Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

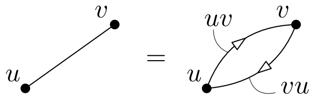
Vorlesung am 12.07.2022

Torsten Ueckerdt | 12. Juli 2022

Wiederholung: Flussnetzwerke

Wir haben **gerichtete** Graphen

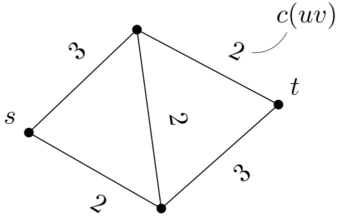
- $D = (V, A)$, eine Kante von u nach v nennen wir uv.
- $uv \neq vu$.
- Wir nehmen an, dass $uv \in A \Leftrightarrow vu \in A$.



Definition.

Ein **Flussnetzwerk** ist ein 4-Tupel $(D = (V, A), c : A \to \mathbb{R}_{>0}, s \in V, t \in V)$ wobei D wie oben, c jeder Kante ihre Kapazität zuordnet, s die Quelle *(engl.: source)* und t die Senke *(engl.: drain/target)* darstellen. Die Kapazität einer Kante ist in beide Richtungen gleich, also

$$c(uv) = c(vu) \quad \forall uv \in A$$



Wiederholung: Maximum-Flow

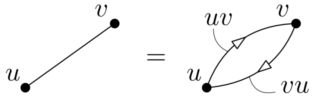
Defintion.

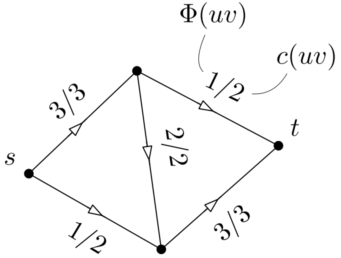
Ein ***s*-*t*-Fluss** bezüglich eines Flussnetzwerkes ist eine Funktion $\Phi : A \to \mathbb{R}$, die jeder Kante uv ihren Fluss von u nach v zuordnet und Folgendes einhält:

- Flusserhaltung: $\sum_{uv \in A} \Phi(uv) = 0$ für jeden Knoten $u \neq s, t$.
- Zulässigkeit: $\Phi(uv) \leq c(uv)$ für alle Kanten $uv \in A$.
- Antisymmetrie: $\Phi(uv) = -\Phi(vu)$ für alle Kanten $uv \in A$.

Der **Wert** von Φ ist der Netto-Ausfluss bei s:

$$\Phi(s) := \sum_{sv \in A} \Phi(sv) = -\Phi(t)$$





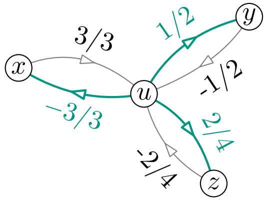
Problem Maximum-Flow.

Gegeben ein Flussnetzwerk, finde einen maximalen s-t-Fluss.

Im Allgemeinen in $O(n^2)$.

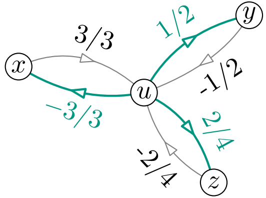
Flussnetzwerke

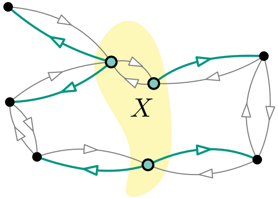
Notation:
Für ein $X \subseteq V$ definiere $\Phi(X) := \sum_{uv \in A, u \in X, v \notin X} \Phi(uv)$.
Insbesondere ist $\Phi(s) = \Phi(\{s\})$.



Flussnetzwerke

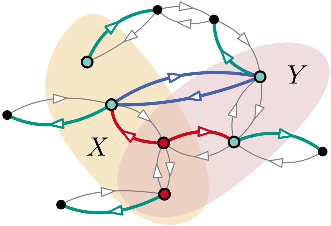
Notation:
Für ein $X \subseteq V$ definiere $\Phi(X) := \sum_{uv \in A,\, u \in X,\, v \notin X} \Phi(uv)$.
Insbesondere ist $\Phi(s) = \Phi(\{s\})$.

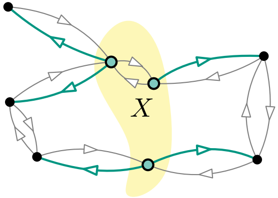




Flussnetzwerke

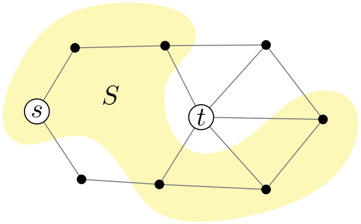
Notation:
Für ein $X \subseteq V$ definiere $\Phi(X) := \sum_{uv \in A, u \in X, v \notin X} \Phi(uv)$.
Insbesondere ist $\Phi(s) = \Phi(\{s\})$.
Beobachtung:
Sind $X, Y \subseteq V$ disjunkt, dann gilt $\Phi(X \cup Y) = \Phi(X) + \Phi(Y)$.
Also auch $\Phi(X) = \sum_{u \in X} \Phi(u)$.





