Karlsruher Institut für Technologie

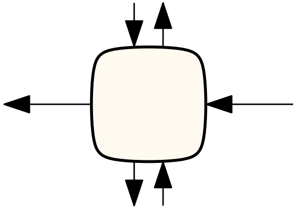
Algorithmen für Routenplanung

9. Vorlesung, Sommersemester 2022

Jonas Sauer | 23. Mai 2022

Abbiegekosten

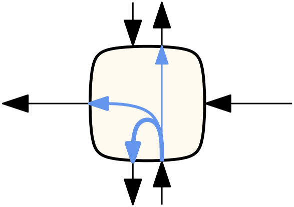
Abbiegeverbote/-kosten



Bisher:

- Kreuzungen $\rightarrow$ Knoten
- Straßen $\rightarrow$ Kanten

Abbiegeverbote/-kosten



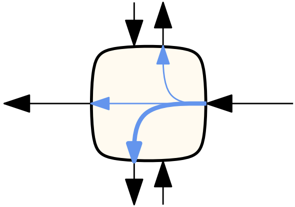
Bisher:

- Kreuzungen → Knoten
- Straßen → Kanten

Aber:

- Abbiegen manchmal verboten
- Linksabbiegen teurer als rechts
- Kosten für U-Turns hoch
- Wird oft als einfaches Modellierungsdetail abgetan

Abbiegeverbote/-kosten



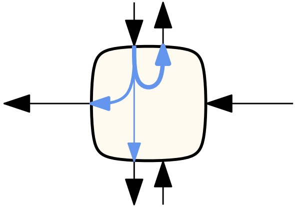
Bisher:

- Kreuzungen → Knoten
- Straßen → Kanten

Aber:

- Abbiegen manchmal verboten
- Linksabbiegen teurer als rechts
- Kosten für U-Turns hoch
- Wird oft als einfaches Modellierungsdetail abgetan

Abbiegeverbote/-kosten



Bisher:

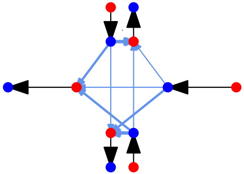
- Kreuzungen → Knoten
- Straßen → Kanten

Aber:

- Abbiegen manchmal verboten
- Linksabbiegen teurer als rechts
- Kosten für U-Turns hoch
- Wird oft als einfaches Modellierungsdetail abgetan

Modellierung

Möglichkeit I: Expandierter Graph



- Vergrößern des Graphen durch Ausmodellierung
- Kantenbasierter Graph:
  - Zwei Knoten pro Straße (Tail und Head)
  - Straße → Kante von Tail zu Head
  - Turn → Kante von Head zu Tail
- Alle Head-Knoten haben Eingangsgrad 1

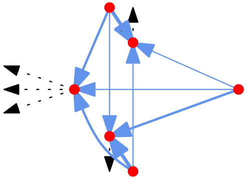
Modellierung

Möglichkeit I: Expandierter Graph

- Vergrößern des Graphen durch Ausmodellierung
- Kantenbasierter Graph:
  - Zwei Knoten pro Straße (Tail und Head)
  - Straße → Kante von Tail zu Head
  - Turn → Kante von Head zu Tail
- Alle Head-Knoten haben Eingangsgrad 1

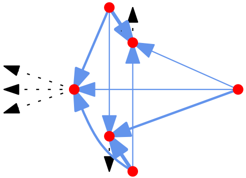
→ Kontrahiere Head-Knoten

→ Kante ist Straße + Turn



Modellierung

Möglichkeit I: Expandierter Graph

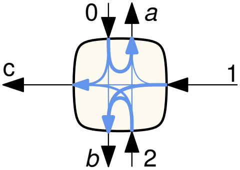


- Vergrößern des Graphen durch Ausmodellierung
- Kantenbasierter Graph:
  - Zwei Knoten pro Straße (Tail und Head)
  - Straße → Kante von Tail zu Head
  - Turn → Kante von Head zu Tail
- Alle Head-Knoten haben Eingangsgrad 1

→ Kontrahiere Head-Knoten

→ Kante ist Straße + Turn

Möglichkeit II: Kompaktes Modell



	0	1	2
a	·	·	·
b	·	·	·
c	·	·	·

- Behalte Kreuzungen als Knoten
- Speichere Abbiegetabelle

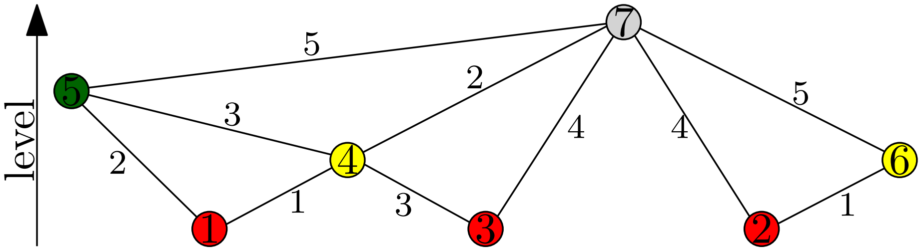
  Abb.: Einfahrt × Ausfahrt → Kosten
- Viele Knoten haben identische Abbiegetabelle

→ Speichere jede Tabelle einmal, Knoten speichern Tabellen-ID

Wdh: Contraction Hierarchies

Vorberechnung:

- Ordne Knoten nach Wichtigkeit
- Kontrahiere Knoten in dieser Reihenfolge
- Füge Shortcuts hinzu
- Weise den Knoten Levels zu



