Algorithmen für Planare Graphen

Vorlesung am 05.05.2022

Torsten Ueckerdt | 05. Mai 2022

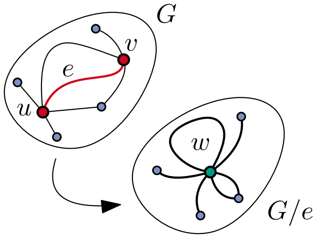
Kantenkontraktionen und Minoren

Definition.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $e = uv \in E$. Der Graph $G/e = (V', E')$ ist der Graph der durch **Kontrahieren** der Kante e entsteht, genauer:

- $V' = V - \{u, v\} + \{w\}$
- $E' = E(G - u - v) \cup \{wa \mid au \in E \text{ oder } av \in E\}$

Diesen Prozess nennt man auch **Kantenkontraktion**.



Bemerkung: Dabei können Multikanten und Schlaufen entstehen!

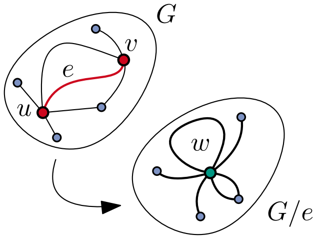
Kantenkontraktionen und Minoren

Definition.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $e = uv \in E$. Der Graph $G/e = (V', E')$ ist der Graph der durch **Kontrahieren** der Kante e entsteht, genauer:

- $V' = V - \{u, v\} + \{w\}$
- $E' = E(G - u - v) \cup \{wa \mid au \in E \text{ oder } av \in E\}$

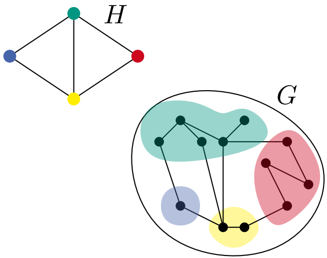
Diesen Prozess nennt man auch **Kantenkontraktion**.



Bemerkung: Dabei können Multikanten und Schlaufen entstehen!

Definition.

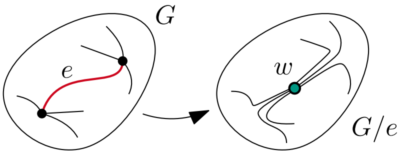
Ein Graph H ist **Minor** von G wenn H aus G durch eine Folge von Kantenkontraktionen entsteht, also $H = ((G/e_1)/e_2 \cdots)/e_k$.
Wir sagen dann auch (Achtung!): G ist ein H-**Minor**.



Merke: H ist immer der kleinere Graph, G der Größere.

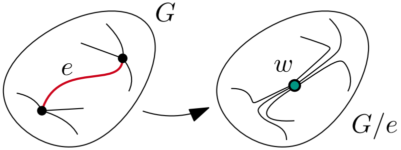
Kantenkontraktionen und Minoren

Beobachtung: G planar $\Rightarrow$ G/e planar.
Also: G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Minor $\Rightarrow$ G nicht planar.



Kantenkontraktionen und Minoren

Beobachtung: G planar $\Rightarrow$ G/e planar.
Also: G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Minor $\Rightarrow$ G nicht planar.

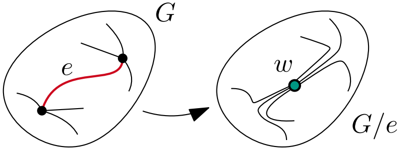


Satz (Wagner, 1937).

G planar $\Leftrightarrow$ G enthält keinen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor.

Kantenkontraktionen und Minoren

Beobachtung: G planar $\Rightarrow$ G/e planar.
Also: G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Minor $\Rightarrow$ G nicht planar.



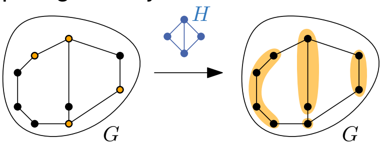
Satz (Wagner, 1937).

G planar $\Leftrightarrow$ G enthält keinen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor.

Lemma.

