Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

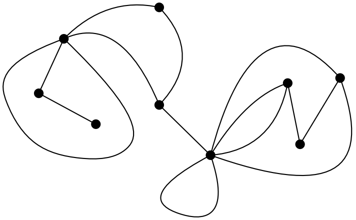
Vorlesung am 21.04.2022

Torsten Ueckerdt | 21. April 2022

Satz von Euler

Satz (Euler-Formel).
Sei G ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2.$$



$n = 9$ Knoten
$m = 14$ Kanten
$f = 7$ Facetten

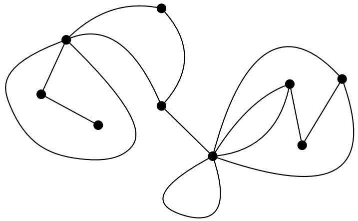
Euler:
$n - m + f = 9 - 14 + 7 = 2$

Beweis der Euler-Formel

Satz (Euler-Formel).

Sei G ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2.$$

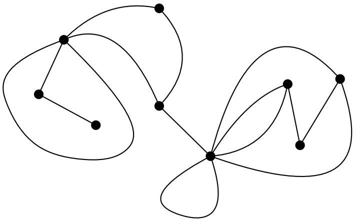


Beweis der Euler-Formel

Satz (Euler-Formel).

Sei G ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2.$$



Beweis. Wir beweisen $m - (f - 1) = n - 1$.

- Induktion nach $f - 1$, der Anzahl innerer Facetten

IA: $f - 1 = 0$, d.h. keine innere Facette

- G ist Baum, da kreisfrei und zusammenhängend
- also $m = n - 1$ (warum?) ✓

Beweis der Euler-Formel

Satz (Euler-Formel).

Sei G ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2.$$

Beweis. Wir beweisen $m - (f - 1) = n - 1$.

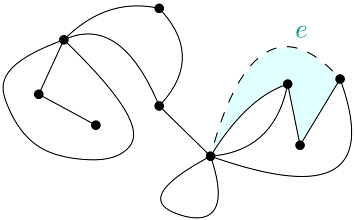
- Induktion nach $f - 1$, der Anzahl innerer Facetten

IA: $f - 1 = 0$, d.h. keine innere Facette

- G ist Baum, da kreisfrei und zusammenhängend
- also $m = n - 1$ (warum?) ✓

IS: $f - 1 \geq 1$, d.h. mind. eine innere Facette

- sei e Kante zwischen äußerer und innerer Facette
- $G' = G - e$ ist zusammenhängend



- in G' gilt
  $n' = n$, $m' = m - 1$, $f' = f - 1$
- nach IV gilt $m' - (f' - 1) = n' - 1$

$\Rightarrow$ $m - (f - 1) = n - 1$

Folgerung aus Euler-Formel

Korollar.

Sei G ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten, m Kanten und kleinstem vorkommenden Knotengrad $\delta(G)$. Dann gilt $\quad m \leq 3n - 6 \quad$ und $\quad \delta(G) \leq 5$.

Folgerung aus Euler-Formel

Korollar.

Sei G ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten, m Kanten und kleinstem vorkommenden Knotengrad $\delta(G)$. Dann gilt $\quad m \leq 3n - 6 \quad$ und $\quad \delta(G) \leq 5$.

Beweis.

- OBdA ist G zusammenhängend
- jede Facette berandet von mindestens 3 Kantenseiten
- jede Kantenseite in genau 1 Facette
- jede Kante hat genau 2 Seiten

$\Rightarrow$ $3f \leq \#$Seiten-Facetten-Inzidenzen $= 2m$

$\Rightarrow$ $3(2 + m - n) = 3f \leq 2m$

$\Rightarrow$ $m \leq 3n - 6$

Folgerung aus Euler-Formel

Karlsruher Institut für Technologie

Korollar.

Sei G ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten, m Kanten und kleinstem vorkommenden Knotengrad $\delta(G)$. Dann gilt $\quad m \leq 3n - 6 \quad$ und $\quad \delta(G) \leq 5$.

Beweis.

- OBdA ist G zusammenhängend
- jede Facette berandet von mindestens 3 Kantenseiten
- jede Kantenseite in genau 1 Facette
- jede Kante hat genau 2 Seiten

$\Rightarrow$ $3f \leq \#\text{Seiten-Facetten-Inzidenzen} = 2m$

$\Rightarrow$ $3(2 + m - n) = 3f \leq 2m$

$\Rightarrow$ $m \leq 3n - 6$

- jede Kante hat genau 2 inzidente Knoten
- jeder Knoten v hat genau $\deg(v)$ inzidente Kanten
- für jeden Knoten v gilt $\deg(v) \geq \delta(G)$

$\Rightarrow$ $2m = \#\text{Knoten-Kanten-Inzidenzen} = \sum_v \deg(v) \geq \delta(G) \cdot n$

$\Rightarrow$ $2(3n - 6) \geq 2m \geq \delta(G) \cdot n$

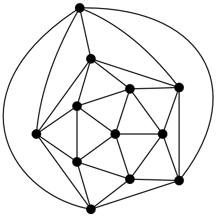
$\Rightarrow$ $\delta(G) \leq 6 - 12/n$

Folgerung aus Euler-Formel

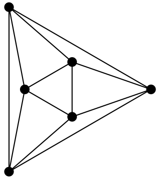
Korollar.

