

Algorithmen für Routenplanung

13. Vorlesung, Sommersemester 2021

Jonas Sauer | 31. Mai 2021



Elektrofahrzeuge (EVs):

- Transportmittel der Zukunft
- Emissionsfreie Mobilität



Aber:

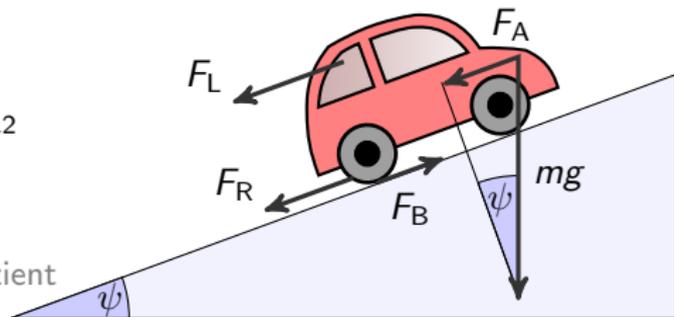
- Akkukapazität eingeschränkt (und damit Reichweite)
- Lange Ladezeiten, wenig öffentliche Ladestationen
- „Reichweitenangst“

⇒ Berücksichtigung von Energieverbrauch bei der Routenplanung

Wie kommen wir an Energieverbrauch?

Typisches (vereinfachtes) Modell

- Rollwiderstand: $F_R = \mu_R mg$
 μ_R : Rollwiderstandskoeffizient
 m : Fahrzeugmasse
 g : Erdbeschleunigung
- Luftwiderstand: $F_L = \frac{1}{2} \rho AC_W v^2$
 ρ : Luftdichte
 A : Stirnfläche
 C_W : Strömungswiderstandskoeffizient
 v : Geschwindigkeit
- Anstieg: $F_A = mg \sin \psi$
- Beschleunigung: $F_B = ma$
 a : Beschleunigung



Insgesamt benötigte Kraft: $F = F_R + F_L + F_A + F_B$

Wie kommen wir an Energieverbrauch?

Typisches (vereinfachtes) Modell

Nötige Leistung: $P = \frac{F \cdot v}{\eta} + P_0$

v : Geschwindigkeit

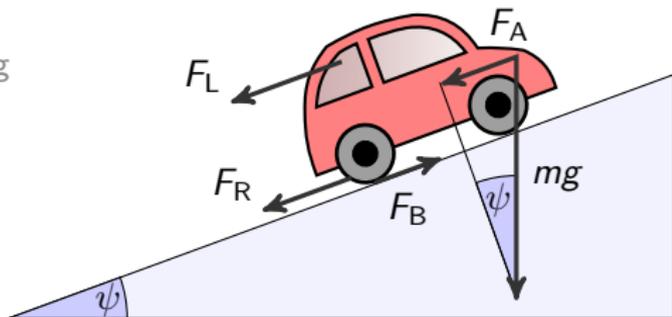
η : Effizienzkoeffizient der Übersetzung

P_0 : Leistung für Nebenverbraucher

(Klimaanlage, ...)

Energieverbrauch über einen bestimmten Zeitraum:

$$E = \int_0^T P dt$$



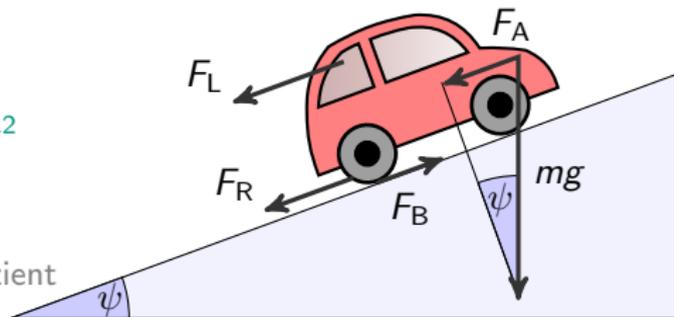
Beobachtung: Nur Beschleunigung, Geschwindigkeit und Steigung hängen vom Straßensegment ab

Alle anderen Parameter sind konstant oder vom Fahrzeugzustand abhängig (Masse, Nebenverbraucher)

Wie kommen wir an Energieverbrauch?

Typisches (vereinfachtes) Modell

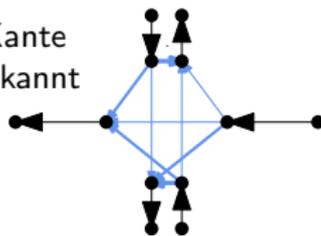
- Rollwiderstand: $F_R = \mu_R mg$
 μ_R : Rollwiderstandskoeffizient
 m : Fahrzeugmasse
 g : Erdbeschleunigung
- Luftwiderstand: $F_L = \frac{1}{2} \rho A C_W v^2$
 ρ : Luftdichte
 A : Stirnfläche
 C_W : Strömungswiderstandskoeffizient
 v : Geschwindigkeit
- Anstieg: $F_A = mg \sin \psi$
- Beschleunigung: $F_B = ma$
 a : Beschleunigung



Insgesamt benötigte Kraft: $F = F_R + F_L + F_A + F_B$

Wie bekommen wir Verbräuche auf den Kanten im Straßengraphen?

- Nur Beschleunigung, Geschwindigkeit und Steigung von Straßensegment abhängig
 - Annahme:
 - Geschwindigkeit und Steigung ist **konstant** auf jeder Kante
 - Andere Parameter (Masse, Nebenverbraucher) sind bekannt
 - Zwischenknoten, wenn sich Steigung oder Geschwindigkeitsbegrenzung ändern
 - Zusätzliche Kanten für Brems-/Beschleunigungskosten
- ⇒ Verbrauch auf Segment vereinfacht (für realistische Steigung) als

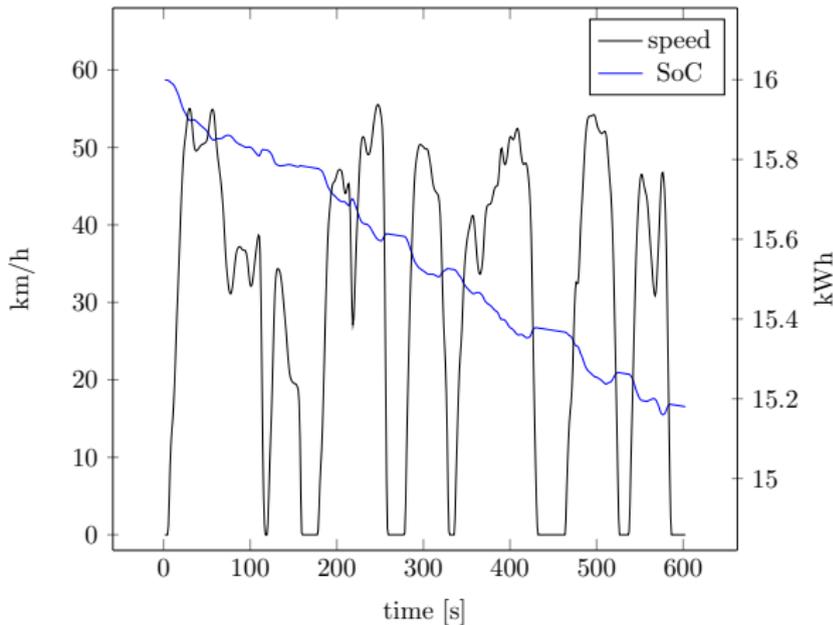


$$\lambda_1 v^2 + \lambda_2 s + \lambda_3$$

v : Geschwindigkeit

s : Steigung

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: (nichtnegative) Konstanten



Ermittle Kantengewichte mit Hilfe von Messungen aus Realwelt-Tests, Fahrzeugsimulation, ...

Rekuperation:

- Verbrauch kann auch negativ werden
 - F_A ist negativ beim Bergabfahren
 - F_B ist negativ beim Bremsen
- Elektromotor fungiert als Generator
- Bei negativem Verbrauch wird Akku aufgeladen (Rekuperation)

Aber: keine negativen Zyklen (physikalische Gesetze)

Akkukapazität (Battery Constraints):

- Akku darf nicht leer laufen
(Andernfalls Kante nicht benutzbar)
 - Kapazität kann nicht überschritten werden
(Kanten können genutzt werden, aber überschüssige Energie verfällt)
- ⇒ Ladestand (state of charge, SoC) während Query berücksichtigen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

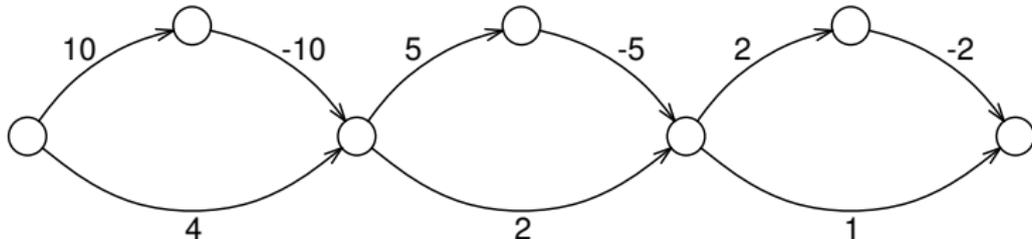
Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

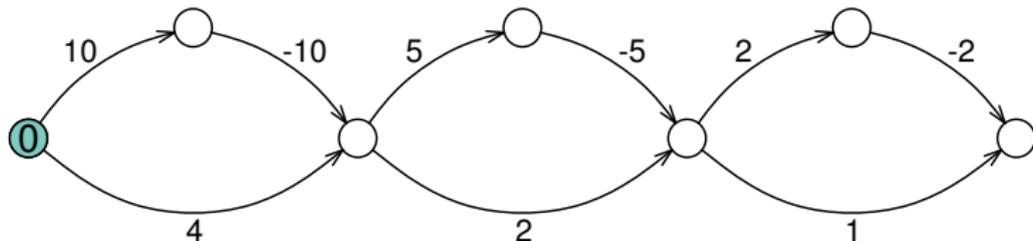
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

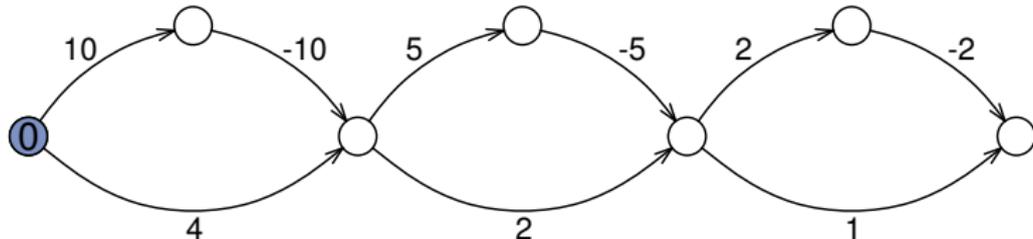
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

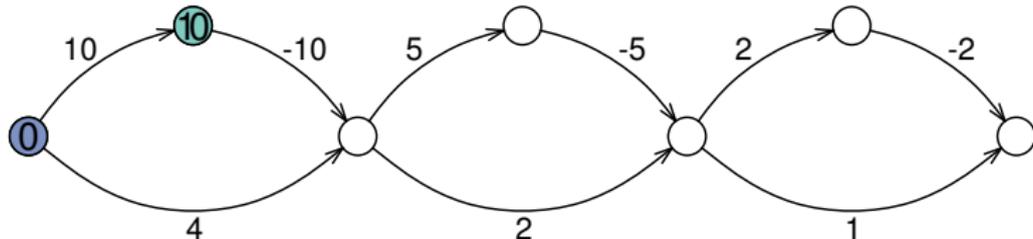
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

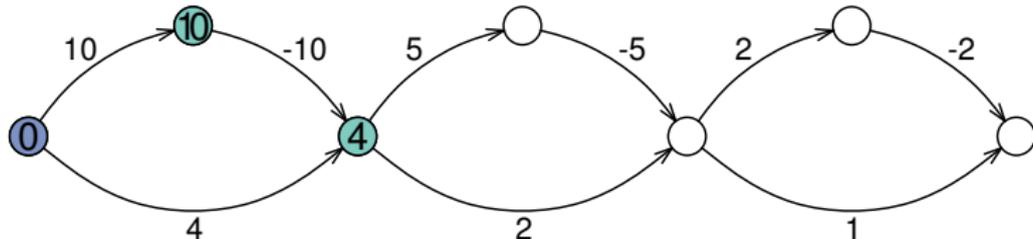
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

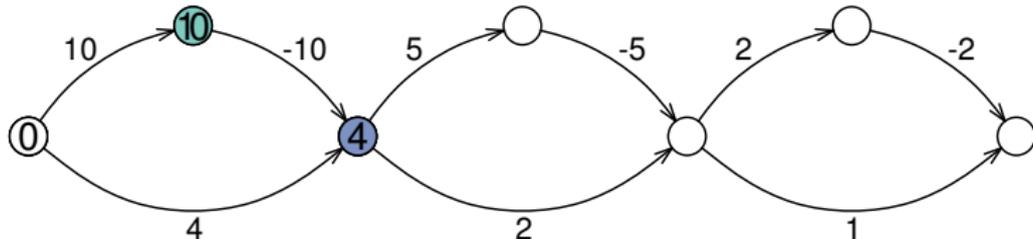
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

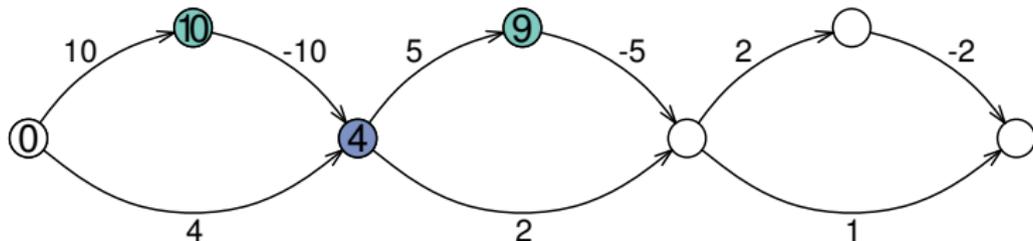
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