Flussnetzwerke

Notation:
Für ein $X \subseteq V$ definiere $\Phi(X) := \sum_{uv \in A, u \in X, v \notin X} \Phi(uv)$.
Insbesondere ist $\Phi(s) = \Phi(\{s\})$.
Beobachtung:
Sind $X, Y \subseteq V$ disjunkt, dann gilt $\Phi(X \cup Y) = \Phi(X) + \Phi(Y)$.
Also auch $\Phi(X) = \sum_{u \in X} \Phi(u)$.



Definition.

Ein ***s*-*t*-Schnitt** ist ein Schnitt $C \subseteq A$, induziert von $S \subseteq V$ mit $s \in S, t \notin S$:

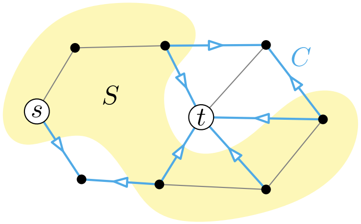
$$C := \{uv \in A \mid u \in S, v \notin S\}$$

Die **Kapazität** eines solchen Schnitts ist

$$c(C) := \sum_{e \in C} c(e)$$

Flussnetzwerke

Notation:
Für ein $X \subseteq V$ definiere $\Phi(X) := \sum_{uv \in A, u \in X, v \notin X} \Phi(uv)$.
Insbesondere ist $\Phi(s) = \Phi(\{s\})$.
Beobachtung:
Sind $X, Y \subseteq V$ disjunkt, dann gilt $\Phi(X \cup Y) = \Phi(X) + \Phi(Y)$.
Also auch $\Phi(X) = \sum_{u \in X} \Phi(u)$.



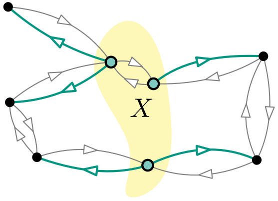
Definition.

Ein ***s*-*t*-Schnitt** ist ein Schnitt $C \subseteq A$, induziert von $S \subseteq V$ mit $s \in S, t \notin S$:

$$C := \{uv \in A \mid u \in S, v \notin S\}$$

Die **Kapazität** eines solchen Schnitts ist

$$c(C) := \sum_{e \in C} c(e)$$

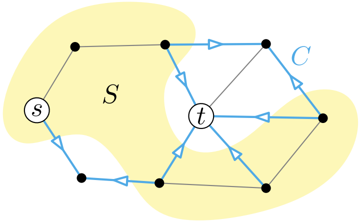


Max-Flow-Min-Cut

Lemma (Max-Flow-Min-Cut-Lemma).

Für jeden s-t-Schnitt C und s-t-Fluss Φ gilt

$$\Phi(s) \leq c(C)$$



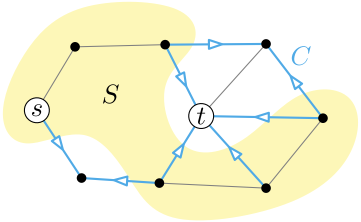
Beweis:

Max-Flow-Min-Cut

Lemma (Max-Flow-Min-Cut-Lemma).

Für jeden s-t-Schnitt C und s-t-Fluss Φ gilt

$$\Phi(s) \leq c(C)$$



Beweis:

$$\Phi(s) = \sum_{v \in S} \Phi(\{v\}) = \Phi(S) = \sum_{e \in C} \Phi(e) \leq \sum_{e \in C} c(e) = c(C)$$

✓

Max-Flow-Min-Cut

Lemma (Max-Flow-Min-Cut-Lemma).
Für jeden s-t-Schnitt C und s-t-Fluss Φ gilt

$$\Phi(s) \leq c(C)$$

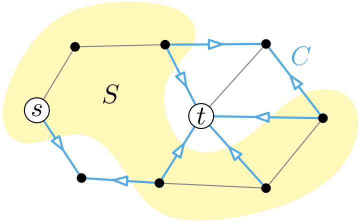
Beweis:

$$\Phi(s) = \sum_{v \in S} \Phi(\{v\}) = \Phi(S) = \sum_{e \in C} \Phi(e) \leq \sum_{e \in C} c(e) = c(C)$$

✓

Satz (Max-Flow-Min-Cut-Theorem).

$$\max \Phi(s) = \min c(C) \qquad \text{(ohne Beweis)}$$

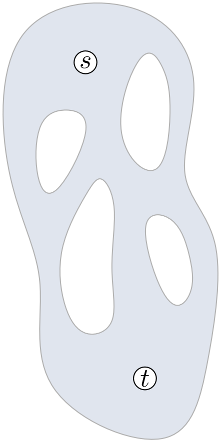


Inklusionsminimalität und Orientierung des Dualgraphen

Neue Aufgabe:

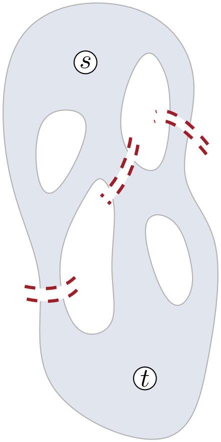
Finde einen s-t-Schnitt mit minimaler Kapazität.

