Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

Vorlesung am 17.05.2022

Torsten Ueckerdt | 17. Mai 2022

Motivation: Divide and Conquer

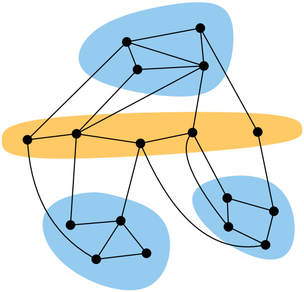
Viele der folgenden Algorithmen beruhen auf **Divide and conquer**:

- Zerlege eine Instanz in kleinere Teilinstanzen.
- Löse rekursiv das Problem auf den Teilen.
- Setze Lösungen der Teile zu Gesamtlösung zusammen.

Motivation: Divide and Conquer

Viele der folgenden Algorithmen beruhen auf **Divide and conquer**:

- Zerlege eine Instanz in kleinere Teilinstanzen.
- Löse rekursiv das Problem auf den Teilen.
- Setze Lösungen der Teile zu Gesamtlösung zusammen.



Motivation: Divide and Conquer

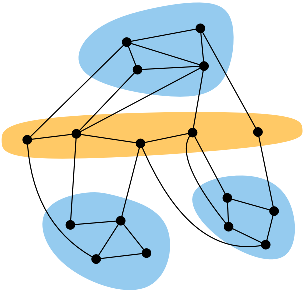
Viele der folgenden Algorithmen beruhen auf **Divide and conquer**:

- Zerlege eine Instanz in kleinere Teilinstanzen.
- Löse rekursiv das Problem auf den Teilen.
- Setze Lösungen der Teile zu Gesamtlösung zusammen.

Definition.

Für $G = (V, E)$ mit n Knoten, $S \subseteq V$, $\alpha \in [0, 1]$ definiere:

- S ist ein **Separator**, wenn $G - S$ unzusammenhängend ist.
- Seien $V_1, \ldots, V_t$ Knotenmengen der Komponenten von $G - S$.
- S heißt **α-balanciert**, wenn $|V_i| \leq \alpha \cdot |V| = \alpha n$ für alle $i \in [t]$.



Wir wollen außerdem, dass S klein ist.

Planar Separator

Satz (Planar-Separator-Theorem).

Jeder planare Graph mit $n \geq 5$ Knoten hat einen $\frac{2}{3}$-balancierten Separator S der Größe $|S| \leq 4\sqrt{n}$.
Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ gefunden werden.

Planar Separator

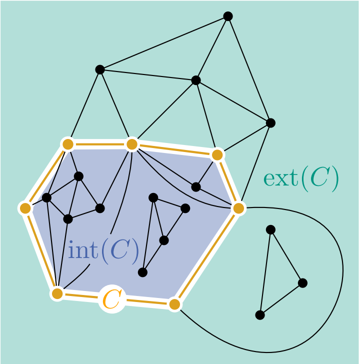
Satz (Planar-Separator-Theorem).

Jeder planare Graph mit $n \geq 5$ Knoten hat einen $\frac{2}{3}$-balancierten Separator S der Größe $|S| \leq 4\sqrt{n}$.
Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ gefunden werden.

Wir beweisen eine **Kreis-Variante** dieses Satzes:

- Ein Kreis C separiert das Innere $\mathrm{int}(C)$ von dem Äußeren $\mathrm{ext}(C)$ des Kreises.
  - $\mathrm{int}(C)$ besteht aus Kanten, Knoten und Facetten, die echt innerhalb von C liegen. Insbesondere also nicht auf C selbst.
  - Analog für $\mathrm{ext}(C)$.
- Wir suchen Kreis C mit $|V \cap \mathrm{int}(C)|, |V \cap \mathrm{ext}(C)| \leq \alpha n$.
- Dann ist $V(C) = S$ ein α-balancierter Separator.

Wir nennen dann C einen α-balancierten **Kreis-Separator**.

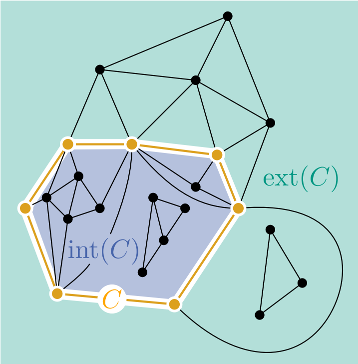


Planar Cycle-Separator

<u>Notation:</u> $w(M) = \sum_{x \in M} w(x)$

Definition.