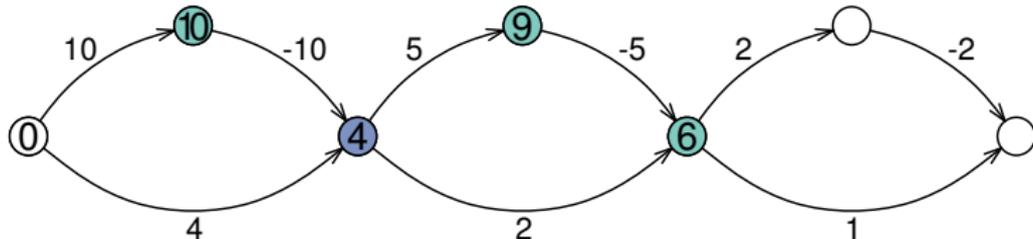
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

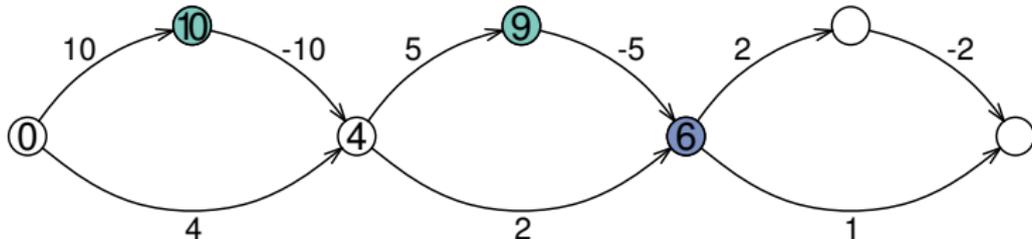
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

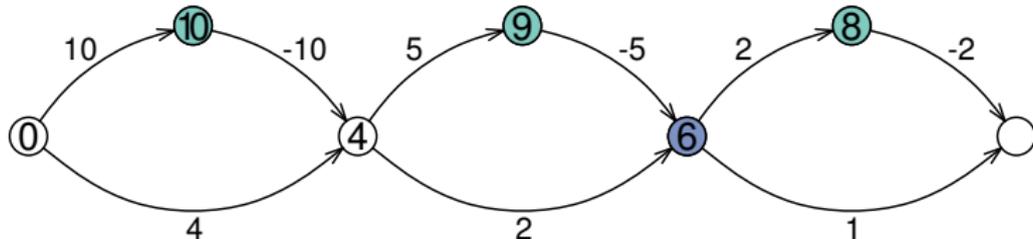
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

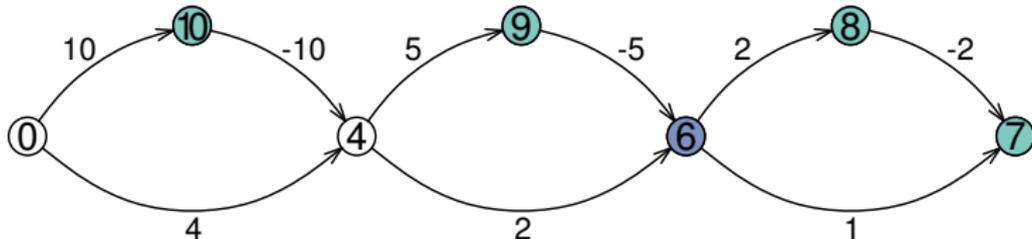
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

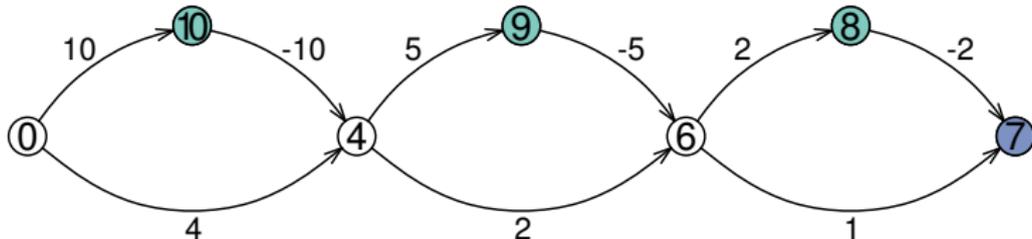
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

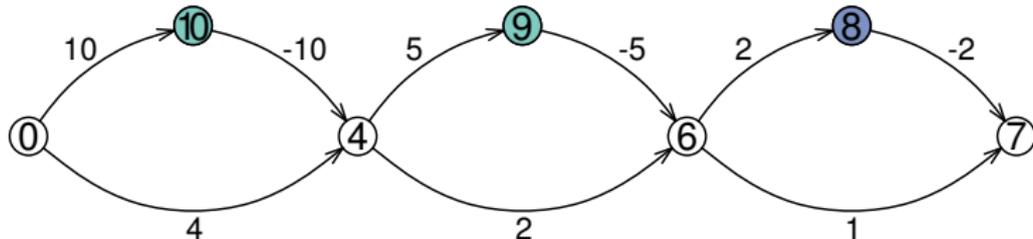
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

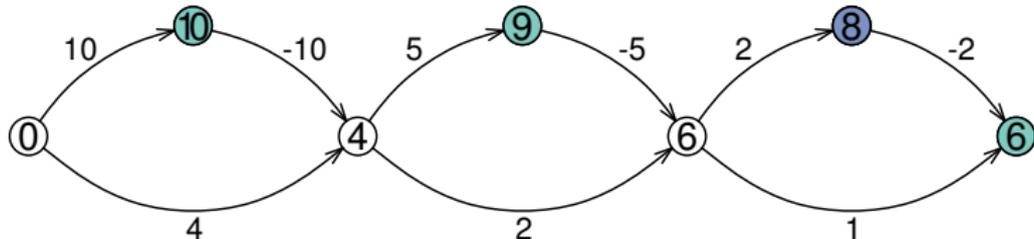
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

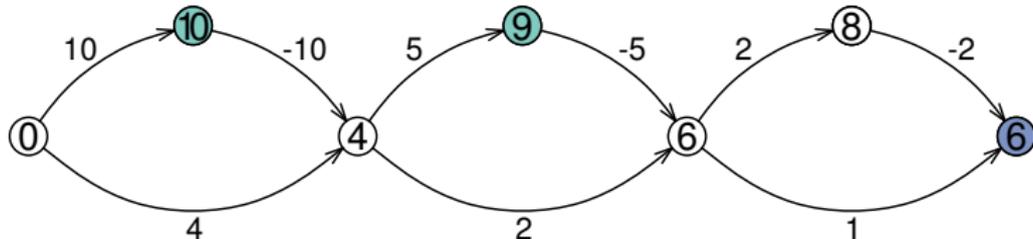
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

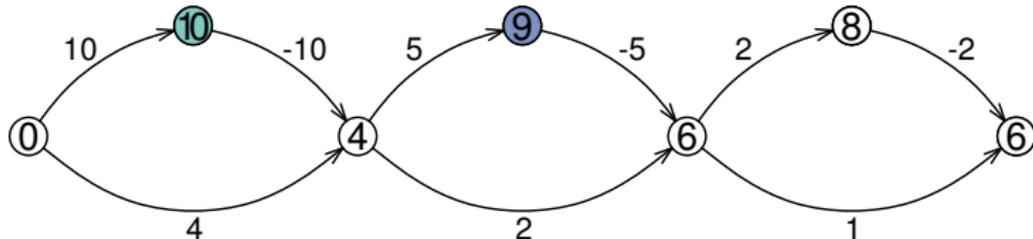
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

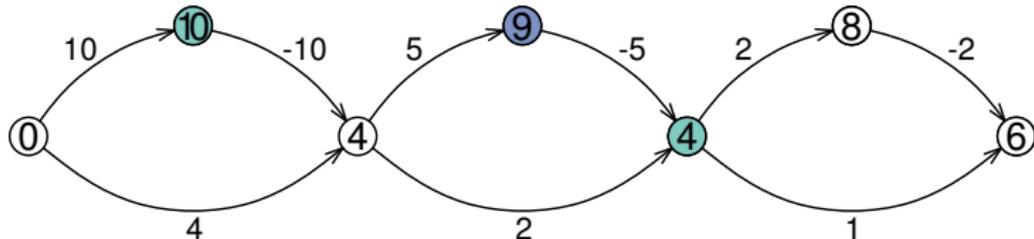
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

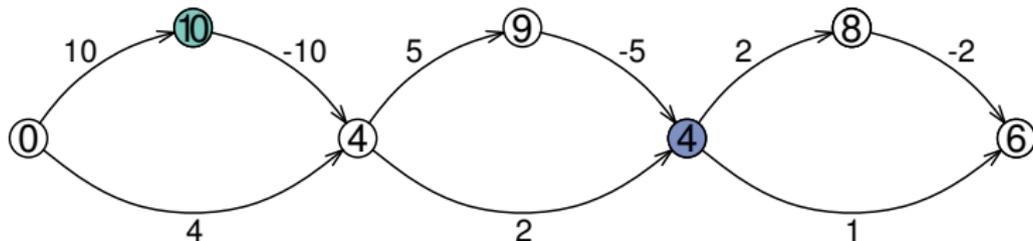
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

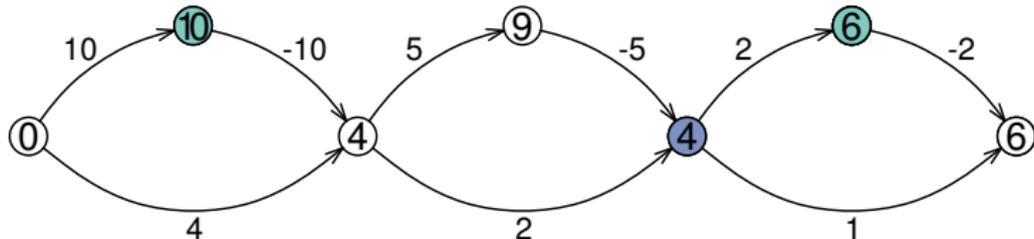
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

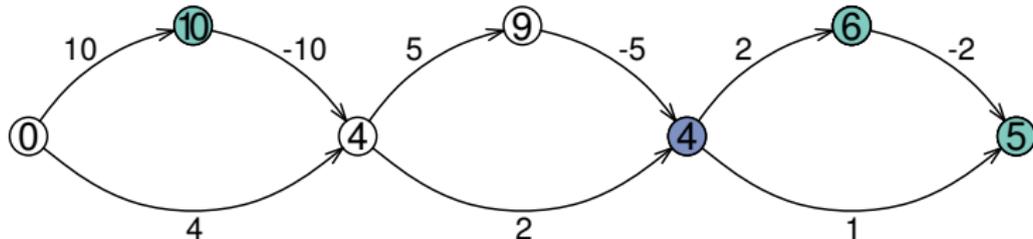
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

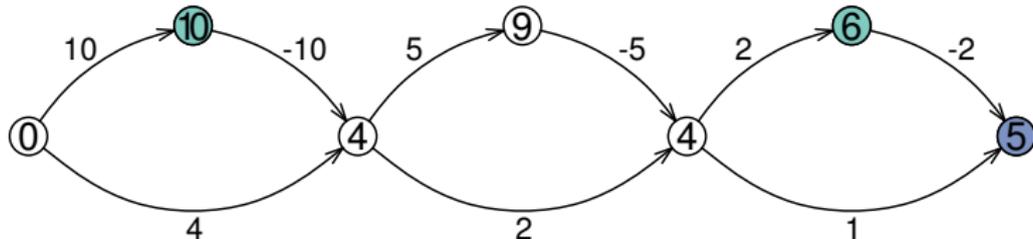
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

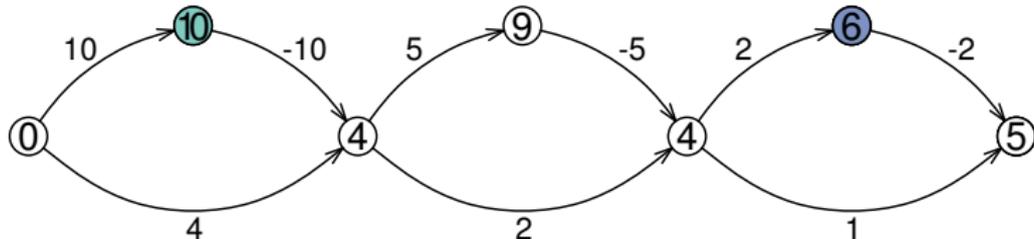
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

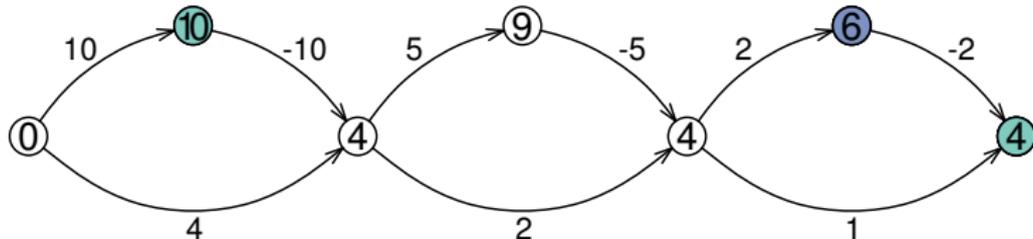
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

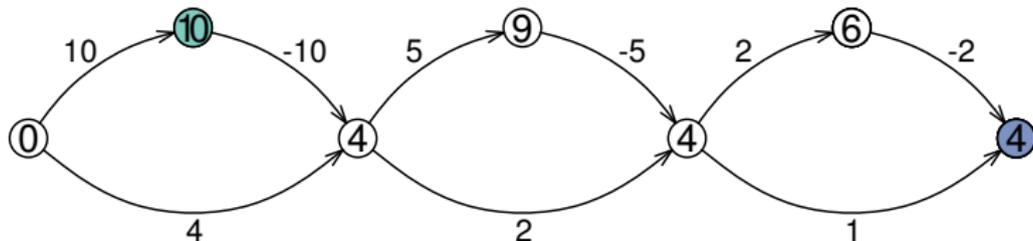
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

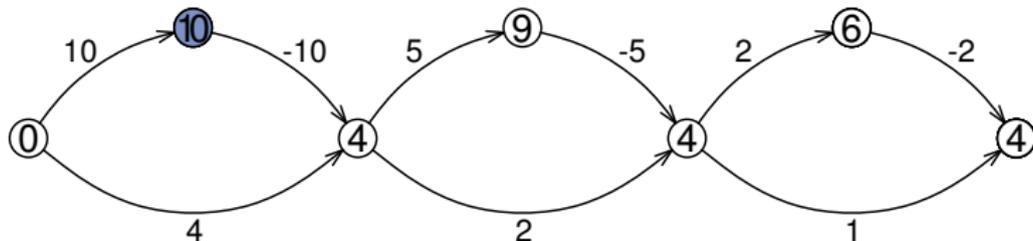
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

