Algorithmen für Planare Graphen

Vorlesung am 05.07.2022

Torsten Ueckerdt | 05. Juli 2022

Wiederholung: Rückkehr- und Tiefpunkte

Erinnerung: Wir betrachten einen DFS-Baum mit Orientierung.

Definition.

Sei e eine Kante. Eine Nichtbaumkante (x, y) heißt **Rückkante von e**, wenn e auf dem Fundamentalkreis von (x, y) liegt.
Dann nennt man y einen **Rückkehrpunkt von e**.

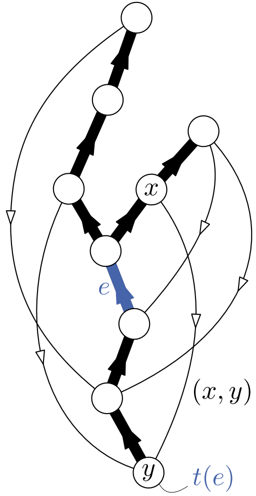
Ist e eine Nichtbaumkante, so ist e seine einzige und eigene Rückkante mit eindeutigem Rückkehrpunkt.

Definition.

Sei e eine Kante. Der tiefste Rückkehrpunkt von e

$$t(e) := \text{ kleinste DFS-Zahl eines Rückkehrpunktes}$$

nennt man den **Tiefpunkt von e**.



Wiederholung: Gabeln und Konflikte

Definition.

Eine **Gabel** sind zwei Kanten mit dem gleichen Startpunkt, also $e_1 = (u, v_1)$ und $e_2 = (u, v_2)$.

Definition.

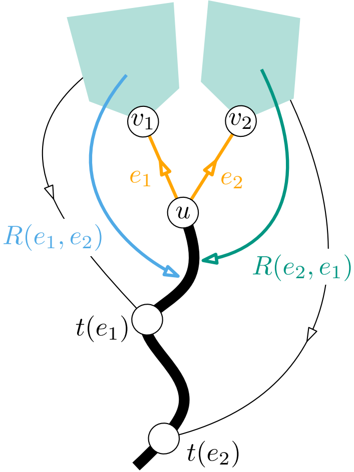
Für eine Gabel $e_1 = uv_1$, $e_2 = uv_2$ definiere die Mengen

$$R(e_1, e_2) := \{e \text{ Rückkante von } e_1 \text{ mit } t(e_2) < t(e) < u\}$$

$$R(e_2, e_1) := \{e \text{ Rückkante von } e_2 \text{ mit } t(e_1) < t(e) < u\}$$

Zwei Kanten f_1, f_2 haben einen **Konflikt** bezüglich e_1, e_2 wenn

- $f_1, f_2 \in R(e_1, e_2)$ oder $f_1, f_2 \in R(e_2, e_1)$ (Gleichheitskonflikt).
- $f_1 \in R(e_1, e_2)$ und $f_2 \in R(e_2, e_1)$ oder umgekehrt (Ungleichheitskonflikt).

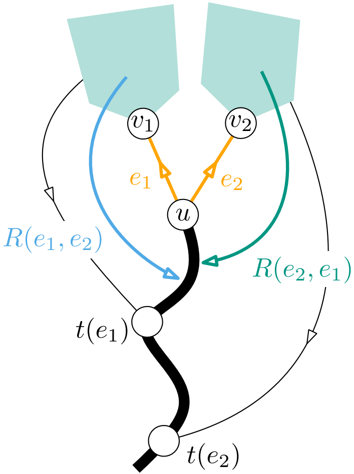


LR-Zerlegung

Definition.

Eine ***LR*-Zerlegung** ist eine Partition der Nichtbaumkanten in *L* und *R*, sodass je zwei Kanten f_1, f_2

- mit Gleichheitskonflikt in der gleichen Menge liegen.
- mit Ungleichheitskonflikt in unterschiedlichen Mengen sind.



LR-Zerlegung

Definition.

Eine *LR*-**Zerlegung** ist eine Partition der Nichtbaumkanten in L und R, sodass je zwei Kanten f_1, f_2

- mit Gleichheitskonflikt in der gleichen Menge liegen.
- mit Ungleichheitskonflikt in unterschiedlichen Mengen sind.

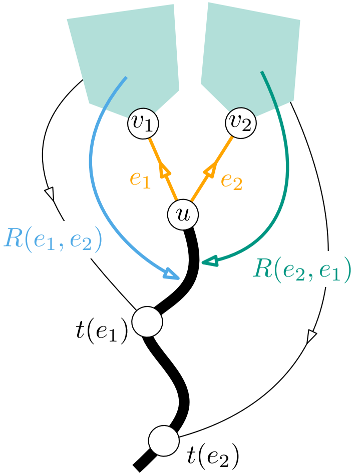
Satz.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(*i*) G ist planar.