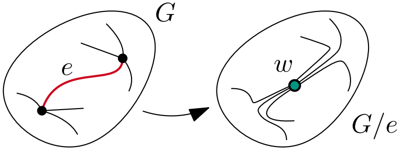
G enthält H-Unterteilung $\Rightarrow$ G enthält H-Minor.

Beweisskizze: Kontrahiere durch Unterteilung entstandene Knoten zu ursprünglich adjazenten Knoten.



Kantenkontraktionen und Minoren

Beobachtung: G planar $\Rightarrow$ G/e planar.
Also: G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Minor $\Rightarrow$ G nicht planar.



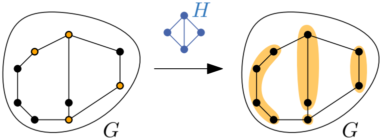
Satz (Wagner, 1937).

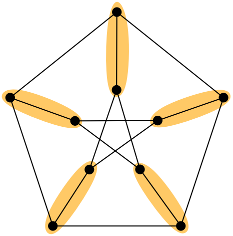
G planar $\Leftrightarrow$ G enthält keinen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor.

Lemma.

G enthält H-Unterteilung $\Rightarrow$ G enthält H-Minor.

Beweisskizze: Kontrahiere durch Unterteilung entstandene Knoten zu ursprünglich adjazenten Knoten.





Petersen-Graph enthält einen K_5-Minor.

Wagner und Kuratowski

Es sind also äquivalent:

(1) G ist nicht planar

(2) G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Minor

(3) G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Satz von Wagner

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Satz von Kuratowski

(3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) haben wir schon.

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) müssen wir noch beweisen.

Wagner und Kuratowski

Es sind also äquivalent:

(1) G ist nicht planar

(2) G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Minor

(3) G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Satz von Wagner
(1) $\Leftrightarrow$ (3) Satz von Kuratowski

(3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) haben wir schon.

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) müssen wir noch beweisen.

Wir beginnen mit (1) $\Rightarrow$ (2):

Im Folgenden sei G ein nicht-planarer Graph. O.B.d.A. sei G sogar minimal nicht-planar, d.h.

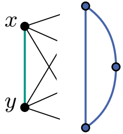
- $G - v$ ist planar für jeden Knoten $v \in V$.
- $G - e$ ist planar für jede Kante $e \in E$.
- G/e ist planar für jede Kante $e \in E$.

Beweis von Wagner

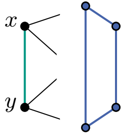
Lemma.

Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$.
Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.

K_5:



$K_{3,3}$:



Beweis von Wagner

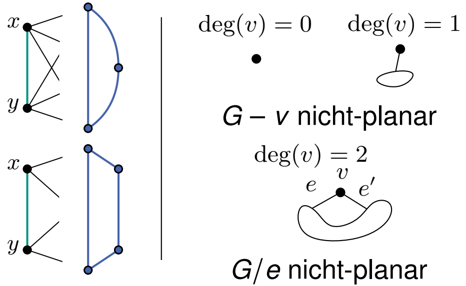
Lemma.
Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$.
Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.

Beweis:

- Da G minimal nicht-planar ist,
  - ist G zusammenhängend.
  - ist $\deg(v) \geq 3$ für jeden Knoten $v \in V(G)$.

K_5:

$K_{3,3}$:



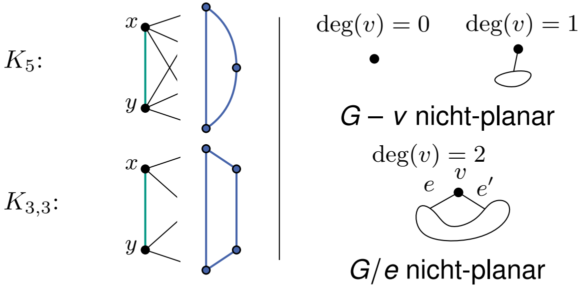
Beweis von Wagner

Lemma.

Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$.
Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.