Da $c(e) > 0$ für jede Kante $e \in A$, reicht es *inklusionsminimale* s-t-Schnitte $C \subseteq A$ zu betrachten.



Inklusionsminimalität und Orientierung des Dualgraphen

Neue Aufgabe:
Finde einen s-t-Schnitt mit minimaler Kapazität.
Da $c(e) > 0$ für jede Kante $e \in A$, reicht es *inklusionsminimale* s-t-Schnitte $C \subseteq A$ zu betrachten.

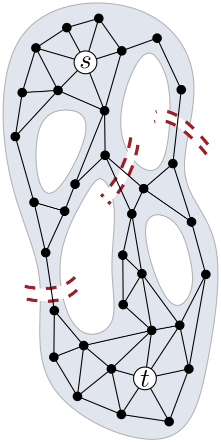


Inklusionsminimalität und Orientierung des Dualgraphen

Neue Aufgabe:

Finde einen s-t-Schnitt mit minimaler Kapazität.

Da $c(e) > 0$ für jede Kante $e \in A$, reicht es *inklusionsminimale* s-t-Schnitte $C \subseteq A$ zu betrachten.

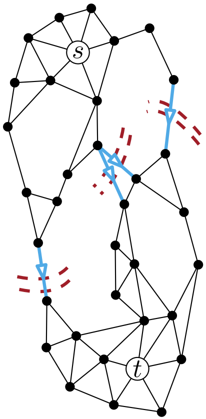


Inklusionsminimalität und Orientierung des Dualgraphen

Neue Aufgabe:

Finde einen s-t-Schnitt mit minimaler Kapazität.

Da $c(e) > 0$ für jede Kante $e \in A$, reicht es *inklusionsminimale* s-t-Schnitte $C \subseteq A$ zu betrachten.

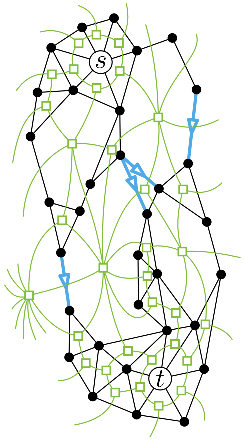


Inklusionsminimalität und Orientierung des Dualgraphen

Neue Aufgabe:

Finde einen s-t-Schnitt mit minimaler Kapazität.

Da $c(e) > 0$ für jede Kante $e \in A$, reicht es *inklusionsminimale* s-t-Schnitte $C \subseteq A$ zu betrachten.

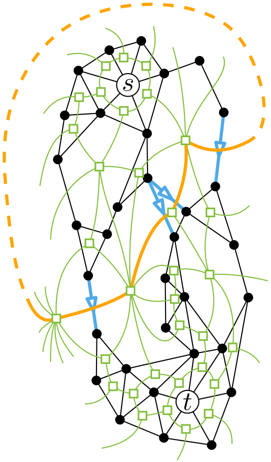


Inklusionsminimalität und Orientierung des Dualgraphen

Neue Aufgabe:

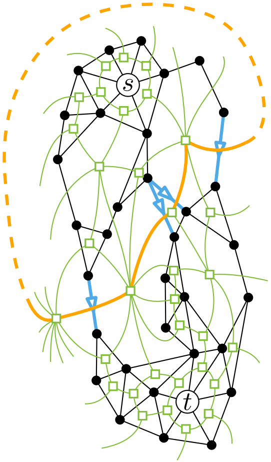
Finde einen s-t-Schnitt mit minimaler Kapazität.

Da $c(e) > 0$ für jede Kante $e \in A$, reicht es *inklusionsminimale* s-t-Schnitte $C \subseteq A$ zu betrachten.



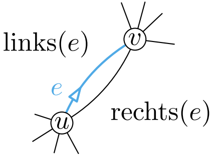
Inklusionsminimalität und Orientierung des Dualgraphen

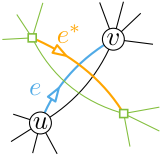
Neue Aufgabe:
Finde einen s-t-Schnitt mit minimaler Kapazität.
Da $c(e) > 0$ für jede Kante $e \in A$, reicht es *inklusionsminimale* s-t-Schnitte $C \subseteq A$ zu betrachten.



Definition.

Der **gerichtete Dualgraph** $D^* = (V^*, A^*)$ zu D:
Für $e = uv$ in D sei links(e) und rechts(e) die links bzw. rechts von e liegende Facette, wenn man über e von u nach v geht.
In D^* sei die Dualkante e^* von links(e) nach rechts(e) orientiert.

