Algorithmen für Planare Graphen

Vorlesung am 31.05.2022

Torsten Ueckerdt | 31. Mai 2022

Planar Separator – Erinnerung

Karlsruher Institut für Technologie

Satz (Kreis-Variante des Planar-Separator).

Jede planare Triangulierung $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten, Facettenmenge F und einer Gewichtsfunktion $w\colon V \cup E \cup F \longrightarrow [0, 1]$ sodass $w(V \cup E \cup F) = 1$ hat einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C der Größe $|V(C)| = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.
Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Satz (Planar-Separator-Theorem).

Jeder planare Graph mit $n \geq 5$ Knoten hat einen $\frac{3}{4}$-balancierten Separator S der Größe $|S| = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.
Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Planar Separator – Erinnerung

Satz (Kreis-Variante des Planar-Separator).

Jede planare Triangulierung $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten, Facettenmenge F und einer Gewichtsfunktion $w\colon V \cup E \cup F \longrightarrow [0, 1]$ sodass $w(V \cup E \cup F) = 1$ hat einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C der Größe $|V(C)| = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.
Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Satz (Planar-Separator-Theorem).

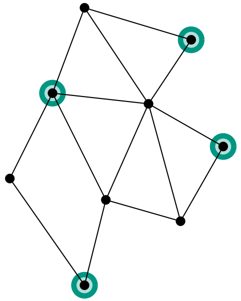
Jeder planare Graph mit $n \geq 5$ Knoten hat einen $\frac{3}{4}$-balancierten Separator S der Größe $|S| = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.
Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beobachtung.
Durch 2x Anwenden erhalten wir einen $\frac{9}{16}$-balancierten Separator der Größe $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Maximum Independent Set auf planaren Graphen

Problem Maximum Independent Set.

Für Graph $G = (V, E)$, finde eine größte unabhängige Menge. Also Knotenmenge $I \subseteq V$ mit $|I|$ maximal, sodass jede Kante in E höchstens einen Endpunkt in I hat.

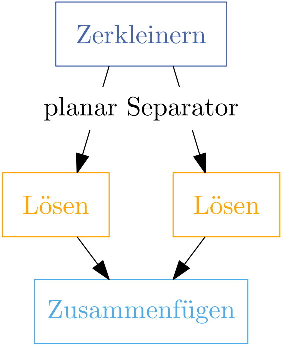


Maximum Independent Set auf planaren Graphen

Problem MAXIMUM INDEPENDENT SET.

Für Graph $G = (V, E)$, finde eine größte unabhängige Menge. Also Knotenmenge $I \subseteq V$ mit $|I|$ maximal, sodass jede Kante in E höchstens einen Endpunkt in I hat.

- Ist auch für planare Graphen $\mathcal{NP}$-schwer.
- Wir geben einen Approximationsalgorithmus mithilfe des planar Separator:
  - Zerkleinere, bis Komponenten nur noch $\mathcal{O}(\log \log n)$ Knoten.
  - Löse Komponenten mit Brute-Force in $\mathcal{O}(2^{\log \log n}) = \mathcal{O}(\log n)$ Zeit pro Komponente.
    - Also $\mathcal{O}(n \log n)$ Laufzeit gesamt.
  - Zusammenfügen ist disjunkte Vereinigung der Teillösungen



Maximum Independent Set auf planaren Graphen

- Wiederholtes Anwenden des planar Separators gibt Komponenten der Größe $\mathcal{O}(r)$ bei Separator-Gesamtgröße $\mathcal{O}(n/\sqrt{r})$ (ohne Beweis).
- Wir haben also Separator-Gesamtgröße $|S| \leq \mathcal{O}(n/\sqrt{\log \log n})$
- Für eine optimale Lösung $OPT(G)$ gilt $OPT(G) \geq n/4$ nach Vier-Farben-Satz.

Maximum Independent Set auf planaren Graphen

Karlsruher Institut für Technologie

- Wiederholtes Anwenden des planar Separators gibt Komponenten der Größe $\mathcal{O}(r)$ bei Separator-Gesamtgröße $\mathcal{O}(n/\sqrt{r})$ (ohne Beweis).
- Wir haben also Separator-Gesamtgröße $|S| \leq \mathcal{O}(n/\sqrt{\log\log n})$
- Für eine optimale Lösung $OPT(G)$ gilt $OPT(G) \geq n/4$ nach Vier-Farben-Satz.