Beweis:

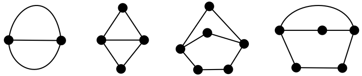
- Da G minimal nicht-planar ist,
  - ist G zusammenhängend.
  - ist $\deg(v) \geq 3$ für jeden Knoten $v \in V(G)$.



Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ (Theta).

Theta-Graphen sind Unterteilungen des Graphen mit zwei Knoten und drei parallelen Kanten.



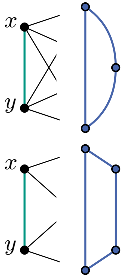
Beweis von Wagner

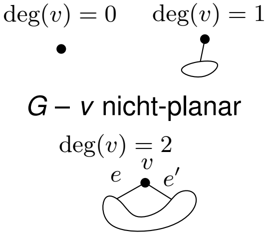
Lemma.

Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$.
Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.

K_5:

$K_{3,3}$:





G/e nicht-planar

Beweis:

- Da G minimal nicht-planar ist,
  - ist G zusammenhängend.
  - ist $\deg(v) \geq 3$ für jeden Knoten $v \in V(G)$.

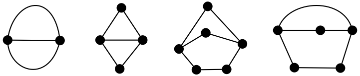
Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ (Theta).

Behauptung 2.

$G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

Theta-Graphen sind Unterteilungen des Graphen mit zwei Knoten und drei parallelen Kanten.

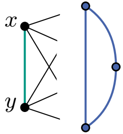


Beweis von Wagner

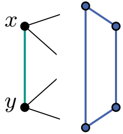
Lemma.

Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$.
Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.

K_5:



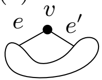
$K_{3,3}$:



$\deg(v) = 0$ $\deg(v) = 1$

$G - v$ nicht-planar

$\deg(v) = 2$



G/e nicht-planar

Beweis:

- Da G minimal nicht-planar ist,
  - ist G zusammenhängend.
  - ist $\deg(v) \geq 3$ für jeden Knoten $v \in V(G)$.

Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ (Theta).

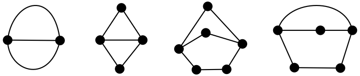
Behauptung 2.

$G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Theta-Graphen sind Unterteilungen des Graphen mit zwei Knoten und drei parallelen Kanten.



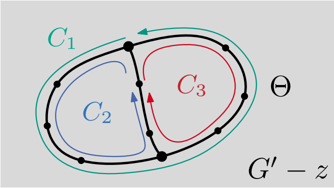
Beweis von Wagner – Behauptung 1

Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ.

Beweis:

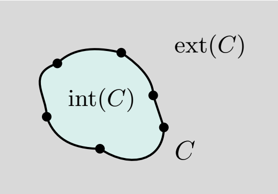
- Angenommen $G - x - y$ enthält ein Θ.
- $G' := G/xy$ ist planar mit Kante xy zu Knoten z kontrahiert.
- $G' - z = G - x - y$ ist ebenfalls planar.
- Bekommen planare Zeichnung von G' und dem enthaltenen Θ.
- Das Θ hat drei Kreise: C_1, C_2, C_3



Notation:

Für einen Kreis C in einer planaren Zeichnung erhält man eine geschlossene Jordankurve, die die Ebene in zwei Komponenten unterteilt:

- $\text{int}(C)$, das Innere von C.
- $\text{ext}(C)$, das Äußere von C.

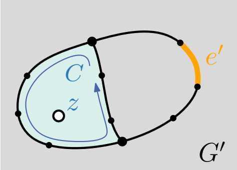


Beweis von Wagner – Behauptung 1

Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ.

- Betrachte Kreis C im Θ, sodass z auf einer Seite von C und eine Kante $e' \in E(\Theta)$ auf der anderen Seite von C liegt.
- Wähle Θ und C so, dass die Seite von C mit z inklusionsminimal ist.
- O.B.d.A. gilt $z \in \mathrm{int}(C)$ und $e' \in \mathrm{ext}(C)$.