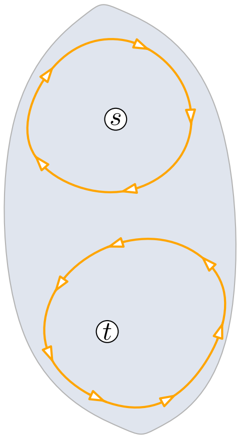




s-t-Kreise

Definition.

Ein ***s*-*t*-Kreis** ist ein einfacher gerichteter Kreis in D^* mit s auf der rechten und t auf der linken Seite.



s-t-Kreise

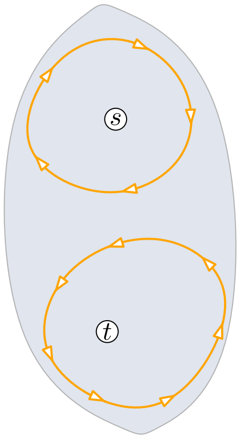
Definition.

Ein **s-t-Kreis** ist ein einfacher gerichteter Kreis in D^* mit s auf der rechten und t auf der linken Seite.

Lemma.

Sei $C \subseteq A$ eine Kantenmenge und $C^* \subseteq A^*$ die dazu duale Kantenmenge. Dann gilt:

$$C \text{ ist ein } s\text{-}t\text{-Schnitt} \Leftrightarrow C^* \text{ ist ein } s\text{-}t\text{-Kreis.}$$



s-t-Kreise

Definition.

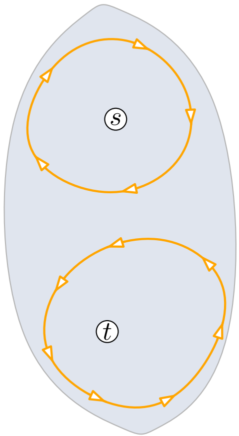
Ein **s-t-Kreis** ist ein einfacher gerichteter Kreis in D^* mit s auf der rechten und t auf der linken Seite.

Lemma.

Sei $C \subseteq A$ eine Kantenmenge und $C^* \subseteq A^*$ die dazu duale Kantenmenge. Dann gilt:

$$C \text{ ist ein } s\text{-}t\text{-Schnitt} \Leftrightarrow C^* \text{ ist ein } s\text{-}t\text{-Kreis.}$$

Wir setzen $l(e^*) := c(e)$ für jede Kante $e \in A$ und interpretieren das als *Länge der Dualkante e^**.

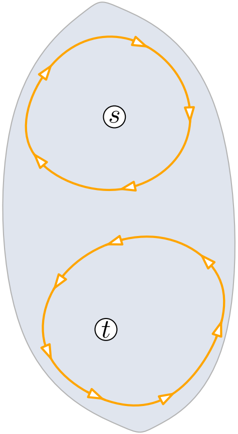


Kürzeste Kreise

<u>Neue Aufgabe:</u>
Finde einen s-t-Kreis minimaler Länge.

Problem SHORTEST CYCLE.

Gegeben einen gerichteten, gewichteten Graphen, finde einen kürzesten Kreis.

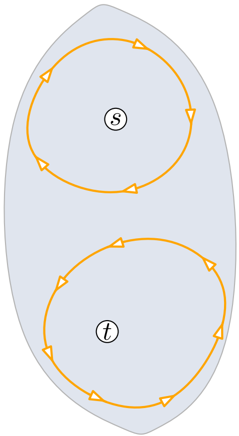


Kürzeste Kreise

Neue Aufgabe:
Finde einen *s*-*t*-Kreis minimaler Länge.

Problem Shortest Cycle.
Gegeben einen gerichteten, gewichteten Graphen, finde einen kürzesten Kreis.

- Im Allgemeinen $\mathcal{NP}$-schwer (auch in planaren Graphen).
- Ist $l(e) > 0$ für alle e, dann polynomiell lösbar ($\longrightarrow$ Dijkstra).
- Gibt es keine Kreise negativer Länge, dann auch poly. lösbar ($\longrightarrow$ Bellman-Ford)

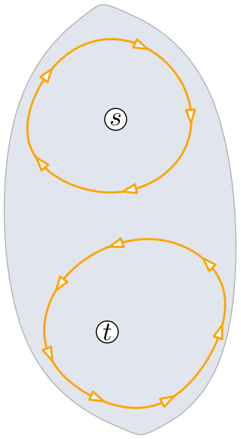


Kürzeste Kreise

<u>Neue Aufgabe:</u>
Finde einen s-t-Kreis minimaler Länge.

Problem SHORTEST CYCLE.
Gegeben einen gerichteten, gewichteten Graphen, finde einen kürzesten Kreis.

