Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

Vorlesung am 10.05.2022

Torsten Ueckerdt | 10. Mai 2022

Beweis von Wagner

Satz von Wagner.

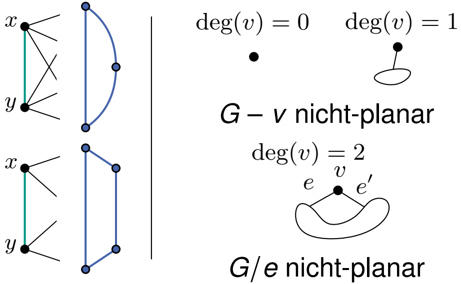
G ist genau dann nicht planar, wenn G einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor enthält.

Lemma.

Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$.
Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.

K_5:

$K_{3,3}$:



Beweis:

- Da G minimal nicht-planar ist,
  - ist G zusammenhängend.
  - ist $\deg(v) \geq 3$ für jeden Knoten $v \in V(G)$.

Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ. ✓

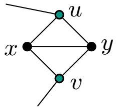
Behauptung 2.

$G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Beweis von Wagner – Behauptung 2



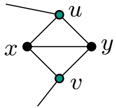
Behauptung 2.

$G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

Beweis:

- Angenommen u, v sind zwei Knoten in $G - x - y$ mit Grad 1.
  - Da $\deg(u), \deg(v) \geq 3$ in G sind $ux, uy, vx, vy \in E(G)$.
  - u, v, x, y bilden ein Θ.

Beweis von Wagner – Behauptung 2



Behauptung 2.

$G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

Beweis:

- Angenommen u, v sind zwei Knoten in $G - x - y$ mit Grad 1.
  - Da $\deg(u), \deg(v) \geq 3$ in G sind $ux, uy, vx, vy \in E(G)$.
  - u, v, x, y bilden ein Θ.

$\overset{\text{Beh. 1}}{\Longrightarrow}$ Jede Kante in G hat einen Endpunkt in u, v, x, y.

  - Jedes $w \neq u, v, x, y$, ist zu u, v oder beiden benachbart, da $\deg(w) \geq 3$.
  - Höchstens 2 Knoten außerhalb von u, v, x, y.

Beweis von Wagner – Behauptung 2

Behauptung 2.

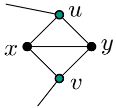
$G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

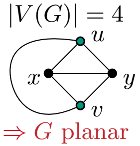
Beweis:

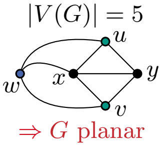
- Angenommen u, v sind zwei Knoten in $G - x - y$ mit Grad 1.
  - Da $\deg(u), \deg(v) \geq 3$ in G sind $ux, uy, vx, vy \in E(G)$.
  - u, v, x, y bilden ein Θ.

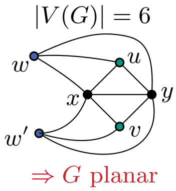
$\overset{\text{Beh. 1}}{\Longrightarrow}$ Jede Kante in G hat einen Endpunkt in u, v, x, y.

  - Jedes $w \neq u, v, x, y$, ist zu u, v oder beiden benachbart, da $\deg(w) \geq 3$.
  - Höchstens 2 Knoten außerhalb von u, v, x, y.









Beweis von Wagner – Behauptung 2

Behauptung 2.

$G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

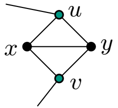
Beweis:

- Angenommen u, v sind zwei Knoten in $G - x - y$ mit Grad 1.
  - Da $\deg(u), \deg(v) \geq 3$ in G sind $ux, uy, vx, vy \in E(G)$.
  - u, v, x, y bilden ein Θ.

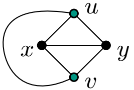
  $\overset{\text{Beh. 1}}{\Longrightarrow}$ Jede Kante in G hat einen Endpunkt in u, v, x, y.
  - Jedes $w \neq u, v, x, y$, ist zu u, v oder beiden benachbart, da $\deg(w) \geq 3$.
  - Höchstens 2 Knoten außerhalb von u, v, x, y.

  $\rightsquigarrow$ Widerspruch zu G nicht planar.

$\Longrightarrow$ Behauptung 2 ✓

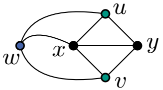


$|V(G)| = 4$



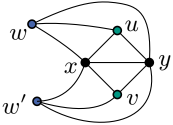
$\Rightarrow G$ planar

$|V(G)| = 5$



$\Rightarrow G$ planar

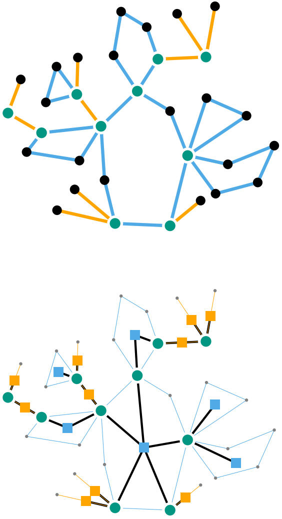
$|V(G)| = 6$



$\Rightarrow G$ planar

Interlude – Die Struktur von Graphen ohne Θ

- Ein Graph enthält genau dann kein Θ, wenn jede Kante auf höchstens einem Kreis liegt.
- Solche Graphen nennt man **Kakteen**.
- Kakteen sind kantendisjunkte Vereinigungen von Kreisen und Brücken.



Definition.

