Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

Vorlesung am 26.04.2022

Torsten Ueckerdt | 26. April 2022

Graphfärbung – Motivation

Karlsruher Institut für Technologie

1852 bemerkt Francis Guthrie, dass man Englands Grafschaften in vier Farben färben kann.

Problem

Färbe Facetten eines planaren Graphen mit minimaler Anzahl Farben, sodass keine zwei benachbarten Facetten die gleiche Farbe haben.

Äquivalent im Dualgraph:
Färbe Knoten mit minimaler Anzahl Farben, sodass adjazente Knoten unterschiedlich gefärbt sind.

Graphfärbung – Fragestellung

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $k \in \mathbb{N}$. Eine **k-Knotenfärbung** oder **k-Färbung** von G ist eine Abbildung $c\colon V \to [k]$, sodass

- $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $uv \in E$.

Das kleinste k für das so eine k-Färbung existiert nennt man die **chromatische Zahl** $\chi(G)$.

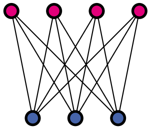
Bei Färbungen nehmen wir Graphen implizit als schlingenfrei an.

Zentrale Frage

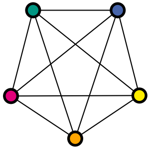
Was ist die größte chromatische Zahl die ein planarer Graph annehmen kann?

$\chi_{\text{planar}} := \max\{\chi(G) \mid G \text{ planar}\} = ?$

Beispiele



$\chi(K_{m,n}) = 2$



$\chi(K_n) = n$

Also $\chi_{\text{planar}} \geq 4$ wegen K_4.

Graphfärbung – Erste obere Schranke

Lemma.

$\chi_{\text{planar}} \leq 6$

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph.

- Induktion über $|V|$:

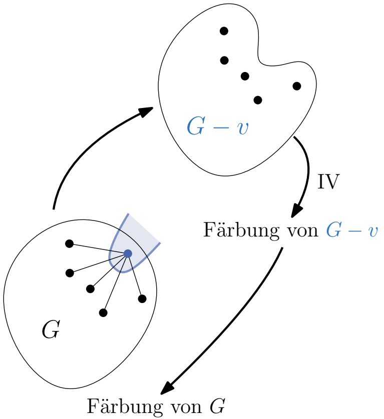
IA: $|V| \leq 6$.

- Jeder Knoten bekommt eigene Farbe. ✓

IS: $|V| > 6$

- Nach Euler-Formel gibt es $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$
- Nach IV gibt es 6-Färbung von $G - v$
- Nachbarn von v in $G - v$ decken höchstens fünf Farben ab
- Färbe v in verbleibender Farbe ✓

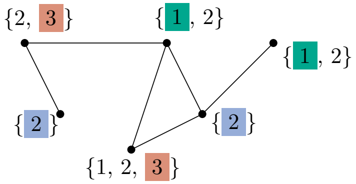
Wir beweisen auch $\chi_{\text{planar}} \leq 5$ (nächste VL).



Listenfärbbarkeit

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph.
Sei $L\colon\ V \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ (Potenzmenge der natürlichen Zahlen) eine **Listenzuweisung**, d.h. $L(v)$ ist eine Menge von Zahlen / Farben.
Eine **L-Listenfärbung** von G ist eine Knotenfärbung c mit

- $c(v) \in L(v)$ für jeden Knoten $v \in V$,
- $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $uv \in E$.



Listenfärbbarkeit

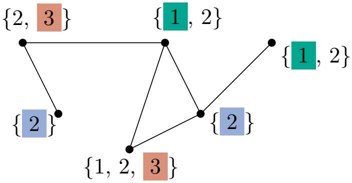
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph.
Sei $L\colon V \to 2^{\mathbb{N}}$ (Potenzmenge der natürlichen Zahlen) eine **Listenzuweisung**, d.h. $L(v)$ ist eine Menge von Zahlen / Farben.
Eine **L-Listenfärbung** von G ist eine Knotenfärbung c mit

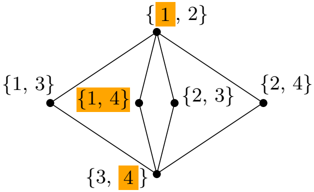
- $c(v) \in L(v)$ für jeden Knoten $v \in V$,
- $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $uv \in E$.

G heißt **k-listenfärbbar** wenn für jede Listenzuweisung L mit

- $|L(v)| \geq k$ für jeden Knoten $v \in V$

eine L-Listenfärbung von G existiert.
Weiterhin heißt das kleinste k für das G k-listenfärbbar ist, die **listenchromatische Zahl** $\chi_{\text{list}}(G)$.





$\chi(K_{2,4}) = 2 \quad \chi_{\text{list}}(K_{2,4}) \geq 3$

Listenfärbbarkeit

Karlsruher Institut für Technologie

untere Schranke $\chi_{\text{list}}(G) > k$

- $\exists$ Listen L $\nexists$ L-Listenfärbung

obere Schranke $\chi_{\text{list}}(G) \leq k$

- $\forall$ Listen L $\exists$ L-Listenfärbung

Listenfärbbarkeit

untere Schranke $\chi_{\text{list}}(G) > k$

- $\exists$ Listen L $\nexists$ L-Listenfärbung

obere Schranke $\chi_{\text{list}}(G) \leq k$

- $\forall$ Listen L $\exists$ L-Listenfärbung

Lemma.