Sei G ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten, m Kanten und kleinstem vorkommenden Knotengrad $\delta(G)$. Dann gilt $\quad m \leq 3n - 6 \quad$ und $\quad \delta(G) \leq 5$.

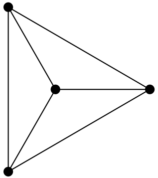
Beide Ungleichungen $m \leq 3n - 6$ und $\delta(G) \leq 5$ sind bestmöglich.



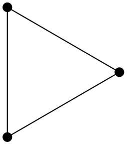
Ikosaeder



Oktaeder



Tetraeder



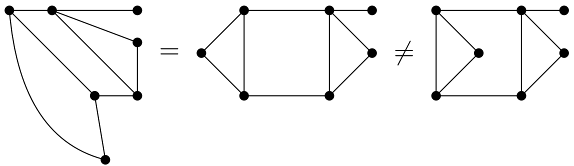
Dreieck

Kombinatorische Einbettungen

Anschaulich: Einbettung = Äquivalenzklasse von planaren Zeichnungen

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung.
Die (kombinatorische) **Einbettung** ist

- für jeden Knoten v die zyklische (cw) Reihenfolge der inzidenten Halbkanten an v
- für jede Facette f die zyklische (cw) Reihenfolge der inzidenten Kantenseiten an f

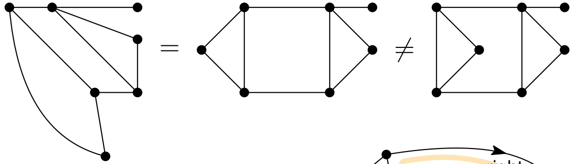


Kombinatorische Einbettungen

Anschaulich: Einbettung = Äquivalenzklasse von planaren Zeichnungen

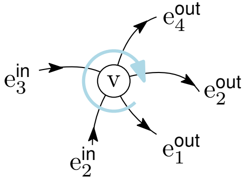
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung.
Die (kombinatorische) **Einbettung** ist

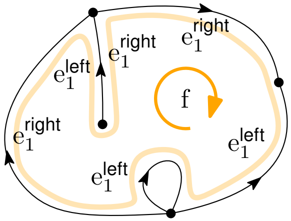
- für jeden Knoten v die zyklische (cw) Reihenfolge der inzidenten Halbkanten an v
- für jede Facette f die zyklische (cw) Reihenfolge der inzidenten Kantenseiten an f



Z.Bsp. bzgl. beliebiger Orientierung der Kanten

- Halbkanten e^{in} und e^{out} von e
- Kantenseiten e^{left} und e^{right} von e

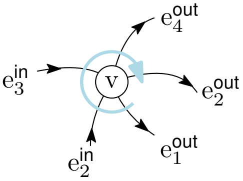


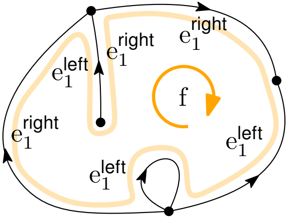


Kombinatorische Einbettungen

Z.Bsp. bzgl. beliebiger Orientierung der Kanten

- Halbkanten e^{in} und e^{out} von e
- Kantenseiten e^{left} und e^{right} von e





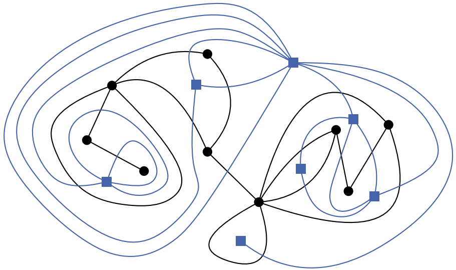
Bemerkungen.

- komplizierter, wenn G nicht zusammenhängend ist
- jede Kantenhälfte taucht genau einmal auf
- jede Kantenseite taucht genau einmal auf
- aus den cw-Folgen der Halbkanten an allen Knoten können die cw-Folgen der Kantenseiten an allen Facetten berechnet werden
- Facetten durch Einbettung eindeutig bestimmt
- äußere Facette nicht durch Einbettung spezifiziert

Dualgraphen

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer festen Einbettung und Facettenmenge F. Der **Dualgraph** $G^* = (V^*, E^*)$ ist

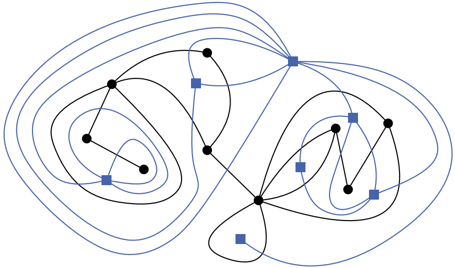
- $V^* = F$, d.h. $f \in F \mapsto v_f \in V^*$
- für jede Kante $e \in E$ läuft die duale Kante e^* zwischen der Facette an e^{left} und der an e^{right}