Der **Block-Cutvertex-Tree** eines zusammenhängenden Graphen G (hier ist G Kaktus) ist ein Baum T mit:

- $V(T) = \{$Artikulationspunkte in $G\} \cup \{$ Kreise (i.A. Blöcke) in $G\} \cup \{$ Brücken in $G\}$.
- $E(T) = \{vb \mid v$ Artikulationspunkt, b Brücke oder Kreis, v Knoten auf b in $G\}$.

Beweis von Wagner

Satz von Wagner.

G ist genau dann nicht planar, wenn G einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor enthält.

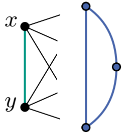
Lemma.

Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$.
Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.

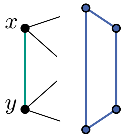
Beweis:

- Da G minimal nicht-planar ist,
  - ist G zusammenhängend.
  - ist $\deg(v) \geq 3$ für jeden Knoten $v \in V(G)$.

K_5:



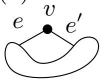
$K_{3,3}$:



$\deg(v) = 0$ $\deg(v) = 1$

$G - v$ nicht-planar

$\deg(v) = 2$



G/e nicht-planar

Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ. ✓

Behauptung 2.

$G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1. ✓

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Beweis:

- Sei T Block-Cutvertex-Tree von $G - x - y$.
- Wenn $G - x - y$ keinen Artikulationspunkt enthält, ist $G - x - y$ ein Kreis ✓ oder eine Kante

Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Beweis:

- Sei T Block-Cutvertex-Tree von $G - x - y$.
- Wenn $G - x - y$ keinen Artikulationspunkt enthält, ist $G - x - y$ ein Kreis ✓ oder eine Kante
  - dann gilt $|V(G)| \leq 4$ und G ist planar. ✓

Beweis von Wagner – Behauptung 3

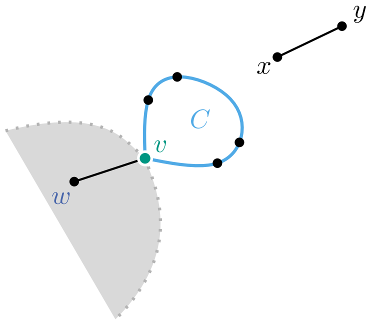
Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Beweis:

- Sei T Block-Cutvertex-Tree von $G - x - y$.
- Wenn $G - x - y$ keinen Artikulationspunkt enthält, ist $G - x - y$ ein Kreis ✓ oder eine Kante
  - dann gilt $|V(G)| \leq 4$ und G ist planar. ✓
- Es gibt also Artikulationspunkte und $|T| \geq 2$.
  - Also hat T mindestens 2 Blätter.

  $\overset{\text{Beh. 2}}{\Rightarrow}$ Es gibt ein Blatt in T, das in G ein Kreis C ist.
  - Sei v der auf C liegende Artikulationspunkt.
  - Jedes $u \in V(C) - v$ hat Grad 2 in $G - x - y$ aber mindestens Grad 3 in G.
  - Also ist jedes u zu x oder y oder beiden benachbart.



Beweis von Wagner – Behauptung 3

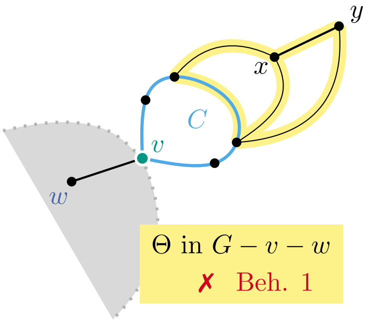
Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Beweis:

- Sei T Block-Cutvertex-Tree von $G - x - y$.
- Wenn $G - x - y$ keinen Artikulationspunkt enthält, ist $G - x - y$ ein Kreis ✓ oder eine Kante
  - dann gilt $|V(G)| \leq 4$ und G ist planar. ✓
- Es gibt also Artikulationspunkte und $|T| \geq 2$.
  - Also hat T mindestens 2 Blätter.

  $\overset{\text{Beh. 2}}{\Rightarrow}$ Es gibt ein Blatt in T, das in G ein Kreis C ist.
  - Sei v der auf C liegende Artikulationspunkt.
  - Jedes $u \in V(C) - v$ hat Grad 2 in $G - x - y$ aber mindestens Grad 3 in G.
  - Also ist jedes u zu x oder y ~~oder beiden~~ benachbart.



Θ in $G - v - w$

✗ Beh. 1

Beweis von Wagner – Behauptung 3

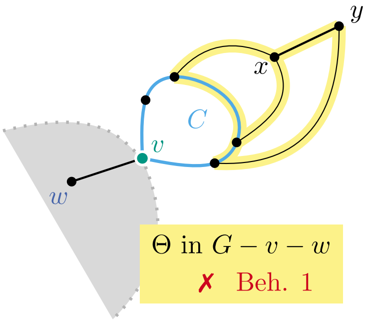
Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Beweis:

- Sei T Block-Cutvertex-Tree von $G - x - y$.
- Wenn $G - x - y$ keinen Artikulationspunkt enthält, ist $G - x - y$ ein Kreis ✓ oder eine Kante
  - dann gilt $|V(G)| \leq 4$ und G ist planar. ✓
- Es gibt also Artikulationspunkte und $|T| \geq 2$.
  - Also hat T mindestens 2 Blätter.

  $\overset{\text{Beh. 2}}{\Longrightarrow}$ Es gibt ein Blatt in T, das in G ein Kreis C ist.
  - Sei v der auf C liegende Artikulationspunkt.
  - Jedes $u \in V(C) - v$ hat Grad 2 in $G - x - y$ aber mindestens Grad 3 in G.
  - Also ist jedes u zu x oder y ~~oder beiden~~ benachbart.