Güte der Approximation:

Vergleiche die Größe $A(G)$ unseres Independent Set mit optimaler Lösung $OPT(G)$:

$$OPT(G) - A(G) \leq |S| \leq \mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{\log\log n}}\right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A(G) &\geq OPT(G) - \mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{\log\log n}}\right)\\
&\geq OPT(G) - \mathcal{O}\left(\frac{OPT(G)}{\sqrt{\log\log n}}\right)\\
&= OPT(G) \cdot \left(1 - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Diese Approximation ist bestmöglich wenn $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

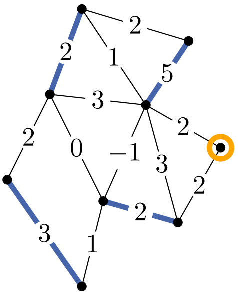
Gewichtsmaximales Matching auf planaren Graphen

Definition.

- Eine Kantenmenge M ist ein **Matching** wenn jeder Knoten zu höchstens einer Kante in M inzident ist.
- Wenn ein Knoten v zu einer Kante in M inzident ist, heißt v **gematcht**, ansonsten **ungematcht**.

Problem GEWICHTSMAXIMALES MATCHING.

- **Gegeben**:
  - Planarer Graph $G = (V, E)$.
  - $w \colon E \to \mathbb{R}$.
- **Gesucht**:
  - Matching $M \subseteq E$ mit $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ maximal.



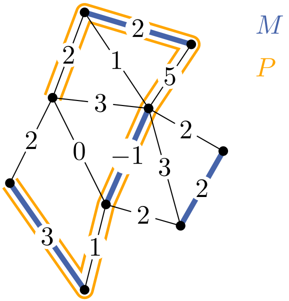
Allgemein in $\mathcal{P}$ aber auf planaren Graphen effizienter lösbar.

Alternierende Wege

Definition.

Sei $M \subseteq E$ ein Matching in $(G = (V, E), w)$. Ein **M-alternierender Weg** ist ein einfacher Pfad oder Kreis P in G, so dass

- sich Kanten von M und $E - M$ auf P abwechseln,
- wenn P ein Pfad mit Endpunkt v und Kante e an v in P ist, dann ist $e \in M$ oder v ungematcht.



Alternierende Wege

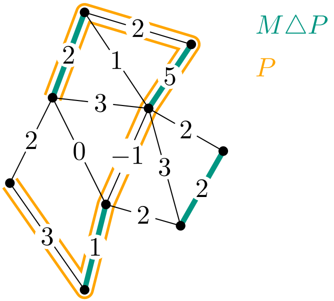
Definition.

Sei $M \subseteq E$ ein Matching in $(G = (V, E), w)$. Ein **M-alternierender Weg** ist ein einfacher Pfad oder Kreis P in G, so dass

- sich Kanten von M und $E - M$ auf P abwechseln,
- wenn P ein Pfad mit Endpunkt v und Kante e an v in P ist, dann ist $e \in M$ oder v ungematcht.

Für Matching M und alternierenden Weg P ist auch $M \triangle P := (M - P) \cup (P - M)$ (symm. Differenz) ein Matching.

Dabei gilt $w(M \triangle P) - w(M) = w(P - M) - w(P \cap M)$.



Alternierende Wege

Definition.

Sei $M \subseteq E$ ein Matching in $(G = (V, E), w)$. Ein **M-alternierender Weg** ist ein einfacher Pfad oder Kreis P in G, so dass

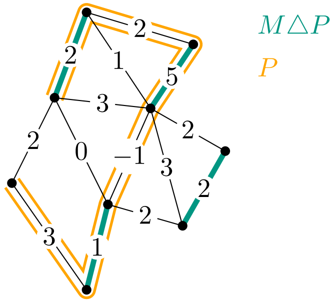
- sich Kanten von M und $E - M$ auf P abwechseln,
- wenn P ein Pfad mit Endpunkt v und Kante e an v in P ist, dann ist $e \in M$ oder v ungematcht.

Für Matching M und alternierenden Weg P ist auch $M \triangle P := (M - P) \cup (P - M)$ (symm. Differenz) ein Matching.

Dabei gilt $w(M \triangle P) - w(M) = w(P - M) - w(P \cap M)$.

Definition.

Ein alternierender Weg heißt **erhöhend** wenn $w(M \triangle P) > w(M)$, also $w(P - M) > w(P \cap M)$.



$$2 + 5 + 1 > 2 - 1 + 3$$

$$w(P - M) > w(P \cap M)$$

Matching ohne alt. Wege ist gewichtsmaximal

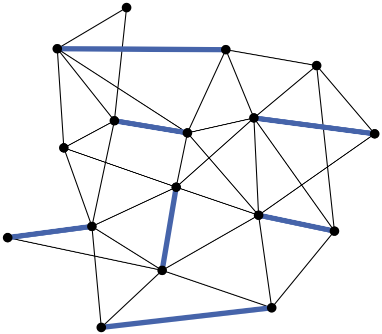
Lemma.

