Uhr}, 4), (15:15 \text{ Uhr}, 0)\}.$$

Definition (Pareto-Dominanz)

Gegeben zwei n -Tupel $m_i = (x_1, \dots, x_n)$ und $m_j = (y_1, \dots, y_n)$:

$$m_i \text{ dominiert } m_j \iff \forall k : x_k \leq y_k \text{ und } \exists \ell : x_\ell < y_\ell$$

(m_i ist in keinem Wert schlechter als m_j und in mindestens einem besser)

Definition (Pareto-Optimum)

Gegeben eine Menge M von n -Tupeln: Tupel $m_i \in M$ heißt **Pareto-optimal**, wenn es kein anderes $m_j \in M$ gibt, das m_i dominiert.

Menge $M' \subseteq M$ heißt **Pareto-Menge**, wenn alle $m \in M'$ Pareto-optimal.

Beispiel: Öffentlicher Verkehr (Ankunftszeit und # Umstiege)

$$M = \{(14:00 \text{ Uhr}, 5), (15:13 \text{ Uhr}, 3), (13:45 \text{ Uhr}, 4), (15:15 \text{ Uhr}, 0)\}.$$

Wie effizient berechnen?

Multi-Criteria Dijkstra (MCD)

Idee:

- Benutze Graph mit Kantengewicht len: $E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^n$
- Grundlage: Dijkstras Algorithmus

Idee:

- Benutze Graph mit Kantengewicht $len: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^n$
- Grundlage: Dijkstras Algorithmus

Aber:

- Label ℓ sind n -Tupel (x_1, \dots, x_n)
- An jedem Knoten $v \in V$: Pareto-Menge B_v von Labeln
- Jedes Label entspricht einem (Pareto-optimalen) s - u -Pfad
- Priority Queue verwaltet Label statt Knoten
- Queue-Key ist Prioritätsfunktion $k(x_1, \dots, x_n)$
 - Meist: Linearkombination oder lexikographische Sortierung
 - Priority Queue enthält ganze Label, nicht nur den Key
- Dominanz von Labeln in B_v on-the-fly

Multi-Criteria Dijkstra (MCD)

MCD($G = (V, E), s$)

```
1  $B_v \leftarrow \infty$  for all  $v \in V$ 
2  $B_s \leftarrow 0$ 
3  $Q.clear()$ 
4  $Q.insert(s, B_s)$ 

5 while  $!Q.empty()$  do
6    $(u, \ell = dist) \leftarrow Q.deleteMin()$ 
7   for all  $edges\ e = (u, v) \in E$  do
8      $\ell' \leftarrow dist + len(e)$ 
9     if not  $B_v \leq \ell'$  then
10       $B_v \leftarrow \ell'$ 
11       $Q.insert(v, \ell')$ 
```

Multi-Criteria Dijkstra (MCD)

MCD($G = (V, E), s$)

```
1  $B_v \leftarrow \emptyset$  for all  $v \in V$ 
2  $B_s \leftarrow \{(0, \dots, 0)\}$ 
3  $Q.clear()$ 
4  $Q.insert(s, B_s)$ 

5 while ! $Q.empty()$  do
6    $(u, \ell = \text{dist}) \leftarrow Q.deleteMin()$ 
7   for all edges  $e = (u, v) \in E$  do
8      $\ell' \leftarrow \text{dist} + \text{len}(e)$ 
9     if not  $B_v \leq \ell'$  then
10       $B_v \leftarrow \ell'$ 
11       $Q.insert(v, \ell')$ 
```

Multi-Criteria Dijkstra (MCD)

MCD($G = (V, E), s$)

```
1  $B_v \leftarrow \emptyset$  for all  $v \in V$ 
2  $B_s \leftarrow \{(0, \dots, 0)\}$ 
3  $Q.clear()$ 
4  $Q.insert(s, B_s)$ 

5 while ! $Q.empty()$  do
6    $(u, \ell = (x_1, \dots, x_n)) \leftarrow Q.deleteMin()$ 
7   for all edges  $e = (u, v) \in E$  do
8      $\ell' \leftarrow \text{dist} + \text{len}(e)$ 
9     if not  $B_v \leq \ell'$  then
10       $B_v \leftarrow \ell'$ 
11       $Q.insert(v, \ell')$ 
```

Multi-Criteria Dijkstra (MCD)

MCD($G = (V, E), s$)

```
1  $B_v \leftarrow \emptyset$  for all  $v \in V$ 
2  $B_s \leftarrow \{(0, \dots, 0)\}$ 
3  $Q.clear()$ 
4  $Q.insert(s, B_s)$ 

5 while ! $Q.empty()$  do
6    $(u, \ell = (x_1, \dots, x_n)) \leftarrow Q.deleteMin()$ 
7   for all edges  $e = (u, v) \in E$  do
8      $\ell' \leftarrow (x_1 + \text{len}(e)_1, \dots, x_n + \text{len}(e)_n)$ 
9     if not  $B_v \leq \ell'$  then
10       $B_v \leftarrow \ell'$ 
11       $Q.insert(v, \ell')$ 
```

Multi-Criteria Dijkstra (MCD)

MCD($G = (V, E), s$)

```
1  $B_v \leftarrow \emptyset$  for all  $v \in V$ 
2  $B_s \leftarrow \{(0, \dots, 0)\}$ 
3  $Q.clear()$ 
4  $Q.insert(s, B_s)$ 

5 while ! $Q.empty()$  do
6    $(u, \ell = (x_1, \dots, x_n)) \leftarrow Q.deleteMin()$ 
7   for all edges  $e = (u, v) \in E$  do
8      $\ell' \leftarrow (x_1 + \text{len}(e)_1, \dots, x_n + \text{len}(e)_n)$ 
9     if not  $B_v$  dominates  $\ell'$  then
10       $B_v \leftarrow \ell'$ 
11       $Q.insert(v, \ell')$ 
```

Multi-Criteria Dijkstra (MCD)

MCD($G = (V, E), s$)

```
1  $B_v \leftarrow \emptyset$  for all  $v \in V$ 
2  $B_s \leftarrow \{(0, \dots, 0)\}$ 
3  $Q.clear()$ 
4  $Q.insert(s, B_s)$ 

5 while ! $Q.empty()$  do
6    $(u, \ell = (x_1, \dots, x_n)) \leftarrow Q.deleteMin()$ 
7   for all edges  $e = (u, v) \in E$  do
8      $\ell' \leftarrow (x_1 + \text{len}(e)_1, \dots, x_n + \text{len}(e)_n)$ 
9     if not any  $\ell'' \in B_v$  dominates  $\ell'$  then
10       $B_v \leftarrow \ell'$ 
11       $Q.insert(v, \ell')$ 
```