Θ in $G - v - w$

✗ Beh. 1

$\Rightarrow$ C hat Länge genau 3

$V(C) = \{v, s, t\}$

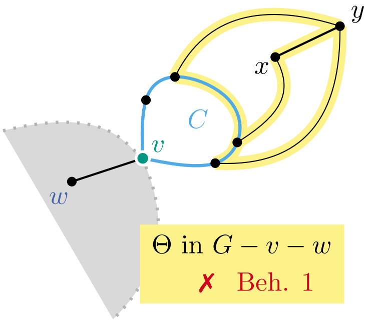
Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Beweis:

- Sei T Block-Cutvertex-Tree von $G - x - y$.
- Wenn $G - x - y$ keinen Artikulationspunkt enthält, ist $G - x - y$ ein Kreis ✓ oder eine Kante
  - dann gilt $|V(G)| \leq 4$ und G ist planar. ✓
- Es gibt also Artikulationspunkte und $|T| \geq 2$.
  - Also hat T mindestens 2 Blätter.
  - $\overset{\text{Beh. 2}}{\Longrightarrow}$ Es gibt ein Blatt in T, das in G ein Kreis C ist.
  - Sei v der auf C liegende Artikulationspunkt.
  - Jedes $u \in V(C) - v$ hat Grad 2 in $G - x - y$ aber mindestens Grad 3 in G.
  - Also ist jedes u zu x oder y ~~oder beiden~~ benachbart.



$\Rightarrow$ C hat Länge genau 3

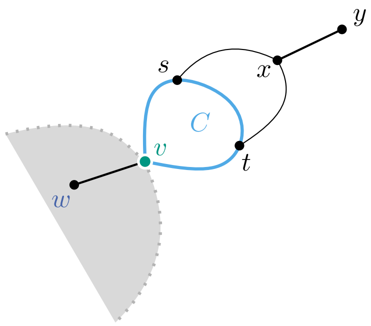
$V(C) = \{v, s, t\}$

Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

- $C \cup \{x, y\}$ hat ein Θ in G.

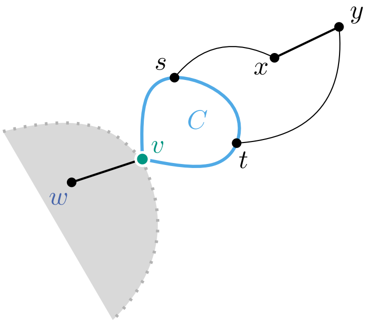


Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

- $C \cup \{x, y\}$ hat ein Θ in G.



Beweis von Wagner – Behauptung 3

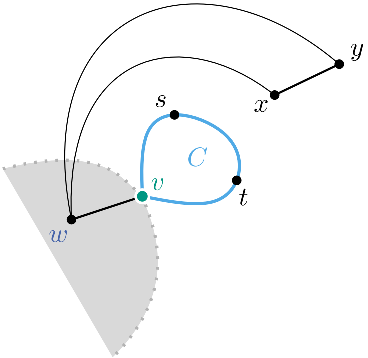
Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

- $C \cup \{x, y\}$ hat ein Θ in G.

$\overset{\text{Beh. 1}}{\Longrightarrow}$ Jede Kante hat mind. einen Endpunkt im Θ.

- Jedes $w \in G - (C \cup \{x, y\})$ hat alle Nachbarn in $C \cup \{x, y\}$.
  - Muss Nachbarschaft genau $\{x, y, v\}$ haben.



Beweis von Wagner – Behauptung 3

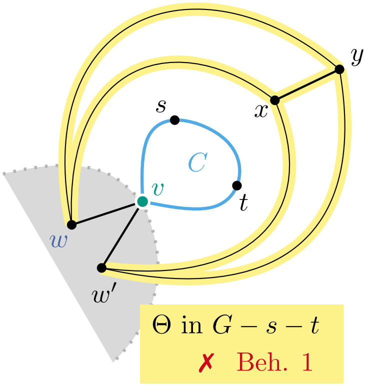
Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

- $C \cup \{x, y\}$ hat ein Θ in G.

$\overset{\text{Beh. 1}}{\Longrightarrow}$ Jede Kante hat mind. einen Endpunkt im Θ.

- Jedes $w \in G - (C \cup \{x, y\})$ hat alle Nachbarn in $C \cup \{x, y\}$.
  - Muss Nachbarschaft genau $\{x, y, v\}$ haben.
  - Würden zwei solche w, w' existieren, so wäre w, w', x, y ein Θ in $G - C$. ✗



Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

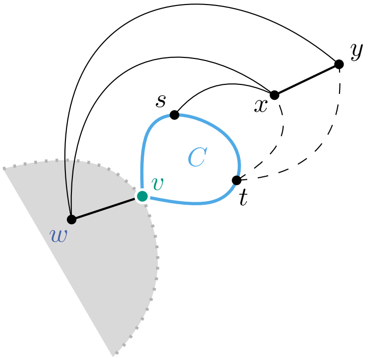
- $C \cup \{x, y\}$ hat ein Θ in G.

$\overset{\text{Beh. 1}}{\Rightarrow}$ Jede Kante hat mind. einen Endpunkt im Θ.

- Jedes $w \in G - (C \cup \{x, y\})$ hat alle Nachbarn in $C \cup \{x, y\}$.
  - Muss Nachbarschaft genau $\{x, y, v\}$ haben.
  - Würden zwei solche w, w' existieren, so wäre w, w', x, y ein Θ in $G - C$. ✗

$\Rightarrow$ Also ist w der einzige Knoten in $G - (C \cup \{x, y\})$.

- OBdA gilt $sx \in E$.
- Es gilt entweder $ty \in E$ oder $tx \in E$.