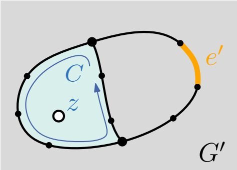


Beweis von Wagner – Behauptung 1

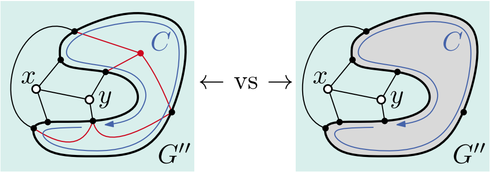
Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ.

- Betrachte Kreis C im Θ, sodass z auf einer Seite von C und eine Kante $e' \in E(\Theta)$ auf der anderen Seite von C liegt.
- Wähle Θ und C so, dass die Seite von C mit z inklusionsminimal ist.
- O.B.d.A. gilt $z \in \mathrm{int}(C)$ und $e' \in \mathrm{ext}(C)$.



- Betrachte $G'' = G - \mathrm{ext}(C)$.



- Da $e' \notin G''$, ist G'' planar.
- Betrachte planare Zeichnung von G''.
- Kreis C ist darin gezeichnet.

Ziel: Zeigen, dass C eine Facette berandet.

- Dann kann $\mathrm{ext}(C)$ in C eingesetzt werden wie in der Zeichnung von G'.
- Das wäre planare Zeichnung von G. ✗

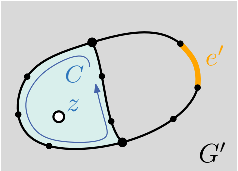
Beweis von Wagner – Behauptung 1

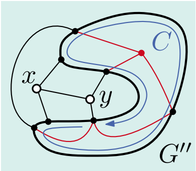
Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ.

Erinnerung: Wahl von Θ, C mit $\mathrm{int}(C)$ minimal.

$G' = G/xy$ $\quad$ $G'' = G - \mathrm{ext}(C)$





<u>Ziel</u>: Dass C in G'' eine Facette berandet.

Beweis von Wagner – Behauptung 1

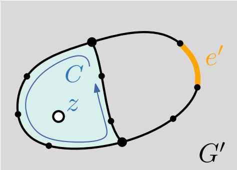
Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ.

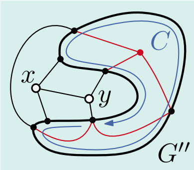
Erinnerung: Wahl von Θ, C mit int(C) minimal.

- Betrachte Pfad P in G'', der
  - auf versch. Knoten von C startet und endet.
  - ansonsten zu C disjunkt ist.
- P entspricht auch einem Pfad P' in G'.

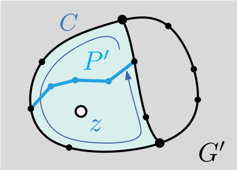
$G' = G/xy$

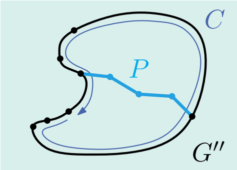


$G'' = G - \text{ext}(C)$



Ziel: Dass C in G'' eine Facette berandet.





Beweis von Wagner – Behauptung 1

Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ.

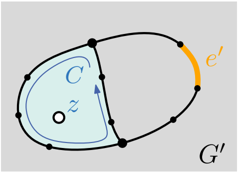
Erinnerung: Wahl von Θ, C mit int(C) minimal.

- Betrachte Pfad P in G'', der
  - auf versch. Knoten von C startet und endet.
  - ansonsten zu C disjunkt ist.
- P entspricht auch einem Pfad P' in G'.

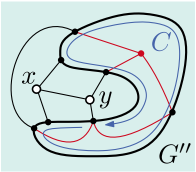
Wenn $z \notin P'$:

- Dann ist $C \cup P'$ ein Θ in $G - x - y$.
- Dieses Θ hat einen Kreis der z enthält aber kleineres Inneres als C hat.
- Widerspruch zur Wahl von Θ und C. ✗

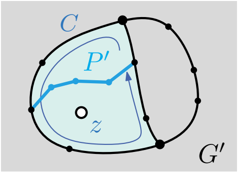
$G' = G/xy$

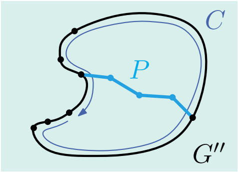


$G'' = G - \text{ext}(C)$



Ziel: Dass C in G'' eine Facette berandet.