(*ii*) Es gibt eine *LR*-Zerlegung bezüglich einer Tiefensuche.

(*iii*) Es gibt zu jeder Tiefensuche eine *LR*-Zerlegung.



Planaritätstest basierend auf *LR*-Zerlegung

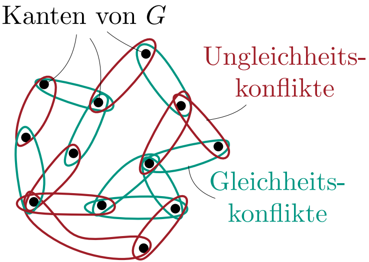
Mit dem Satz erhalten wir einen einfachen Planaritätstest:

- Tiefensuche auf Graph durchführen. $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(|V(G)|)$
- Bestimme naiv alle Kantenkonflikte. $\mathcal{O}(n^2)$

Planaritätstest basierend auf *LR*-Zerlegung

Mit dem Satz erhalten wir einen einfachen Planaritätstest:

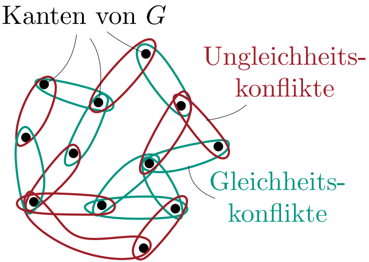
- Tiefensuche auf Graph durchführen. $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(|V(G)|)$
- Bestimme naiv alle Kantenkonflikte. $\mathcal{O}(n^2)$
- Baue Hilfsgraph H mit
  - Knoten in H sind Kanten von G.
  - Kanten in H sind Ungleichheitskonflikte in G.
  - Knoten in H werden verschmolzen, wenn sie einen Gleichheitskonflikt haben.

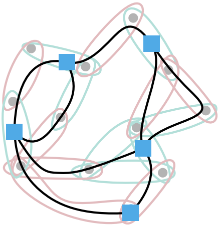


Planaritätstest basierend auf *LR*-Zerlegung

Mit dem Satz erhalten wir einen einfachen Planaritätstest:

- Tiefensuche auf Graph durchführen. $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(|V(G)|)$
- Bestimme naiv alle Kantenkonflikte. $\mathcal{O}(n^2)$
- Baue Hilfsgraph H mit
  - Knoten in H sind Kanten von G.
  - Kanten in H sind Ungleichheitskonflikte in G.
  - Knoten in H werden verschmolzen, wenn sie einen Gleichheitskonflikt haben.

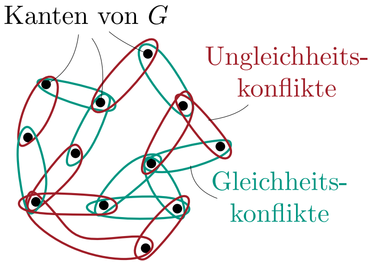


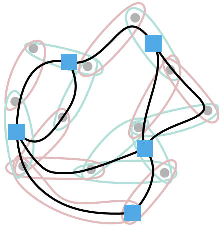


Planaritätstest basierend auf *LR*-Zerlegung

Mit dem Satz erhalten wir einen einfachen Planaritätstest:

- Tiefensuche auf Graph durchführen. $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(|V(G)|)$
- Bestimme naiv alle Kantenkonflikte. $\mathcal{O}(n^2)$
- Baue Hilfsgraph H mit
  - Knoten in H sind Kanten von G.
  - Kanten in H sind Ungleichheitskonflikte in G.
  - Knoten in H werden verschmolzen, wenn sie einen Gleichheitskonflikt haben.
- *LR*-Zerlegung von G existiert $\Leftrightarrow$ H ist bipartit.
- Test auf Bipartitheit geht in $\mathcal{O}(|E(H)|) = \mathcal{O}(n^2)$.

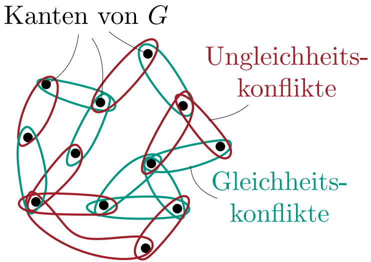


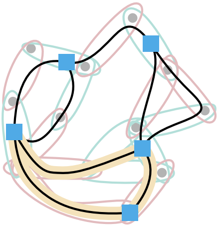


Planaritätstest basierend auf *LR*-Zerlegung

Mit dem Satz erhalten wir einen einfachen Planaritätstest:

- Tiefensuche auf Graph durchführen. $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(|V(G)|)$
- Bestimme naiv alle Kantenkonflikte. $\mathcal{O}(n^2)$
- Baue Hilfsgraph H mit
  - Knoten in H sind Kanten von G.
  - Kanten in H sind Ungleichheitskonflikte in G.
  - Knoten in H werden verschmolzen, wenn sie einen Gleichheitskonflikt haben.
- LR-Zerlegung von G existiert $\Leftrightarrow$ H ist bipartit.
- Test auf Bipartitheit geht in $\mathcal{O}(|E(H)|) = \mathcal{O}(n^2)$.