Sei F die Menge aller Facetten von $G = (V, E)$.
Sei $w\colon\ V \cup E \cup F \longrightarrow [0, 1]$ Gewichtsfunktion



Planar Cycle-Separator

Notation: $w(M) = \sum_{x \in M} w(x)$

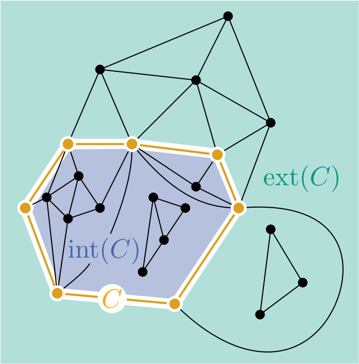
Definition.

Sei F die Menge aller Facetten von $G = (V, E)$.
Sei $w\colon V \cup E \cup F \longrightarrow [0, 1]$ Gewichtsfunktion mit

- $w(V \cup E \cup F) = \sum_{x \in V \cup E \cup F} w(x) = 1$.

Ein Kreis C in G heißt **α-balanciert**, wenn

- $w(\mathrm{int}(C)) \leq \alpha$ und $w(\mathrm{ext}(C)) \leq \alpha$.



Beispiel:

- $w(v) = \frac{1}{n}$ für jeden Knoten v, $w(E \cup F) = 0$
- Dann ist für jedes $M \subseteq V \cup E \cup F$

  $w(M) \leq \alpha \Leftrightarrow |V \cap M| \leq \alpha n$.

Planar Cycle-Separator

Notation: $w(M) = \sum_{x \in M} w(x)$

Definition.

Sei F die Menge aller Facetten von $G = (V, E)$.
Sei $w\colon\ V \cup E \cup F \longrightarrow [0, 1]$ Gewichtsfunktion mit

- $w(V \cup E \cup F) = \sum_{x \in V \cup E \cup F} w(x) = 1$.

Ein Kreis C in G heißt **α-balanciert**, wenn

- $w(\text{int}(C)) \leq \alpha$ und $w(\text{ext}(C)) \leq \alpha$.

Beispiel:

- $w(v) = \frac{1}{n}$ für jeden Knoten v, $w(E \cup F) = 0$
- Dann ist für jedes $M \subseteq V \cup E \cup F$

  $w(M) \leq \alpha \Leftrightarrow |V \cap M| \leq \alpha n$.

Satz (Kreis-Variante des Planar-Separator).

- Sei $\alpha \geq \frac{3}{4}$,
- G eine planare Triangulierung auf n Knoten,
- w wie links mit $w(f) \leq \alpha$ für jedes $f \in F$.

Dann gibt es einen α-balancierten Kreis-Separator C mit $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ Knoten. Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Planar Cycle-Separator

Notation: $w(M) = \sum_{x \in M} w(x)$

Definition.

Sei F die Menge aller Facetten von $G = (V, E)$.
Sei $w\colon V \cup E \cup F \longrightarrow [0, 1]$ Gewichtsfunktion mit

- $w(V \cup E \cup F) = \sum_{x \in V \cup E \cup F} w(x) = 1$.

Ein Kreis C in G heißt **α-balanciert**, wenn

- $w(\text{int}(C)) \leq \alpha$ und $w(\text{ext}(C)) \leq \alpha$.

Beispiel:

- $w(v) = \frac{1}{n}$ für jeden Knoten v, $w(E \cup F) = 0$
- Dann ist für jedes $M \subseteq V \cup E \cup F$

  $w(M) \leq \alpha \Leftrightarrow |V \cap M| \leq \alpha n$.

Satz (Kreis-Variante des Planar-Separator).

- Sei $\alpha \geq \frac{3}{4}$,
- G eine planare Triangulierung auf n Knoten,
- w wie links mit $w(f) \leq \alpha$ für jedes $f \in F$.

Dann gibt es einen α-balancierten Kreis-Separator C mit $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ Knoten. Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

O.B.d.A. ist

- $w(v) = w(e) = 0$ für Knoten und Kanten.
- $\alpha = \frac{3}{4}$.
- $w(f) < \frac{1}{4}$ für jede Facette f.
  - Andernfalls ist der Rand C einer Facette f mit $w(f) \geq \frac{1}{4}$ bereits ein guter Separator.

Beweis des Planar Cycle-Separator – Vorgehen

Wir haben zwei Fälle:

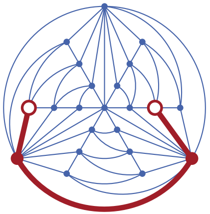
1. G hat geringen Durchmesser.
2. G ist beliebig. $\rightsquigarrow$ Hier führen wir auf 1. zurück.