Sei M ein Matching in (G, w). Es sind äquivalent:

- M ist gewichtsmaximal
- Es gibt keinen erhöhenden alternierenden Weg bezüglich M.

Beweis:

"$\Longrightarrow$" ✓



M

Matching ohne alt. Wege ist gewichtsmaximal

Lemma.

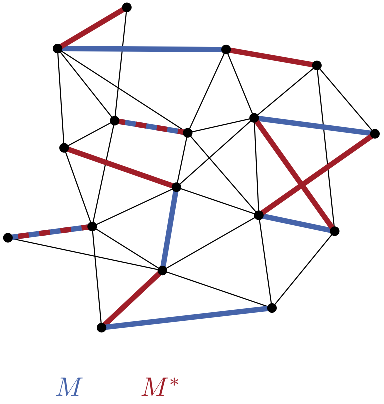
Sei M ein Matching in (G, w). Es sind äquivalent:

- M ist gewichtsmaximal
- Es gibt keinen erhöhenden alternierenden Weg bezüglich M.

Beweis:

"$\Leftarrow$" Wir benutzen Kontraposition:

- Sei M nicht gewichtsmaximal.
- Also gibt es Matching M^* mit $w(M^*) > w(M)$
- Betrachte Kantenmenge $M \triangle M^*$.
- $M \triangle M^*$ ist die Vereinigung von Kreisen und einfachen Pfaden $P_1, \ldots, P_t$ in G.
  - Da jeder Knoten höchstens 2 Kanten in F hat.
- Jedes P_i ist M-alternierender Weg.



Matching ohne alt. Wege ist gewichtsmaximal

Lemma.

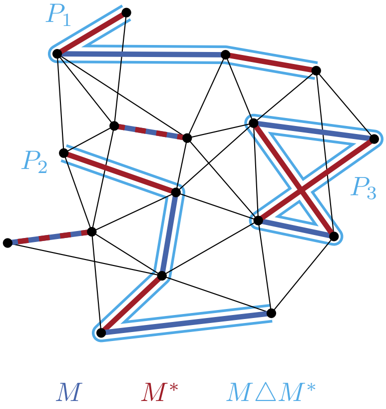
Sei M ein Matching in (G, w). Es sind äquivalent:

- M ist gewichtsmaximal
- Es gibt keinen erhöhenden alternierenden Weg bezüglich M.

Beweis:

“$\Leftarrow$” Wir benutzen Kontraposition:

- Sei M nicht gewichtsmaximal.
- Also gibt es Matching M^* mit $w(M^*) > w(M)$
- Betrachte Kantenmenge $M \triangle M^*$.
- $M \triangle M^*$ ist die Vereinigung von Kreisen und einfachen Pfaden $P_1, \ldots, P_t$ in G.
  - Da jeder Knoten höchstens 2 Kanten in F hat.
- Jedes P_i ist M-alternierender Weg.



Matching ohne alt. Wege ist gewichtsmaximal

Lemma.

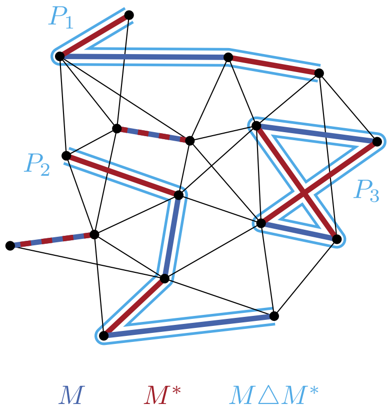
Sei M ein Matching in (G, w). Es sind äquivalent:

- M ist gewichtsmaximal
- Es gibt keinen erhöhenden alternierenden Weg bezüglich M.

Beweis:

"$\Leftarrow$" Wir benutzen Kontraposition:

- Es gilt $w(M^*) - w(M) = \sum_{i=1}^{t}(w(M^* \cap P_i) - w(M \cap P_i))$
- Ein Summand ist positiv, da $w(M^*) - w(M) > 0$.
- Einer der P_i ist also erhöhend, mit $w(M^* \cap P_i) > w(P_i \cap M)$.
- Es gibt also einen erhöhenden Weg. ✓



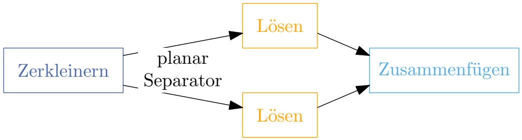
Gewichtsmaximales Matching – Algorithmus