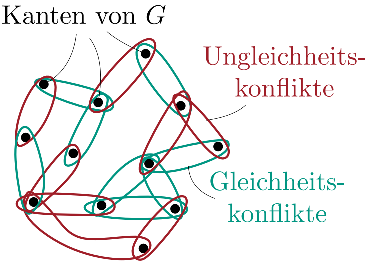


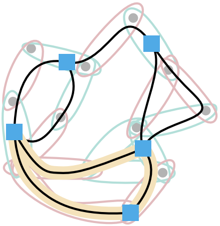


Planaritätstest basierend auf *LR*-Zerlegung

Mit dem Satz erhalten wir einen einfachen Planaritätstest:

- Tiefensuche auf Graph durchführen. $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(|V(G)|)$
- Bestimme naiv alle Kantenkonflikte. $\mathcal{O}(n^2)$
- Baue Hilfsgraph H mit
  - Knoten in H sind Kanten von G.
  - Kanten in H sind Ungleichheitskonflikte in G.
  - Knoten in H werden verschmolzen, wenn sie einen Gleichheitskonflikt haben.
- *LR*-Zerlegung von G existiert $\Leftrightarrow$ H ist bipartit.
- Test auf Bipartitheit geht in $\mathcal{O}(|E(H)|) = \mathcal{O}(n^2)$.





Damit haben wir einen Planaritätstest in $\mathcal{O}(n^2)$.
Eine Beschleunigung auf $\mathcal{O}(n)$ ist aber möglich.

Hinweise zum Korrektheitsbeweis

Satz.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

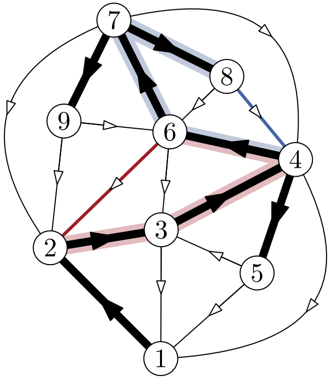
(*i*) G ist planar.

(*ii*) Es gibt eine *LR*-Zerlegung bezüglich einer Tiefensuche.

(*iii*) Es gibt zu jeder Tiefensuche eine *LR*-Zerlegung.

G planar $\Rightarrow$ G hat *LR*-Zerlegung:

- Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.
- Einbettung des gerichteten *DFS*-Baumes.
- Nichtbaumkante e ist in L, wenn der Fundamentalkreis zu e gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist.
- Nichtbaumkante e ist in R, wenn der Fundamentalkreis zu e im Uhrzeigersinn orientiert ist.



Hinweise zum Korrektheitsbeweis

Satz.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

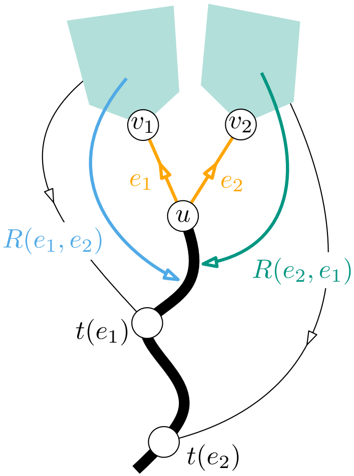
(*i*) G ist planar.

(*ii*) Es gibt eine *LR*-Zerlegung bezüglich einer Tiefensuche.

(*iii*) Es gibt zu jeder Tiefensuche eine *LR*-Zerlegung.

G planar $\Rightarrow$ G hat *LR*-Zerlegung:

- Zeige, dass diese Einteilung in L und R alle Konflikte erfüllt:



Hinweise zum Korrektheitsbeweis

Satz.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

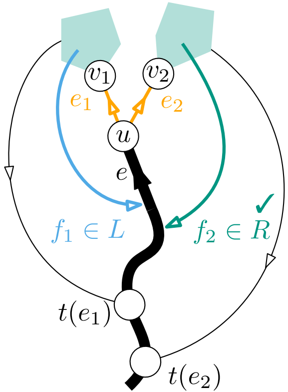
(i) G ist planar.

(ii) Es gibt eine LR-Zerlegung bezüglich einer Tiefensuche.

(iii) Es gibt zu jeder Tiefensuche eine LR-Zerlegung.

G planar $\Rightarrow$ G hat LR-Zerlegung:

- Zeige, dass diese Einteilung in L und R alle Konflikte erfüllt:
- Betrachte eine Gabel e_1, e_2 an Gabelknoten u mit eingehender Baumkante e.
- Seien o.B.d.A. e, e_1, e_2 in dieser cw-Reihenfolge um u.
- Sei o.B.d.A. $t(e_1) \geq t(e_2)$.
- Betrachte $f_1 \in R(e_1, e_2)$ und $f_2 \in R(e_2, e_1)$.