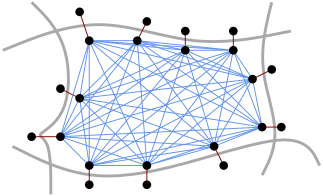
Wdh: Multilevel-Dijkstra (MLD)

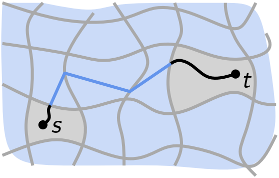
Idee:

- Partitioniere Graphen
- Berechne Distanzen zwischen Randknoten *in jeder Zelle*

Overlay-Graph:

- Randknoten
- Cliquen in jeder Zelle
- Schnittkanten





Suchgraph:

- Start- und Zielzelle...
- ...plus Overlay-Graph
- (bidirektionaler) Dijkstra

MLD: Mehrere Overlay-Levels

Expandierter Graph

Dijkstra:

- Funktioniert ohne Anpassung
- Mehr Knoten zu scannen
- Faktor 3–4 langsamer

Expandierter Graph

Dijkstra:

- Funktioniert ohne Anpassung
- Mehr Knoten zu scannen
- Faktor 3–4 langsamer

CH:

- Funktioniert ohne Anpassung
- Aber: größere Anzahl Knoten/Kanten erhöht Vorberechnungszeit

Expandierter Graph

Dijkstra:

- Funktioniert ohne Anpassung
- Mehr Knoten zu scannen
- Faktor 3–4 langsamer

CH:

- Funktioniert ohne Anpassung
- Aber: größere Anzahl Knoten/Kanten erhöht Vorberechnungszeit

MLD:

- Anzahl Schnittkanten erhöht sich
- *ehemalige* Schnittkanten $\hat{=}$ *jetzige* Schnittknoten
  (Eventuell Wechsel zu Knotenseparatoren sinnvoll?)

Kompaktes Modell

Dijkstra:

- Turns müssen in den Suchalgorithmus integriert werden
- Kreuzungen können mehrfach gescannt werden
  label-correcting bzgl. Kreuzung, label-setting bzgl. Eingangs-/Ausgangspunkten
- Jede Kante wird höchstens einmal gescannt
- Suchraum gleich zu kantenbasiertem Modell
  simuliert Dijkstra auf kantenbasiertem Graphen
- Vorteil: weniger Speicher für den Graphen

Kompaktes Modell

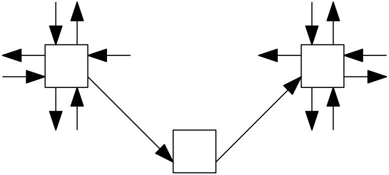
CH:

- Zeugensuche wird komplizierter

Kompaktes Modell

CH:

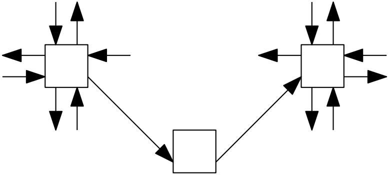
- Zeugensuche wird komplizierter
  - Eine Zeugensuche pro Paar von Aus- und Einfahrt



Kompaktes Modell

CH:

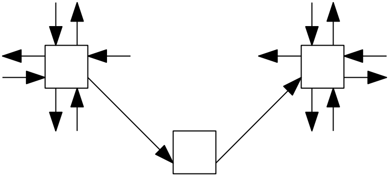
- Zeugensuche wird komplizierter
  - Eine Zeugensuche pro Paar von Aus- und Einfahrt
  - Es können Self-Loops entstehen

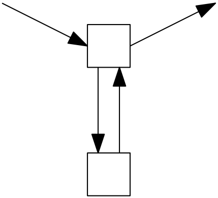


Kompaktes Modell

CH:

- Zeugensuche wird komplizierter
  - Eine Zeugensuche pro Paar von Aus- und Einfahrt
  - Es können Self-Loops entstehen

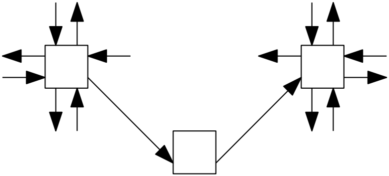


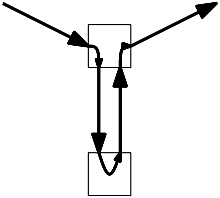


Kompaktes Modell

CH:

- Zeugensuche wird komplizierter
  - Eine Zeugensuche pro Paar von Aus- und Einfahrt
  - Es können Self-Loops entstehen

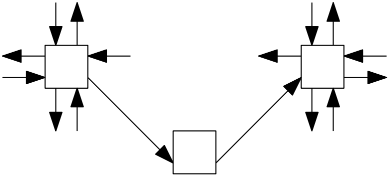


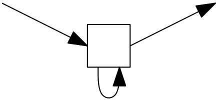


Kompaktes Modell

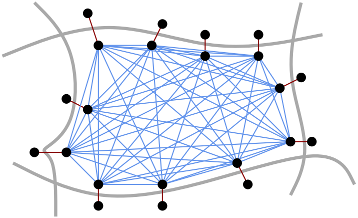
CH:

- Zeugensuche wird komplizierter
  - Eine Zeugensuche pro Paar von Aus- und Einfahrt
  - Es können Self-Loops entstehen





Kompaktes Modell



MLD:

- Schnittkanten bleiben erhalten
- Schnittkante $\rightarrow$ 2 Knoten im Overlay
- Im Overlay entspricht dann jeder Knoten einer Ein-/Ausfahrt