Für jeden einfachen planaren Graphen G gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 6$.

Beweis. Die gleiche Argumentation wie für $\chi_{\text{planar}} \leq 6$ funktioniert! ✓

Listenfärbbarkeit

Karlsruher Institut für Technologie

untere Schranke $\chi_{\text{list}}(G) > k$

- $\exists$ Listen L $\nexists$ L-Listenfärbung

obere Schranke $\chi_{\text{list}}(G) \leq k$

- $\forall$ Listen L $\exists$ L-Listenfärbung

Lemma.

Für jeden einfachen planaren Graphen G gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 6$.

Beweis. Die gleiche Argumentation wie für $\chi_{\text{planar}} \leq 6$ funktioniert! ✓

Beobachtung.

Für jeden Graphen G gilt $\chi_{\text{list}}(G) \geq \chi(G)$.

Beweis.

- Setze $L(v) = \{1, \dots, k\}$ für jeden Knoten v.
- Dann sind L-Listenfärbungen genau k-Knotenfärbungen.
- Also $\chi(G) \leq \chi_{\text{list}}(G)$.

Färbungen planarer Graphen

Satz (Voigt 1993).
Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$.

Satz (Thomassen 1994).
Für jeden planaren Graphen gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 5$.

$$\max\{\chi_{\text{list}}(G) \mid G \text{ planar}\} = 5$$

Beobachtung (Guthrie 1852).
Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi(G) \geq 4$.

Satz (Appel-Haken 1976, 4-Farben-Satz).
Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 4$.

$$\chi_{\text{planar}} = \max\{\chi(G) \mid G \text{ planar}\} = 4$$

Beweis von Voigt

Satz (Voigt 1993).
Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$.

Beweis. Wir konstruieren einen planaren Graphen G mit Listenzuweisung L, sodass

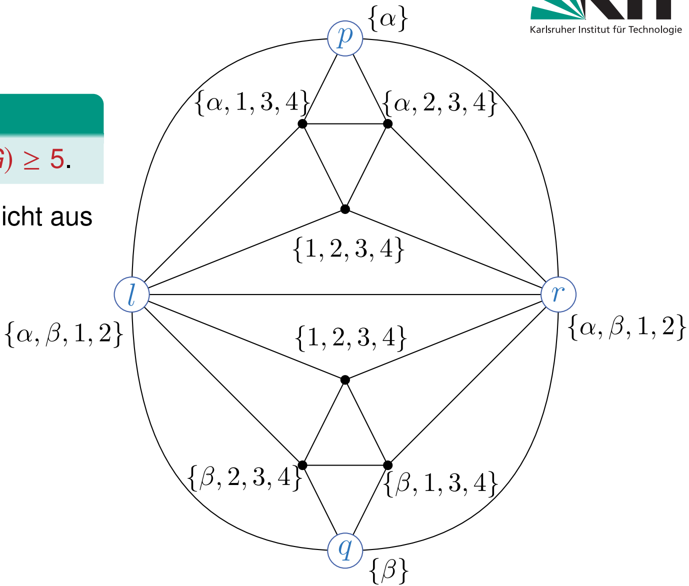
- $|L(v)| = 4$ für jeden Knoten v.
- keine L-Listenfärbung von G existiert.

Beweis von Voigt

Satz (Voigt 1993).

Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$.

Behauptung: Dieses Gadget $H(\alpha, \beta)$ ist nicht aus der gegebenen Listenzuweisung färbbar.



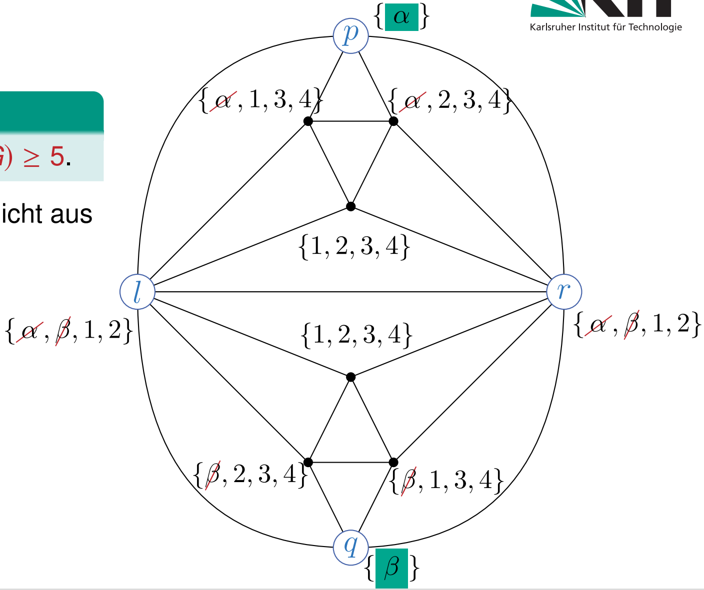
Beweis von Voigt

Satz (Voigt 1993).
Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$.