Definition.

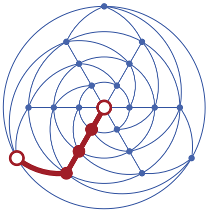
Der **Durchmesser** eines Graphen H ist

$$\operatorname{diam}(H) := \max\{\operatorname{dist}(u, v) \mid u, v \in V(H)\},$$

also die Länge eines längsten kürzesten Weges.



$\operatorname{diam}(G) = 3$



$\operatorname{diam}(G) = 4$

Beweis des Planar Cycle-Separator – Vorgehen

Wir haben zwei Fälle:

1. G hat geringen Durchmesser.
2. G ist beliebig. $\rightsquigarrow$ Hier führen wir auf 1. zurück.

Definition.

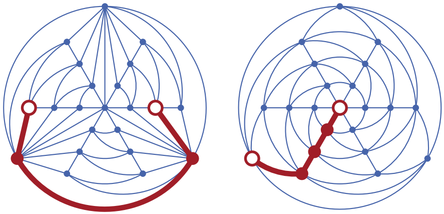
Der **Durchmesser** eines Graphen H ist

$$\text{diam}(H) := \max\{\text{dist}(u, v) \mid u, v \in V(H)\},$$

also die Länge eines längsten kürzesten Weges.

Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C in G, der genau eine Nichtbaumkante benutzt, also $|C| \leq \text{diam}(T) + 1$.



$\text{diam}(G) = 3$ $\qquad$ $\text{diam}(G) = 4$

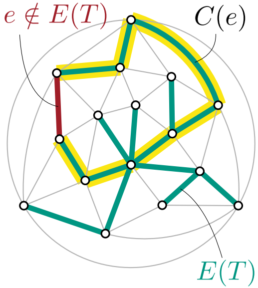
Für $\text{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ reicht dieses Lemma also.

Der Fall: Geringer Durchmesser

Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \mathrm{diam}(T) + 1$.

Notation:
Für $e \in E - E(T)$ ist der **Fundamentalkreis** $C(e)$ der eindeutige Kreis in $T \cup e$.



Der Fall: Geringer Durchmesser

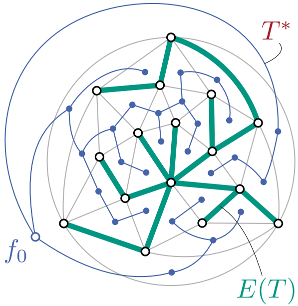
Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \mathrm{diam}(T) + 1$.

Notation:
Für $e \in E - E(T)$ ist der **Fundamentalkreis** $C(e)$ der eindeutige Kreis in $T \cup e$.

Beweis:

- Spannbaum T hat Kantenmenge $E(T) \subseteq E$.
- Im Dualgraphen G^* bilden die dualisierten Nichtbaumkanten $\{e^* \in E \mid e \in E - E(T)\}$ einen Spannbaum T^*.



Der Fall: Geringer Durchmesser

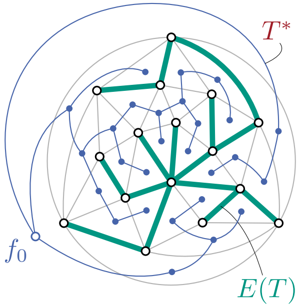
Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \mathrm{diam}(T) + 1$.

Beweis:

- Spannbaum T hat Kantenmenge $E(T) \subseteq E$.
- Im Dualgraphen G^* bilden die dualisierten Nichtbaumkanten $\{e^* \in E \mid e \in E - E(T)\}$ einen Spannbaum T^*.
- Wähle den Knoten der äußeren Facette f_0 als Wurzel von T^*.

Notation:
Für $e \in E - E(T)$ ist der **Fundamentalkreis** $C(e)$ der eindeutige Kreis in $T \cup e$.



Der Fall: Geringer Durchmesser

Lemma.

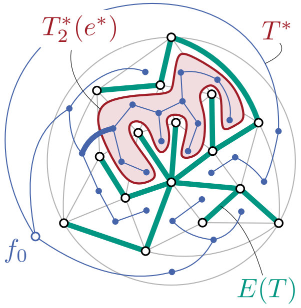
Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \mathrm{diam}(T) + 1$.

Notation:

Für $e \in E - E(T)$ ist der **Fundamentalkreis** $C(e)$ der eindeutige Kreis in $T \cup e$.