Multi-Criteria Dijkstra (MCD)

MCD($G = (V, E), s$)

```
1  $B_v \leftarrow \emptyset$  for all  $v \in V$ 
2  $B_s \leftarrow \{(0, \dots, 0)\}$ 
3  $Q.clear()$ 
4  $Q.insert(s, B_s)$ 

5 while ! $Q.empty()$  do
6    $(u, \ell = (x_1, \dots, x_n)) \leftarrow Q.deleteMin()$ 
7   for all edges  $e = (u, v) \in E$  do
8      $\ell' \leftarrow (x_1 + \text{len}(e)_1, \dots, x_n + \text{len}(e)_n)$ 
9     if not any  $\ell'' \in B_v$  dominates  $\ell'$  then
10       $B_v.insert(\ell')$ 
11       $Q.insert(v, \ell')$ 
```

Multi-Criteria Dijkstra (MCD)

MCD($G = (V, E), s$)

```
1  $B_v \leftarrow \emptyset$  for all  $v \in V$ 
2  $B_s \leftarrow \{(0, \dots, 0)\}$ 
3  $Q.clear()$ 
4  $Q.insert(s, B_s)$ 

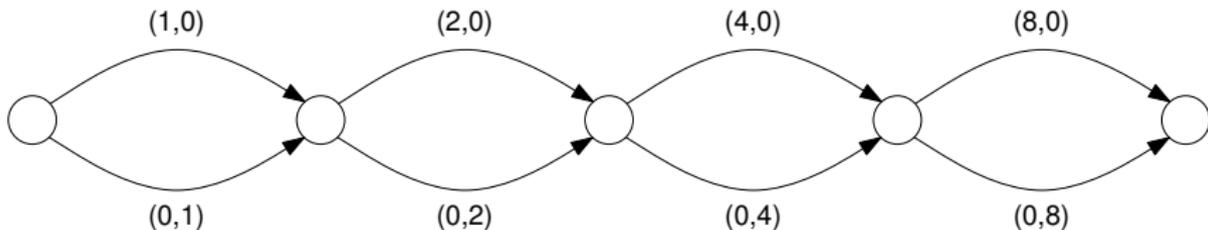
5 while ! $Q.empty()$  do
6    $(u, \ell = (x_1, \dots, x_n)) \leftarrow Q.deleteMin()$ 
7   for all edges  $e = (u, v) \in E$  do
8      $\ell' \leftarrow (x_1 + \text{len}(e)_1, \dots, x_n + \text{len}(e)_n)$ 
9     if not any  $\ell'' \in B_v$  dominates  $\ell'$  then
10       $B_v.insert(\ell')$ 
11      Remove non-Pareto-optimal labels from  $B_v$  and  $Q$ 
12       $Q.insert(v, \ell')$ 
```

- Falls extrahiertes Label immer Pareto-optimal (bzgl. aller $\ell \in Q$):
 - MCD **label-setting** (einmal extrahierte Labels werden nie dominiert)
dafür muss die Längenfunktion natürlich auch positiv sein
 - Gilt für Linearkombination und lexikographische Sortierung
- Pareto-Mengen B_u sind **dynamische** Datenstrukturen \rightsquigarrow teuer!
- Sehr viele Queue-Operationen
- Testen der Dominanz in $\mathcal{O}(|B_u|)$ möglich
- Stoppkriterium?

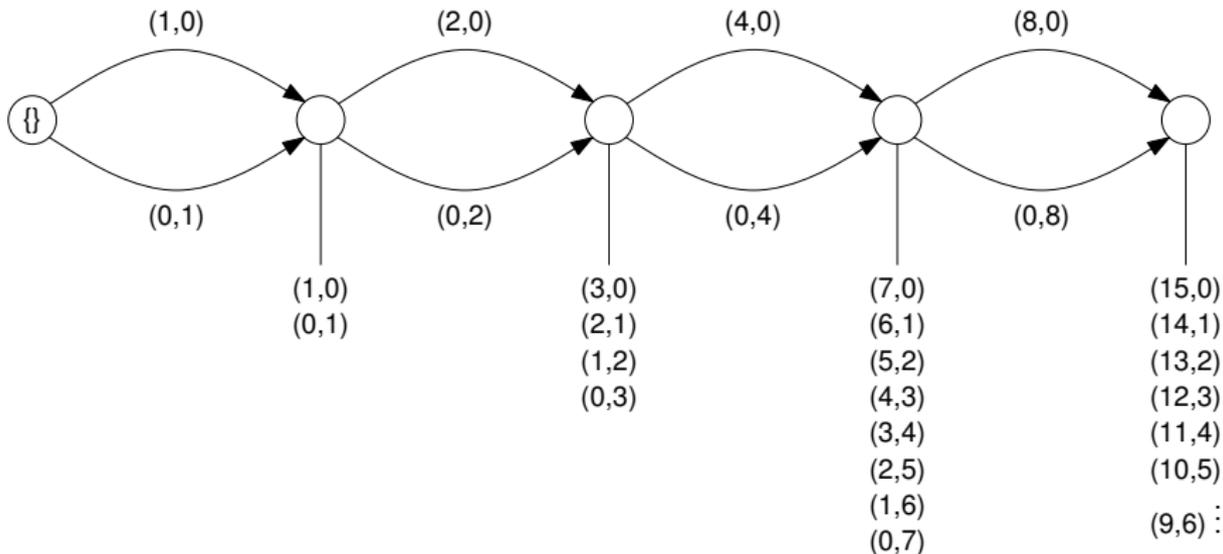
- Falls extrahiertes Label immer Pareto-optimal (bzgl. aller $\ell \in Q$):
 - MCD **label-setting** (einmal extrahierte Labels werden nie dominiert)
dafür muss die Längenfunktion natürlich auch positiv sein
 - Gilt für Linearkombination und lexikographische Sortierung
- Pareto-Mengen B_u sind **dynamische** Datenstrukturen \rightsquigarrow teuer!
- Sehr viele Queue-Operationen
- Testen der Dominanz in $\mathcal{O}(|B_u|)$ möglich
- Stoppkriterium?
 - Pareto-Menge nicht vollständig, wenn t erreicht
 - Queue leer laufen lassen