Hinweise zum Korrektheitsbeweis

Satz.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

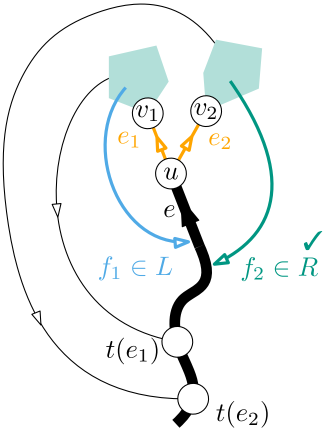
(*i*) *G* ist planar.

(*ii*) Es gibt eine *LR*-Zerlegung bezüglich einer Tiefensuche.

(*iii*) Es gibt zu jeder Tiefensuche eine *LR*-Zerlegung.

G planar $\Rightarrow$ *G* hat *LR*-Zerlegung:

- Zeige, dass diese Einteilung in *L* und *R* alle Konflikte erfüllt:
- Betrachte eine Gabel e_1, e_2 an Gabelknoten u mit eingehender Baumkante e.
- Seien o.B.d.A. e, e_1, e_2 in dieser cw-Reihenfolge um u.
- Sei o.B.d.A. $t(e_1) \geq t(e_2)$.
- Betrachte $f_1 \in R(e_1, e_2)$ und $f_2 \in R(e_2, e_1)$.



Hinweise zum Korrektheitsbeweis

Satz.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

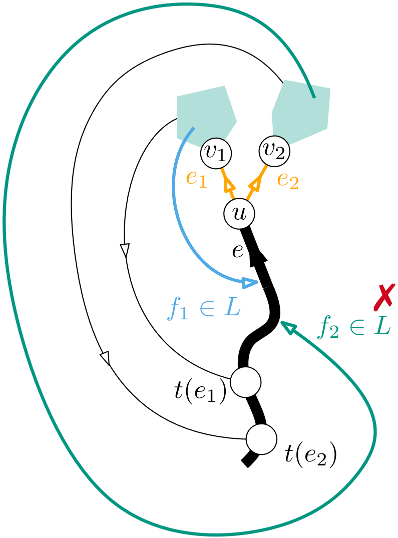
(*i*) *G* ist planar.

(*ii*) Es gibt eine *LR*-Zerlegung bezüglich einer Tiefensuche.

(*iii*) Es gibt zu jeder Tiefensuche eine *LR*-Zerlegung.

G planar $\Rightarrow$ *G* hat *LR*-Zerlegung:

- Zeige, dass diese Einteilung in *L* und *R* alle Konflikte erfüllt:
- Betrachte eine Gabel e_1, e_2 an Gabelknoten u mit eingehender Baumkante e.
- Seien o.B.d.A. e, e_1, e_2 in dieser cw-Reihenfolge um u.
- Sei o.B.d.A. $t(e_1) \geq t(e_2)$.
- Betrachte $f_1 \in R(e_1, e_2)$ und $f_2 \in R(e_2, e_1)$.



Hinweise zum Korrektheitsbeweis

Karlsruher Institut für Technologie

G hat LR-Zerlegung $\Rightarrow$ G ist planar:

- Betrachte eine LR-Zerlegung
- Konstruiere eine planare Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.

Hinweise zum Korrektheitsbeweis

G hat LR-Zerlegung $\Rightarrow$ G ist planar:

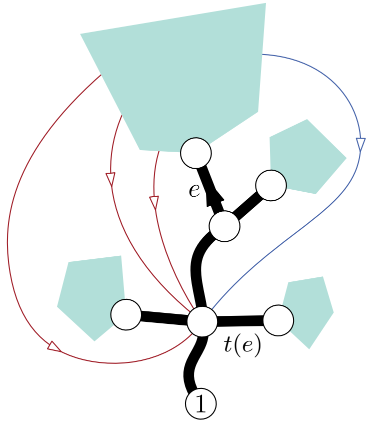
- Betrachte eine LR-Zerlegung
- Konstruiere eine planare Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.

Schritt 1: LR-Zerlegung bündeln.

- Eine LR-Zerlegung heißt **gebündelt** wenn zu jeder Kante e alle Rückkanten von e mit Rückkehrpunkt $t(e)$ in der gleichen Menge (L oder R) liegen.

Lemma. (Ohne Beweis)

Jede LR-Zerlegung kann gebündelt werden, also in eine gebündelte LR-Zerlegung überführt werden.