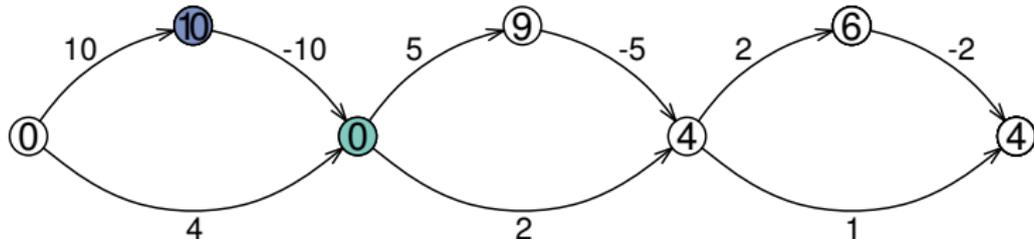
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

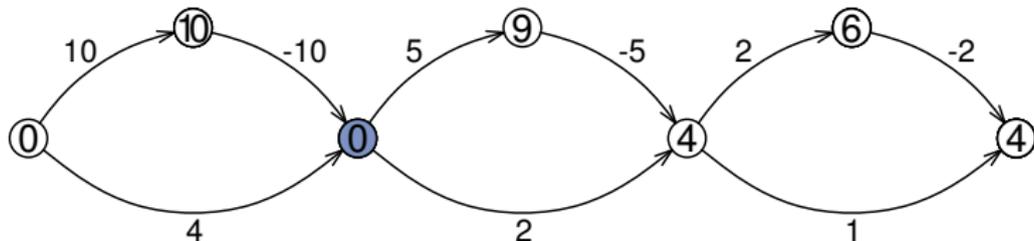
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

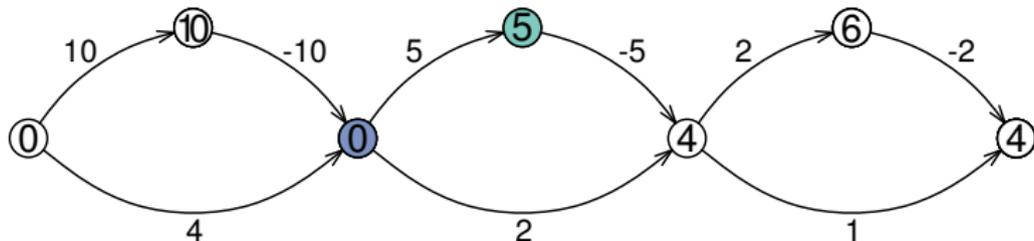
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

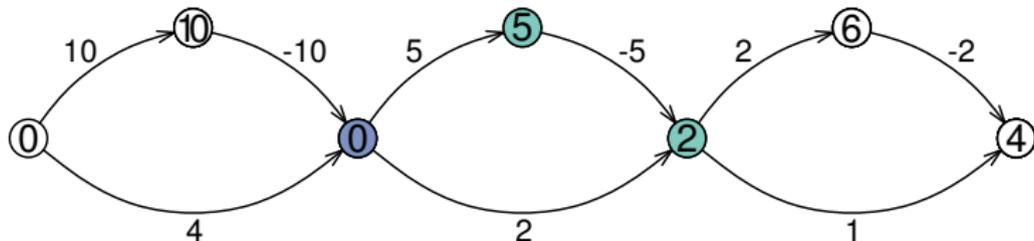
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

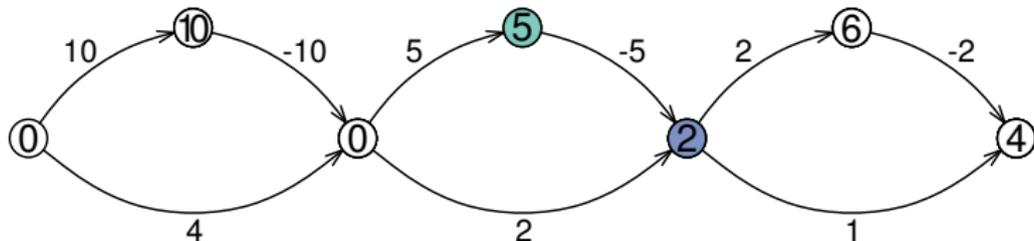
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

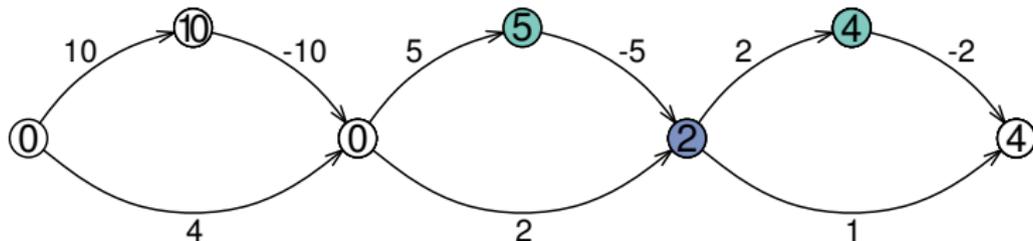
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

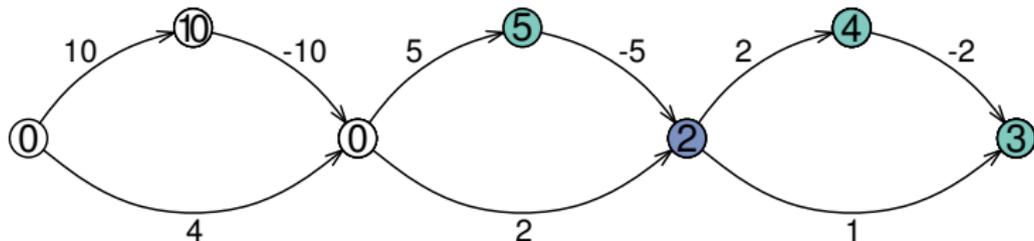
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

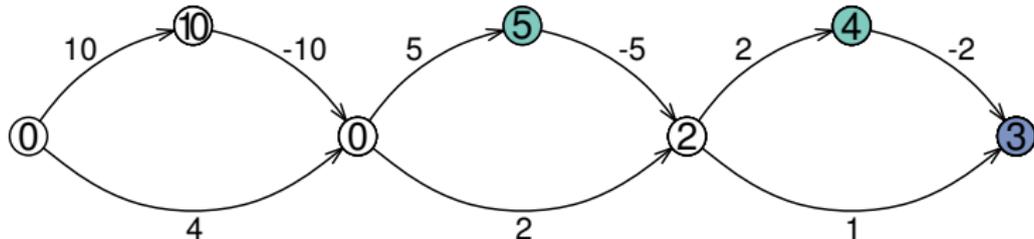
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

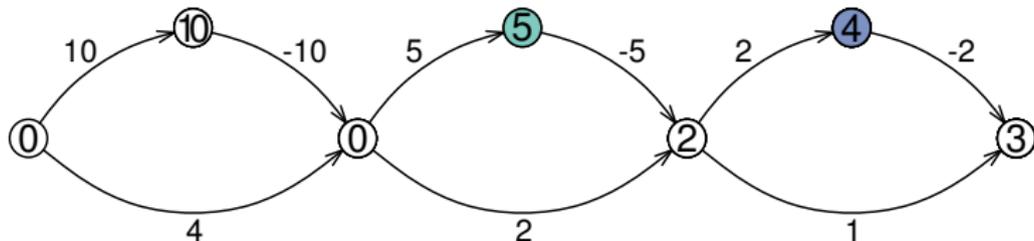
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

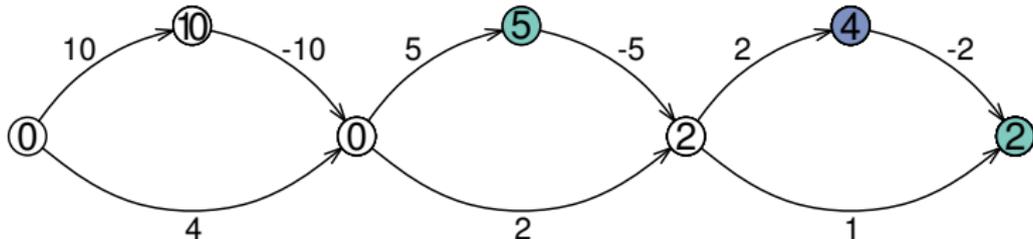
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

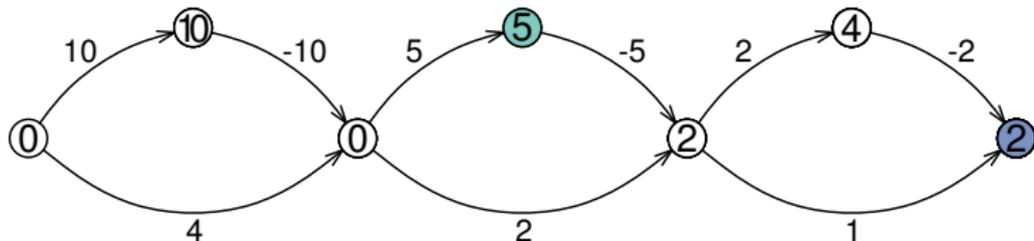
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

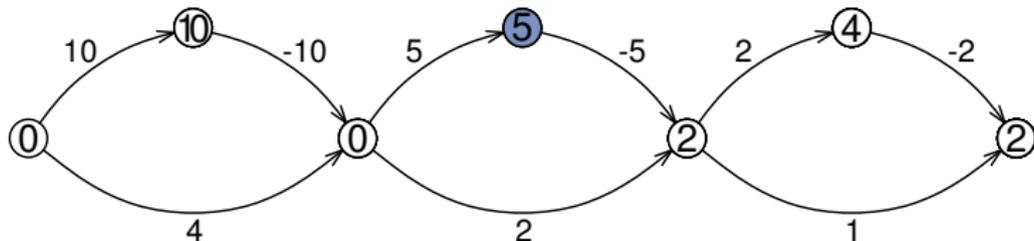
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

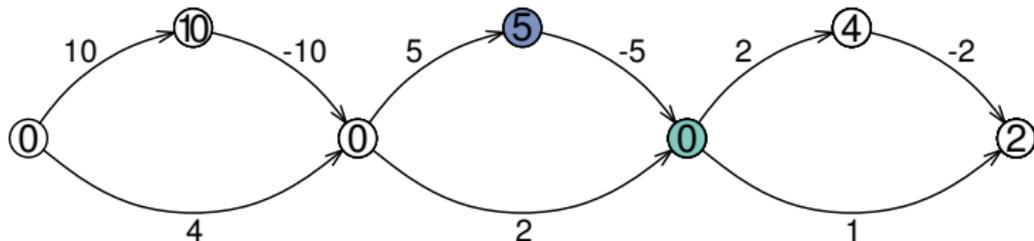
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

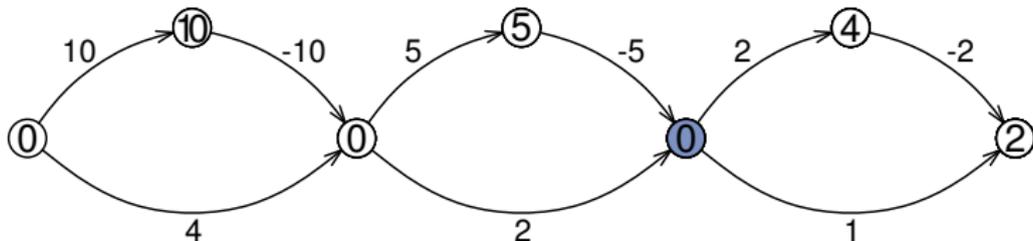
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

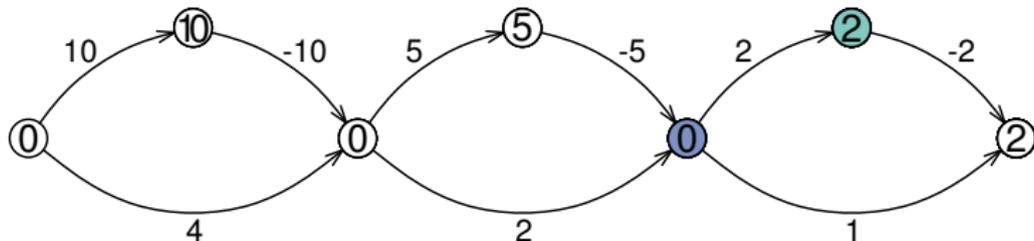
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

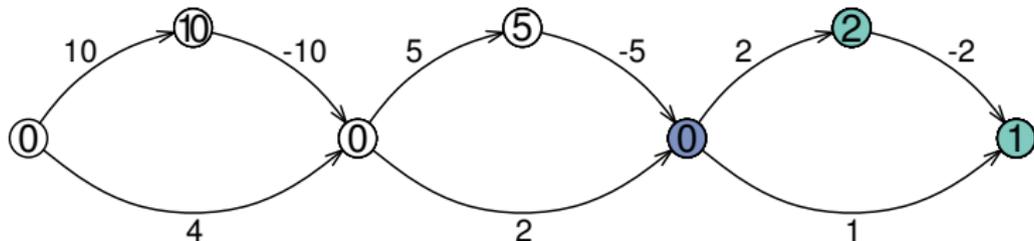
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

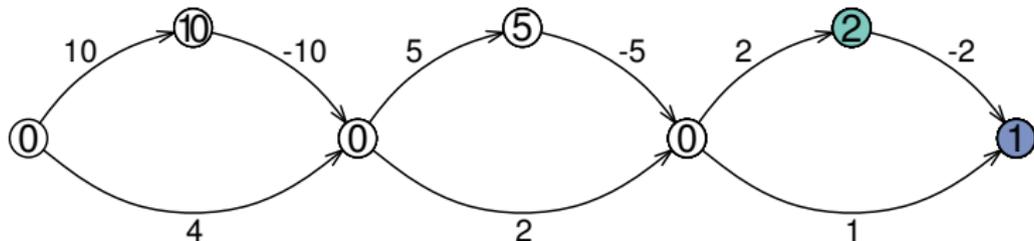
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