Exponentielle Laufzeit

Exponentiell wachsende Lösungsmenge bei zwei Kriterien:



Exponentiell wachsende Lösungsmenge bei zwei Kriterien:



- Jedes B_u verwaltet bestes ungesetztes Label selbst
⇒ Priority Queue auf Knoten statt Labeln
- **Hopping Reduction:**
Relaxierung der Kante zum Parent-Knoten p unnötig teuer
(kann keine Verbesserung bringen, kostet aber $\mathcal{O}(|B_p|)$ für Test)
⇒ Überspringe Kante zum Parent-Knoten des aktuellen Labels
- **Target-Pruning:** (statt Abbruchkriterium)
Verwerfe Label ℓ' an Knoten u , wenn es bereits von der
tentativen Pareto-Menge B_t am Ziel t dominiert wird

- Jedes B_u verwaltet bestes ungesetztes Label selbst
⇒ Priority Queue auf Knoten statt Labeln
- **Hopping Reduction:**
Relaxierung der Kante zum Parent-Knoten p unnötig teuer
(kann keine Verbesserung bringen, kostet aber $\mathcal{O}(|B_p|)$ für Test)
⇒ Überspringe Kante zum Parent-Knoten des aktuellen Labels
- **Target-Pruning:** (statt Abbruchkriterium)
Verwerfe Label ℓ' an Knoten u , wenn es bereits von der
tentativen Pareto-Menge B_t am Ziel t dominiert wird

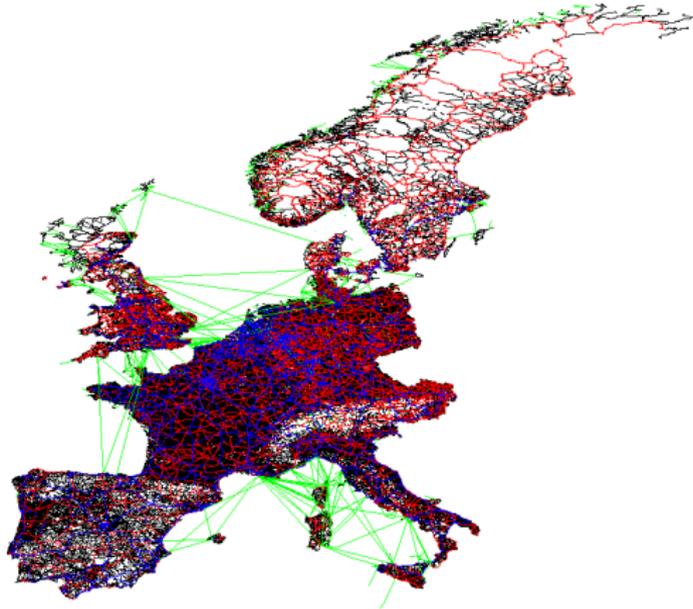
Worst-Case Laufzeit immer noch exponentiell
(aber je nach Instanz schon signifikante Beschleunigung)

Straßengraphen von:

- Luxemburg
- Karlsruhe
- Europa

Metriken:

- Fahrzeit schnelles Auto
- Fahrzeit langsames Auto
- Kosten
- Distanz
- Unit-Metrik (alle Kantengewichte 1)



Beobachtungen:

- Nicht viele zusätzliche Lösungen
- Anzahl Lösungen und Queue Extracts korrelieren
- Queryzeit steigt viel stärker
- Dominanztests sind nicht-linear

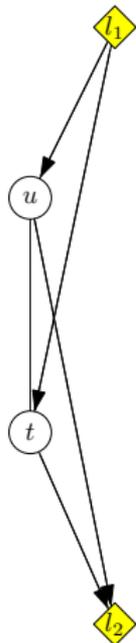
metrics	target labels	#del. mins	time [ms]
fast car (fc)	1.0	442 124	156.44
slow car (sc)	1.0	452 635	151.68
fast truck (ft)	1.0	433 834	139.51
slow truck (st)	1.0	440 273	136.85
fc + st	2.2	1 039 110	843.48
fc + ft	2.0	947 042	698.21
fc + sc	1.2	604 750	369.31
sc + lt	1.9	876 998	577.05
sc + ft	1.7	784 459	474.77
ft + st	1.3	632 052	348.43
fc + sc + st	2.3	1 078 190	956.14
fc + sc + ft	2.0	940 815	751.16
sc + ft +st	1.9	880 236	640.47
fc + sc + ft + st	2.5	1 084 780	1016.39

metrics	Luxemburg			Karlsruhe		
	target labels	#del. mins	time [ms]	target labels	#del. mins	time [ms]
fast car (fc)	1.0	15 469	2.89	1.0	39 001	8.2
slow truck (st)	1.0	15 384	2.80	1.0	38 117	7.1
costs	1.0	15 303	2.65	1.0	38 117	6.8
distances	1.0	15 299	2.49	1.0	39 356	7.3
unit	1.0	15 777	2.54	1.0	39 001	8.2
fc + st	2.0	30 026	8.70	1.9	77 778	28.7
fc + costs	29.6	402 232	1704.28	52.7	1 882 930	14909.5
fc + dist.	49.9	429 250	1585.23	99.4	2 475 650	30893.2
fc + unit	25.7	281 894	573.51	27.0	1 030 490	3209.9
costs + dist.	29.6	305 891	581.71	67.2	1 661 600	10815.1

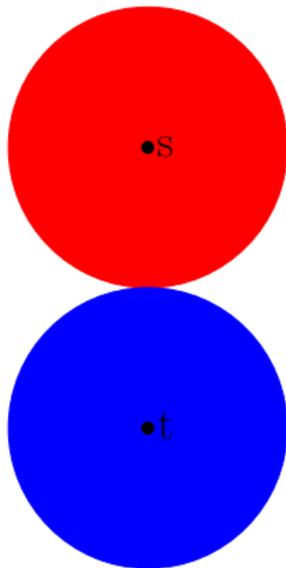
- Je nach Kriterien kann Lösungsmenge stark ansteigen