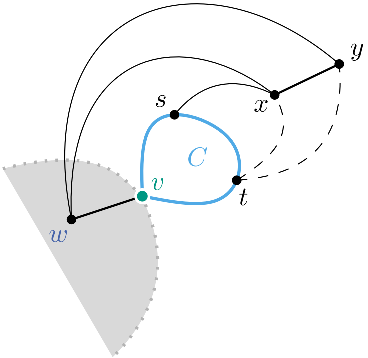


Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

- Wissen inzwischen:
  - $V(G) = C \cup \{x, y\} \cup \{w\} = \{v, s, t, x, y, w\}$.
  - $sx \in E$ und $sy \notin E$.
  - entweder $tx \in E$ oder $ty \in E$.
- Wenn $vx \in E$ oder $vy \in E$,
  dann gibt es ein Θ in $G - s - t$. ✗



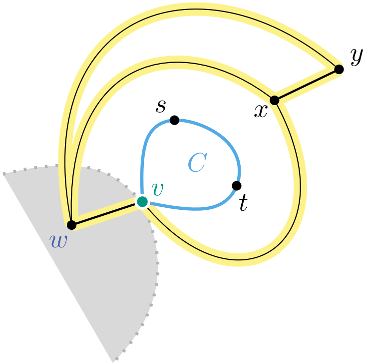
Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

- Wissen inzwischen:
  - $V(G) = C \cup \{x, y\} \cup \{w\} = \{v, s, t, x, y, w\}$.
  - $sx \in E$ und $sy \notin E$.
  - entweder $tx \in E$ oder $ty \in E$.
- Wenn $vx \in E$ oder $vy \in E$,

  dann gibt es ein Θ in $G - s - t$. ✗



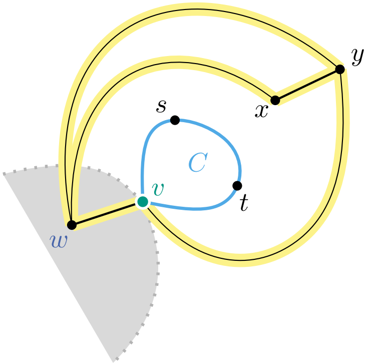
Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

- Wissen inzwischen:
  - $V(G) = C \cup \{x, y\} \cup \{w\} = \{v, s, t, x, y, w\}$.
  - $sx \in E$ und $sy \notin E$.
  - entweder $tx \in E$ oder $ty \in E$.
- Wenn $vx \in E$ oder $vy \in E$,

  dann gibt es ein Θ in $G - s - t$. ✗

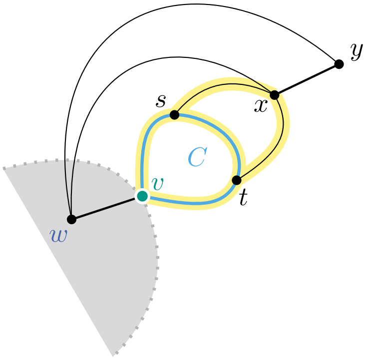


Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

- Wissen inzwischen:
  - $V(G) = C \cup \{x, y\} \cup \{w\} = \{v, s, t, x, y, w\}$.
  - $sx \in E$ und $sy \notin E$.
  - entweder $tx \in E$ oder $ty \in E$.
- Wenn $vx \in E$ oder $vy \in E$,
  dann gibt es ein Θ in $G - s - t$. ✗
- Wenn $tx \in E$, dann gibt es ein Θ in $G - w - y$. ✗

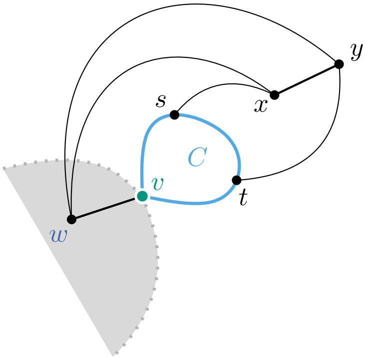


Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

- Wissen inzwischen:
  - $V(G) = C \cup \{x, y\} \cup \{w\} = \{v, s, t, x, y, w\}$.
  - $sx \in E$ und $sy \notin E$.
  - entweder $tx \in E$ oder $ty \in E$.
- Wenn $vx \in E$ oder $vy \in E$,
  dann gibt es ein Θ in $G - s - t$. ✗
- Wenn $tx \in E$, dann gibt es ein Θ in $G - w - y$. ✗
- Also wissen wir außerdem:
  - $vx \notin E$, $vy \notin E$, $tx \notin E$, $ty \in E$
  - $ws \notin E$, $wt \notin E$



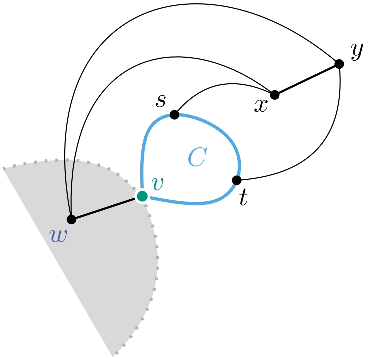
Beweis von Wagner – Behauptung 3

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

- Wissen inzwischen:
  - $V(G) = C \cup \{x, y\} \cup \{w\} = \{v, s, t, x, y, w\}$.
  - $sx \in E$ und $sy \notin E$.
  - entweder $tx \in E$ oder $ty \in E$.
- Wenn $vx \in E$ oder $vy \in E$,
  dann gibt es ein Θ in $G - s - t$. ✗
- Wenn $tx \in E$, dann gibt es ein Θ in $G - w - y$. ✗
- Also wissen wir außerdem:
  - $vx \notin E$, $vy \notin E$, $tx \notin E$, $ty \in E$
  - $ws \notin E$, $wt \notin E$
- Wir kennen ganz G, und G ist planar. Widerspruch!