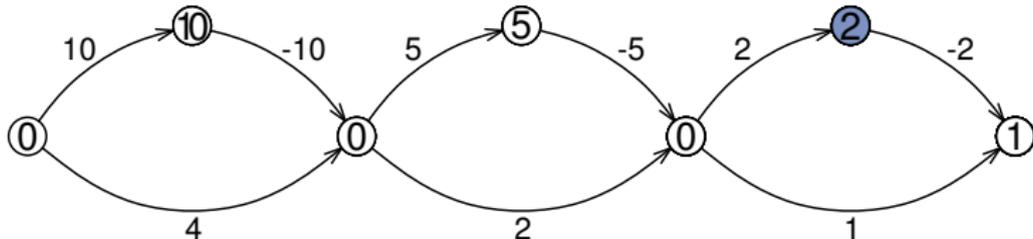
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

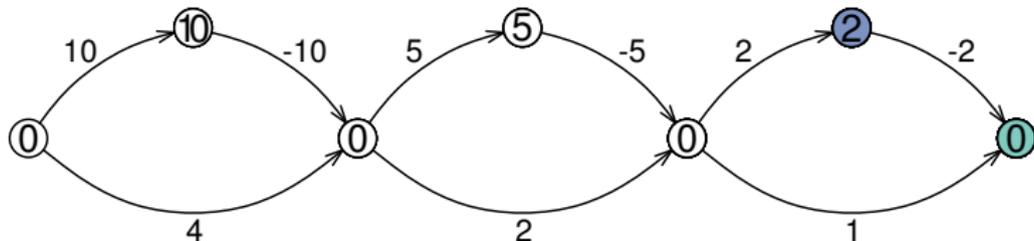
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

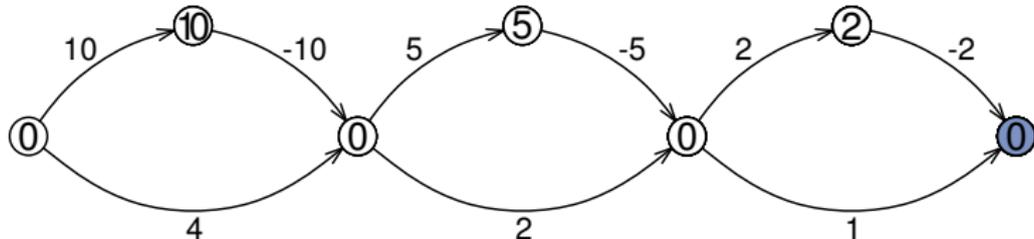
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

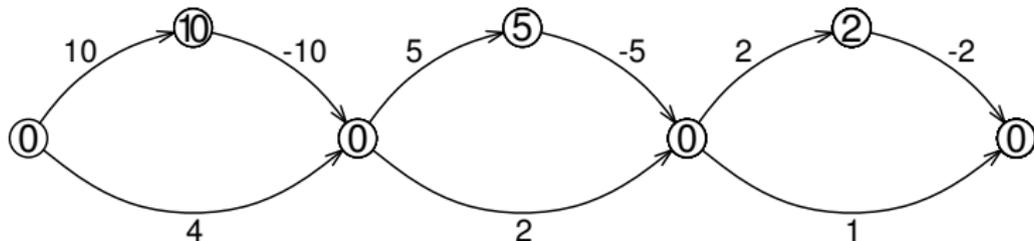
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

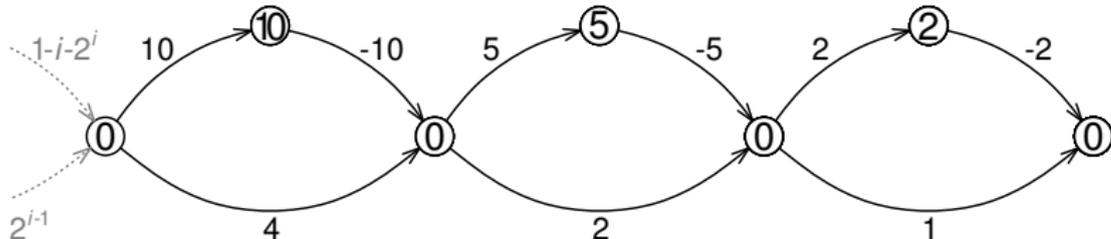
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

Bellman-Ford:

- Funktioniert auch mit negativen Kantengewichten

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t ,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

Bellman-Ford:

- Funktioniert auch mit negativen Kantengewichten

Auf Realwelt-Instanzen (wenige Kanten mit negativem Gewicht) ist Dijkstras Algorithmus schneller

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr
- Nicht mehr label-setting

⇒ Stoppkriterium nicht mehr korrekt

Frage: Stoppkriterium wiederherstellbar?

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr
- Nicht mehr label-setting

⇒ Stoppkriterium nicht mehr korrekt

Frage: Stoppkriterium wiederherstellbar?

- Wenn t abgearbeitet wird, könnten sich noch Knoten in der Queue befinden, die Label $d[t]$ durch Anhängen eines negativen Subpfades verbessern
- Ziel: Berechne Schranke $P_{\min} \leq 0$ für Länge dieses Subpfades
- Dann Abbruch, sobald $\text{minKey}(Q) + P_{\min} \geq d[t]$

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ (ohne negative Zyklen)

Gesucht: (Global) kürzester Pfad in G

1. Ansatz:

- Füge (virtuelle) Knoten s' , t' zu G hinzu
- Mit Kanten (s', u) , (u, t') für alle $u \in V$ (mit Energieverbrauch 0)
- Berechne kürzesten s' - t' -Weg (mit Label-Correcting Dijkstra)

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ (ohne negative Zyklen)

Gesucht: (Global) kürzester Pfad in G

2. **Ansatz** (simuliert 1. Ansatz, ist in der Praxis schneller):

- Initialisiere Distanzlabel $\underline{d}[v] = 0$ für alle $v \in V$
- Für jeden Knoten $v \in V$:
 - Starte (Label-Correcting) Suche von v
 - Distanzlabel $\underline{d}[\cdot]$ wird zwischen den Suchen *nicht* reinitialisiert
- Berechne währenddessen: $P_{\min} := \min_{v \in V} \underline{d}[v]$

Berechnung von P_{\min}

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ (ohne negative Zyklen)
Gesucht: (Global) kürzester Pfad in G

2. **Ansatz** (simuliert 1. Ansatz, ist in der Praxis schneller):

- Initialisiere Distanzlabel $\underline{d}[v] = 0$ für alle $v \in V$
- Für jeden Knoten $v \in V$:
 - Starte (Label-Correcting) Suche von v
 - Distanzlabel $\underline{d}[\cdot]$ wird zwischen den Suchen *nicht* reinitialisiert
- Berechne währenddessen: $P_{\min} := \min_{v \in V} \underline{d}[v]$

Danach Stoppkriterium wieder anwendbar

Berechnung von P_{\min}

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ (ohne negative Zyklen)
Gesucht: (Global) kürzester Pfad in G

2. **Ansatz** (simuliert 1. Ansatz, ist in der Praxis schneller):

- Initialisiere Distanzlabel $\underline{d}[v] = 0$ für alle $v \in V$
- Für jeden Knoten $v \in V$:
 - Starte (Label-Correcting) Suche von v
 - Distanzlabel $\underline{d}[\cdot]$ wird zwischen den Suchen *nicht* reinitialisiert
- Berechne währenddessen: $P_{\min} := \min_{v \in V} \underline{d}[v]$

Danach Stoppkriterium wieder anwendbar

Beobachtung: Nach Berechnung von P_{\min} gilt: $\underline{d}[t] \leq \text{dist}(v, t)$, $\forall v \in V$
 \Rightarrow Stoppkriterium lässt sich verbessern zu: $\text{minKey}(Q) + \underline{d}[t] \geq d[t]$

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Stoppkriterium lässt sich wiederherstellen
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr
- Nicht mehr label-setting

Frage: Label-Setting-Eigenschaft wiederherstellbar?

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Stoppkriterium lässt sich wiederherstellen
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr
- Nicht mehr label-setting

Frage: Label-Setting-Eigenschaft wiederherstellbar?

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$, sodass
 $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$, sodass
 $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Dann Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

1. Distanzbasiertes Potential:

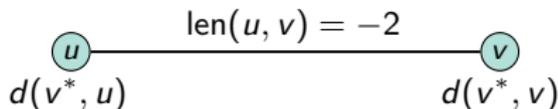
- Setze $\pi(v) := -d(v^*, v)$, für beliebigen Knoten v^*
- Berechnung mittels (Label-Correcting) Query von v^*
- Zulässigkeit folgt aus Dreiecksungleichung

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$, sodass
 $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Dann Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

1. Distanzbasiertes Potential:

- Setze $\pi(v) := -d(v^*, v)$, für beliebigen Knoten v^*
- Berechnung mittels (Label-Correcting) Query von v^*
- Zulässigkeit folgt aus Dreiecksungleichung



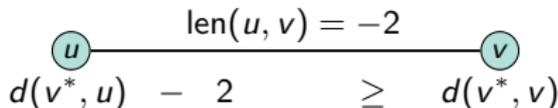
$$\text{len}'(u, v) := -2 + d(v^*, u) - d(v^*, v)$$

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$, sodass
 $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Dann Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

1. Distanzbasiertes Potential:

- Setze $\pi(v) := -d(v^*, v)$, für beliebigen Knoten v^*
- Berechnung mittels (Label-Correcting) Query von v^*
- Zulässigkeit folgt aus Dreiecksungleichung


$$\begin{array}{ccc} & \text{len}(u, v) = -2 & \\ & \text{-----} & \\ (u) & & (v) \\ d(v^*, u) - 2 & \geq & d(v^*, v) \end{array}$$

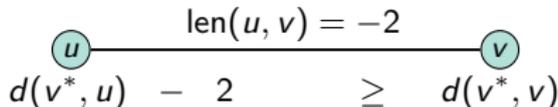
$$\text{len}'(u, v) := -2 + d(v^*, u) - d(v^*, v)$$

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$, sodass
 $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Dann Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

1. Distanzbasiertes Potential:

- Setze $\pi(v) := -d(v^*, v)$, für beliebigen Knoten v^*
- Berechnung mittels (Label-Correcting) Query von v^*
- Zulässigkeit folgt aus Dreiecksungleichung


$$d(v^*, u) - 2 \geq d(v^*, v)$$

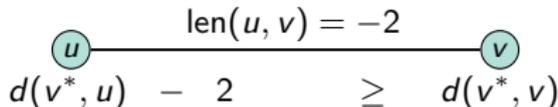
$$\begin{aligned} \text{len}'(u, v) &:= -2 + d(v^*, u) - d(v^*, v) \\ &\geq -2 + d(v^*, v) + 2 - d(v^*, v) \end{aligned}$$

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$, sodass
 $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Dann Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

1. Distanzbasiertes Potential:

- Setze $\pi(v) := -d(v^*, v)$, für beliebigen Knoten v^*
- Berechnung mittels (Label-Correcting) Query von v^*
- Zulässigkeit folgt aus Dreiecksungleichung


$$d(v^*, u) - 2 \geq d(v^*, v)$$

$$\begin{aligned} \text{len}'(u, v) &:= -2 + d(v^*, u) - d(v^*, v) \\ &\geq \cancel{-2} + \cancel{d(v^*, v)} + \cancel{2} - \cancel{d(v^*, v)} = 0 \end{aligned}$$

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$, sodass
 $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Dann Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

2. P_{\min} -basiertes Potential:

- Setze $\pi(v) = -\underline{d}[v]$ für alle v
- Berechnung wie vorher beschrieben
- Zulässigkeit folgt wieder aus Dreiecksungleichung:

$$\underline{d}[u] + \text{len}(u, v) \geq \underline{d}[v]$$

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}$, sodass
 $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Dann Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

3. Höheninduziertes Potential:

- Annahme: Höhenkoordinate $h(v)$ für jeden Knoten gegeben
- $\pi(v) := \alpha \cdot h(v)$ für alle v
- Wähle α so, dass $\alpha(h(u) - h(v)) \leq \text{len}(u, v)$ für alle $(u, v) \in E$
- Keine Garantie, dass das erfüllbar ist
(klappt für realistische Kantengewichte)
- α kann mit Sweep über alle Kanten berechnet werden

Bisher:

- Route minimiert Energieverbrauch für unbegrenzt großen Akku
- Tatsächlicher Verbrauch hängt von Kapazität ab
- Route ist für konkreten Ladestand an s ggf. nicht realisierbar

Jetzt:

- Berechne Route abhängig vom initialen Ladestand (SoC)
- Maximiere resultierenden SoC an t
- Berücksichtige Battery Constraints

Fahrzeug hat aktuellen SoC b und Akku-Kapazität M

⇒ Befahren von Kante e mit Gewicht $\text{len}(e)$ ergibt SoC $b - \text{len}(e)$

Ausnahmen:

- Falls $b - \text{len}(e) < 0 \Rightarrow$ Kante nicht befahrbar
- Falls $b - \text{len}(e) > M \Rightarrow$ SoC ist M

⇒ Explizites Überprüfen in Dijkstras Algorithmus

Anfragetypen:

SoC-Query: Gegeben Start s , Ziel t und initialen Ladestand b_s ,
finde zulässigen s - t -Pfad mit maximalem SoC an t

Berechnung mit angepasstem Dijkstra

Anfragetypen:

SoC-Query: Gegeben Start s , Ziel t und initialen Ladestand b_s , finde zulässigen s - t -Pfad mit maximalem SoC an t

Berechnung mit angepasstem Dijkstra

Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t , finde zulässige s - t -Pfade mit maximalem SoC an t für *alle* $b_s \in [0, M]$

Berechnung mit Hilfe von:

- SoC-Funktionen
- Geeigneten Link/Merge-Operationen

SoC-Profile

Battery Constraints

Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls $\text{SoC} < \text{Kantengewicht}$
- SoC kann das Maximum M nicht überschreiten

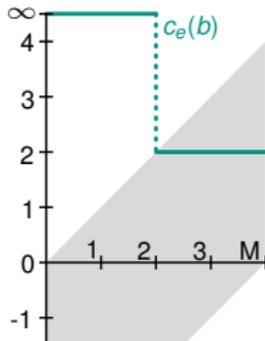
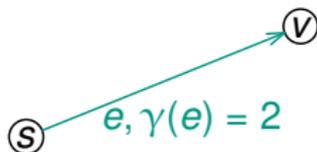
Battery Constraints

Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls $\text{SoC} < \text{Kantengewicht}$
- SoC kann das Maximum M nicht überschreiten

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als **Verbrauchsfunktion**
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab



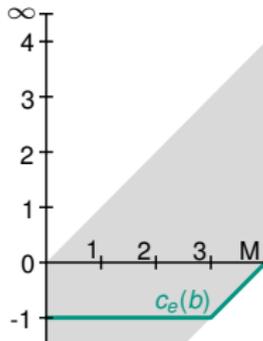
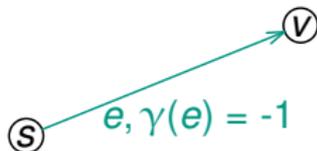
Battery Constraints

Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls $\text{SoC} < \text{Kantengewicht}$
- SoC kann das Maximum M nicht überschreiten

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als **Verbrauchsfunktion**
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab



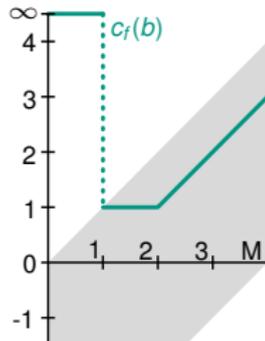
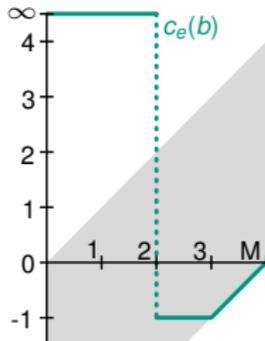
Battery Constraints

Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls $\text{SoC} < \text{Kantengewicht}$
- SoC kann das Maximum M nicht überschreiten

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als **Verbrauchsfunktion**
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab



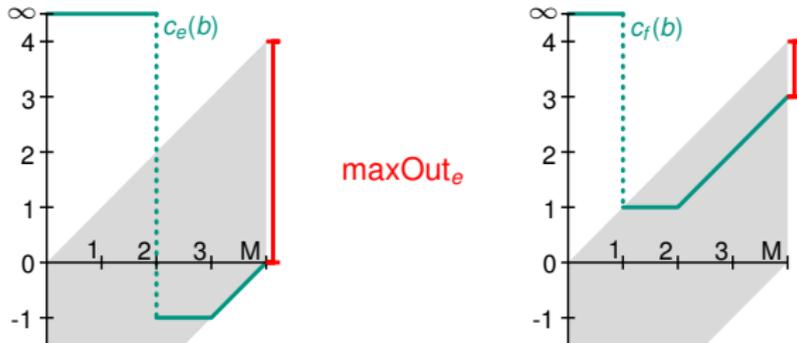
Battery Constraints

Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls $\text{SoC} < \text{Kantengewicht}$
- SoC kann das Maximum M nicht überschreiten

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als **Verbrauchsfunktion**
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab



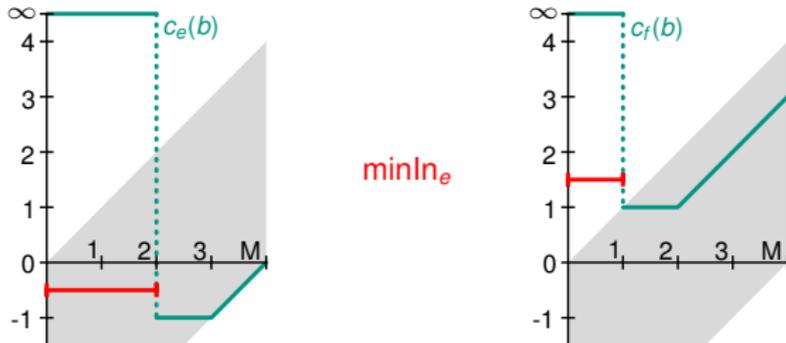
Battery Constraints

Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls SoC < Kantengewicht
- SoC kann das Maximum M nicht überschreiten

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als **Verbrauchsfunktion**
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab



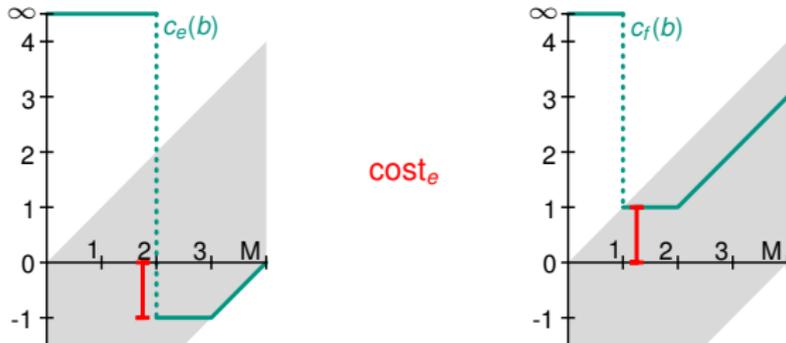
Battery Constraints

Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls $\text{SoC} < \text{Kantengewicht}$
- SoC kann das Maximum M nicht überschreiten

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als **Verbrauchsfunktion**
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab



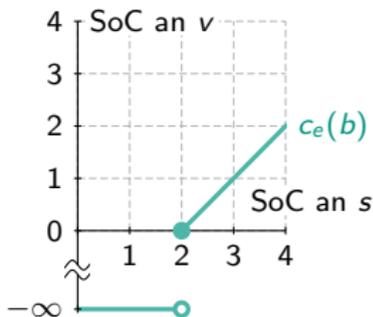
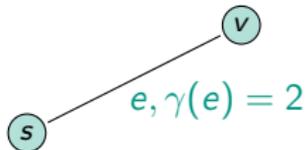
Battery Constraints

Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls $\text{SoC} < \text{Kantengewicht}$
- SoC kann das Maximum M nicht überschreiten

Alternative 2:

- Modelliere Gewicht einer Kante als **SoC-Funktion**
- SoC-Funktion bildet SoC vor der Kante auf SoC nach der Kante ab



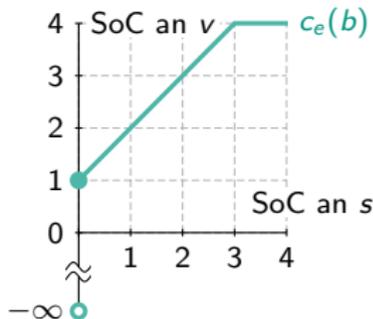
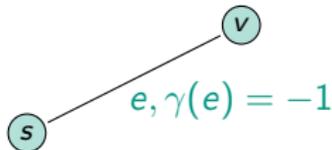
Battery Constraints

Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls $\text{SoC} < \text{Kantengewicht}$
- SoC kann das Maximum M nicht überschreiten

Alternative 2:

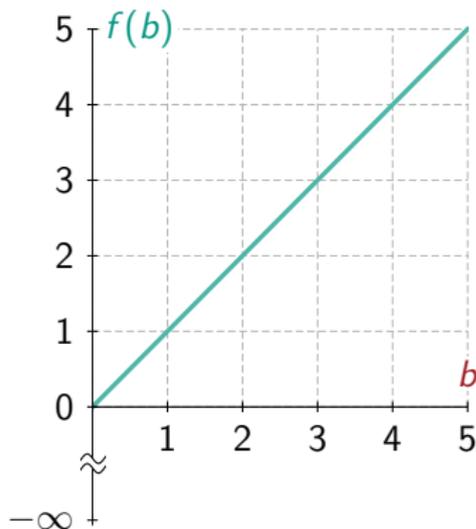
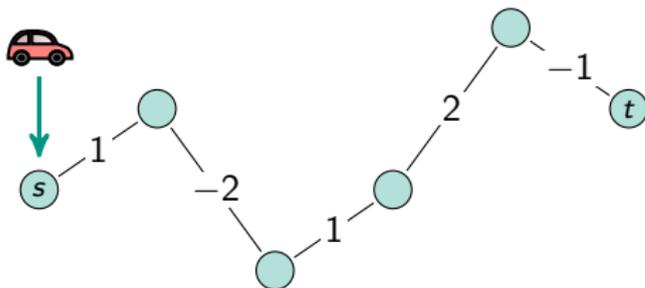
- Modelliere Gewicht einer Kante als **SoC-Funktion**
- SoC-Funktion bildet SoC vor der Kante auf SoC nach der Kante ab



Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

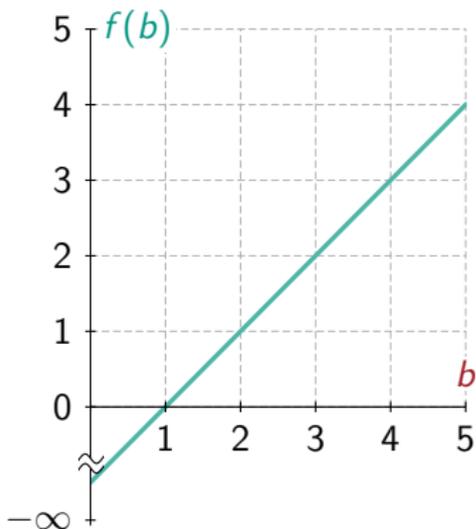
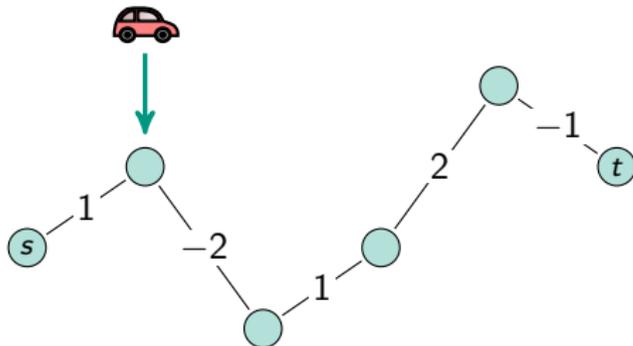
Beispiel: $M = 5$



Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

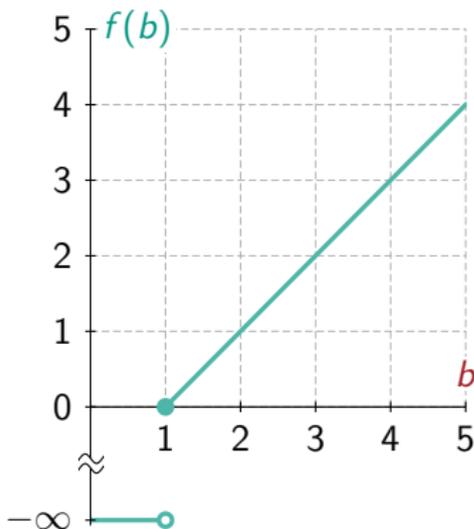
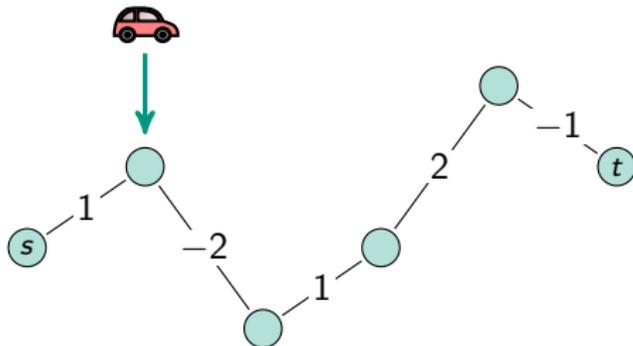
Beispiel: $M = 5$



Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

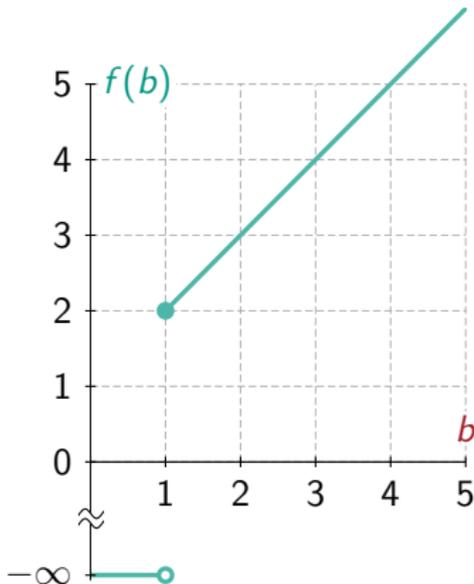
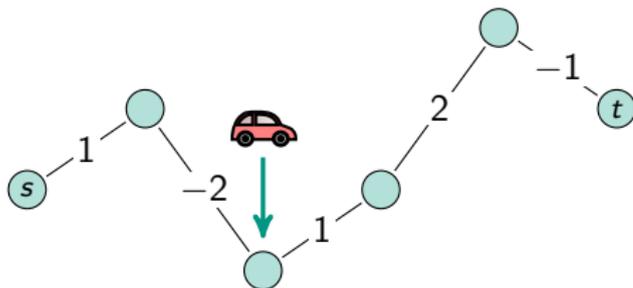
Beispiel: $M = 5$



Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

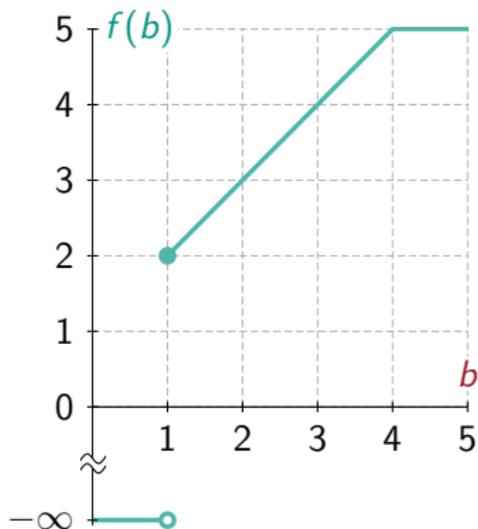
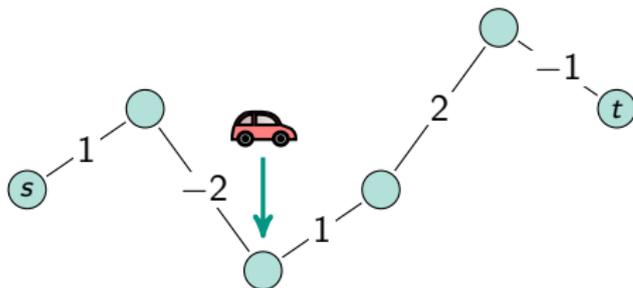
Beispiel: $M = 5$



Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

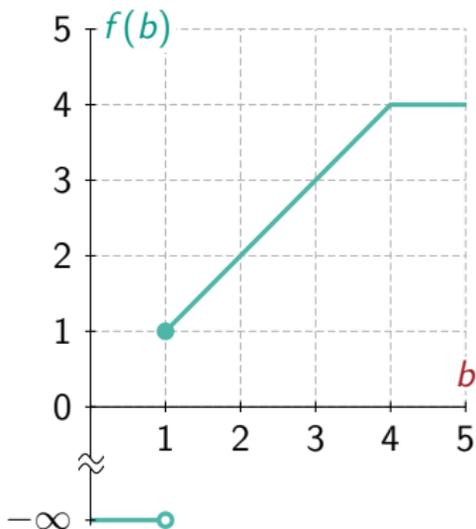
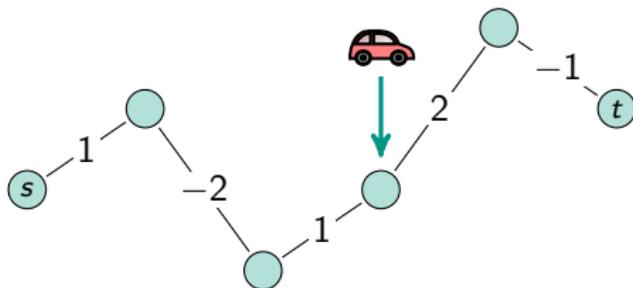
Beispiel: $M = 5$



Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

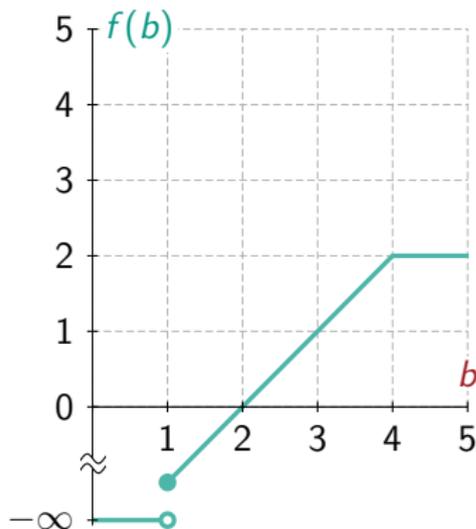
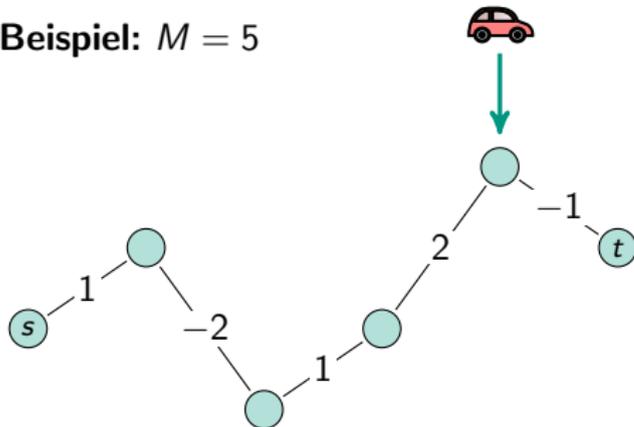
Beispiel: $M = 5$



Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

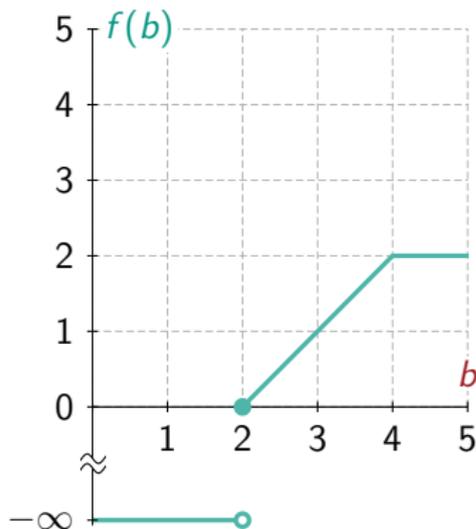
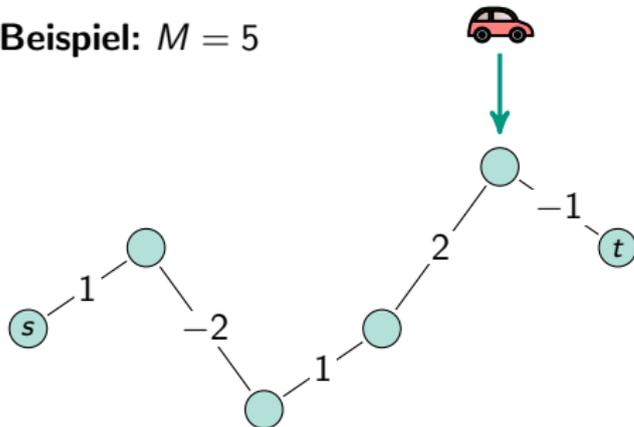
Beispiel: $M = 5$



Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

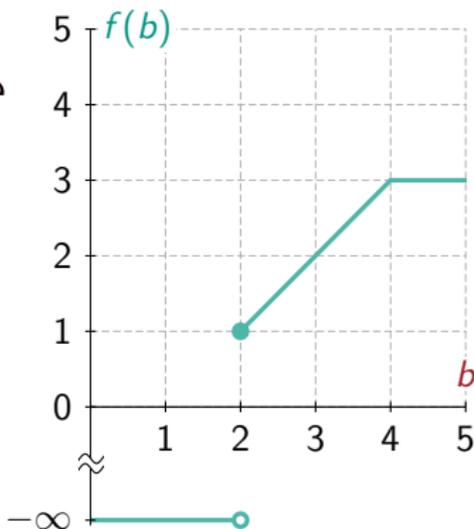
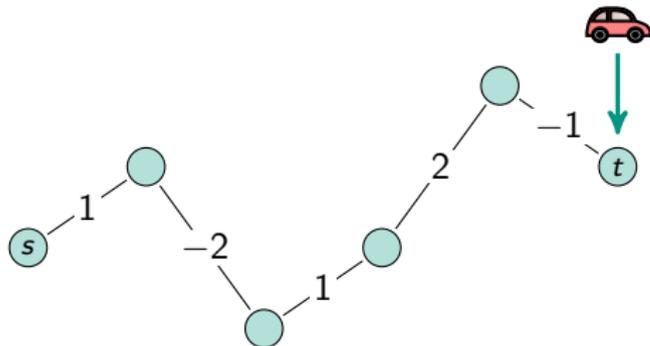
Beispiel: $M = 5$



Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

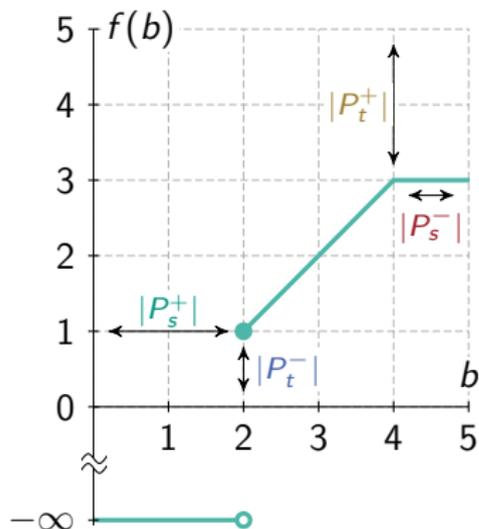
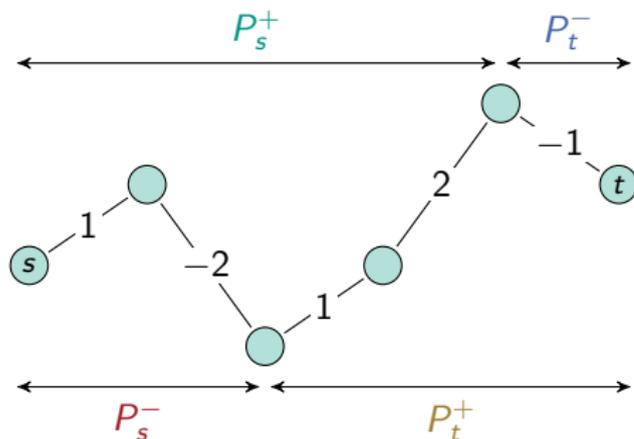
Beispiel: $M = 5$



SoC-Profil eines Pfads

SoC-Profil von P bestimmt durch **min./max. Präfix/Suffix**

Beispiel:



⇒ Komplexität des SoC-Profiles ist **konstant**

SoC-Profil entlang eines Pfads P hängt nur von 4 Subpfaden ab:

- **max. Präfix** P_s^+ von P :
 P befahrbar gdw. $b \geq |P_s^+|$ (Anm.: es gilt $|P_s^+| \geq 0$)
- **min. Präfix** P_s^- von P :
Akku mindestens an einem Knoten auf P voll geladen gdw.
 $b - |P_s^-| \geq M$ (Anm.: es gilt $|P_s^-| \leq 0$)
- **max. Suffix** P_t^+ von P :
Bestimmt, wie viel SoC nach Befahren **höchstens** übrig bleibt
(Anm.: es gilt $|P_t^+| \geq 0$)
- **min. Suffix** P_t^- von P :
Bestimmt, wie viel SoC nach Befahren **mindestens** übrig bleibt
(Anm.: es gilt $|P_t^-| \leq 0$)

SoC-Profil \leftrightarrow Verbrauchsfunktion

SoC-Profil entlang eines Pfads P kann mit 3 Werten beschrieben werden:

SoC-Profil \rightarrow Verbrauchsfunktion:

- $\text{minIn}_P = |P_s^+|$
- $\text{maxOut}_P = M - |P_t^+|$
- $\text{cost}_P = |P_s^+| - |P_t^-| = |P_t^+| - |P_s^-|$

SoC-Profil \leftrightarrow Verbrauchsfunktion

SoC-Profil entlang eines Pfads P kann mit 3 Werten beschrieben werden:

SoC-Profil \rightarrow Verbrauchsfunktion:

- $\min \ln_P = |P_s^+|$
- $\max \text{Out}_P = M - |P_t^+|$
- $\text{cost}_P = |P_s^+| - |P_t^-| = |P_t^+| - |P_s^-|$

Verbrauchsfunktion \rightarrow SoC-Profil:

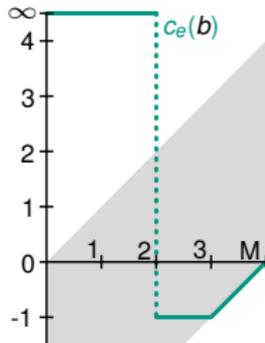
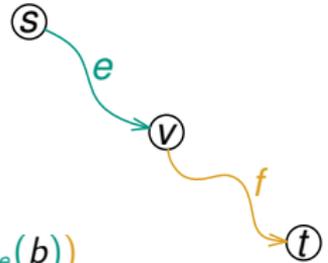
- $|P_s^+| = \min \ln_P$
- $|P_s^-| = M - \max \text{Out}_P - \text{cost}_P$
- $|P_t^+| = M - \max \text{Out}_P$
- $|P_t^-| = \min \ln_P - \text{cost}_P$

Verbrauchsfunktionen – Linking

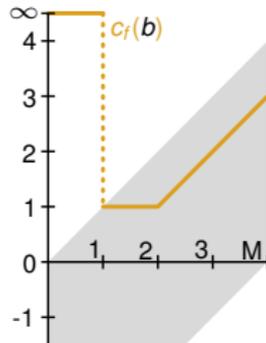
Gesucht: Verbrauch beim Traversieren von e und f

- Verbrauch auf e gegeben durch $c_e(b)$
- SoC nach $e = \text{SoC vor } f = b - c_e(b)$

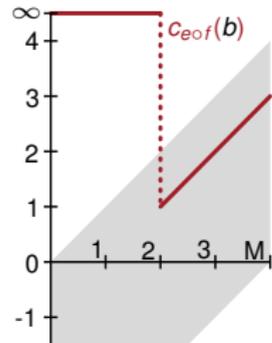
⇒ Verbrauch auf e UND f : $c_{e \circ f}(b) = c_e(b) + c_f(b - c_e(b))$



\circ



$=$



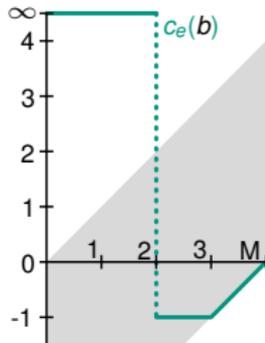
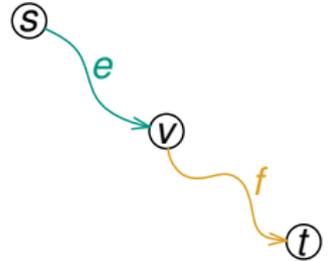
Verbrauchsfunktionen – Linking

Formal: $c_{eof}(b)$ ist gegeben durch:

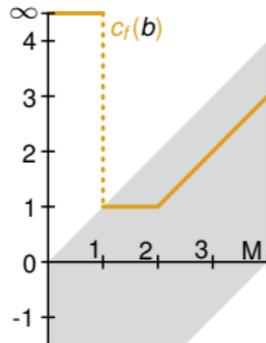
$$\min \text{In}_{eof} = \max[\min \text{In}_e, \min \text{In}_f + \text{cost}_e]$$

$$\max \text{Out}_{eof} = \min[\max \text{Out}_f, \max \text{Out}_e - \text{cost}_f]$$

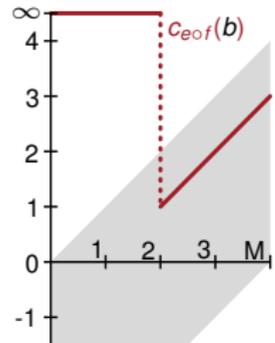
$$\text{cost}_{eof} = \max[\text{cost}_e + \text{cost}_f, \min \text{In}_e - \max \text{Out}_f]$$



o



=

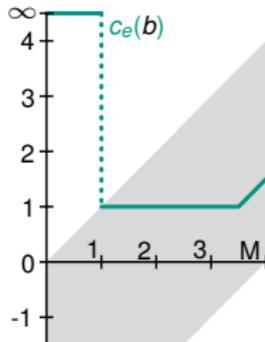
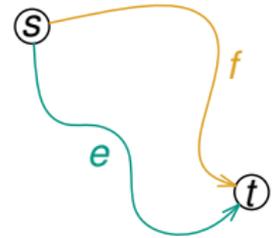