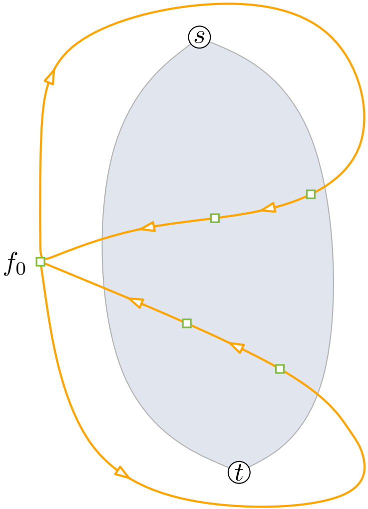
- Im Allgemeinen $\mathcal{NP}$-schwer (auch in planaren Graphen).
- Ist $l(e) > 0$ für alle e, dann polynomiell lösbar ($\longrightarrow$ Dijkstra).
- Gibt es keine Kreise negativer Länge, dann auch poly. lösbar ($\longrightarrow$ Bellman-Ford)
- Wir haben es einfacher: Suchen nach einem s-t-Kreis.



s und t auf der gleichen Facette

Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.

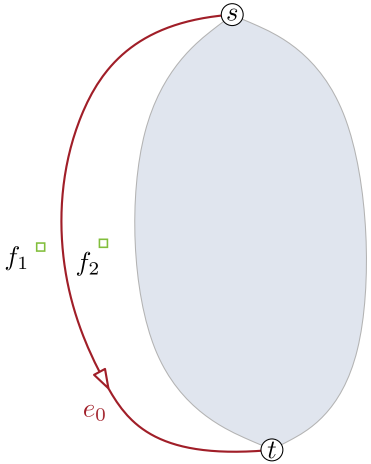
- O.B.d.A. liegen s und t an der äußeren Facette.
- Jeder s-t-Kreis muss die äußere Facette f_0 (als Dualknoten) enthalten.



s und t auf der gleichen Facette

Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.

- O.B.d.A. liegen s und t an der äußeren Facette.
- Jeder s-t-Kreis muss die äußere Facette f_0 (als Dualknoten) enthalten.
- Füge neue Kante $e_0 = st$ in äußere Facette ein.
- Setze $c(e_0) = 0$
- Dies spaltet die äußere Facette f_0 in $f_1 = \text{rechts}(e_0)$ und $f_2 = \text{links}(e_0)$.

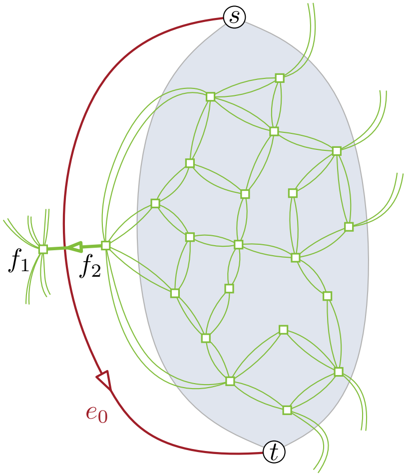


s und t auf der gleichen Facette

Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.

- O.B.d.A. liegen s und t an der äußeren Facette.
- Jeder s-t-Kreis muss die äußere Facette f_0 (als Dualknoten) enthalten.
- Füge neue Kante $e_0 = st$ in äußere Facette ein.
- Setze $c(e_0) = 0$
- Dies spaltet die äußere Facette f_0 in $f_1 = \text{rechts}(e_0)$ und $f_2 = \text{links}(e_0)$.
- Das Resultat ist $D_+ = D + e_0$.
- Berechne Dual D_+^* mit $l(e^*) := c(e)$.
- Berechne kürzesten Weg von f_1 nach f_2.

$$\text{dist}(f_1, f_2) = \min c(C) = \max \Phi(s)$$

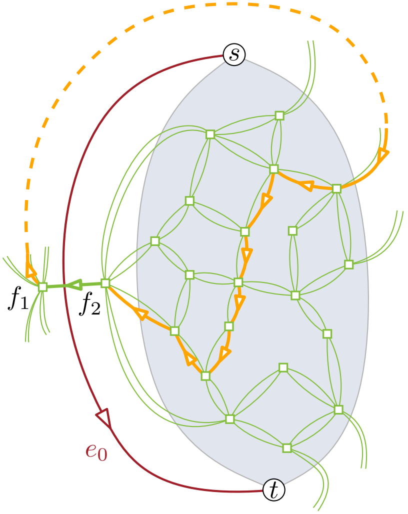


s und t auf der gleichen Facette

Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.