$\Rightarrow$ Behauptung 3 & Lemma. ✓



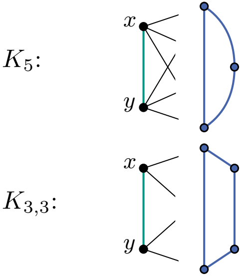
Beweis von Wagner

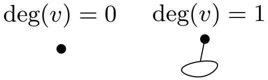
Satz von Wagner.

G ist genau dann nicht planar, wenn G einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor enthält.

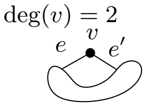
Lemma.

Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$.
Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.





$G - v$ nicht-planar



G/e nicht-planar

Beweis:

- Da G minimal nicht-planar ist,
  - ist G zusammenhängend.
  - ist $\deg(v) \geq 3$ für jeden Knoten $v \in V(G)$.

Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ. ✓

Behauptung 2.

$G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

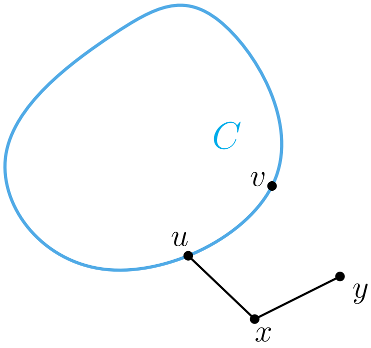
Beweis von Wagner – Abschluss

Satz von Wagner.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor.

Beweis:

- Sei $xy \in E$ eine Kante und C der Kreis $G - x - y$.
- Sei $uv \in E$ eine Kante auf C mit $ux \in E$.



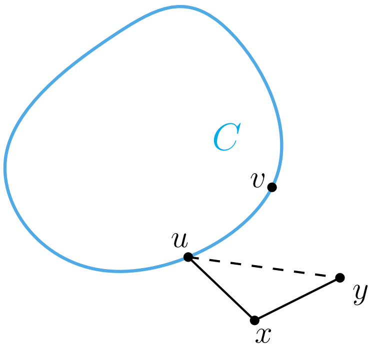
Beweis von Wagner – Abschluss

Satz von Wagner.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor.

Beweis:

- Sei $xy \in E$ eine Kante und C der Kreis $G - x - y$.
- Sei $uv \in E$ eine Kante auf C mit $ux \in E$.
- 1. Fall: $uy \notin E$.
  - $G - u - x$ ist ein Kreis.



Beweis von Wagner – Abschluss

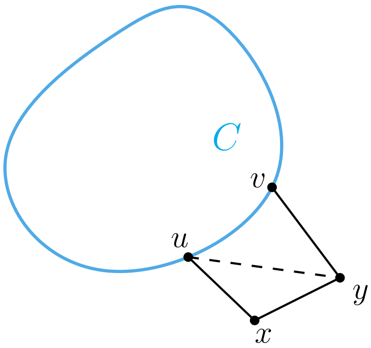
Satz von Wagner.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ *G* enthält einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor.

Beweis:

- Sei $xy \in E$ eine Kante und C der Kreis $G - x - y$.
- Sei $uv \in E$ eine Kante auf C mit $ux \in E$.
- 1\. Fall: $uy \notin E$.
  - $G - u - x$ ist ein Kreis.

  $\Rightarrow$ $vy \in E$.



Beweis von Wagner – Abschluss

Satz von Wagner.

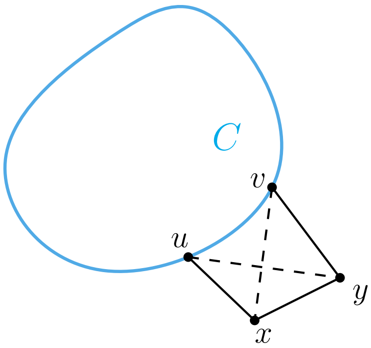
G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor.

Beweis:

- Sei $xy \in E$ eine Kante und C der Kreis $G - x - y$.
- Sei $uv \in E$ eine Kante auf C mit $ux \in E$.
- 1. Fall: $uy \notin E$.
  - $G - u - x$ ist ein Kreis.

  $\Rightarrow$ $vy \in E$.
  - Wenn $vx \in E$, dann hat $G - x - v$ einen Knoten u mit Grad 1. Widerspruch!

  $\Rightarrow$ $vx \notin E$.



Beweis von Wagner – Abschluss

Satz von Wagner.

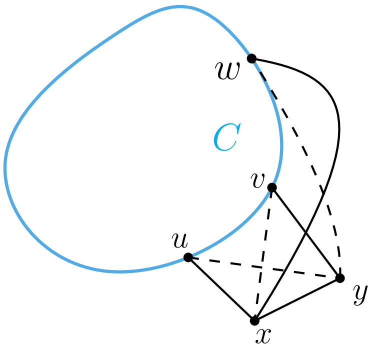
G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor.

Beweis:

- Sei $xy \in E$ eine Kante und C der Kreis $G - x - y$.
- Sei $uv \in E$ eine Kante auf C mit $ux \in E$.
- 1. Fall: $uy \notin E$.
  - $G - u - x$ ist ein Kreis.

  $\Rightarrow$ $vy \in E$.
  - Wenn $vx \in E$, dann hat $G - x - v$ einen Knoten u mit Grad 1. Widerspruch!