$\rightarrow$ Turns müssen nur auf unterstem Level beachtet werden

- Auf Overlay-Graphen: normaler Dijkstra

$\Rightarrow$ Einfache Anpassung, aber zusätzliche Fallunterscheidung in der Query

Ergebnisse

U-Turn cost	Algorithm	Customization time [s]	Customization [MB]	Queries #scans	Queries time [ms]
1 s	MLD [2^8:2^{12}:2^{16}:2^{20}]	5.8	61.7	3556	1.18
	CH expanded	3407.4	880.6	550	0.18
	CH compact	849.0	132.5	905	0.19
100 s	MLD [2^8:2^{12}:2^{16}:2^{20}]	7.5	61.7	3813	1.28
	CH expanded	5799.2	931.1	597	0.21
	CH compact	23774.8	304.0	5585	2.11

Beobachtung:

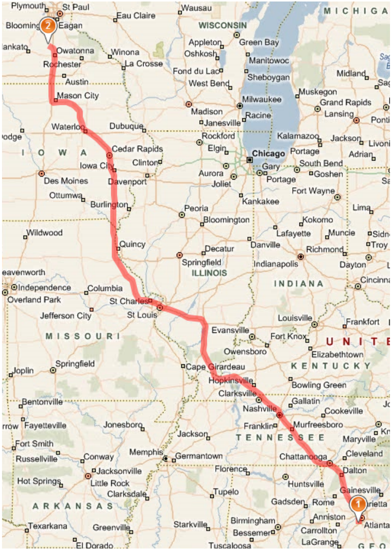
- (Metrikabhängige) CH-Ordnung problematisch bei Turns
- Besser: Ordnung an Turns anpassen (CH expanded vs. compact)
- MLD robust

Alternativ-Routen

Wiederholung Punkt-zu-Punkt

Anfrage:

- Finde die beste Route in einem Transportnetz



Idee:

- Netzwerk als Graph $G = (V, E)$
- Kantengewichte sind Reisezeiten
- Kürzester Pfad in G entspricht schnellster Verbindung

Ergebnisse:

- Schnelle Algorithmen existieren

Alternativ-Routen

Anfrage:

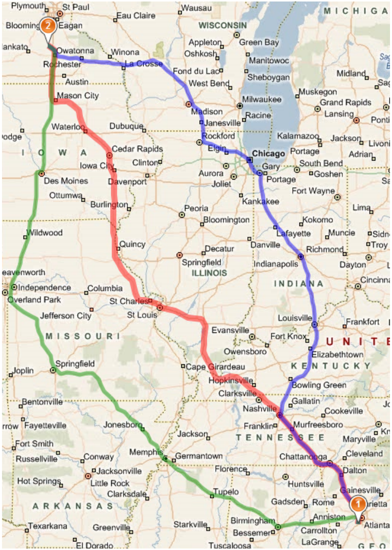
- Finde gute Alternativen in einem Transportnetz

Problem:

- Der kürzeste Weg ist wohldefiniert
- Was aber ist eine gute Alternative?
- Problem erscheint rein heuristischer Natur

Ziele:

- Lieber keine als schlechte Routen zeigen
- Sollte nicht deutlich langsamer als Punkt-zu-Punkt sein



Erste Ansätze

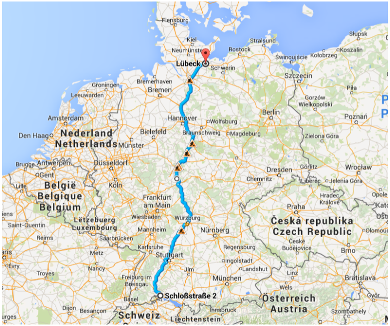
Berechne top-k kürzeste Wege

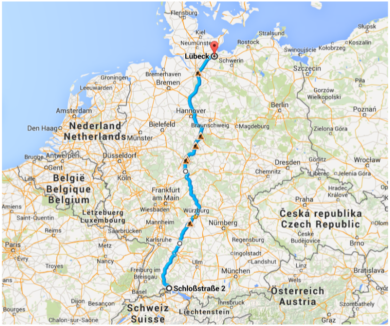
+ Wege sind möglichst kurz
– Oft erst für hohes k relevant