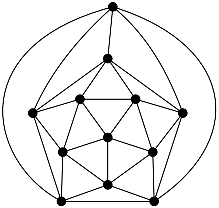


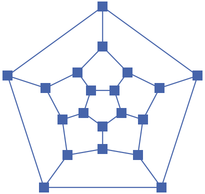
Dualgraphen

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer festen Einbettung und Facettenmenge F. Der **Dualgraph** $G^* = (V^*, E^*)$ ist

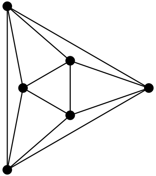
- $V^* = F$, d.h. $f \in F \mapsto v_f \in V^*$
- für jede Kante $e \in E$ läuft die duale Kante e^* zwischen der Facette an e^{left} und der an e^{right}

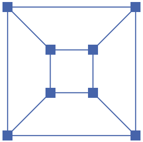




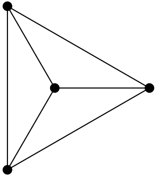


Ikosaeder $\overset{*}{\longleftrightarrow}$ Dodekaeder





Oktaeder $\overset{*}{\longleftrightarrow}$ Hexaeder

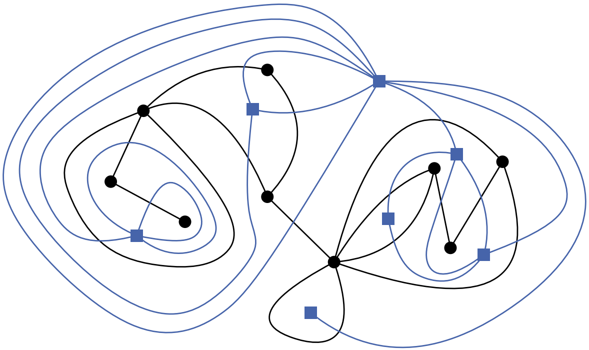


Tetraeder

Dualgraphen

Die Einbettung des Primalgraphen $G = (V, E)$ induziert eine Einbettung des Dualgraphen $G^* = (V^*, E^*)$:

- Knoten $v_f \in V^*$ in die Facette $f \in F$
- Kante $e^* \in E^*$ kreuzt nur Kante $e \in E$



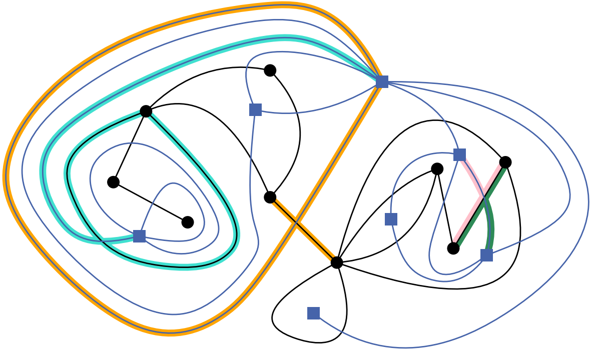
Erinnerung: äußere Facetten sind nicht festgelegt

Dualgraphen

Die Einbettung des Primalgraphen $G = (V, E)$ induziert eine Einbettung des Dualgraphen $G^* = (V^*, E^*)$:

- Knoten $v_f \in V^*$ in die Facette $f \in F$
- Kante $e^* \in E^*$ kreuzt nur Kante $e \in E$

primal	dual
$f \in F$	$v_f = f \in V^* = F$
$e^{\text{left}}, e^{\text{right}}$	$(e^*)^{\text{in}}, (e^*)^{\text{out}}$
$v \in V$	$f_v = v \in F^*$
e Brücke	e^* Schlinge
e Schlinge	e^* Brücke



Erinnerung: äußere Facetten sind nicht festgelegt

Bemerkungen zu Einbettungen und Dualgraphen

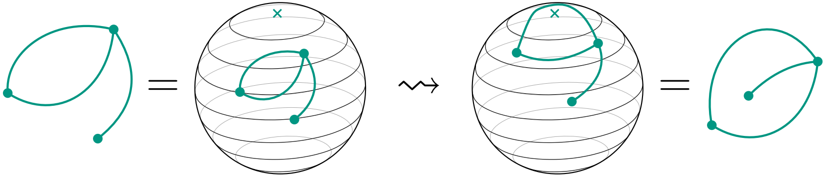
Der Dualgraph G^* ist immer zusammenhängend.

Falls G zusammenhängend ist, gilt $G = (G^*)^*$.

Bemerkungen zu Einbettungen und Dualgraphen

Der Dualgraph G^* ist immer zusammenhängend.

Falls G zusammenhängend ist, gilt $G = (G^*)^*$.



Planare Zeichnungen können auch auf der Sphäre betrachtet werden.

Für jede Einbettung von G und jede Facette f gibt es eine planare Zeichnung mit dieser Einbettung und f als äußerer Facette.