Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

Vorlesung am 03.05.2022

Torsten Ueckerdt | 03. Mai 2022

Graphfärbung – Bessere obere Schranke

Aus der letzten Vorlesung wissen wir:
$\chi_{\text{planar}} := \max\{\chi(G) \mid G \text{ planar}\} \leq 6$.

Wir beweisen jetzt $\chi_{\text{planar}} \leq 5$ mithilfe einer stärkeren Aussage.

Satz (Thomassen 1994).
Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 5$.

Da aus k-Listenfärbbarkeit auch k-Färbbarkeit folgt, erhalten wir damit auch $\chi_{\text{planar}} \leq 5$.

Der Beweis geht per Induktion und beweist eine noch stärkere Aussage.

Graphfärbung – Bessere obere Schranke

Aus der letzten Vorlesung wissen wir:
$\chi_{\text{planar}} := \max\{\chi(G) \mid G \text{ planar}\} \leq 6.$

Wir beweisen jetzt $\chi_{\text{planar}} \leq 5$ mithilfe einer stärkeren Aussage.

Satz (Thomassen 1994).
Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 5$.

Da aus k-Listenfärbbarkeit auch k-Färbbarkeit folgt, erhalten wir damit auch $\chi_{\text{planar}} \leq 5$.

Der Beweis geht per Induktion und beweist eine noch stärkere Aussage.

Satz.
Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit:

- jede innere Facette ist ein Dreieck
- äußere Facette ist ein einfacher Kreis C

Seien v_1, v_2 zwei feste aufeinanderfolgende Knoten auf C und L eine Listenzuweisung mit:

- $|L(v)| = 5$ für $v \in V \setminus C$
- $|L(v)| = 3$ für $v \in C \setminus \{v_1, v_2\}$
- $L(v_1) = \{\alpha\}, L(v_2) = \{\beta\}$

Dann gibt es eine L-Listenfärbung von G.

Beweis – stärkere Aussage

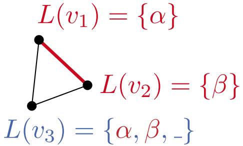
Beweis. Induktion nach $|V|$.

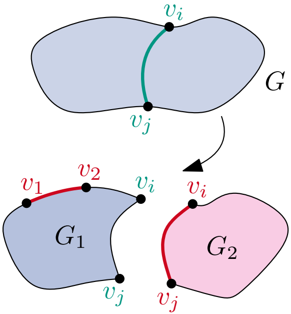
IA: $|V| = 3$. Wähle $c(v_3) \in L(v_3) - \{\alpha, \beta\}$

IS: $|V| \geq 4$.

1. Fall: C hat Sehne $e = v_i v_j$.
   Das heißt e ist innere Kante, verbindet aber zwei äußere Knoten.

- Zerteile G entlang e in zwei Graphen G_1, G_2.
- O.B.d.A. liegt $v_1 v_2$ in G_1.
- Nach IV gibt es eine Färbung c_1 von G_1.
- $c_1(v_i) = \alpha'$ und $c_1(v_j) = \beta'$.
- Wende IV auf G_2 an mit Listen $\{\alpha'\}$ für v_i und $\{\beta'\}$ für v_j.
- Erhalte also Färbung c_2 von G_2.
- Da c_1 und c_2 übereinstimmen an der Sehne $v_i v_j$, erhalten wir eine Färbung von G. ✓





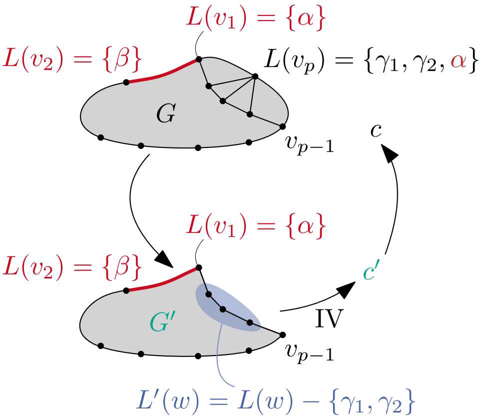
Beweis – stärkere Aussage

Beweis. Induktion nach $|V|$.

IS: $|V| \geq 4$.

2. Fall: C hat keine Sehne.

- Betrachte Nachbarn $v_p \neq v_2$ von v_1 auf C.
- Lösche v_p aus G, erhalte G'.
- G' hat einfachen Kreis als äußere Facette, da v_p keine inzidente Sehne hat.
- Seien γ_1, γ_2 zwei Farben aus $L(v_p) - \{\alpha\}$.
- Für jeden inneren Nachbarn w von v_p definiere $L'(w) = L(w) - \{v_1, v_2\}$.
- Definiere $L'(v) = L(v)$ sonst.
- Nach IV gibt es L'-Listenfärbung c' von G'.
- Kein innerer Nachbar von v_p hat Farbe γ_1 oder γ_2
- Wähle $c(v_p) \in \{\gamma_1, \gamma_2\} - c'(v_{p-1})$.
- Somit ist c eine L-Listenfärbung von G. ✓

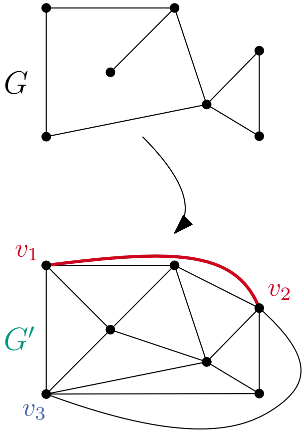


Beweis – Satz von Thomassen

Beweis von Thomassen.