Erste Ansätze

Berechne top-k kürzeste Wege

- $+$ Wege sind möglichst kurz
- $-$ Oft erst für hohes k relevant

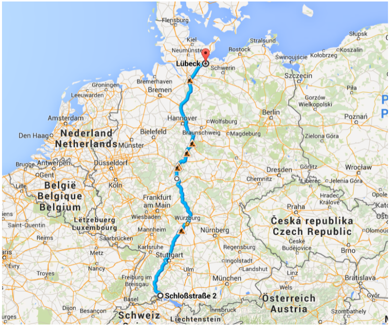


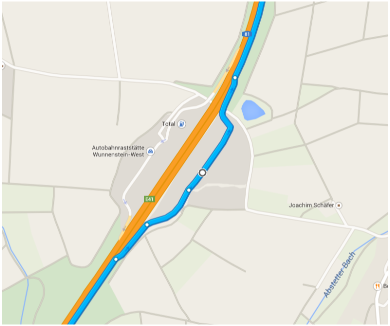


Erste Ansätze

Berechne top-k kürzeste Wege

+ Wege sind möglichst kurz
– Oft erst für hohes k relevant





Erste Ansätze

Optimiere verschiedene Metriken

- z.B. schnellster und kürzester Weg

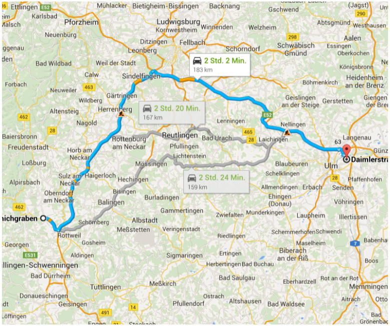
\+ bedient verschiedene Vorlieben

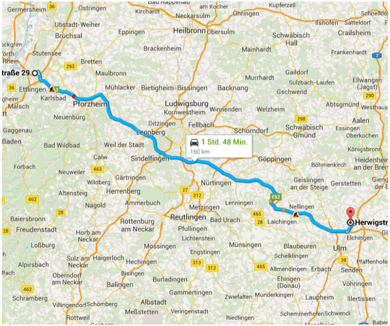
– verpasst interessante Alternativen

Erste Ansätze

Optimiere verschiedene Metriken

- z.B. schnellster und kürzester Weg
- \+ bedient verschiedene Vorlieben
- – verpasst interessante Alternativen



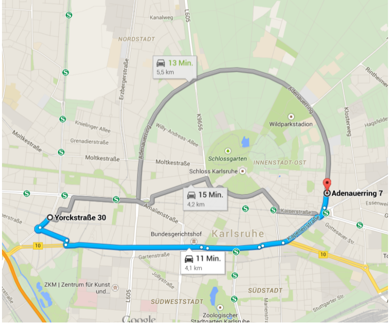


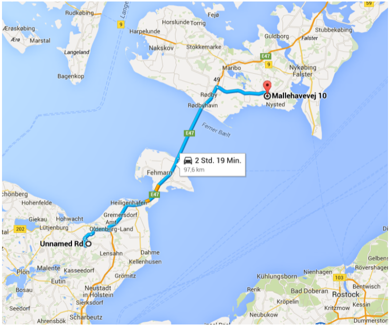
Erste Ansätze

Karlsruher Institut für Technologie

Disjunkte Pfade

+ stark unterschiedliche Pfade
– verpasst interessante Alternativen

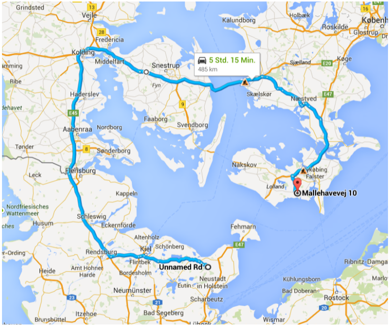


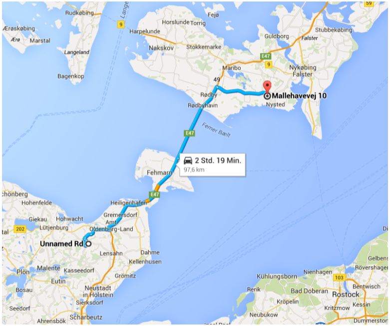


Erste Ansätze

Disjunkte Pfade

+ stark unterschiedliche Pfade
– verpasst interessante Alternativen

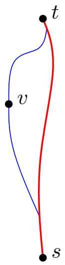




Fortgeschrittene Ansätze

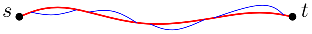
Via-Knoten

- Nutze dritten Knoten
- Berechne zusammengesetzten Pfad
- Problem: Woher kommt dieser Knoten?



Simulierter Stau

- Verlangsame einzelne Segmente künstlich
- Gefahr vieler kleiner Umleitungen



Und wie?

- Was macht eine gute Alternative aus?
- Wie berechnen wir sie schnell?

Intuition

Karlsruher Institut für Technologie

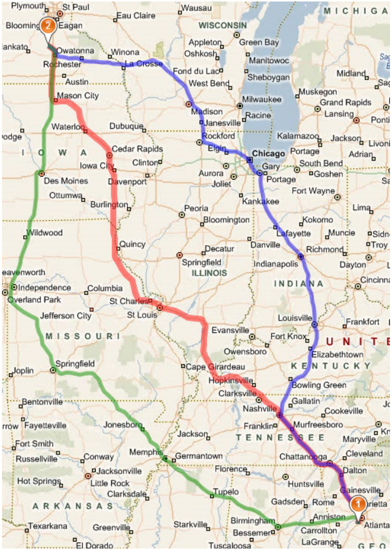
Alternativen sollten erfüllen:

- Nicht viel länger als der kürzeste Weg
- Signifikant verschieden

Erste Idee:

- Finde einen Pfad, der Länge und Gemeinsamkeit minimiert
    - Maximal $x\%$ länger
    - Teilt maximal $y\%$

Ist das genug?