Beschleunigungstechniken

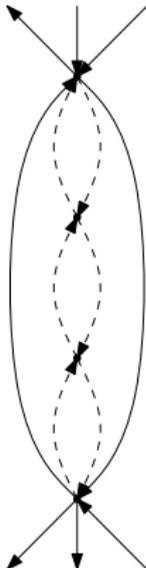
Landmarken



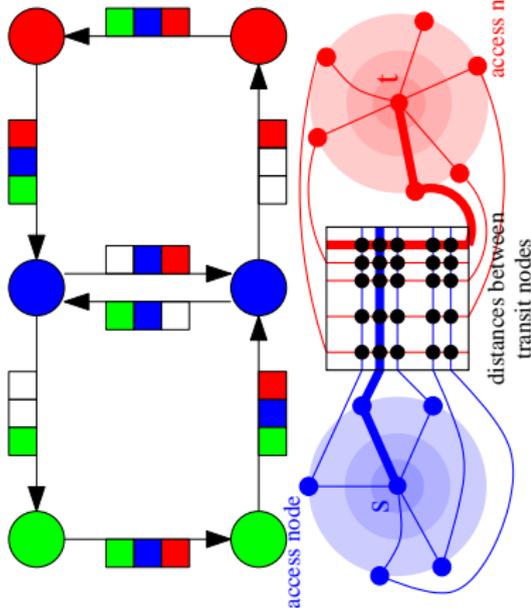
Bidirektionale Suche



Kontraktion



Arc-Flags



Vorbereitung:

- Wähle einige Knoten (≈ 16) als **Landmarken**
- Berechne Abstände von und zu allen Landmarken

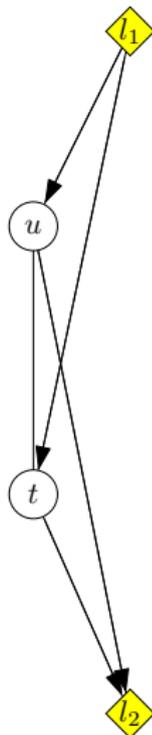
Anfrage:

- Benutze Landmarken und Dreiecksungleichung, um eine **untere Schranke** für den Abstand zum Ziel zu bestimmen:

$$d(u, t) \geq d(l_1, t) - d(l_1, u)$$

$$d(u, t) \geq d(u, l_2) - d(t, l_2)$$

- Benutze untere Schranken als A*-Potential
- Verändert **Reihenfolge** der besuchten Knoten



Idee:

- Berechne Distanzen pro Metrik unabhängig voneinander
- Pro Knoten u und Landmarke l_j :
Distanzvektor $(d_1(u, l_j), \dots, d_n(u, l_j))$
- Liefert Potentiale π_1, \dots, π_n
- Zielrichtung: Queue-Key eines Labels ist $k(x_1 + \pi_1, \dots, x_n + \pi_n)$.
- Potential π_i liefert untere Schranke für $d_i(u, t)$
⇒ Nutze $(x_1 + \pi_1, \dots, x_n + \pi_n)$ auch für **Target-Pruning**

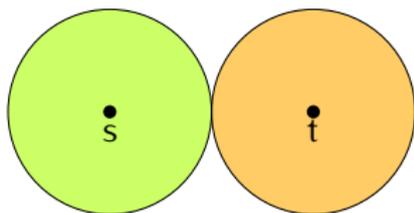
Idee:

- Berechne Distanzen pro Metrik unabhängig voneinander
- Pro Knoten u und Landmarke l_j :
Distanzvektor $(d_1(u, l_j), \dots, d_n(u, l_j))$
- Liefert Potentiale π_1, \dots, π_n
- Zielrichtung: Queue-Key eines Labels ist $k(x_1 + \pi_1, \dots, x_n + \pi_n)$.
- Potential π_i liefert untere Schranke für $d_i(u, t)$
 \Rightarrow Nutze $(x_1 + \pi_1, \dots, x_n + \pi_n)$ auch für **Target-Pruning**

Modifikation:

Berechne zur Queryzeit $(d_1(u, t), \dots, d_n(u, t))$

- Nutze t als einzige „perfekte“ Landmarke
- Kosten von n Dijkstras (meist) unerheblich für Gesamtlaufzeit
- Keine Vorberechnung



- Starte zweite Suche von t
- Relaxiere rückwärts nur eingehende Kanten
- Stoppe die Suche, wenn beide Suchräume sich treffen

Idee:

- Rückwärtssuche kein Problem (analog)

Idee:

- Rückwärtssuche kein Problem (analog)

Offenes Problem:

- Abbruchkriterium?
- Analog zu Target-Pruning:
 - Verwalte Pareto-Menge mit tentativen Lösungen
 - Kombination der Lösungen aus Vorwärts- und Rückwärtssuche an Mittelknoten
 - Dominanztest mit tentativer Pareto-Menge
- Lohnt nicht recht

Kontraktion

Knoten-Kontraktion:

- Entferne Knoten **iterativ**
- Füge neue Kanten (**Shortcuts**) hinzu, um die Abstände zwischen verbleibenden Knoten zu erhalten

Zeugensuche:

- Behalte nur relevante Shortcuts
- Suche kürzere Pfade (**Zeugen**) während oder nach Kontraktion



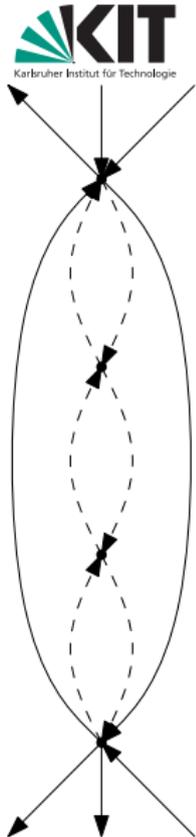
Kontraktion

Knoten-Kontraktion:

- Entferne Knoten **iterativ**
- Füge neue Kanten (**Shortcuts**) hinzu, um die Abstände zwischen verbleibenden Knoten zu erhalten

Zeugensuche:

- Behalte nur relevante Shortcuts
- Suche kürzere Pfade (**Zeugen**) während oder nach Kontraktion



Unikriteriell:

- Lösche Kante (u, v) , wenn (u, v) nicht der kürzeste u - v -Pfad ist, also $\text{len}(u, v) > d(u, v)$
- Lokale Dijkstra-Suche von u

Multikriteriell:

Unikriteriell:

- Lösche Kante (u, v) , wenn (u, v) nicht der kürzeste u - v -Pfad ist, also $\text{len}(u, v) > d(u, v)$
- Lokale Dijkstra-Suche von u