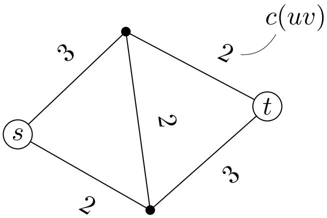
- O.B.d.A. liegen s und t an der äußeren Facette.
- Jeder s-t-Kreis muss die äußere Facette f_0 (als Dualknoten) enthalten.
- Füge neue Kante $e_0 = st$ in äußere Facette ein.
- Setze $c(e_0) = 0$
- Dies spaltet die äußere Facette f_0 in $f_1 = \text{rechts}(e_0)$ und $f_2 = \text{links}(e_0)$.
- Das Resultat ist $D_+ = D + e_0$.
- Berechne Dual D_+^* mit $l(e^*) := c(e)$.
- Berechne kürzesten Weg von f_1 nach f_2.

$$\text{dist}(f_1, f_2) = \min c(C) = \max \Phi(s)$$



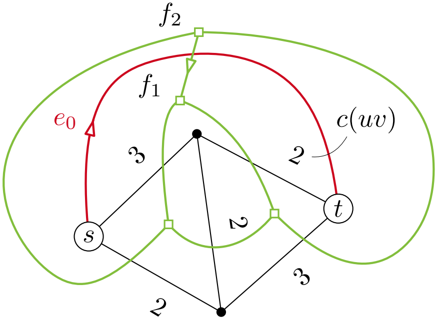
s und t auf der gleichen Facette

Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.



s und t auf der gleichen Facette

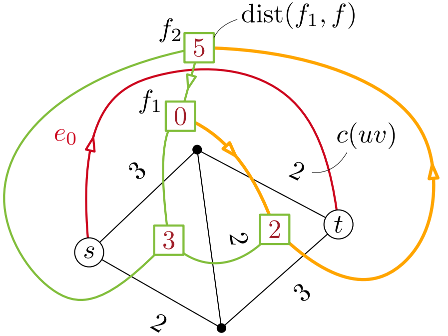
Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.



s und t auf der gleichen Facette

Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.

- $\text{dist}(f_1, f)$ = kürzeste Distanz von f_1 zu f in D_+^*.

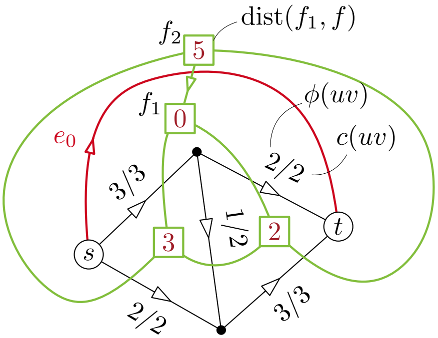


s und t auf der gleichen Facette

Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.

- $\text{dist}(f_1, f)$ = kürzeste Distanz von f_1 zu f in D_+^*.
- Berechne daraus einen maximalen Fluss Φ:

$$\Phi(e) := \text{dist}(f_1, \text{rechts}(e)) - \text{dist}(f_1, \text{links}(e))$$



s und t auf der gleichen Facette

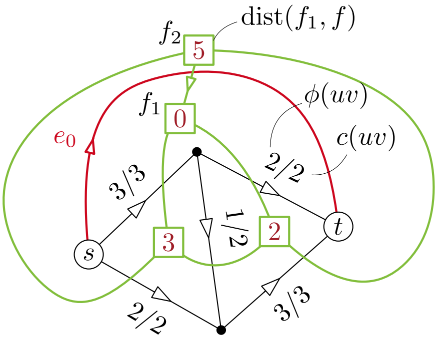
Karlsruher Institut für Technologie

Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.

- $\mathrm{dist}(f_1, f)$ = kürzeste Distanz von f_1 zu f in D_+^*.
- Berechne daraus einen maximalen Fluss Φ:

$$\Phi(e) := \mathrm{dist}(f_1, \mathrm{rechts}(e)) - \mathrm{dist}(f_1, \mathrm{links}(e))$$

- *Überprüfe Eigenschaften* eines Flusses:
  - Antisymmetrie: $\Phi(uv) = -\Phi(vu)$ für alle $uv \in A$. ✓



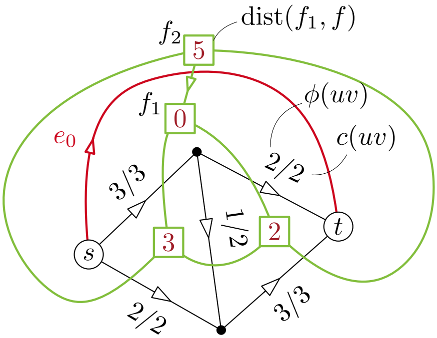
s und t auf der gleichen Facette

Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.

- $\mathrm{dist}(f_1, f)$ = kürzeste Distanz von f_1 zu f in D_+^*.
- Berechne daraus einen maximalen Fluss Φ:

$$\Phi(e) := \mathrm{dist}(f_1, \mathrm{rechts}(e)) - \mathrm{dist}(f_1, \mathrm{links}(e))$$

- *Überprüfe Eigenschaften* eines Flusses:
  - Antisymmetrie: $\Phi(uv) = -\Phi(vu)$ für alle $uv \in A$. ✓
  - Zulässigkeit: $\Phi(uv) \leq c(uv)$ für alle $uv \in A$. ✓



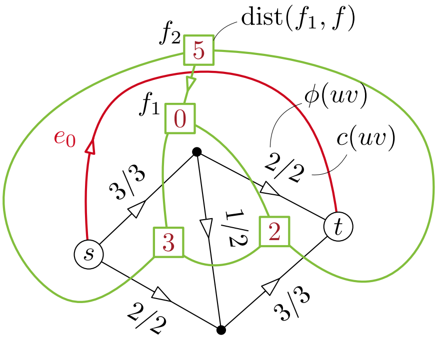
s und t auf der gleichen Facette

Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.