Gegeben: planarer Graph $G = (V, E)$, Gewichtsfunktion $w \colon E \to \mathbb{R}$

Gesucht: Matching $M \subseteq E$ mit $w(M)$ maximal

Verwende wieder Planar Separator:

1. Ist $n := |V(G)| \leq 5$, finde optimales Matching durch Brute-Force. .... $\mathcal{O}(1)$



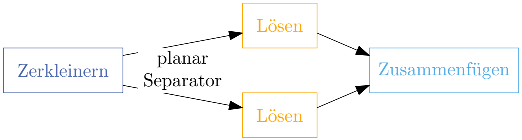
Gewichtsmaximales Matching – Algorithmus

Gegeben: planarer Graph $G = (V, E)$, Gewichtsfunktion $w\colon E \to \mathbb{R}$

Gesucht: Matching $M \subseteq E$ mit $w(M)$ maximal

Verwende wieder Planar Separator:

1. - Ist $n := |V(G)| \leq 5$, finde optimales Matching durch Brute-Force. .... $\mathcal{O}(1)$
2. - Andernfalls finde $\frac{3}{4}$-balancierten Separator S mit $|S| = \mathcal{O}(\sqrt{n})$. .... $\mathcal{O}(n)$
   - Berechne rekursiv optimale Matchings auf allen Komponenten von $G' := G - S$. .... $\mathcal{O}(?)$
   - Sei M' die Vereinigung dieser optimalen Matchings. (Beobachte: M' ist optimal für G'.)



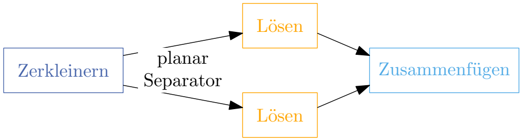
Gewichtsmaximales Matching – Algorithmus

Gegeben: planarer Graph $G = (V, E)$, Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$

Gesucht: Matching $M \subseteq E$ mit $w(M)$ maximal

Verwende wieder Planar Separator:

1. Ist $n := |V(G)| \leq 5$, finde optimales Matching durch Brute-Force. .... $\mathcal{O}(1)$
2. - Andernfalls finde $\frac{3}{4}$-balancierten Separator S mit $|S| = \mathcal{O}(\sqrt{n})$. .... $\mathcal{O}(n)$
   - Berechne rekursiv optimale Matchings auf allen Komponenten von $G' := G - S$. .... $\mathcal{O}(?)$
   - Sei M' die Vereinigung dieser optimalen Matchings. (Beobachte: M' ist optimal für G'.)
3. Solange $S \neq \emptyset$:
   - Wähle $v \in S$.
   - Finde Weg P in $G' + v$ mit Endpunkt v mit $w(P - M') - w(P \cap M')$ maximal. .... $\mathcal{O}(n \cdot |S|)$
   - Falls P erhöhend, ersetze M' durch $M' \triangle P$.
   - Lösche v aus S.
   - Ersetze G' durch $G' + v$.



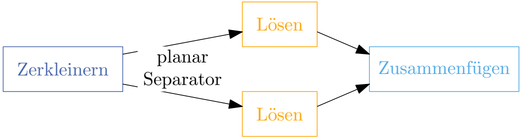
Gewichtsmaximales Matching – Algorithmus

Gegeben: planarer Graph $G = (V, E)$, Gewichtsfunktion $w\colon E \to \mathbb{R}$

Gesucht: Matching $M \subseteq E$ mit $w(M)$ maximal

Verwende wieder Planar Separator:

1. - Ist $n := |V(G)| \leq 5$, finde optimales Matching durch Brute-Force. .... $\mathcal{O}(1)$
2. - Andernfalls finde $\frac{3}{4}$-balancierten Separator S mit $|S| = \mathcal{O}(\sqrt{n})$. .... $\mathcal{O}(n)$
   - Berechne rekursiv optimale Matchings auf allen Komponenten von $G' := G - S$. .... $\mathcal{O}(?)$
   - Sei M' die Vereinigung dieser optimalen Matchings. (Beobachte: M' ist optimal für G'.)
3. - Solange $S \neq \emptyset$:
     - Wähle $v \in S$.
     - Finde Weg P in $G' + v$ mit Endpunkt v mit $w(P - M') - w(P \cap M')$ maximal. .... $\mathcal{O}(n \cdot |S|)$
     - Falls P erhöhend, ersetze M' durch $M' \triangle P$.
     - Lösche v aus S.
     - Ersetze G' durch $G' + v$.



Laufzeit und Korrektheit in der nächsten Vorlesung!