Beweis von Wagner – Behauptung 1

Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ.

Erinnerung: Wahl von Θ, C mit $\mathrm{int}(C)$ minimal.

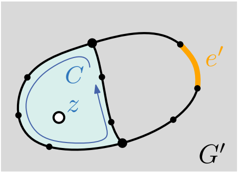
- Betrachte Pfad P in G'', der
  - auf versch. Knoten von C startet und endet.
  - ansonsten zu C disjunkt ist.
- P entspricht auch einem Pfad P' in G'.

Wenn $z \notin P'$ $\rightsquigarrow$ Widerspruch ✗

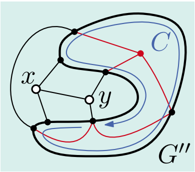
- Also liegt z auf P'.
- Also enthält P entweder x, y oder beide.
- Also liegt jeder solche Pfad in der Zeichnung von G'' auf der Seite von C mit x, y.

$\Rightarrow$ C liegt im Rand einer Facette von G''. ✓

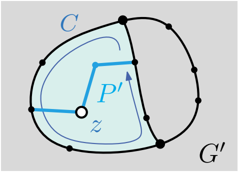
$G' = G/xy$

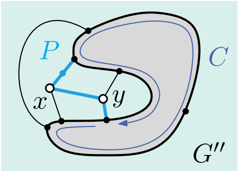


$G'' = G - \mathrm{ext}(C)$



Ziel: Dass C in G'' eine Facette berandet.





Beweis von Wagner – Behauptung 1

Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ.

Erinnerung: Wahl von Θ, C mit $\text{int}(C)$ minimal.

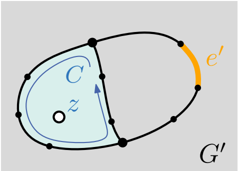
- Betrachte Pfad P in G'', der
  - auf versch. Knoten von C startet und endet.
  - ansonsten zu C disjunkt ist.
- P entspricht auch einem Pfad P' in G'.

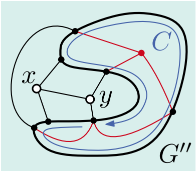
Wenn $z \notin P'$ $\rightsquigarrow$ Widerspruch ✗

- Also liegt z auf P'.
- Also enthält P entweder x, y oder beide.
- Also liegt jeder solche Pfad in der Zeichnung von G'' auf der Seite von C mit x, y.

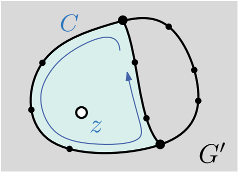
$\Rightarrow$ C liegt im Rand einer Facette von G''. ✓

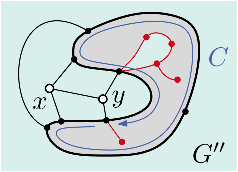
$G' = G/xy$ $\qquad$ $G'' = G - \text{ext}(C)$





Ziel: Dass C in G'' eine Facette berandet.

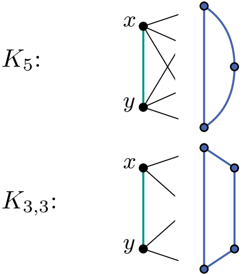


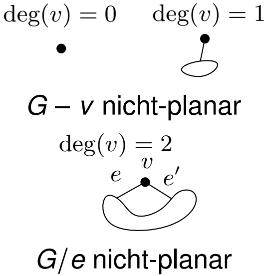


Beweis von Wagner

Lemma.

Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$.
Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.





Beweis:

- Da G minimal nicht-planar ist,
  - ist G zusammenhängend.
  - ist $\deg(v) \geq 3$ für jeden Knoten $v \in V(G)$.

Behauptung 1.

$G - x - y$ enthält kein Θ (Theta).

Behauptung 2.

$G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

Behauptung 3.

$G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Theta-Graphen sind Unterteilungen des Graphen mit zwei Knoten und drei parallelen Kanten.