- Sei G planar beliebig.
- $|L(v)| \geq 5$ für jeden Knoten v.
- Füge neue Kanten und Knoten hinzu, um G' zu erhalten dessen Facetten Dreiecke sind.
- Wähle Listen für neue Knoten beliebig
- Nehme zwei äußere Knoten v_1, v_2.
- Wähle $\alpha \in L(v_1), \beta \in L(v_2)$ mit $\alpha \neq \beta$
- Entferne zwei beliebige Farben aus der Liste $L(v_3)$ des dritten äußeren Knotens
- Wende die stärkere Aussage an. ✓

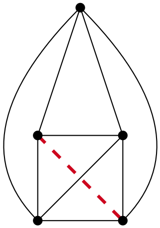
Somit haben wir gezeigt, dass $\chi(G) \leq \chi_{\text{list}}(G) \leq 5$ für G planar.

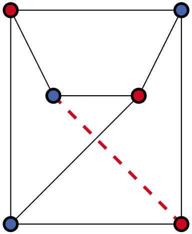


Minimale Nicht-Planarität

Wir wissen:

- K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.
- Jeder Graph der K_5 oder $K_{3,3}$ enthält ist nicht planar.
- K_5 und $K_{3,3}$ sind minimal nicht-planar





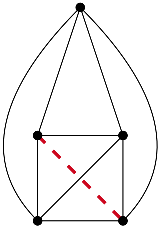
Frage.

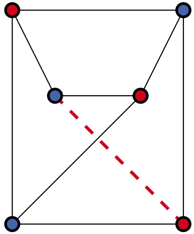
Was sind die minimal nicht-planaren Graphen?

Minimale Nicht-Planarität

Wir wissen:

- K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.
- Jeder Graph der K_5 oder $K_{3,3}$ enthält ist nicht planar.
- K_5 und $K_{3,3}$ sind minimal nicht-planar

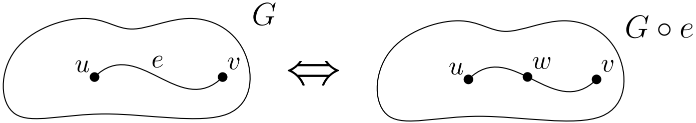




Frage.

Was sind die minimal nicht-planaren Graphen?

Beobachtung: Kanten zu unterteilen erhält minimale Nicht-Planarität.



Kantenunterteilung

Definition.

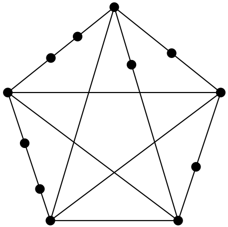
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $e = uv$ eine Kante. Dann ist die **Unterteilung von e in G** der Graph $G \circ e = (V', E')$ mit

- $V' = V + \{w\}$
- $E' = (E - uv) + \{uw, vw\}$

Beobachtung: G planar $\Leftrightarrow$ $G \circ e$ planar

Definition.

Ein Graph G ist eine **Unterteilung von H** wenn $G = ((H \circ e_1) \circ e_2) \cdots) \circ e_k$.
Wir sagen auch G ist **H-Unterteilung**.
Graph G **enthält eine H-Unterteilung**, wenn ein Teilgraph $G' \subseteq G$ eine H-Unterteilung ist.



K_5-Unterteilung

Kantenunterteilung

Beobachtung:

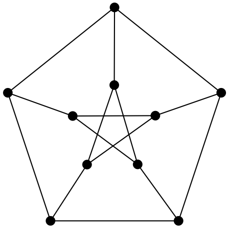
- K_5- und $K_{3,3}$-Unterteilungen sind minimal nicht-planar.
- Jeder Graph der eine K_5 oder $K_{3,3}$-Unterteilung enthält, ist nicht planar.

Satz (Kuratowski 1930).

Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er keine K_5- und keine $K_{3,3}$-Unterteilung enthält.

„$\Rightarrow$“ ist die letzte Beobachtung

„$\Leftarrow$“ ist interessanter (und schwieriger zu beweisen).



Petersen-Graph ist nicht planar

Kantenunterteilung

Beobachtung:

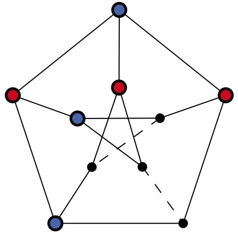
- K_5- und $K_{3,3}$-Unterteilungen sind minimal nicht-planar.
- Jeder Graph der eine K_5 oder $K_{3,3}$-Unterteilung enthält, ist nicht planar.

Satz (Kuratowski 1930).

Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er keine K_5- und keine $K_{3,3}$-Unterteilung enthält.

„$\Rightarrow$“ ist die letzte Beobachtung

„$\Leftarrow$“ ist interessanter (und schwieriger zu beweisen).



Petersen-Graph ist nicht planar