Das dritte Kriterium

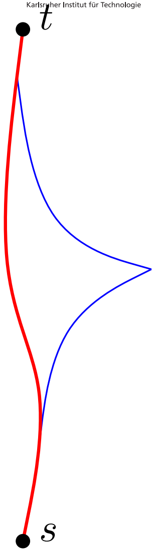
Problem:

- Routen können seltsam aussehen
- Sogar wenn sie verschieden und kurz sind
- Lokale Umwege
- „Diese Strecke macht doch keinen Sinn.
  Das kann ich besser!“

Idee:

- Kurze Subpfade müssen kürzeste Pfade sein
- Beliebige Paare von Knoten auf dem Pfad sollen kleinen Stretch haben

$\Rightarrow$ Keine unnötigen lokalen Umwege



Das dritte Kriterium

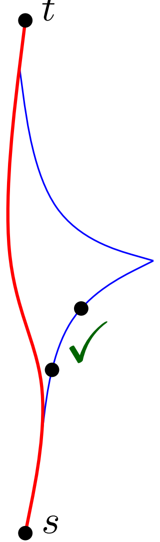
Problem:

- Routen können seltsam aussehen
- Sogar wenn sie verschieden und kurz sind
- Lokale Umwege
- „Diese Strecke macht doch keinen Sinn.
  Das kann ich besser!“

Idee:

- Kurze Subpfade müssen kürzeste Pfade sein
- Beliebige Paare von Knoten auf dem Pfad sollen kleinen Stretch haben

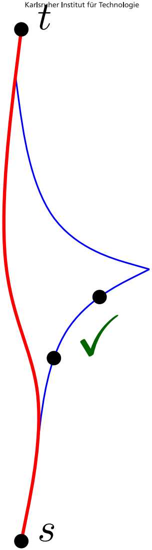
⇒ Keine unnötigen lokalen Umwege



Das dritte Kriterium

Problem:

- Routen können seltsam aussehen
- Sogar wenn sie verschieden und kurz sind
- Lokale Umwege
- „Diese Strecke macht doch keinen Sinn.
  Das kann ich besser!“



Idee:

- Kurze Subpfade müssen kürzeste Pfade sein
- Beliebige Paare von Knoten auf dem Pfad sollen kleinen Stretch haben

$\Rightarrow$ Keine unnötigen lokalen Umwege

Das dritte Kriterium

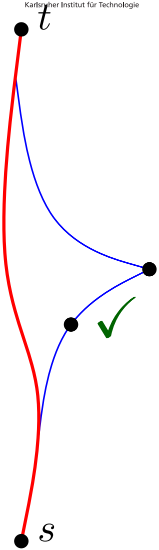
Problem:

- Routen können seltsam aussehen
- Sogar wenn sie verschieden und kurz sind
- Lokale Umwege
- „Diese Strecke macht doch keinen Sinn.
  Das kann ich besser!“

Idee:

- Kurze Subpfade müssen kürzeste Pfade sein
- Beliebige Paare von Knoten auf dem Pfad sollen kleinen Stretch haben

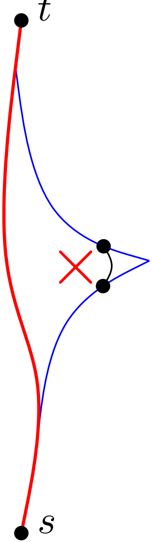
$\Rightarrow$ Keine unnötigen lokalen Umwege



Das dritte Kriterium

Problem:

- Routen können seltsam aussehen
- Sogar wenn sie verschieden und kurz sind
- Lokale Umwege
- „Diese Strecke macht doch keinen Sinn.
  Das kann ich besser!“



Idee:

- Kurze Subpfade müssen kürzeste Pfade sein
- Beliebige Paare von Knoten auf dem Pfad sollen kleinen Stretch haben

$\Rightarrow$ Keine unnötigen lokalen Umwege

Formelle Qualitätseigenschaften

Karlsruher Institut für Technologie

Idee

Alternativ-Pfade sollen hinreichend verschieden sein.

- P ist die Kantenmenge des kürzesten s–t-Pfads
- P' ist die Kantenmenge des alternativen s–t-Pfads
- $\ell(Q)$ ist die Summe über alle Kanten-Längen in Q
- Eine Alternative ist γ-verschieden, wenn

$$\ell(P \cap P') \leq \gamma \ell(P)$$

Formelle Qualitätseigenschaften

Idee

Alternativ-Pfade sollen keine großen Umwege sein.

- Sei $\mathrm{dist}(s, t)$ die Länge des kürzesten s-t-Pfads
- Sei P' der alternative s-t-Pfad und $\ell(P')$ seine Länge
- P' hat einen Stretch von höchstens ε, wenn

$$\ell(P') \leq (1 + \varepsilon)\,\mathrm{dist}(s, t)$$

Kriterium für die Vorlesung vereinfacht, siehe [ADGW13] für Details.

Formelle Qualitätseigenschaften

Idee

Alternativ-Pfade sollen lokal sinnvoll sein.

- Sei P' der alternative Pfad und P'_{xy} der Subpfad von x bis y
- P' besteht den T-Test, wenn für alle P'_{xy} mit $\ell(P'_{xy}) \leq T$ gilt, dass P'_{xy} ein kürzester x-y-Pfad ist
- P' ist α-lokal-optimal, wenn er den Test für $T = \alpha \cdot \mathrm{dist}(s, t)$ besteht

Kriterium für die Vorlesung vereinfacht, siehe [ADGW13] für Details.

Formelle Qualitätseigenschaften

- **Ziel**: Finde Pfad, der γ-verschieden ist, einen Stretch ε hat und α-lokal-optimal ist.

Formelle Qualitätseigenschaften

- **Ziel**: Finde Pfad, der γ-verschieden ist, einen Stretch ε hat und α-lokal-optimal ist.

- γ, ε, und α sind Tuningparameter des Problems
- Typische Werte sind: $\alpha = 25\%$, $\varepsilon = 25\%$, $\gamma = 80\%$

Formelle Qualitätseigenschaften

- **Ziel**: Finde Pfad, der γ-verschieden ist, einen Stretch ε hat und α-lokal-optimal ist.