Multikriteriell:

- Lösche Kante (u, v) , wenn (u, v) kein Pareto-optimaler u - v -Pfad ist
- Lokale multikriterielle Suche
- Kann zu (Pareto-optimalen) Multikanten führen
- Problem: „Explosion“ der Anzahl der Pfade

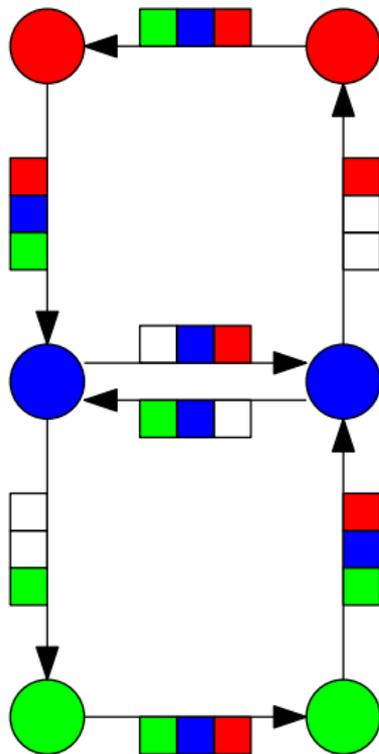
Arc-Flags

Idee:

- Partitioniere den Graph in k Zellen
- Hänge ein Label mit k Bits an jede Kante
- Gibt an, ob Kante für Zielzelle benötigt wird
- Modifizierter Dijkstra überspringt Kanten ohne Flagge

Beobachtung:

- Partition wird auf ungewichtetem Graphen durchgeführt → keine Änderung nötig
- Aber Flaggen müssen anders gesetzt werden



Setze Flagge, wenn...

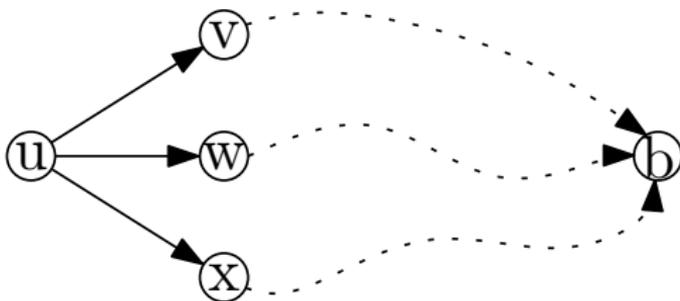
- **Unikriteriell:** Kante auf kürzestem Pfad in Zielzelle liegt
- **Multikriteriell:** Kante auf Pareto-optimalem Pfad in Zielzelle liegt

Setze Flagge, wenn...

- **Unikriteriell:** Kante auf kürzestem Pfad in Zielknoten liegt
- **Multikriteriell:** Kante auf Pareto-optimalem Pfad in Zielknoten liegt

Berechnung:

- Für jeden Randknoten b und jeden Knoten u :
- Berechne alle Pareto-optimalen u - b -Pfade
- Flagge alle Kanten auf diesen Pfaden

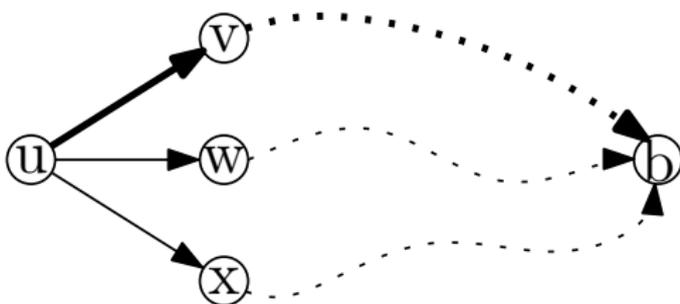


Setze Flagge, wenn...

- **Unikriteriell:** Kante auf kürzestem Pfad in Zielknoten liegt
- **Multikriteriell:** Kante auf Pareto-optimalem Pfad in Zielknoten liegt

Berechnung:

- Für jeden Randknoten b und jeden Knoten u :
- Berechne alle Pareto-optimalen u - b -Pfade
- Flagge alle Kanten auf diesen Pfaden

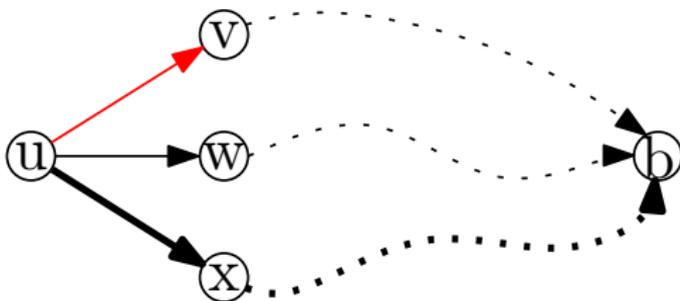


Setze Flagge, wenn...

- **Unikriteriell:** Kante auf kürzestem Pfad in Zielknoten liegt
- **Multikriteriell:** Kante auf Pareto-optimalem Pfad in Zielknoten liegt

Berechnung:

- Für jeden Randknoten b und jeden Knoten u :
- Berechne alle Pareto-optimalen u - b -Pfade
- Flagge alle Kanten auf diesen Pfaden

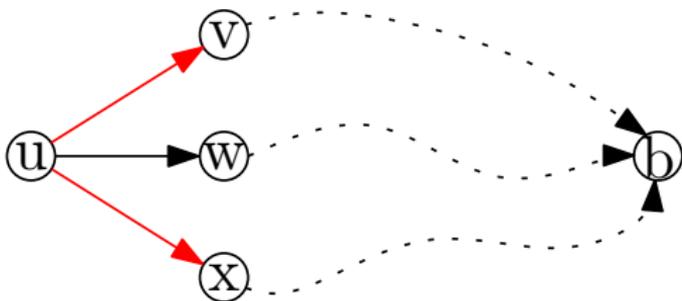


Setze Flagge, wenn...