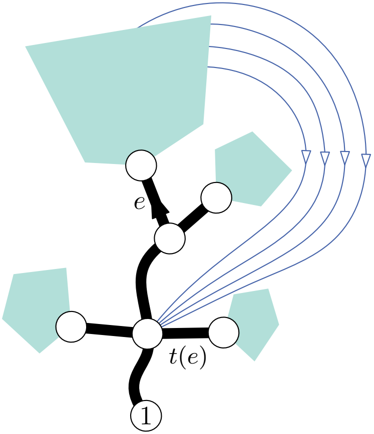
Hinweise zum Korrektheitsbeweis

G hat LR-Zerlegung $\Longrightarrow$ G ist planar:

- Betrachte eine LR-Zerlegung
- Konstruiere eine planare Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.

Schritt 1: LR-Zerlegung bündeln.

- Eine LR-Zerlegung heißt **gebündelt** wenn zu jeder Kante e alle Rückkanten von e mit Rückkehrpunkt $t(e)$ in der gleichen Menge (L oder R) liegen.



Lemma. (Ohne Beweis)

Jede LR-Zerlegung kann gebündelt werden, also in eine gebündelte LR-Zerlegung überführt werden.

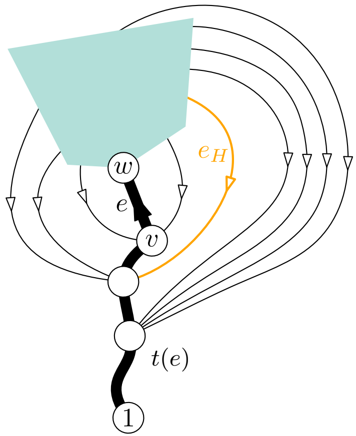
Hinweise zum Korrektheitsbeweis

G hat LR-Zerlegung $\Rightarrow$ G ist planar:

- Betrachte eine LR-Zerlegung
- Konstruiere eine planare Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.

Schritt 2: LR-Zerlegung auf Baumkanten erweitern.

- Sei $e = vw$ eine Baumkante.
- Betrachte Rückkanten von e deren Rückkehrpunkt nicht v ist.
- Sei e_H eine solche Rückkante von e deren Rückkehrpunkt die höchste DFS-Zahl hat.
- Füge e der Menge in der e_H ist hinzu.



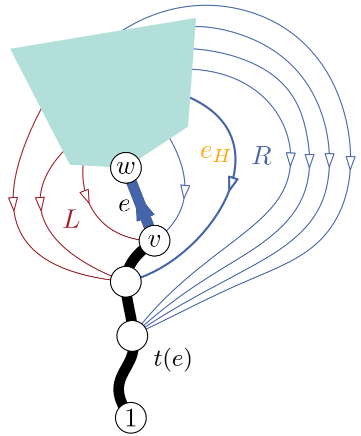
Hinweise zum Korrektheitsbeweis

G hat LR-Zerlegung $\Rightarrow$ G ist planar:

- Betrachte eine LR-Zerlegung
- Konstruiere eine planare Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.

Schritt 2: LR-Zerlegung auf Baumkanten erweitern.

- Sei $e = vw$ eine Baumkante.
- Betrachte Rückkanten von e deren Rückkehrpunkt nicht v ist.
- Sei e_H eine solche Rückkante von e deren Rückkehrpunkt die höchste DFS-Zahl hat.
- Füge e der Menge in der e_H ist hinzu.



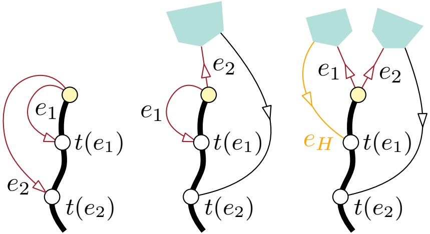
Hinweise zum Korrektheitsbeweis

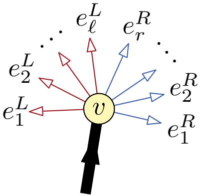
G hat LR-Zerlegung $\Rightarrow$ G ist planar:

- Betrachte eine LR-Zerlegung
- Konstruiere eine planare Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.

Schritt 3: Reihenfolge der ausgehenden Kanten festlegen.

- Für Knoten v und ausgehende Kanten $e_1, e_2 \in L$ definiere $e_1 \prec e_2$ wenn
  - entweder $t(e_2) < t(e_1)$
  - oder $t(e_2) = t(e_1)$ und e_1 hat noch weiteren Rückkehrpunkt.
- Im Uhrzeigersinn ist die Ordnung der L-Kanten um v dann $e_1^L \prec e_2^L \prec \cdots \prec e_\ell^L$.
- L-Kanten sind also von innen nach außen sortiert.
- Für R-Kanten ist die Sortierung genau andersrum.