Verbrauchsfunktionen – Merging

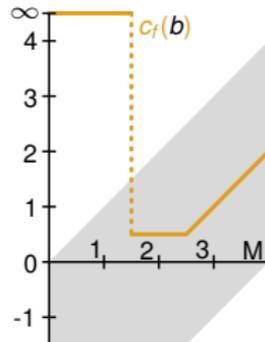
Gesucht: Verbrauch beim Traversieren von e oder f

- Benutze Pfad mit geringerem Verbrauch

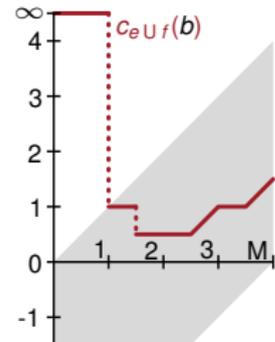
⇒ Verbrauch auf e ODER f : $c_{e \cup f}(b) = \min(c_f(b), c_e(b))$



U



=

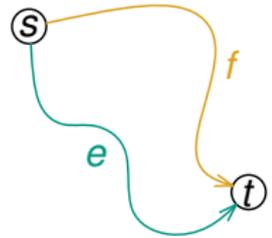


Verbrauchsfunktionen – Merging

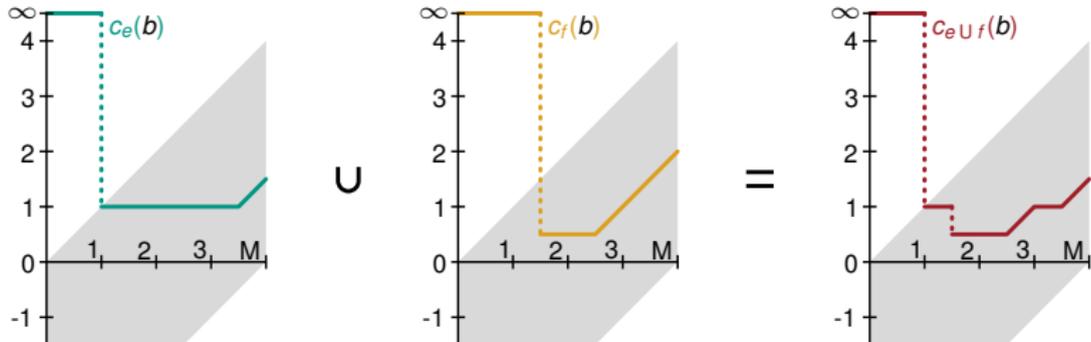
Gesucht: Verbrauch beim Traversieren von e oder f

- Benutze Pfad mit geringerem Verbrauch

⇒ Verbrauch auf e ODER f : $c_{e \cup f}(b) = \min(c_f(b), c_e(b))$



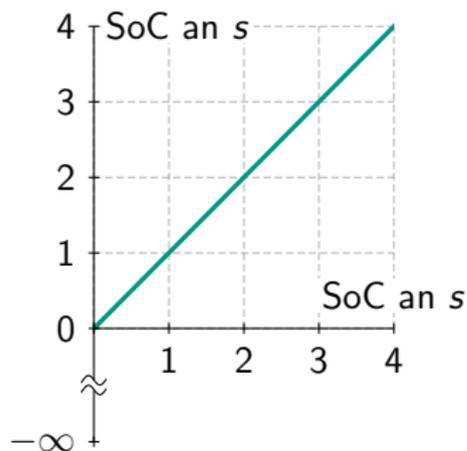
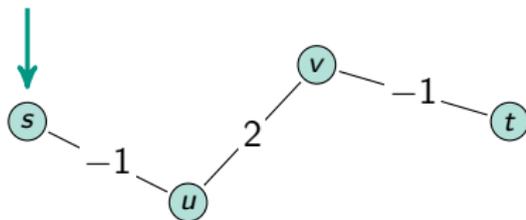
Im Allgemeinen $\mathcal{O}(m)$ Stützstellen



Allgemeine Profile

Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t , finde zulässige s - t -Pfade mit maximalem SoC an t für *alle* $b_s \in [0, M]$

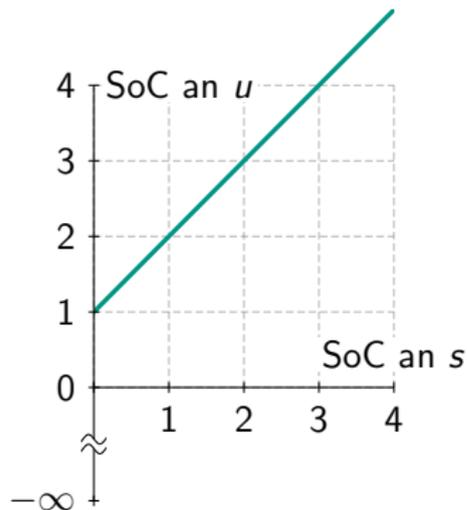
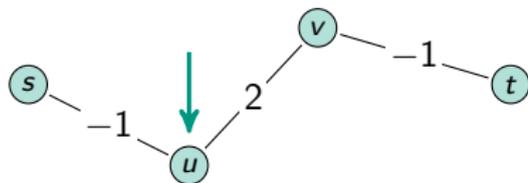
Beispiel: $M = 4$



Allgemeine Profile

Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t , finde zulässige s - t -Pfade mit maximalem SoC an t für *alle* $b_s \in [0, M]$

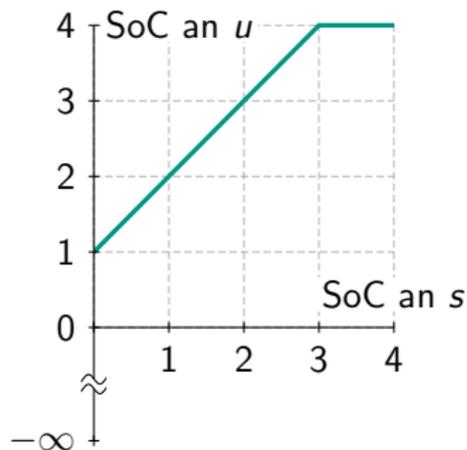
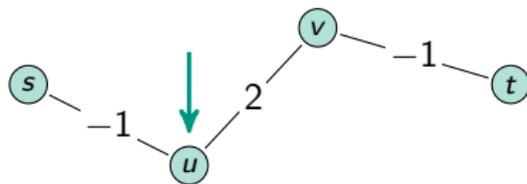
Beispiel: $M = 4$



Allgemeine Profile

Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t , finde zulässige s - t -Pfade mit maximalem SoC an t für *alle* $b_s \in [0, M]$

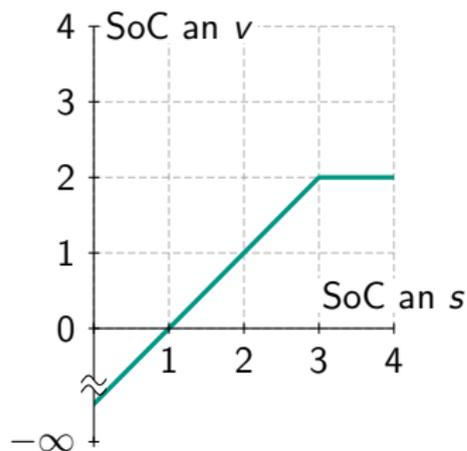
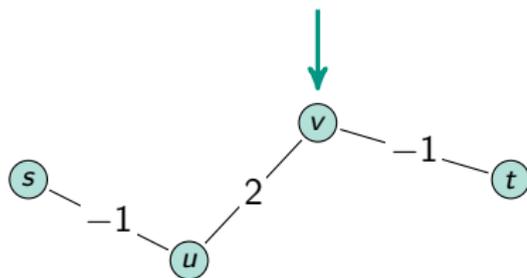
Beispiel: $M = 4$



Allgemeine Profile

Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t , finde zulässige s - t -Pfade mit maximalem SoC an t für *alle* $b_s \in [0, M]$

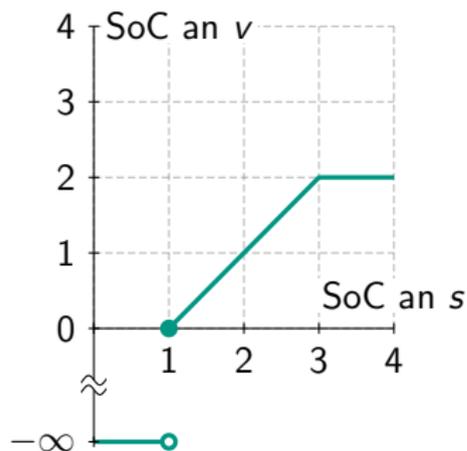
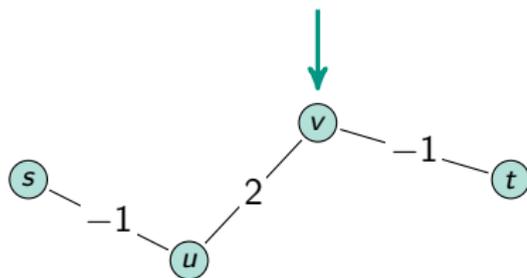
Beispiel: $M = 4$



Allgemeine Profile

Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t , finde zulässige s - t -Pfade mit maximalem SoC an t für *alle* $b_s \in [0, M]$

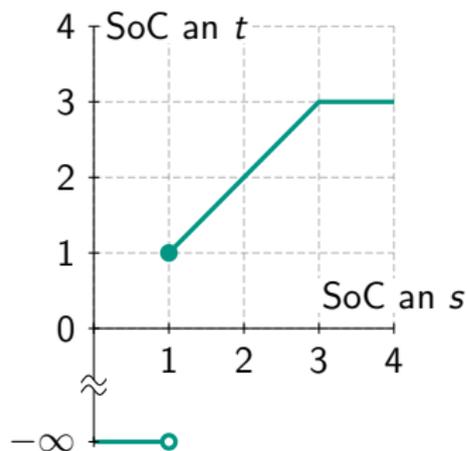
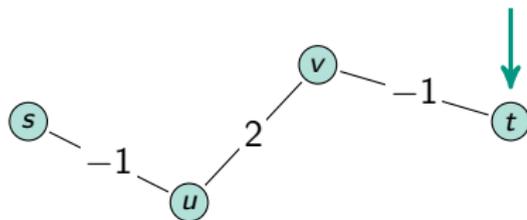
Beispiel: $M = 4$



Allgemeine Profile

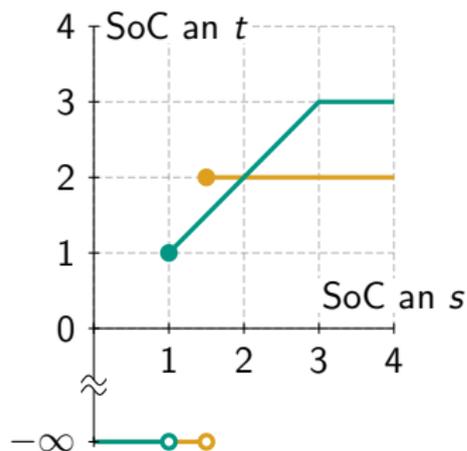
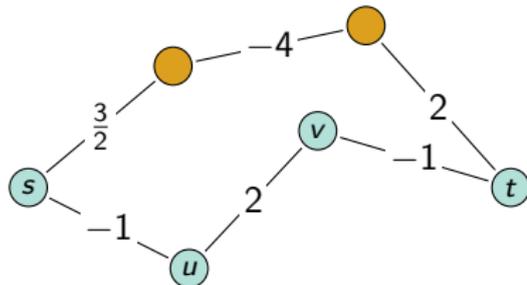
Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t , finde zulässige s - t -Pfade mit maximalem SoC an t für alle $b_s \in [0, M]$

Beispiel: $M = 4$



Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t , finde zulässige s - t -Pfade mit maximalem SoC an t für *alle* $b_s \in [0, M]$

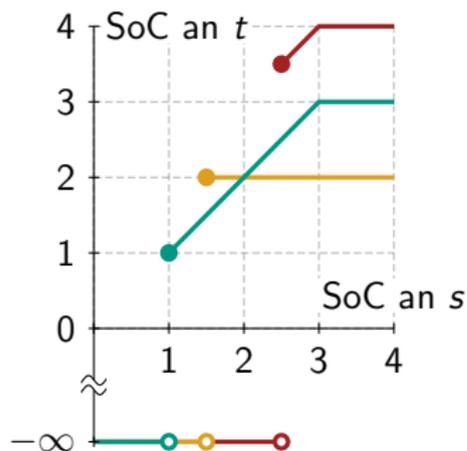
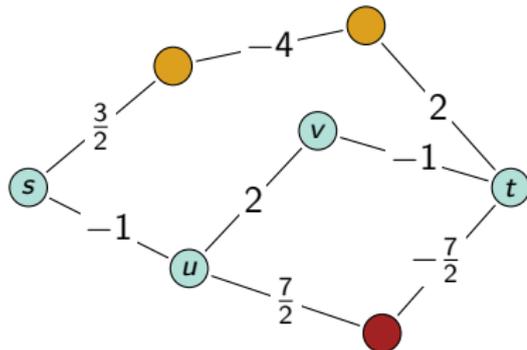
Beispiel: $M = 4$



Allgemeine Profile

Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t , finde zulässige s - t -Pfade mit maximalem SoC an t für *alle* $b_s \in [0, M]$

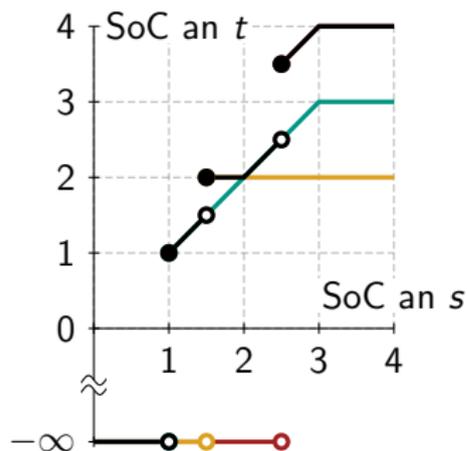
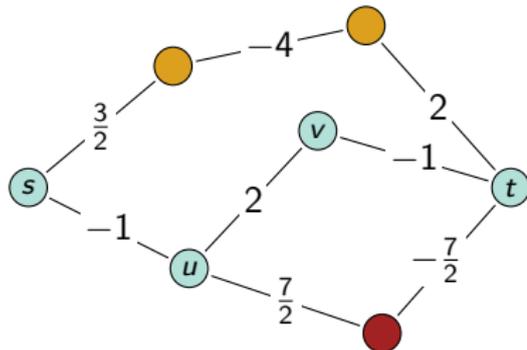
Beispiel: $M = 4$