- **Unikriteriell:** Kante auf kürzestem Pfad in Zielknoten liegt
- **Multikriteriell:** Kante auf Pareto-optimalem Pfad in Zielknoten liegt

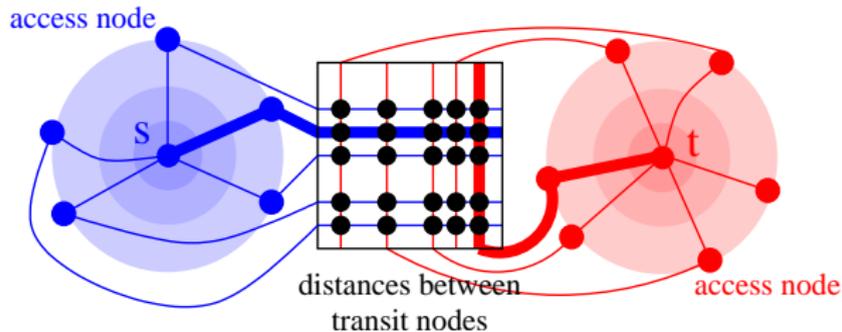
Berechnung:

- Für jeden Randknoten b und jeden Knoten u :
- Berechne alle Pareto-optimalen u - b -Pfade
- Flagge alle Kanten auf diesen Pfaden



Idee:

- Speichere Distanztabellen
- Nur für „wichtige“ Teile des Graphen
- Suchen laufen nur bis zur Tabelle
- Harmoniert gut mit hierarchischen Techniken



Beobachtung:

- Distanz-Tabelle muss Pareto-Mengen speichern
- Massiver Anstieg der Größe der Tabellen
- Pfadstruktur nicht mehr so gutmütig
- Deutlich mehr Access-Nodes?

Also:

- Speicherverbrauch deutlich zu groß!

Basismodule:

- Bidirektionale Suche
- + Landmarken/A*
- + Kontraktion
- + Arc-Flags
- Table-Lookups

Pareto-SHARC [DW09] (nur als Beispiel)

metrics	Luxemburg					Karlsruhe				
	Prepro	Query				Prepro	Query			
	time [h:m]	target labels	#del. mins	time [ms]	spd up	time [h:m]	target labels	#del. mins	time [ms]	spd up
fast car (fc)	< 0:01	1.0	138	0.03	114	< 0:01	1.0	206	0.04	188
slow truck (st)	< 0:01	1.0	142	0.03	111	< 0:01	1.0	212	0.04	178
costs	< 0:01	1.0	151	0.03	96	< 0:01	1.0	244	0.05	129
distances	< 0:01	1.0	158	0.03	87	< 0:01	1.0	261	0.06	119
unit	< 0:01	1.0	149	0.03	96	< 0:01	1.0	238	0.05	147
fc + st	0:01	2.0	285	0.09	100	0:01	1.9	797	0.26	108
fc + costs	0:04	29.6	4 149	6.49	263	1:30	52.7	15 912	80.88	184
fc + dist.	0:14	49.9	8 348	20.21	78	3:58	99.4	31 279	202.15	153
fc + unit	0:06	25.7	4 923	5.13	112	0:17	27.0	11 319	16.04	200
costs + dist.	0:02	29.6	3 947	4.87	119	1:11	67.2	19 775	67.75	160

- Berechnung der Pareto-Menge nicht effizient möglich
- Auch mit Beschleunigungstechniken exponentielle Laufzeit
- Laufzeit in der Praxis stark abhängig von
 - Anzahl der Kriterien
 - Korrelation der Metriken
- Praktikable Laufzeit somit oft nur mit Heuristiken möglich
 - Relaxierung der Dominanz
 - Ausdünnen von Pareto-Mengen während der Query
 - Mehr dazu später...

Constrained Shortest Paths

Constrained Shortest Path (CSP)

Ziel:

- Finde **kürzeste** Route, die bestimmtes **Gewicht** nicht überschreitet
- Zwei Metriken auf den Kanten: **Länge** und **Gewicht**
- Optimierte die Länge und beschränke das Gewicht

Ziel:

- Finde **kürzeste** Route, die bestimmtes **Gewicht** nicht überschreitet
- Zwei Metriken auf den Kanten: **Länge** und **Gewicht**
- Optimierte die Länge und beschränke das Gewicht

Definition: Constrained Shortest Path Problem

Gegeben: $G = (V, E)$, Länge $\ell: E \rightarrow \mathbb{N}_0$, Gewicht $\omega: E \rightarrow \mathbb{N}_0$,
Start und Ziel $s, t \in V$ sowie Schranken $L, W \in \mathbb{N}_0$

Problem: Existiert ein einfacher Pfad P von s nach t in G ,
für den $\ell(P) \leq L$ und $\omega(P) \leq W$ gelten?

Das entsprechende Optimierungsproblem lautet:

- Finde einen s - t -Pfad P mit minimalem $\ell(P)$ und $\omega(P) \leq W$

Theorem

Constrained Shortest Path Problem ist (schwach) \mathcal{NP} -vollständig

Theorem

Constrained Shortest Path Problem ist (schwach) \mathcal{NP} -vollständig

Beweis:

1: $\text{CSP} \in \mathcal{NP}$

- Für ein Pfad P kann in polynomieller Zeit geprüft werden:
 - P benutzt nur Kanten aus G
 - P hat passende Länge: $\ell(P) \leq L$
 - P hat passendes Gewicht: $\omega(P) \leq W$

2: CSP ist \mathcal{NP} -schwer

- Beweis durch Reduktion von Partition

Definition: Partition

Gegeben: Endliche Menge A sowie Größe $s: A \rightarrow \mathbb{N}_0$

Problem: Existiert ein Teilmenge $A' \subseteq A$, für die gilt:

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)$$

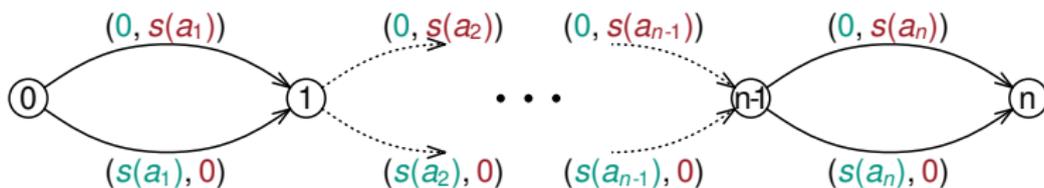
Anmerkung:

- In Karp's 21 \mathcal{NP} -vollständigen Problemen enthalten [Kar72]
- Partition ist (schwach) \mathcal{NP} -vollständig
 - \mathcal{NP} -Schwere-Beweis benötigt exponentiell große Zahlen
 - In pseudopolynomieller Zeit lösbar (Dynamische Programmierung)
 - Pseudopolynomielle Laufzeit: Abhängig von Eingabegröße + Werten