- $\mathrm{dist}(f_1, f)$ = kürzeste Distanz von f_1 zu f in D_+^*.
- Berechne daraus einen maximalen Fluss Φ:

$$\Phi(e) := \mathrm{dist}(f_1, \mathrm{rechts}(e)) - \mathrm{dist}(f_1, \mathrm{links}(e))$$

- *Überprüfe Eigenschaften* eines Flusses:
  - Antisymmetrie: $\Phi(uv) = -\Phi(vu)$ für alle $uv \in A$. ✓
  - Zulässigkeit: $\Phi(uv) \leq c(uv)$ für alle $uv \in A$. ✓
  - Flusserhaltung: $\sum_{uv \in A} \Phi(uv) = 0$ für alle $u \neq s, t$. ✓



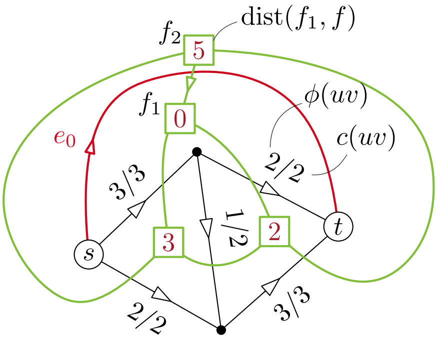
s und t auf der gleichen Facette

Spezialfall: s und t liegen an einer gemeinsamen Facette.

- $\text{dist}(f_1, f)$ = kürzeste Distanz von f_1 zu f in D_+^*.
- Berechne daraus einen maximalen Fluss Φ:

$$\Phi(e) := \text{dist}(f_1, \text{rechts}(e)) - \text{dist}(f_1, \text{links}(e))$$

- *Überprüfe Eigenschaften* eines Flusses:
  - Antisymmetrie: $\Phi(uv) = -\Phi(vu)$ für alle $uv \in A$. ✓
  - Zulässigkeit: $\Phi(uv) \leq c(uv)$ für alle $uv \in A$. ✓
  - Flusserhaltung: $\sum_{uv \in A} \Phi(uv) = 0$ für alle $u \neq s, t$. ✓



Satz.

Für planare Graphen mit s und t an einer gemeinsamen Facette, kann ein Max-Flow in Linearzeit gefunden werden.

s und t an beliebigen Facetten

Der allgemeine Fall:

- Wähle einen gerichteten Pfad P von s nach t.
- Sei $C^* \subseteq A^*$ ein gerichteter Kreis im Dualen und $C \subseteq A$ der entsprechende Schnitt im Primalen.
- Ist C^* ein s-t-Kreis, dann gilt

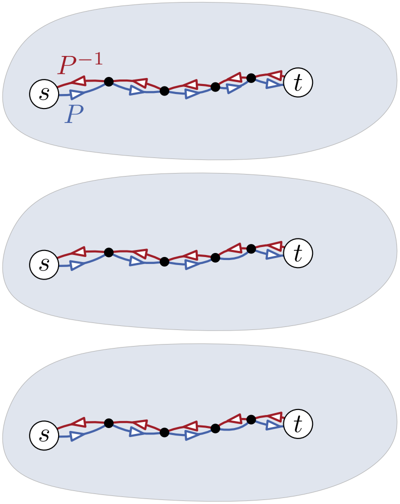
$$|C^* \cap P^*| = |C^* \cap {P^{-1}}^*| + 1$$

- Ist C^* ein t-s-Kreis, dann gilt

$$|C^* \cap P^*| = |C^* \cap {P^{-1}}^*| - 1$$

- Ansonsten gilt

$$|C^* \cap P^*| = |C^* \cap {P^{-1}}^*|$$



s und t an beliebigen Facetten

Der allgemeine Fall:

- Wähle einen gerichteten Pfad P von s nach t.
- Sei $C^* \subseteq A^*$ ein gerichteter Kreis im Dualen und $C \subseteq A$ der entsprechende Schnitt im Primalen.
- Ist C^* ein s-t-Kreis, dann gilt

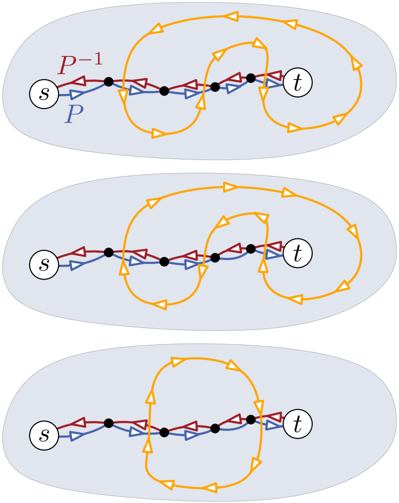
$$|C^* \cap P^*| = |C^* \cap P^{-1*}| + 1$$