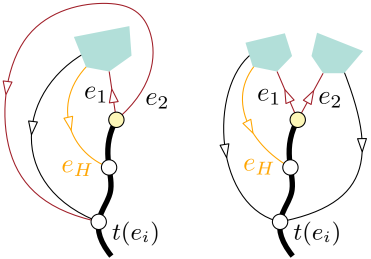




Hinweise zum Korrektheitsbeweis

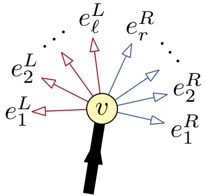
G hat LR-Zerlegung $\Rightarrow$ G ist planar:

- Betrachte eine LR-Zerlegung
- Konstruiere eine planare Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.



Schritt 3: Reihenfolge der ausgehenden Kanten festlegen.

- Für Knoten v und ausgehende Kanten $e_1, e_2 \in L$ definiere $e_1 \prec e_2$ wenn
  - entweder $t(e_2) < t(e_1)$
  - oder $t(e_2) = t(e_1)$ und e_1 hat noch weiteren Rückkehrpunkt.
- Im Uhrzeigersinn ist die Ordnung der L-Kanten um v dann $e_1^L \prec e_2^L \prec \cdots \prec e_\ell^L$.
- L-Kanten sind also von innen nach außen sortiert.
- Für R-Kanten ist die Sortierung genau andersrum.



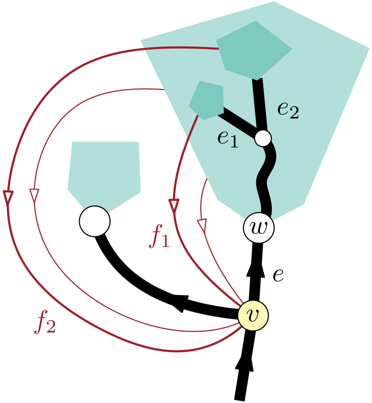
Hinweise zum Korrektheitsbeweis

G hat LR-Zerlegung $\Rightarrow$ G ist planar:

- Betrachte eine LR-Zerlegung
- Konstruiere eine planare Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.

Schritt 4: Reihenfolge der eingehenden Kanten an v zur gleichen Baumkante $e = (v, w)$.

- Betrachte die eingehenden Kanten in L:
  $L(e) = \{\text{Rückkante von } e \text{ eingehend an } v\} \cap L$.
- Je zwei $f_1, f_2 \in L(e)$ kommen von einer Gabel e_1, e_2 wobei f_i Rückkante von e_i ist.
- O.B.d.A. gilt am Gabelknoten $e_1 \prec e_2$ aus Schritt 3.
- Setze dann $f_2 \prec f_1$ an v, also umgekehrt.
- Verfahre genauso für eingehende Kanten in R.



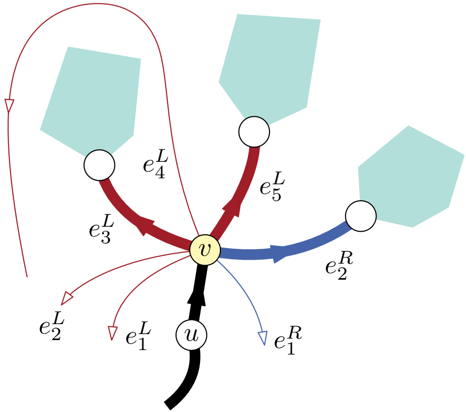
Hinweise zum Korrektheitsbeweis

G hat LR-Zerlegung $\Rightarrow$ G ist planar:

- Betrachte eine LR-Zerlegung
- Konstruiere eine planare Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.

Schritt 5: Inzidente Kanten an v zyklisch sortieren.

- $e_1^L, \ldots, e_\ell^L, e_r^R, \ldots, e_1^R$ sortierte ausgehende Kanten



Hinweise zum Korrektheitsbeweis

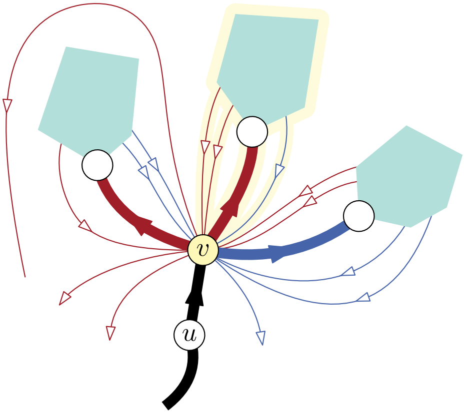
G hat LR-Zerlegung $\Rightarrow$ G ist planar:

- Betrachte eine LR-Zerlegung
- Konstruiere eine planare Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.

Schritt 5: Inzidente Kanten an v zyklisch sortieren.