- γ, ε, und α sind Tuningparameter des Problems
- Typische Werte sind: $\alpha = 25\%$, $\varepsilon = 25\%$, $\gamma = 80\%$

- Bei mehreren Alternativen:
  Neue Alternative muss γ-verschieden von der Vereinigung aller bisher gefundenen Pfade sein.

Weiteres Vorgehen

- Bisher: Wir haben gültige Alternativen formalisiert
- Nun: Wie finden wir gute Alternativen?

Weiteres Vorgehen

- Bisher: Wir haben gültige Alternativen formalisiert
- Nun: Wie finden wir gute Alternativen?

- **Vorgehen**:
  - Finde Kandidaten-Pfad nach einem heuristischen Verfahren
  - Teste, ob der Pfad eine gute Alternative ist
- Findet nicht immer eine Alternative

Weiteres Vorgehen

- Bisher: Wir haben gültige Alternativen formalisiert
- Nun: Wie finden wir gute Alternativen?

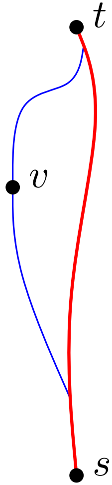
- **Vorgehen**:
  - Finde Kandidaten-Pfad nach einem heuristischen Verfahren
  - Teste, ob der Pfad eine gute Alternative ist
- Findet nicht immer eine Alternative

- **Problem**: Wie effizient testen?
- Nicht trivial
- Der Test braucht nicht vernachlässigbare Rechenzeit
- Details nicht in der Vorlesung

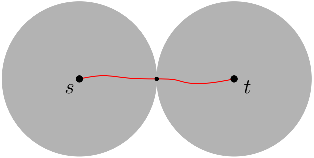
Bestimmung von Kandidaten

Single via paths:

- Konkatenation von zwei kürzesten Pfaden: s–v und v–t
- Eigenschaften:
  - linear viele Pfade
  - einzelner Pfad ist definiert durch Via-Knoten v (Notation: P_v)
  - lokal optimal von s nach v und v nach t
  - Verletzungen höchstens um v herum
  - Alternative kann effizient berechnet werden, sobald v bekannt ist



Prinzip Bidirektionale Suche



Relaxiertes Stoppkriterium:

- Suche bidirektional
- Stoppe, sobald Radien $> (1+\varepsilon)\ell(\mathrm{OPT})$

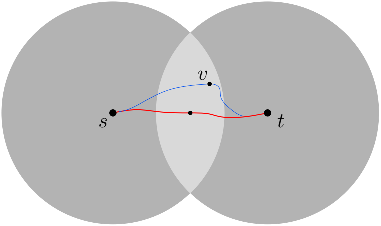
Finde Alternative:

- Für alle v, die von beiden Suchen gescannt wurden:
- Teste, ob P_v den Anforderungen genügt
- Finde besten P_v anhand einer Optimierungsfunktion

Problem:

- Anzahl der Kandidaten ist sehr hoch
- Interaktion mit Beschleunigungstechniken?

Prinzip Bidirektionale Suche



Relaxiertes Stoppkriterium:

- Suche bidirektional
- Stoppe, sobald Radien $> (1+\varepsilon)\ell(\mathsf{OPT})$

Finde Alternative:

- Für alle v, die von beiden Suchen gescannt wurden:
- Teste, ob P_v den Anforderungen genügt
- Finde besten P_v anhand einer Optimierungsfunktion

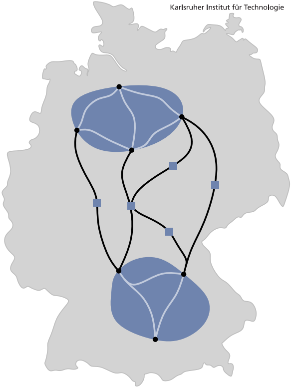
Problem:

- Anzahl der Kandidaten ist sehr hoch
- Interaktion mit Beschleunigungstechniken?

Alternativen mit CH

Idee:

- Lasse Vorwärts- und Rückwärtssuche laufen, bis Stretch erreicht ist
- Entpacke Pfad für jeden Knoten im gemeinsamen Suchraum
- Teste Pfad



Probleme:

- gegenläufige Ziele
  - CH will Suchraum klein haben
  - Alternativrouten brauchen genug Kandidaten
- Tests und Pfadentpackungen kosten Zeit

„Lösung“:

- Relaxiere vereinzelt auch Kanten, die den Suchraum verlassen
- Je weiter man den Suchraum verlässt, desto besser werden die gefundenen Pfade, aber desto schlechter werden die Laufzeiten
- Siehe [ADGW13] für Details

Plateau

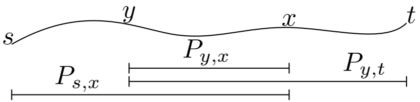
Problem mit Via-Knoten:

- Lokale Optimalität am Via-Knoten verletzt

Plateau

Problem mit Via-Knoten:

- Lokale Optimalität am Via-Knoten verletzt

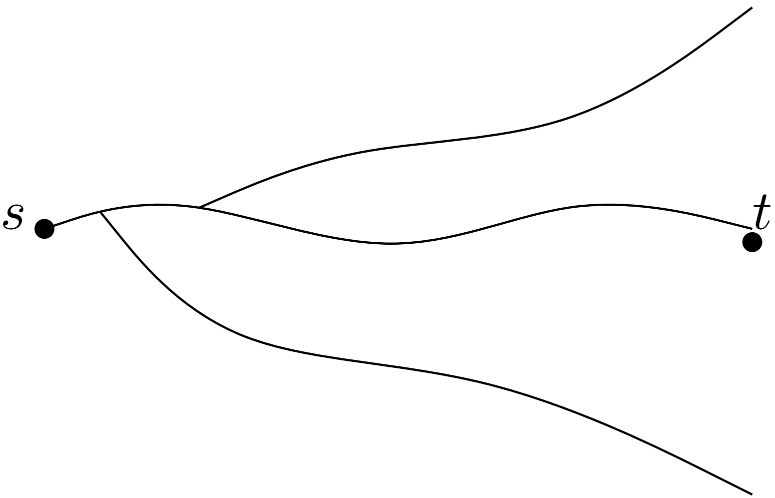


Idee:

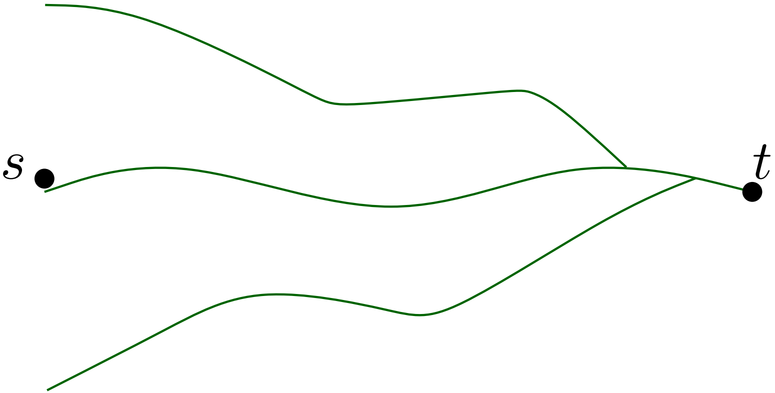
- Suche zwei kürzeste Pfade $P_{s,x}$ und $P_{y,t}$
- mit $P_{y,x} \subseteq P_{s,x}$ und $P_{y,x} \subseteq P_{y,t}$
- $P_{y,x}$ heißt Plateau
- Alternative besteht T-Test für $T \leq \ell(P_{y,x})$
- Langes Plateau $\rightarrow$ gute Alternative
- Randfall Via-Knoten: $x = y$

Plateau

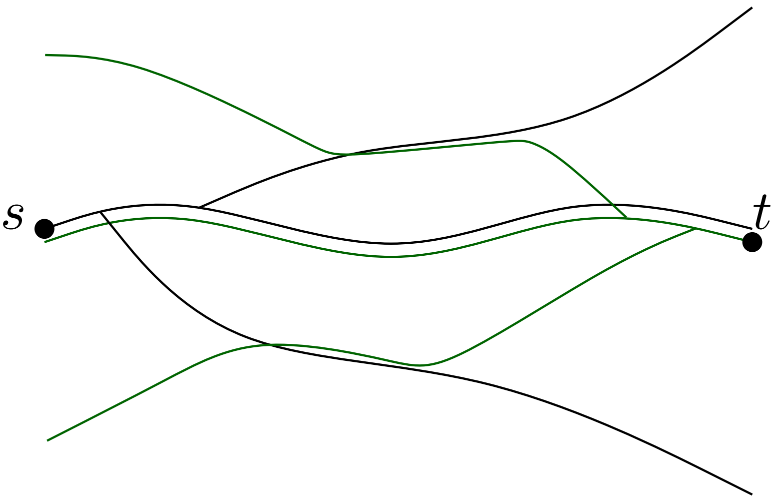
Plateau



Plateau

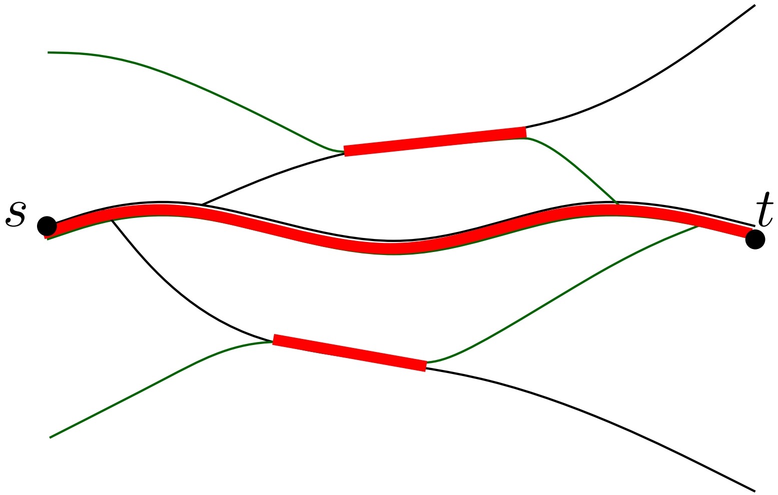


Plateau

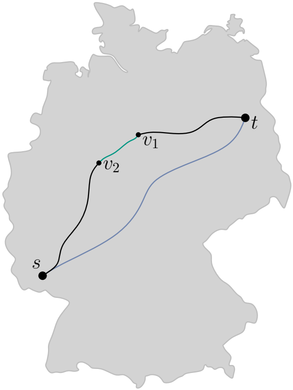


Plateau

Karlsruher Institut für Technologie



Plateaus berechnen



- Benötigt optimale Suchbäume
- Einfach mit Dijkstra
- CH: komplex, aber möglich
  (Grundlage: vollständiges Entpacken des Suchraums: [Kob13])