Beweis: CSP ist \mathcal{NP} -vollständig

Reduktion von Partition:

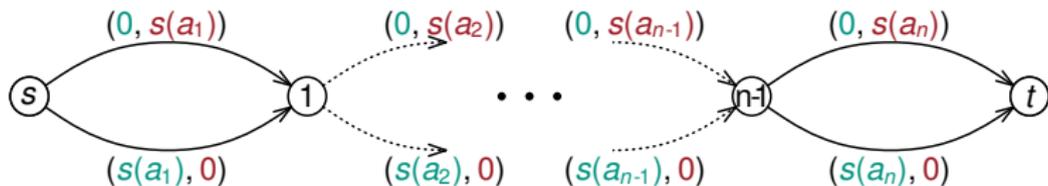
- Sei $\Pi = (A = \{a_1, \dots, a_n\}, s)$ eine Partition-Instanz
- Konstruiere Graph $G = (V, E)$ mit $n + 1$ Knoten ($V = \{0, 1, \dots, n\}$)
- Knoten $i - 1$ und i sind jeweils durch zwei Kanten verbunden
 - Eine Kante hat Länge 0 und Gewicht $s(a_i)$
 - Die andere Kante hat Länge $s(a_i)$ und Gewicht 0
- Setze $s = 0$, $t = n$ und $L = W = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} s(a)$



Beweis: CSP ist \mathcal{NP} -vollständig

Reduktion von Partition:

- Sei $\Pi = (A = \{a_1, \dots, a_n\}, s)$ eine Partition-Instanz
- Konstruiere Graph $G = (V, E)$ mit $n + 1$ Knoten ($V = \{0, 1, \dots, n\}$)
- Knoten $i - 1$ und i sind jeweils durch zwei Kanten verbunden
 - Eine Kante hat Länge 0 und Gewicht $s(a_i)$
 - Die andere Kante hat Länge $s(a_i)$ und Gewicht 0
- Setze $s = 0$, $t = n$ und $L = W = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} s(a)$



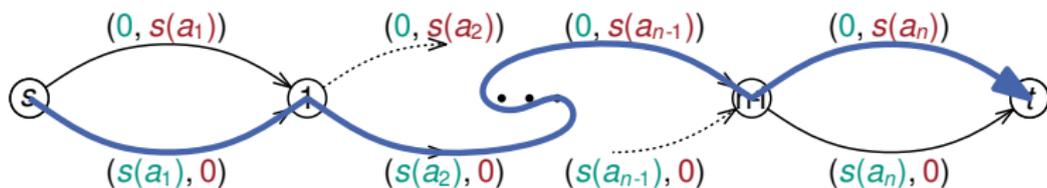
Es gilt:

- Π ist Partition-Ja-Instanz $\Leftrightarrow (G, \ell, \omega, L, W, s, t)$ ist CSP-Ja-Instanz □

Beweis: CSP ist \mathcal{NP} -vollständig

Reduktion von Partition:

- Sei $\Pi = (A = \{a_1, \dots, a_n\}, s)$ eine Partition-Instanz
- Konstruiere Graph $G = (V, E)$ mit $n + 1$ Knoten ($V = \{0, 1, \dots, n\}$)
- Knoten $i - 1$ und i sind jeweils durch zwei Kanten verbunden
 - Eine Kante hat Länge 0 und Gewicht $s(a_i)$
 - Die andere Kante hat Länge $s(a_i)$ und Gewicht 0
- Setze $s = 0$, $t = n$ und $L = W = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} s(a)$



Beispiel:

- s - t -Pfad P entspricht: $a_1 \notin A', a_2 \notin A', \dots, a_{n-1} \in A', a_n \in A'$

□

CSP kann mit Multi-Criteria Dijkstra (MCD) gelöst werden

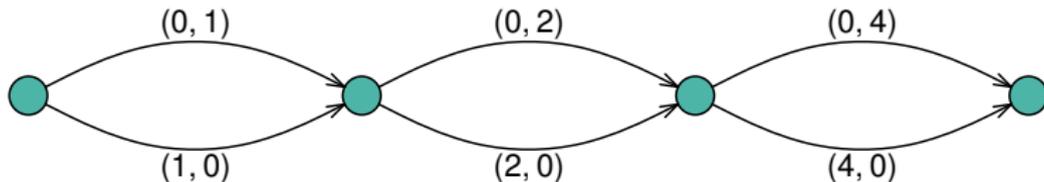
- Bikriterieller Ansatz mit Metriken: Länge & Gewicht
- Nutze Constraints zum Prunen
 - Verwerfe Label mit Gewicht $> W$

CSP kann mit Multi-Criteria Dijkstra (MCD) gelöst werden

- Bikriterieller Ansatz mit Metriken: Länge & Gewicht
- Nutze Constraints zum Prunen
 - Verwerfe Label mit Gewicht $> W$

Erinnerung:

- MCD hält pro Knoten Menge Pareto-optimaler Pfade
- Pareto-Mengen können exponentiell groß werden

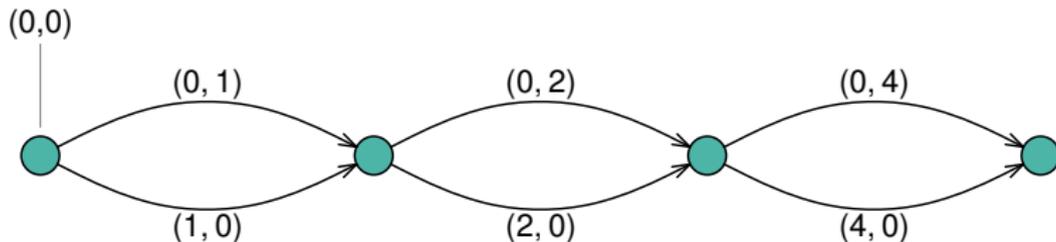


CSP kann mit Multi-Criteria Dijkstra (MCD) gelöst werden

- Bikriterieller Ansatz mit Metriken: Länge & Gewicht
- Nutze Constraints zum Prunen
 - Verwerfe Label mit Gewicht $> W$

Erinnerung:

- MCD hält pro Knoten Menge Pareto-optimaler Pfade
- Pareto-Mengen können exponentiell groß werden

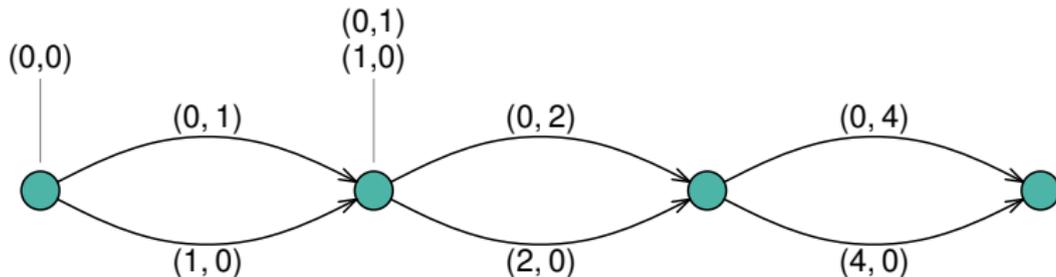


CSP kann mit Multi-Criteria Dijkstra (MCD) gelöst werden

- Bikriterieller Ansatz mit Metriken: Länge & Gewicht
- Nutze Constraints zum Prunen
 - Verwerfe Label mit Gewicht $> W$

Erinnerung:

- MCD hält pro Knoten Menge Pareto-optimaler Pfade
- Pareto-Mengen können exponentiell groß werden

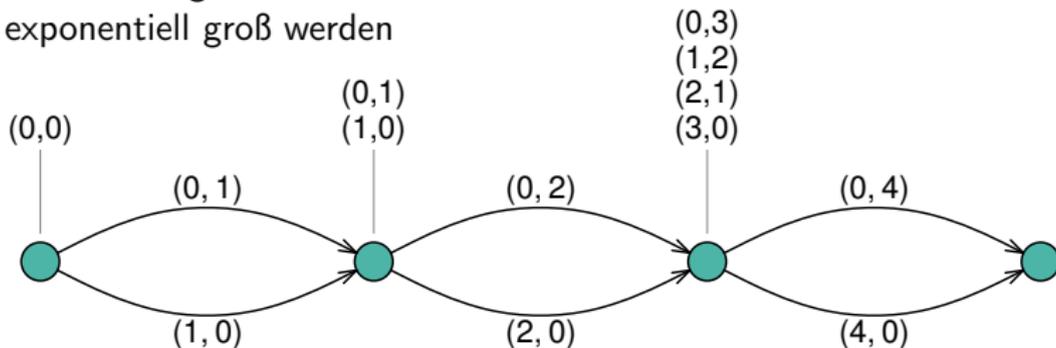


CSP kann mit Multi-Criteria Dijkstra (MCD) gelöst werden

- Bikriterieller Ansatz mit Metriken: Länge & Gewicht
- Nutze Constraints zum Prunen
 - Verwerfe Label mit Gewicht $> W$

Erinnerung:

- MCD hält pro Knoten Menge Pareto-optimaler Pfade
- Pareto-Mengen können exponentiell groß werden

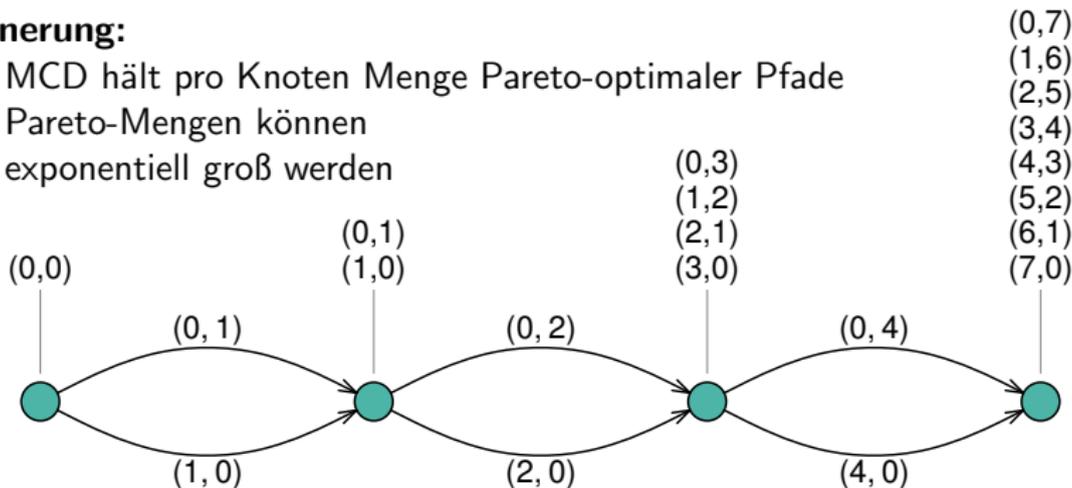


CSP kann mit Multi-Criteria Dijkstra (MCD) gelöst werden

- Bikriterieller Ansatz mit Metriken: Länge & Gewicht
- Nutze Constraints zum Prunen
 - Verwerfe Label mit Gewicht $> W$

Erinnerung:

- MCD hält pro Knoten Menge Pareto-optimaler Pfade
- Pareto-Mengen können exponentiell groß werden



Verbesserungen: Standard-Beschleunigungen von MCD übertragbar:

- Hopping Reduction
- Nur ein Label pro Knoten in Queue
- Target-Pruning

Verbesserungen: Standard-Beschleunigungen von MCD übertragbar:

- Hopping Reduction
- Nur ein Label pro Knoten in Queue
- Target-Pruning

Beobachtung: Wir brauchen nicht alle Pareto-Optima an t :

- Sind nur an kürzester zulässiger Route interessiert
- Stoppe, sobald erstes Label an t aus Queue genommen
(Queue ist nach Länge sortiert)

- Multikriterielle Optimierung
 - Verallgemeinerung zu Multi-Criteria Dijkstra
 - Anpassung von Beschleunigungstechniken
- Constrained Shortest Paths
 - \mathcal{NP} -schwer
 - Anpassung MC-Dijkstra

-  Daniel Delling and Dorothea Wagner.
Pareto paths with SHARC.
In *Proceedings of the 8th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'09)*, volume 5526 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 125–136. Springer, June 2009.
-  Richard M. Karp.
Reducibility among combinatorial problems.
In *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. Plenum Press, 1972.