- $e_1^L, \ldots, e_\ell^L, e_r^R, \ldots, e_1^R$ sortierte ausgehende Kanten
- Betrachte $L(e_i^L), R(e_i^L)$ bzw. $L(e_j^R), R(e_j^R)$ mit der in Schritt 4 festgelegten Reihenfolge.
- Für Nichtbaumkanten e_i^L, e_j^R sind diese Mengen leer.
- Definiere nun die Reihenfolge im Uhrzeigersinn an v als

$$(u, v), L(e_1^L), e_1^L, R(e_1^L), \ldots, L(e_r^R), e_r^R, R(e_r^R)$$



Hinweise zum Korrektheitsbeweis

Karlsruher Institut für Technologie

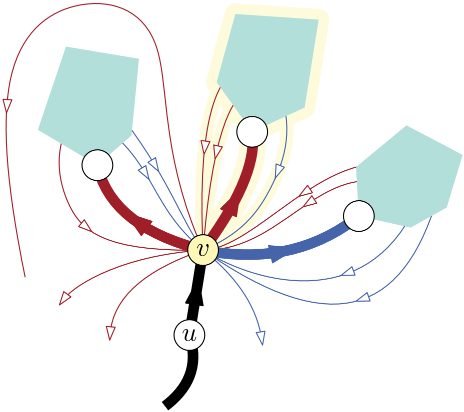
G hat LR-Zerlegung $\Rightarrow$ G ist planar:

- Betrachte eine LR-Zerlegung
- Konstruiere eine planare Einbettung von G mit Knoten 1 an der äußeren Facette.

Schritt 5: Inzidente Kanten an v zyklisch sortieren.

- $e_1^L, \ldots, e_\ell^L, e_r^R, \ldots, e_1^R$ sortierte ausgehende Kanten
- Betrachte $L(e_i^L), R(e_i^L)$ bzw. $L(e_j^R), R(e_j^R)$ mit der in Schritt 4 festgelegten Reihenfolge.
- Für Nichtbaumkanten e_i^L, e_j^R sind diese Mengen leer.
- Definiere nun die Reihenfolge im Uhrzeigersinn an v als

$$(u, v), L(e_1^L), e_1^L, R(e_1^L), \ldots, L(e_r^R), e_r^R, R(e_r^R)$$

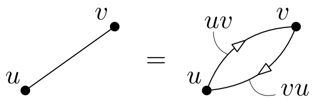


Dieser ganze Prozess kann in $\mathcal{O}(n)$ durchgeführt werden.

Flussnetzwerke

Wir haben **gerichtete** Graphen

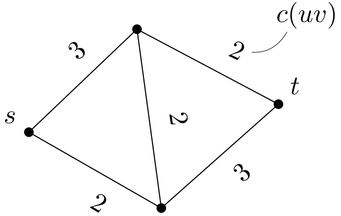
- $D = (V, A)$, eine Kante von u nach v nennen wir uv.
- $uv \neq vu$.
- Wir nehmen an, dass $uv \in A \Leftrightarrow vu \in A$.



Definition.

Ein **Flussnetzwerk** ist ein 4-Tupel $(D = (V, A), c : A \to \mathbb{R}_{>0}, s \in V, t \in V)$ wobei D wie oben, c jeder Kante ihre Kapazität zuordnet, s die Quelle *(engl.: source)* und t die Senke *(engl.: drain/target)* darstellen. Die Kapazität einer Kante ist in beide Richtungen gleich, also

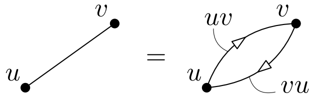
$$c(uv) = c(vu) \quad \forall uv \in A$$

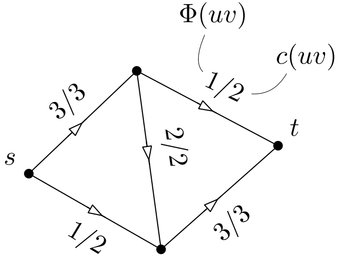


Maximum-Flow

Defintion.

Ein ***s*-*t*-Fluss** bezüglich eines Flussnetzwerkes ist eine Funktion $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder Kante uv ihren Fluss von u nach v zuordnet und Folgendes einhält:



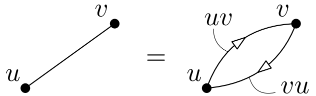


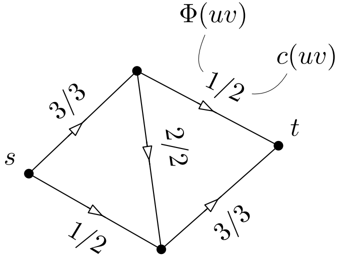
Maximum-Flow

Defintion.

Ein ***s*-*t*-Fluss** bezüglich eines Flussnetzwerkes ist eine Funktion $\Phi : A \to \mathbb{R}$, die jeder Kante uv ihren Fluss von u nach v zuordnet und Folgendes einhält:

- Flusserhaltung: $\sum_{uv \in A} \Phi(uv) = 0$ für jeden Knoten $u \neq s, t$.