Beweis:

- Spannbaum T hat Kantenmenge $E(T) \subseteq E$.
- Im Dualgraphen G^* bilden die dualisierten Nichtbaumkanten $\{e^* \in E \mid e \in E - E(T)\}$ einen Spannbaum T^*.
- Wähle den Knoten der äußeren Facette f_0 als Wurzel von T^*.
- Jede Kante $e^* \in T^*$ zerlegt T^* in genau zwei Teilbäume:
  - $T_1^*(e^*)$ enthält die Wurzel f_0.
  - $T_2^*(e^*)$ enthält nicht die Wurzel.



Der Fall: Geringer Durchmesser

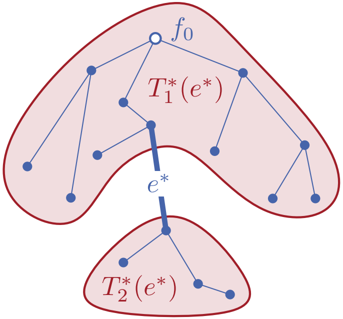
Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \mathrm{diam}(T) + 1$.

Notation:
Für $e \in E - E(T)$ ist der **Fundamentalkreis** $C(e)$ der eindeutige Kreis in $T \cup e$.

Beweis:

- Spannbaum T hat Kantenmenge $E(T) \subseteq E$.
- Im Dualgraphen G^* bilden die dualisierten Nichtbaumkanten $\{e^* \in E \mid e \in E - E(T)\}$ einen Spannbaum T^*.
- Wähle den Knoten der äußeren Facette f_0 als Wurzel von T^*.
- Jede Kante $e^* \in T^*$ zerlegt T^* in genau zwei Teilbäume:
  - $T_1^*(e^*)$ enthält die Wurzel f_0.
  - $T_2^*(e^*)$ enthält nicht die Wurzel.



Der Fall: Geringer Durchmesser

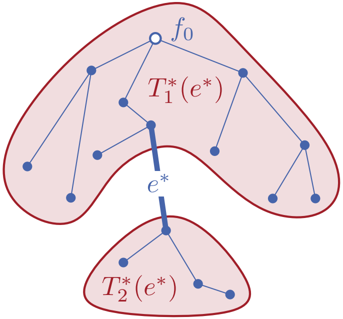
Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \mathrm{diam}(T) + 1$.

Notation:
Für $e \in E - E(T)$ ist der **Fundamentalkreis** $C(e)$ der eindeutige Kreis in $T \cup e$.

Beweis:

- Spannbaum T hat Kantenmenge $E(T) \subseteq E$.
- Im Dualgraphen G^* bilden die dualisierten Nichtbaumkanten $\{e^* \in E \mid e \in E - E(T)\}$ einen Spannbaum T^*.
- Wähle den Knoten der äußeren Facette f_0 als Wurzel von T^*.
- Jede Kante $e^* \in T^*$ zerlegt T^* in genau zwei Teilbäume:
  - $T_1^*(e^*)$ enthält die Wurzel f_0.
  - $T_2^*(e^*)$ enthält nicht die Wurzel.
- Im Primalgraphen G entsprechen $T_1^*(e^*)$ und $T_2^*(e^*)$ den Facetten in ext($C(e)$) und int($C(e)$).



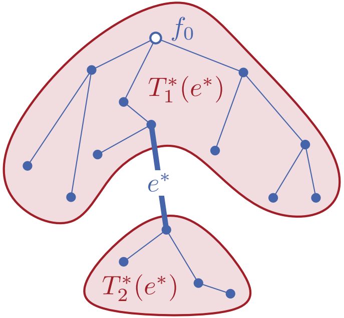
Der Fall: Geringer Durchmesser

Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \mathrm{diam}(T) + 1$.

Beweis:

- Suche also e^* im Dualbaum T^* so, dass zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ des Gewichts in $T_1^*(e^*)$ und $T_2^*(e^*)$ liegt.



Der Fall: Geringer Durchmesser

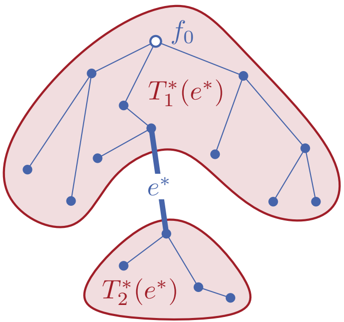
Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \mathrm{diam}(T) + 1$.