- Ist C^* ein t-s-Kreis, dann gilt

$$|C^* \cap P^*| = |C^* \cap P^{-1*}| - 1$$

- Ansonsten gilt

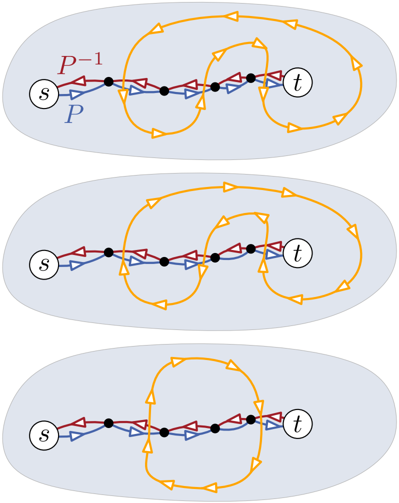
$$|C^* \cap P^*| = |C^* \cap P^{-1*}|$$



s und t an beliebigen Facetten

Der allgemeine Fall:

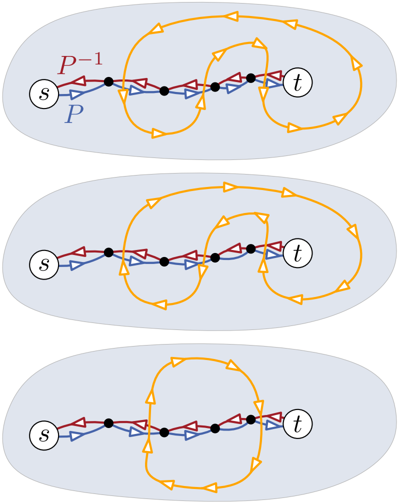
- Verringert man alle Kapazitäten der Kanten auf P um α
- und erhöht alle Kapazitäten der Kanten auf P^{-1} um α, so wird
  - jeder s-t-Kreis um genau α kürzer,
  - jeder t-s-Kreis um genau α länger,
  - jeder andere Kreis weder länger noch kürzer.



s und *t* an beliebigen Facetten

Der allgemeine Fall:

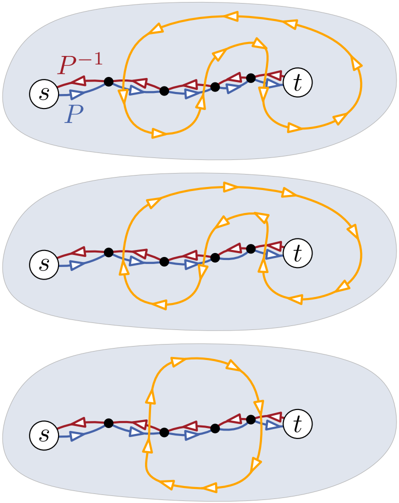
- Verringert man alle Kapazitäten der Kanten auf P um α
- und erhöht alle Kapazitäten der Kanten auf P^{-1} um α, so wird
  - jeder *s*-*t*-Kreis um genau α kürzer,
  - jeder *t*-*s*-Kreis um genau α länger,
  - jeder andere Kreis weder länger noch kürzer.
- Anfangs waren alle Kantenlängen und damit auch alle Kreislängen positiv.
- Wählt man $\alpha > 0$ groß genug, werden Kreise negative Länge bekommen –aber nur *s*-*t*-Kreise!
- Ein Kreis, der bei kleinstem α negative Länge bekommt ist ein kürzester *s*-*t*-Kreis.



s und t an beliebigen Facetten

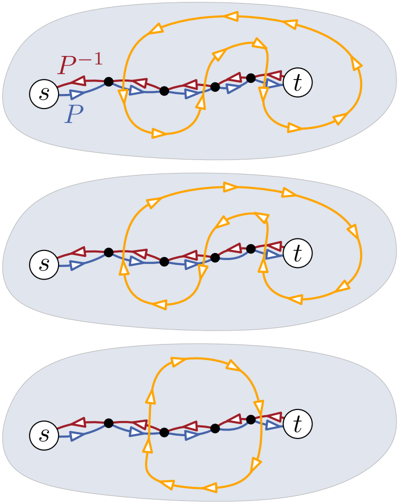
Der allgemeine Fall:
Finde jetzt also maximales α so, dass noch keine negativen Kreise entstehen.

Satz.
Dieses maximale α kann in $\mathcal{O}(n \log n)$ bestimmt werden.



s und t an beliebigen Facetten

Der allgemeine Fall:
Finde jetzt also maximales α so, dass noch keine negativen Kreise entstehen.



Satz.
Dieses maximale α kann in $\mathcal{O}(n \log n)$ bestimmt werden.

Korollar.
MAX-FLOW in planaren Graphen kann in $\mathcal{O}(n \log n)$ berechnet werden.