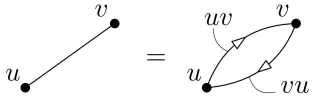


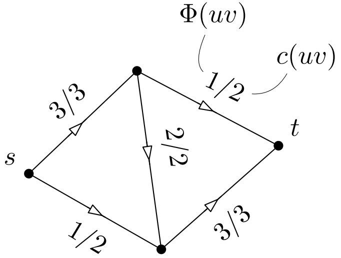
Maximum-Flow

Defintion.

Ein ***s*-*t*-Fluss** bezüglich eines Flussnetzwerkes ist eine Funktion $\Phi : A \to \mathbb{R}$, die jeder Kante uv ihren Fluss von u nach v zuordnet und Folgendes einhält:

- Flusserhaltung: $\sum_{uv \in A} \Phi(uv) = 0$ für jeden Knoten $u \neq s, t$.
- Zulässigkeit: $\Phi(uv) \leq c(uv)$ für alle Kanten $uv \in A$.



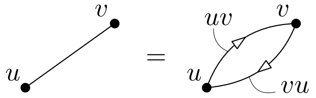


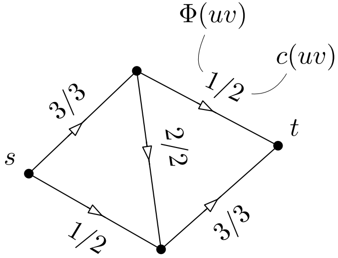
Maximum-Flow

Defintion.

Ein *s*-*t*-**Fluss** bezüglich eines Flussnetzwerkes ist eine Funktion $\Phi : A \to \mathbb{R}$, die jeder Kante uv ihren Fluss von u nach v zuordnet und Folgendes einhält:

- Flusserhaltung: $\sum_{uv \in A} \Phi(uv) = 0$ für jeden Knoten $u \neq s, t$.
- Zulässigkeit: $\Phi(uv) \leq c(uv)$ für alle Kanten $uv \in A$.
- Antisymmetrie: $\Phi(uv) = -\Phi(vu)$ für alle Kanten $uv \in A$.





Maximum-Flow

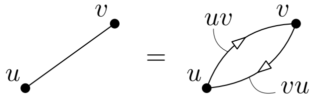
Defintion.

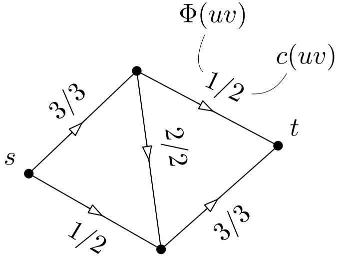
Ein ***s*-*t*-Fluss** bezüglich eines Flussnetzwerkes ist eine Funktion $\Phi : A \to \mathbb{R}$, die jeder Kante uv ihren Fluss von u nach v zuordnet und Folgendes einhält:

- Flusserhaltung: $\sum_{uv \in A} \Phi(uv) = 0$ für jeden Knoten $u \neq s, t$.
- Zulässigkeit: $\Phi(uv) \leq c(uv)$ für alle Kanten $uv \in A$.
- Antisymmetrie: $\Phi(uv) = -\Phi(vu)$ für alle Kanten $uv \in A$.

Der **Wert** von Φ ist der Netto-Ausfluss bei s:

$$\Phi(s) := \sum_{sv \in A} \Phi(sv) = -\Phi(t)$$





Maximum-Flow

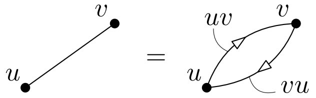
Defintion.

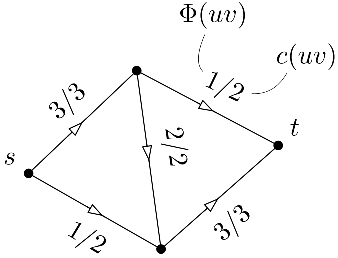
Ein ***s*-*t*-Fluss** bezüglich eines Flussnetzwerkes ist eine Funktion $\Phi : A \to \mathbb{R}$, die jeder Kante uv ihren Fluss von u nach v zuordnet und Folgendes einhält:

- Flusserhaltung: $\sum_{uv \in A} \Phi(uv) = 0$ für jeden Knoten $u \neq s, t$.
- Zulässigkeit: $\Phi(uv) \leq c(uv)$ für alle Kanten $uv \in A$.
- Antisymmetrie: $\Phi(uv) = -\Phi(vu)$ für alle Kanten $uv \in A$.

Der **Wert** von Φ ist der Netto-Ausfluss bei s:

$$\Phi(s) := \sum_{sv \in A} \Phi(sv) = -\Phi(t)$$





Problem Maximum-Flow.

Gegeben ein Flussnetzwerk, finde einen maximalen *s*-*t*-Fluss.

Im Allgemeinen in $\mathcal{O}(n^2)$.