Beweis:

- Suche also e^* im Dualbaum T^* so, dass zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ des Gewichts in $T_1^*(e^*)$ und $T_2^*(e^*)$ liegt.
- Wähle e^* als **tiefste** Kante, für die noch $T_2^*(e^*) \geq \frac{1}{4}$ gilt.

Existiert so ein e^*?



Der Fall: Geringer Durchmesser

Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \mathrm{diam}(T) + 1$.

Beweis:

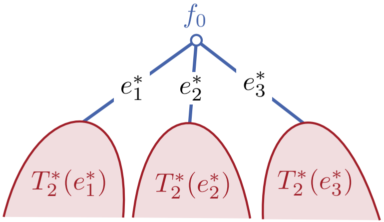
- Suche also e^* im Dualbaum T^* so, dass zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ des Gewichts in $T_1^*(e^*)$ und $T_2^*(e^*)$ liegt.
- Wähle e^* als **tiefste** Kante, für die noch $T_2^*(e^*) \geq \frac{1}{4}$ gilt. ✓

Existiert so ein e^*?

- Da G trianguliert ist, hat T^* Maximalgrad ≤ 3.
- Partitioniere $V(T^*)$ in ≤ 4 Teile durch die T^*-Kanten an f_0:

$$T_2^*(e_1^*),\ T_2^*(e_2^*),\ T_2^*(e_3^*),\ f_0$$

- Da $w(f_0) < \frac{1}{4}$, gilt $w(T_2^*(e_i^*)) \geq \frac{1}{4}$ für mindestens ein $i \in [3]$.



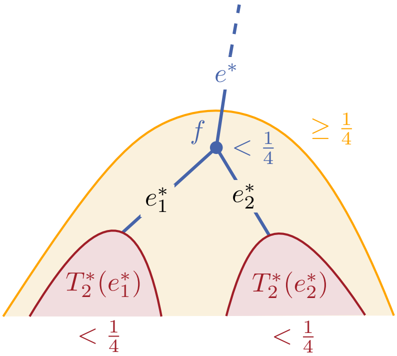
Der Fall: Geringer Durchmesser

Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \text{diam}(T) + 1$.

Beweis:

- Suche also e^* im Dualbaum T^* so, dass zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ des Gewichts in $T_1^*(e^*)$ und $T_2^*(e^*)$ liegt.
- Wähle e^* als **tiefste** Kante, für die noch $T_2^*(e^*) \geq \frac{1}{4}$ gilt. ✓
- Betrachte nun e^* und den unteren Knoten f von e^*.
- f hat bis zu zwei Kanten e_1^*, e_2^* unter sich.



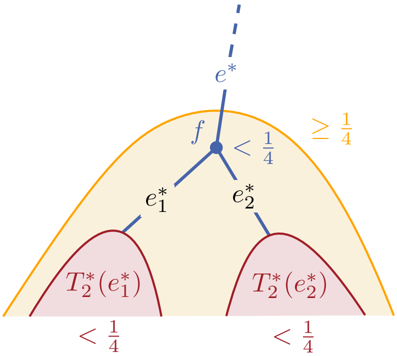
Der Fall: Geringer Durchmesser

Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \mathrm{diam}(T) + 1$.

Beweis:

- Suche also e^* im Dualbaum T^* so, dass zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ des Gewichts in $T_1^*(e^*)$ und $T_2^*(e^*)$ liegt.
- Wähle e^* als **tiefste** Kante, für die noch $T_2^*(e^*) \geq \frac{1}{4}$ gilt. ✓
- Betrachte nun e^* und den unteren Knoten f von e^*.
- f hat bis zu zwei Kanten e_1^*, e_2^* unter sich.
- $w(T_2^*(e^*)) = w(f) + w(T_2^*(e_1^*)) + w(T_2^*(e_2^*)) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.



Der Fall: Geringer Durchmesser

Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C - E(T)| = 1$, also $|C| \leq \operatorname{diam}(T) + 1$.

Beweis:

- Suche also e^* im Dualbaum T^* so, dass zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ des Gewichts in $T_1^*(e^*)$ und $T_2^*(e^*)$ liegt.
- Wähle e^* als **tiefste** Kante, für die noch $T_2^*(e^*) \geq \frac{1}{4}$ gilt. ✓
- Betrachte nun e^* und den unteren Knoten f von e^*.
- f hat bis zu zwei Kanten e_1^*, e_2^* unter sich.
- $w(T_2^*(e^*)) = w(f) + w(T_2^*(e_1^*)) + w(T_2^*(e_2^*)) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
- Für die primale Kante e zu e^* ist also der Fundamentalkreis $C(e)$ ein $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator. ✓