  $\Rightarrow$ $vx \notin E$.
  - Analoge Argumente liefern:



Beweis von Wagner – Abschluss

Satz von Wagner.

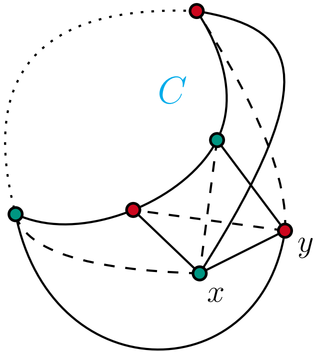
G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor.

Beweis:

- Sei $xy \in E$ eine Kante und C der Kreis $G - x - y$.
- Sei $uv \in E$ eine Kante auf C mit $ux \in E$.
- 1. Fall: $uy \notin E$.
  - $G - u - x$ ist ein Kreis.

  $\Rightarrow$ $vy \in E$.
  - Wenn $vx \in E$, dann hat $G - x - v$ einen Knoten u mit Grad 1. Widerspruch!

  $\Rightarrow$ $vx \notin E$.
  - Analoge Argumente liefern:
    - $N(x), N(y)$ sind auf C disjunkt und alternierend.
    - $|C| \geq 4$ und wir finden einen $K_{3,3}$-Minor. ✓



Beweis von Wagner – Abschluss

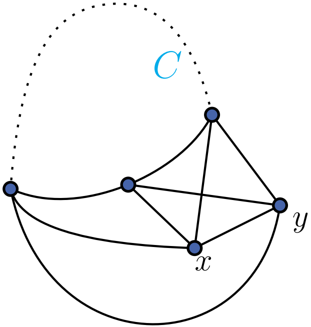
Satz von Wagner.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor.

Beweis:

- Sei $xy \in E$ eine Kante und C der Kreis $G - x - y$.
- Sei $uv \in E$ eine Kante auf C mit $ux \in E$.
- 1. Fall: $uy \notin E$.
- 2. Fall: Jeder Knoten auf C ist zu x und y benachbart.
  - $|C| \geq 3$.
  - Wir finden einen K_5-Minor. ✓

$\Rightarrow$ Satz von Wagner. ✓



Wagner und Kuratowski

(1) G ist nicht planar

(2) G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Minor

(3) G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Satz von Wagner ✓

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Satz von Kuratowski

(3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) haben wir schon.

(1) $\Rightarrow$ (2) jetzt auch.

Wir schließen ab mit (2) $\Rightarrow$ (3) und benutzen folgendes Lemma:

Lemma.

Seien G, H Graphen. Maximaler Knotengrad von H höchstens 3, d.h. $\Delta(H) \leq 3$. Dann sind äquivalent:

- G enthält H-Minor.
- G enthält H-Unterteilung.

Beweis von Kuratowski – Hilfslemma

Lemma.

Seien G, H Graphen. Maximaler Knotengrad von H höchstens 3, d.h. $\Delta(H) \leq 3$. Dann sind äquivalent:

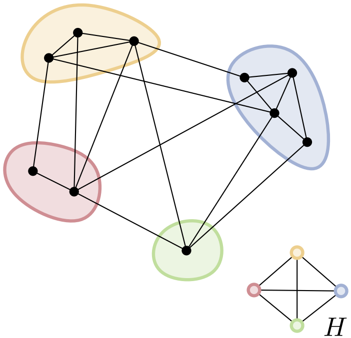
- G enthält H-Minor.
- G enthält H-Unterteilung.

Erinnerung. (hatten wir schon)

G enthält H-Unterteilung
$\Rightarrow$ G enthält H-Minor

Beweisskizze:

- In einem H-Minor finden wir H-Unterteilung.
- O.B.d.A. ist jede Kontraktionsmenge ein **Baum**, sodass
  - jedes Blatt hat Nachbarn in anderer Menge,
  - zwischen je zwei Mengen ist maximal eine Kante.
- Wähle Knoten von maximalem Grad in jeder Menge.
- Dann bilden diese Bäume schon eine H-Unterteilung, da $\Delta(H) \leq 3$.



Beweis von Kuratowski – Hilfslemma

Lemma.

Seien G, H Graphen. Maximaler Knotengrad von H höchstens 3, d.h. $\Delta(H) \leq 3$. Dann sind äquivalent:

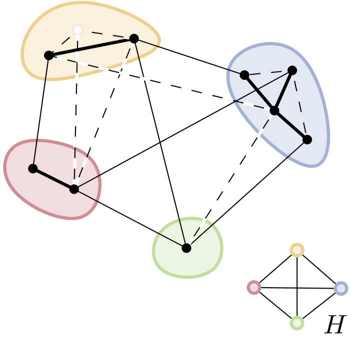
- G enthält H-Minor.
- G enthält H-Unterteilung.

Erinnerung. (hatten wir schon)

G enthält H-Unterteilung
$\Rightarrow$ G enthält H-Minor

Beweisskizze:

- In einem H-Minor finden wir H-Unterteilung.
- O.B.d.A. ist jede Kontraktionsmenge ein **Baum**, sodass
  - jedes Blatt hat Nachbarn in anderer Menge,
  - zwischen je zwei Mengen ist maximal eine Kante.
- Wähle Knoten von maximalem Grad in jeder Menge.
- Dann bilden diese Bäume schon eine H-Unterteilung, da $\Delta(H) \leq 3$.



Beweis von Kuratowski – Hilfslemma

Lemma.