Allgemeine Profile

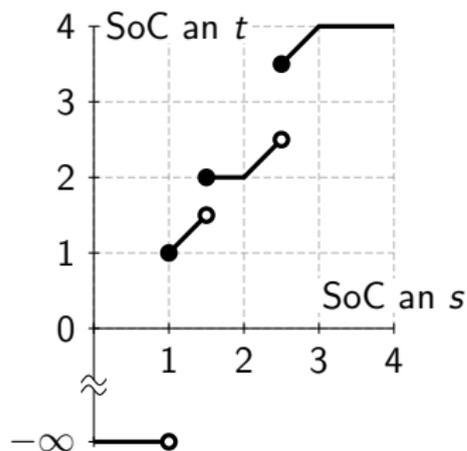
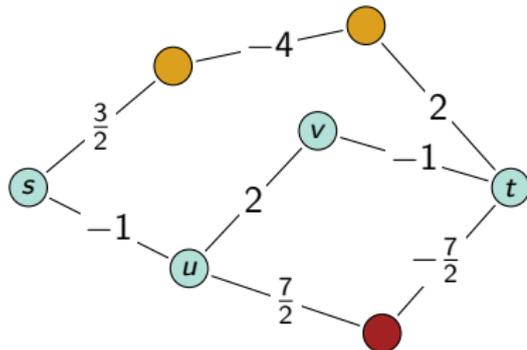
Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t , finde zulässige s - t -Pfade mit maximalem SoC an t für *alle* $b_s \in [0, M]$

Beispiel: $M = 4$



Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t , finde zulässige s - t -Pfade mit maximalem SoC an t für *alle* $b_s \in [0, M]$

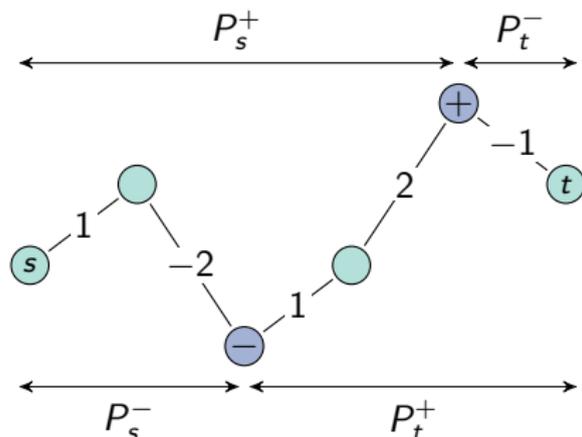
Beispiel: $M = 4$



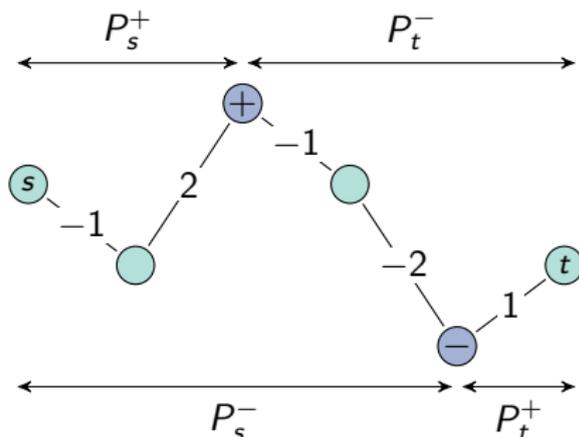
Anzahl Stützpunkte ist **linear** in Anzahl der Pfade
 \Rightarrow Wie viele verschiedene Pfade tragen zum Profil bei?

Typen von Pfaden

Tal-Berg-Pfad:



Berg-Tal-Pfad:



Min. Präfix endet vor max. Präfix

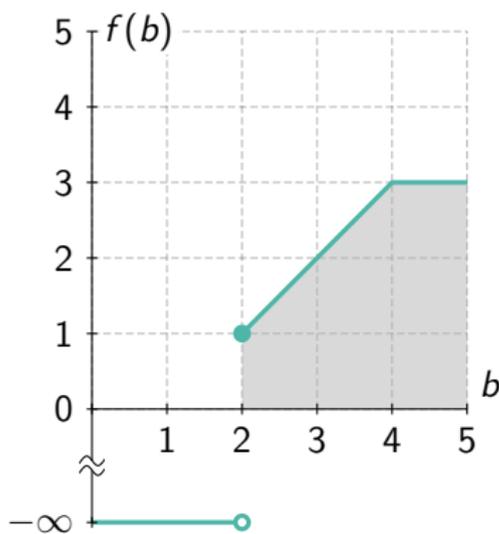
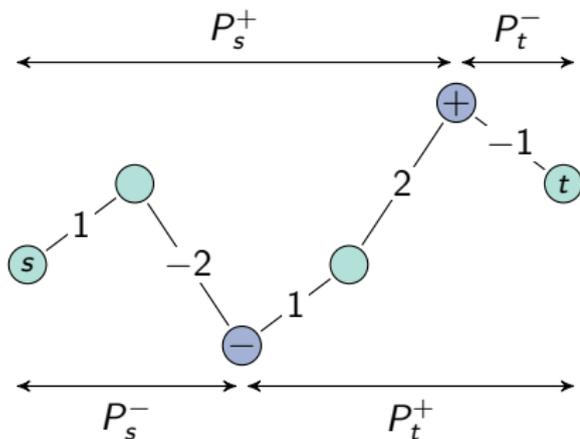
Max. Präfix endet vor min. Präfix

- Letzter Knoten des max. Präfix heißt **Bergknoten**
- Letzter Knoten des min. Präfix heißt **Talknoten**

Komplexität von SoC-Profilen

Betrachte beliebiges Paar von Bergknoten \bar{v} und Talknoten \underline{v} :

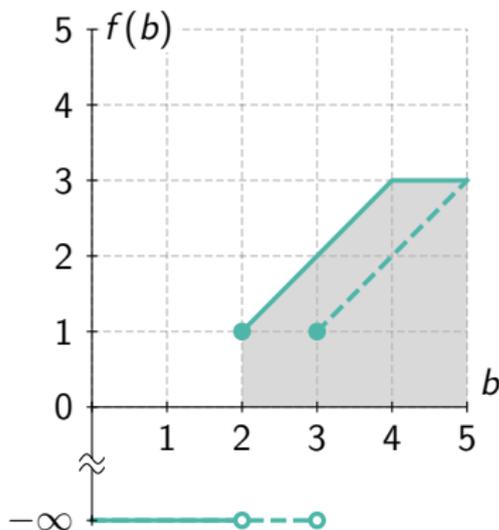
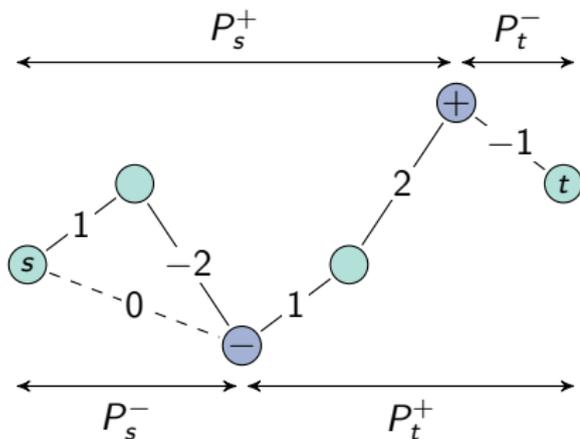
Höchstens ein **Tal-Berg**-Pfad und ein **Berg-Tal**-Pfad benutzen \bar{v} und \underline{v} als Berg- bzw. Talknoten



Komplexität von SoC-Profilen

Betrachte beliebiges Paar von Bergknoten \bar{v} und Talknoten \underline{v} :

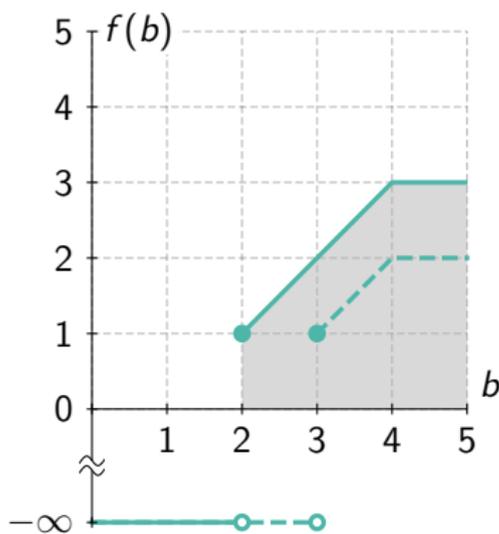
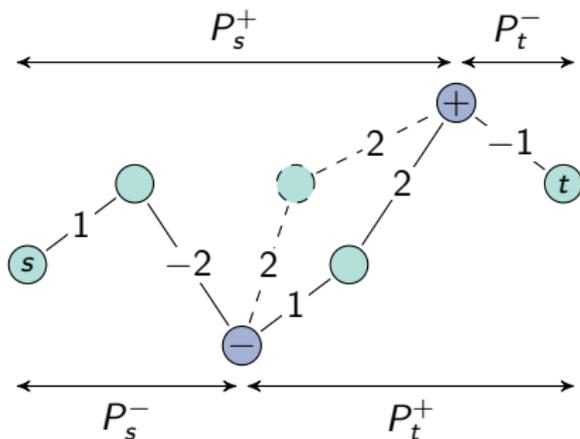
Höchstens ein **Tal-Berg**-Pfad und ein **Berg-Tal**-Pfad benutzen \bar{v} und \underline{v} als Berg- bzw. Talknoten



Komplexität von SoC-Profilen

Betrachte beliebiges Paar von Bergknoten \bar{v} und Talknoten \underline{v} :

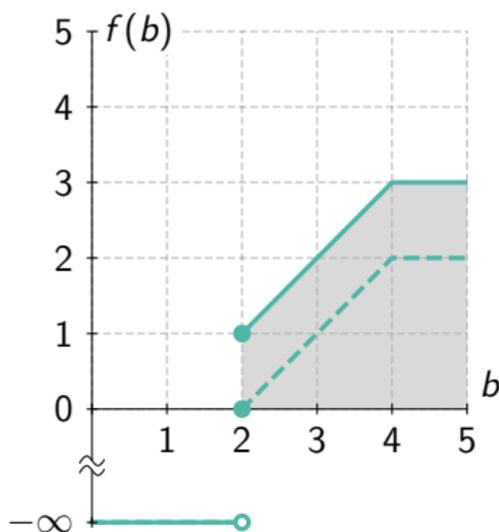
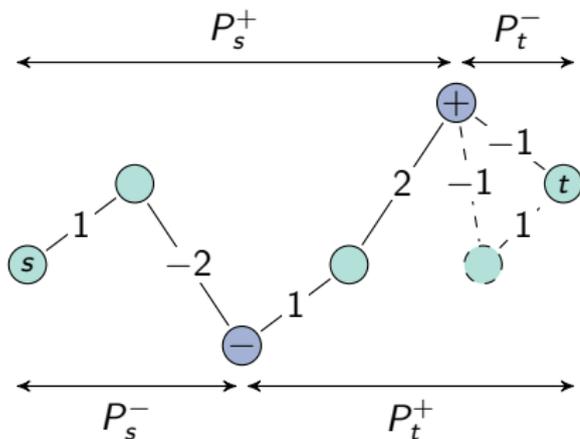
Höchstens ein **Tal-Berg**-Pfad und ein **Berg-Tal**-Pfad benutzen \bar{v} und \underline{v} als Berg- bzw. Talknoten



Komplexität von SoC-Profilen

Betrachte beliebiges Paar von Bergknoten \bar{v} und Talknoten \underline{v} :

Höchstens ein **Tal-Berg**-Pfad und ein **Berg-Tal**-Pfad benutzen \bar{v} und \underline{v} als Berg- bzw. Talknoten



Lemma

Für bel. Knoten $s, t, \underline{v}, \bar{v}$ gilt:

Das SoC-Profil für Start s und Ziel t enthält

- höchstens einen Tal-Berg-Pfad mit Talknoten \underline{v} und Bergknoten \bar{v}
- höchstens einen Berg-Tal-Pfad mit Bergknoten \bar{v} und Talknoten \underline{v}

⇒ höchstens $\mathcal{O}(|V|^2)$ Pfade (und somit Stützpunkte) im Profil

Lemma

Für bel. Knoten $s, t, \underline{v}, \bar{v}$ gilt:

Das SoC-Profil für Start s und Ziel t enthält

- höchstens einen Tal-Berg-Pfad mit Talknoten \underline{v} und Bergknoten \bar{v}
- höchstens einen Berg-Tal-Pfad mit Bergknoten \bar{v} und Talknoten \underline{v}

⇒ höchstens $\mathcal{O}(|V|^2)$ Pfade (und somit Stützpunkte) im Profil

Man kann sogar zeigen:

Theorem

Die Anzahl der Pfade (und Stützpunkte) eines SoC-Profiles liegt in $\mathcal{O}(|V|)$.

⇒ SoC-Profile haben lineare Komplexität (und sind in der Praxis klein)

-  Moritz Baum, Julian Dibbelt, Thomas Pajor, and Dorothea Wagner.
Energy-optimal routes for electric vehicles.
Technical Report 2013-06, Faculty of Informatics, Karlsruhe Institute of Technology, 2013.
-  Moritz Baum, Jonas Sauer, Dorothea Wagner, and Tobias Zündorf.
Consumption profiles in route planning for electric vehicles: Theory and applications.
In *Proceedings of the 16th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'17)*, volume 75 of *Leibniz International Proceedings in Informatics*, pages 19:1–19:18, 2017.
-  Jochen Eisner, Stefan Funke, and Sabine Storandt.
Optimal route planning for electric vehicles in large networks.
In *Proceedings of the Twenty-Fifth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pages 1108–1113. AAAI Press, August 2011.