Behauptung: Dieses Gadget $H(\alpha, \beta)$ ist nicht aus der gegebenen Listenzuweisung färbbar.

Beweis:

- Angenommen c ist Färbung.
- $c(p) = \alpha$ und $c(q) = \beta$.



Beweis von Voigt

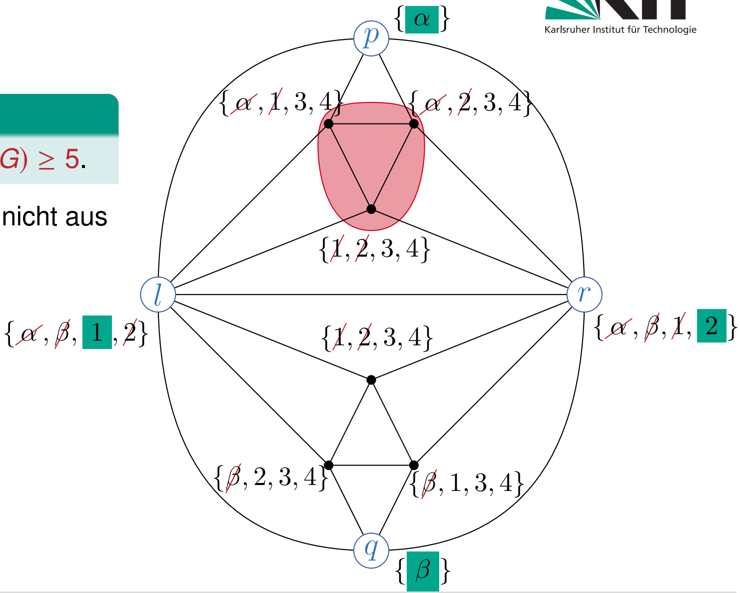
Satz (Voigt 1993).
Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$.

Behauptung: Dieses Gadget $H(\alpha, \beta)$ ist nicht aus der gegebenen Listenzuweisung färbbar.

Beweis:

- Angenommen c ist Färbung.
- $c(p) = \alpha$ und $c(q) = \beta$.
- 1. Fall: $c(l) = 1$ und $c(r) = 2$.

$\Rightarrow$ Problem mit oberem Dreieck.



Beweis von Voigt

Satz (Voigt 1993).

Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$.

Behauptung: Dieses Gadget $H(\alpha, \beta)$ ist nicht aus der gegebenen Listenzuweisung färbbar.

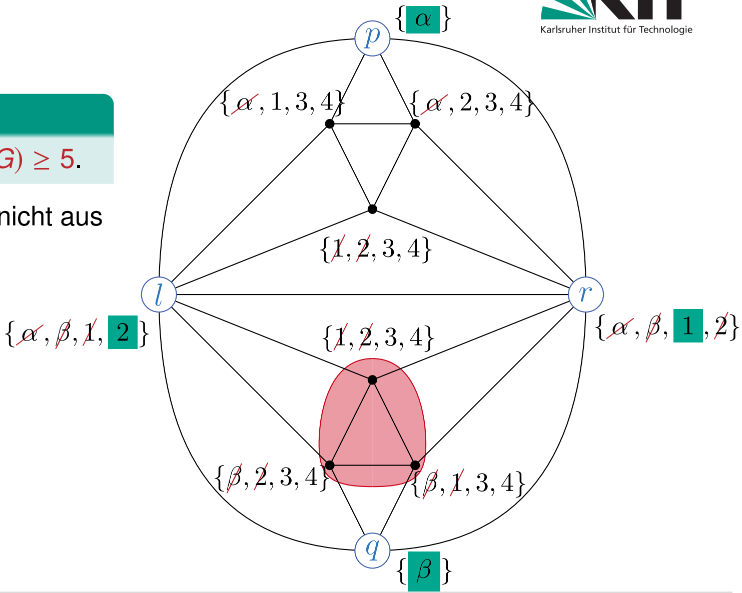
Beweis:

- Angenommen c ist Färbung.
- $c(p) = \alpha$ und $c(q) = \beta$.
- 1. Fall: $c(l) = 1$ und $c(r) = 2$.

$\Rightarrow$ Problem mit oberem Dreieck.

- 2. Fall: $c(l) = 2$ und $c(r) = 1$.

$\Rightarrow$ Problem mit unterem Dreieck. ✓



Beweis von Voigt

Satz (Voigt 1993).
Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$.

Beweis.

- Nehme $4 \cdot 4 = 16$ Gadgets, sodass
  - sich alle Gadgets p und q teilen.
  - $L(p) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $L(q) = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$.
  - für jede Kombination $(\alpha_i, \beta_j) \in L(p) \times L(q)$ ein Gadget $H(\alpha_i, \beta_j)$ existiert.
- Entstehender Graph ist planar und nicht L-listenfärbbar, denn für jede Färbung c ist Gadget $H(c(p), c(q))$ nicht färbbar.
- Da jede Liste die Größe 4 hat, sind wir fertig. ✓