Seien G, H Graphen. Maximaler Knotengrad von H höchstens 3, d.h. $\Delta(H) \leq 3$. Dann sind äquivalent:

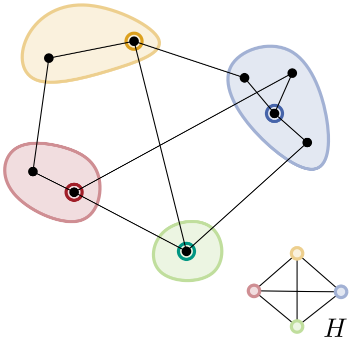
- G enthält H-Minor.
- G enthält H-Unterteilung.

Erinnerung. (hatten wir schon)

G enthält H-Unterteilung
$\Rightarrow$ G enthält H-Minor

Beweisskizze:

- In einem H-Minor finden wir H-Unterteilung.
- O.B.d.A. ist jede Kontraktionsmenge ein **Baum**, sodass
  - jedes Blatt hat Nachbarn in anderer Menge,
  - zwischen je zwei Mengen ist maximal eine Kante.
- Wähle Knoten von maximalem Grad in jeder Menge.
- Dann bilden diese Bäume schon eine H-Unterteilung, da $\Delta(H) \leq 3$.

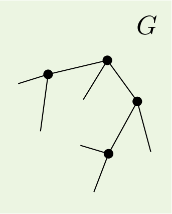


Beweis von Kuratowski

Satz von Kuratowski.
G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält eine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung.

Beweis: Sei G nicht planar.

- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$- oder K_5-Minor in G.
- Bei $K_{3,3}$-Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.
- Sonst: Induktion über Knotenzahl von G
  - Haben wir einen K_5-Teilgraph, sind wir fertig.



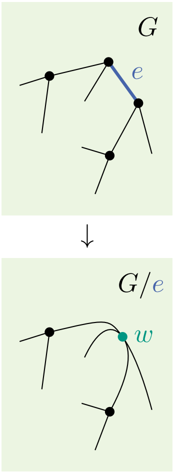
Beweis von Kuratowski

Satz von Kuratowski.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält eine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung.

Beweis: Sei G nicht planar.

- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$- oder K_5-Minor in G.
- Bei $K_{3,3}$-Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.
- Sonst: Induktion über Knotenzahl von G
  - Haben wir einen K_5-Teilgraph, sind wir fertig.
  - Andernfalls gibt es $e = uv$, sodass G/e nicht planar also immer noch einen K_5-Minor enthält.



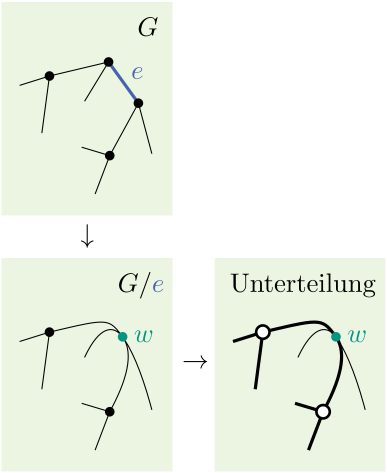
Beweis von Kuratowski

Satz von Kuratowski.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält eine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung.

Beweis: Sei G nicht planar.

- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$- oder K_5-Minor in G.
- Bei $K_{3,3}$-Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.
- Sonst: Induktion über Knotenzahl von G
  - Haben wir einen K_5-Teilgraph, sind wir fertig.
  - Andernfalls gibt es $e = uv$, sodass G/e nicht planar also immer noch einen K_5-Minor enthält.
  - Nach IV gibt es $K_{3,3}$- oder K_5-Unterteilung in G/e.



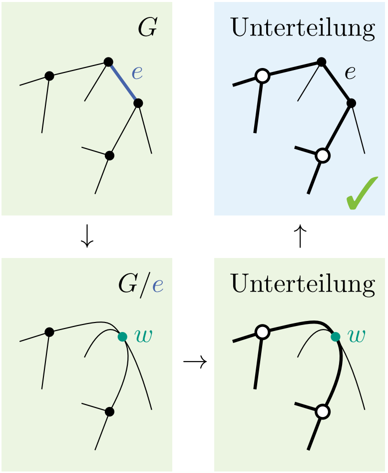
Beweis von Kuratowski

Satz von Kuratowski.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält eine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung.

Beweis: Sei G nicht planar.

- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$- oder K_5-Minor in G.
- Bei $K_{3,3}$-Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.
- Sonst: Induktion über Knotenzahl von G
  - Haben wir einen K_5-Teilgraph, sind wir fertig.
  - Andernfalls gibt es $e = uv$, sodass G/e nicht planar also immer noch einen K_5-Minor enthält.
  - Nach IV gibt es $K_{3,3}$- oder K_5-Unterteilung in G/e.
  - Wenn w in der Unterteilung ein Unterteilungspunkt ist, gibt es auch solch eine Unterteilung in G.



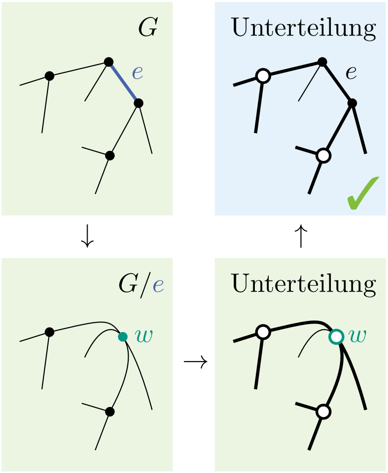
Beweis von Kuratowski

Satz von Kuratowski.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält eine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung.

Beweis: Sei G nicht planar.

- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$- oder K_5-Minor in G.
- Bei $K_{3,3}$-Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.
- Sonst: Induktion über Knotenzahl von G
  - Haben wir einen K_5-Teilgraph, sind wir fertig.
  - Andernfalls gibt es $e = uv$, sodass G/e nicht planar also immer noch einen K_5-Minor enthält.
  - Nach IV gibt es $K_{3,3}$- oder K_5-Unterteilung in G/e.
  - Wenn w in der Unterteilung ein Unterteilungspunkt ist, gibt es auch solch eine Unterteilung in G.
  - Wenn $\deg(w) = 3$ in Unterteilung, gibt es auch in G eine Unterteilung.



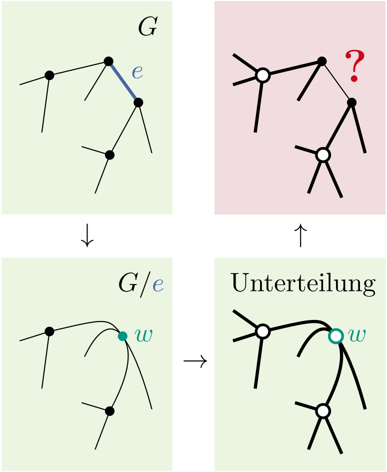
Beweis von Kuratowski

Satz von Kuratowski.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält eine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung.

Beweis: Sei G nicht planar.

- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$- oder K_5-Minor in G.
- Bei $K_{3,3}$-Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.
- Sonst: Induktion über Knotenzahl von G
  - Also o.B.d.A. $\deg(w) = 4$ in K_5-Unterteilung in G/e.



Beweis von Kuratowski

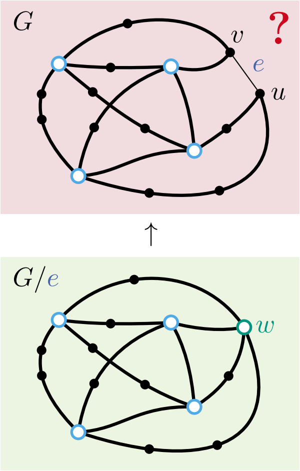
Karlsruher Institut für Technologie

Satz von Kuratowski.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält eine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung.

Beweis: Sei G nicht planar.

- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$- oder K_5-Minor in G.
- Bei $K_{3,3}$-Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.
- Sonst: Induktion über Knotenzahl von G
  - Also o.B.d.A. $\deg(w) = 4$ in K_5-Unterteilung in G/e.
  - Betrachte die vier anderen Knoten von Grad 4.



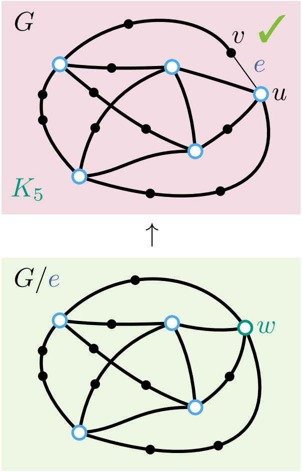
Beweis von Kuratowski

Satz von Kuratowski.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält eine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung.

Beweis: Sei G nicht planar.

- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$- oder K_5-Minor in G.
- Bei $K_{3,3}$-Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.
- Sonst: Induktion über Knotenzahl von G
  - Also o.B.d.A. $\deg(w) = 4$ in K_5-Unterteilung in G/e.
  - Betrachte die vier anderen Knoten von Grad 4.
  - Sind mindestens drei davon zu u verbunden, finden wir wieder eine K_5-Unterteilung in G.



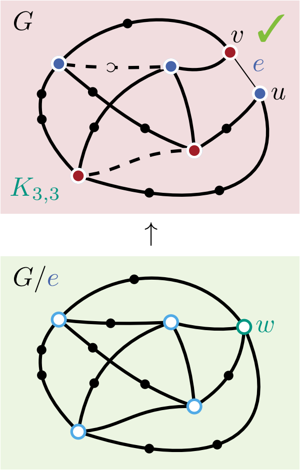
Beweis von Kuratowski

Satz von Kuratowski.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält eine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung.

Beweis: Sei G nicht planar.

- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$- oder K_5-Minor in G.
- Bei $K_{3,3}$-Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.
- Sonst: Induktion über Knotenzahl von G
  - Also o.B.d.A. $\deg(w) = 4$ in K_5-Unterteilung in G/e.
  - Betrachte die vier anderen Knoten von Grad 4.
  - Sind mindestens drei davon zu u verbunden, finden wir wieder eine K_5-Unterteilung in G.
  - Andernfalls sind zwei zu u und zwei zu v verbunden und wir finden eine $K_{3,3}$-Unterteilung in G.



Beweis von Kuratowski

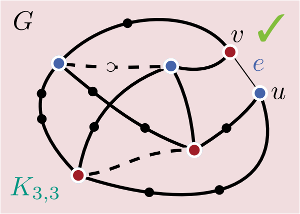
Satz von Kuratowski.

G nicht planar $\Leftrightarrow$ G enthält eine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung.

Beweis: Sei G nicht planar.

- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$- oder K_5-Minor in G.
- Bei $K_{3,3}$-Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.
- Sonst: Induktion über Knotenzahl von G
  - Also o.B.d.A. $\deg(w) = 4$ in K_5-Unterteilung in G/e.
  - Betrachte die vier anderen Knoten von Grad 4.
  - Sind mindestens drei davon zu u verbunden, finden wir wieder eine K_5-Unterteilung in G.
  - Andernfalls sind zwei zu u und zwei zu v verbunden und wir finden eine $K_{3,3}$-Unterteilung in G.

$\Rightarrow$ Satz von Kuratowski. ✓



$\uparrow$