Plateaus vs. Via-Knoten

- Via-Knoten einfacher und schneller zu berechnen
- Aber: Mehr Via-Knoten als Plateaus
- d.h. mehr Zulässigkeitstests mit Via-Knoten

- Jede Plateau-Alternative ist auch eine Via-Alternative
- **Beweis:**
  - Sei $P_{s,t} = s \to y \to x \to t$ die Plateau-Alternative
  - Für jeden Knoten $v \in P_{y,x}$ ist $P_{s,t}$ eine Via-Alternative mit Via-Knoten v, da $P_{s,v}$ und $P_{v,t}$ kürzeste Pfade sind

Alternativen durch Stausimulation

Idee: [BDGS11]

- Suche kürzesten Pfad P_1
- Simuliere Stau auf P_1
- Suche neuen kürzesten Pfad P_2, der Stau in Betracht zieht
- Simuliere Stau auf P_1 und P_2
- Suche neuen kürzesten Pfad P_3, der Stau in Betracht zieht
- ...
- Wiederhole, bis Alternativen zu lang werden

Alternativen durch Stausimulation

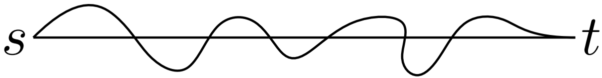
Idee: [BDGS11]

- Suche kürzesten Pfad P_1
- Simuliere Stau auf P_1
- Suche neuen kürzesten Pfad P_2, der Stau in Betracht zieht
- Simuliere Stau auf P_1 und P_2
- Suche neuen kürzesten Pfad P_3, der Stau in Betracht zieht
- ...
- Wiederhole, bis Alternativen zu lang werden

Englischer Fachbegriff: Penalty Method

Alternativen durch Stausimulation

Ist das eine gute Alternative?



- Nicht lokal optimal
- Bestrafe nicht nur die Kanten auf dem Pfad, sondern auch die inzidenten Kanten

Alternativen durch Stausimulation

Strafterme:

- Einfluss von additiven Straftermen hängt von Graphmodellierung ab
  mehr Grad-2-Knoten $\rightarrow$ größerer Einfluss
- **Lösung**: Multiplikative Strafterme

- Anders formuliert: Setzt die Geschwindigkeit gleichmäßig runter, anstatt jede Kante um x Sekunden zu verlängern

Alternativen durch Stausimulation

Wie implementieren?

- Benutze 3-Phasen-Vorberechnungstechnik
- Nur Teile der Metrik ändern sich $\rightarrow$ kann ausgenutzt werden
- [KRS13] baut auf MLD/CRP auf

Ein paar Zahlen

algorithm	first time [ms]	first success rate [%]	second time [ms]	second success rate [%]	third time [ms]	third success rate [%]
X-BDV	11 451.5	94.5	12 225.9	80.6	13 330.9	59.6
CRP-π	130.0	96.3	130.0	84.0	130.0	62.9
HiDAR	18.2	91.5	18.2	75.7	18.2	55.9
X-CHV-v1	16.9	90.7	20.3	70.1	22.1	42.3
X-CHV-v2	3.1	58.2	3.6	28.6	3.9	10.9

- X-BDV: Bidirektionaler Dijkstra
- X-CHV-v1 und X-CHV-v2: Zwei CH-Varianten, v1 sucht mehr Kanten außerhalb des Suchraums ab
- HiDAR: Plateau-CH
- CRP-π: Simulierter Stau

Zusammenfassung Alternativ-Routen

- Eine gute Alternative ist:
  - Nicht viel länger
  - Lokal-optimal
  - Hinreichend verschieden
- Alternativen findet man durch
  - Kandidaten heuristisch aufzählen
  - Schlechte Kandidaten herausfiltern
- Kandidaten findet man mit
  - Via-Knoten
  - Plateaus
  - Simuliertem Stau

Literatur I

Ittai Abraham, Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, and Renato F. Werneck.
Alternative routes in road networks.
ACM Journal of Experimental Algorithmics, 18(1):1–17, 2013.

Roland Bader, Jonathan Dees, Robert Geisberger, and Peter Sanders.
Alternative route graphs in road networks.
In *Proceedings of the 1st International ICST Conference on Theory and Practice of Algorithms in (Computer) Systems (TAPAS'11)*, volume 6595 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 21–32. Springer, 2011.

Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Thomas Pajor, and Renato F. Werneck.
Customizable route planning in road networks.
Transportation Science, 51(2):566–591, 2017.

Literatur II

KIT
Karlsruher Institut für Technologie

Robert Geisberger and Christian Vetter.
Efficient routing in road networks with turn costs.
In *Proceedings of the 10th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'11)*, volume 6630 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 100–111. Springer, 2011.

Moritz Kobitzsch.
HiDAR: An alternative approach to alternative routes.
In *Proceedings of the 21st Annual European Symposium on Algorithms (ESA'13)*, volume 8125 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 613–624. Springer, 2013.

Moritz Kobitzsch, Marcel Radermacher, and Dennis Schieferdecker.
Evolution and evaluation of the penalty method for alternative graphs.
In *Proceedings of the 13th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modeling, Optimization, and Systems (ATMOS'13)*, OpenAccess Series in Informatics (OASIcs), pages 94–107, 2013.