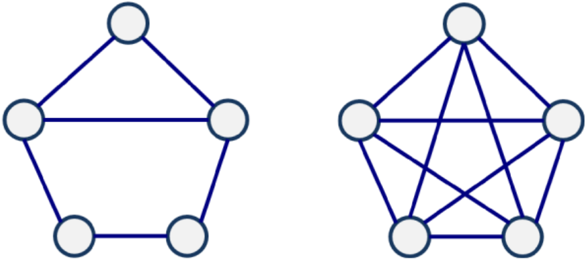
Algorithmen für Planare Graphen

Vorlesung am 19.04.2022

Torsten Ueckerdt | 19. April 2022

Willkommen

Ein planarer Graph ist ein Graph, der in der Ebene gezeichnet werden, ohne dass die Kanten sich kreuzen.



- strukturelle Eigenschaften, alternative Charakterisierungen
- besonders einfache, schnelle und schöne Algorithmen
- manche Probleme, die auf allgemeinen Graphen NP-schwer sind, können auf planaren Graphen sehr effizient gelöst werden

Organisatorisches

Unser Team

- Torsten Ueckerdt
  $\longrightarrow$ Vorlesungen
- Laura Merker und Lars Gottesbüren
  $\longrightarrow$ Übungen

Termine

- Dienstag 14:00 Chemie-Hörsaal Nr. 2
- Donnerstag 14:00 Egon-Eiermann-Hörsaal
- Im Schnitt alle 2 Wochen eine Übung
- 2+1 SWS
- beide Pfingstwochen sind frei

Informationen

- Homepage
  `https://i11www.iti.kit.edu/teaching/sommer2022/planar_graphs/`
- $\rightsquigarrow$ Skript aus dem Sommer 2009
- $\rightsquigarrow$ Aufschrieb (Satz von Kuratowski) aus dem Sommer 2018
- auch weitere Themen!
- Folien auf der Homepage on the fly

mündliche Prüfungen

- drei Termine in der vorlesungsfreien Zeit
- Details später

Grundlegende Definitionen

Ein **Graph** ist ein Tupel $G = (V, E)$

- V = endliche Knotenmenge
- E = endliche Kanten(multi-)menge
  - Kante $e \in E$ hat Form $e = uv$ mit $u, v \in V$
  - $uv = vu$ Graphen sind ungerichtet
  - $e = uu$ erlaubt $\rightsquigarrow$ Schlinge
  - $e = uv$, $e' = uv$ mit $e \neq e'$ $\rightsquigarrow$ Mehrfachkanten

einfacher Graph $\Leftrightarrow$ ohne Schlingen und Mehrfachkanten

zusammenhängend $\Leftrightarrow$ ein Weg zwischen je zwei Knoten

Grundlegende Definitionen

Ein **Graph** ist ein Tupel $G = (V, E)$

- V = endliche Knotenmenge
- E = endliche Kanten(multi-)menge
  - Kante $e \in E$ hat Form $e = uv$ mit $u, v \in V$
  - $uv = vu$ Graphen sind ungerichtet
  - $e = uu$ erlaubt $\rightsquigarrow$ Schlinge
  - $e = uv$, $e' = uv$ mit $e \neq e'$ $\rightsquigarrow$ Mehrfachkanten

einfacher Graph $\Leftrightarrow$ ohne Schlingen und Mehrfachkanten

zusammenhängend $\Leftrightarrow$ ein Weg zwischen je zwei Knoten

$G = (V, E)$ mit

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{v_1 v_2, v_1 v_5, v_1 v_2, v_3 v_3, v_3 v_3\}$

Grundlegende Definitionen

Ein **Graph** ist ein Tupel $G = (V, E)$

- V = endliche Knotenmenge
- E = endliche Kanten(multi-)menge
  - Kante $e \in E$ hat Form $e = uv$ mit $u, v \in V$
  - $uv = vu$ Graphen sind ungerichtet
  - $e = uu$ erlaubt $\rightsquigarrow$ Schlinge
  - $e = uv$, $e' = uv$ mit $e \neq e'$ $\rightsquigarrow$ Mehrfachkanten

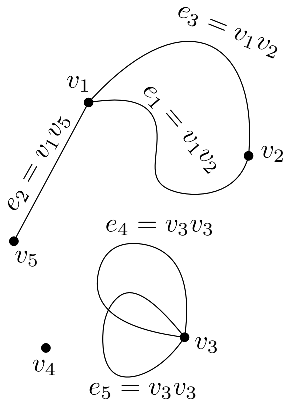
einfacher Graph $\Leftrightarrow$ ohne Schlingen und Mehrfachkanten

zusammenhängend $\Leftrightarrow$ ein Weg zwischen je zwei Knoten

$G = (V, E)$ mit

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{v_1 v_2, v_1 v_5, v_1 v_2, v_3 v_3, v_3 v_3\}$



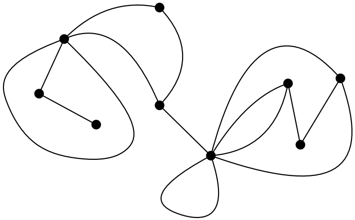
G ist nicht zusammenhängend

G ist nicht einfach

Zeichnungen und Planarität

Definition (fast formal korrekt).
Eine **Zeichnung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist

- Knoten sind Punkte in der Ebene, d.h. $V \subset \mathbb{R}^2$
- Kante $e = uv$ ist injektive, stetige Kurve von u nach v, d.h. $\gamma_e \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit
  - $\gamma_e(0) = u$ und $\gamma_e(1) = v$
  - $\gamma_e(t) \notin V$ für alle $0 < t < 1$



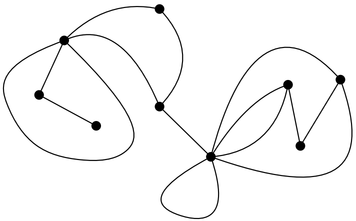
Eine Zeichnung ist **kreuzungsfrei** oder **planar** wenn für je zwei Kanten e, e' und $0 < t, t' < 1$ gilt

- $\gamma_e(t) \neq \gamma_{e'}(t')$

Zeichnungen und Planarität

Definition (fast formal korrekt).
Eine **Zeichnung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist

- Knoten sind Punkte in der Ebene, d.h. $V \subset \mathbb{R}^2$
- Kante $e = uv$ ist injektive, stetige Kurve von u nach v, d.h. $\gamma_e \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit
  - $\gamma_e(0) = u$ und $\gamma_e(1) = v$
  - $\gamma_e(t) \notin V$ für alle $0 < t < 1$



Eine Zeichnung ist **kreuzungsfrei** oder **planar** wenn für je zwei Kanten e, e' und $0 < t, t' < 1$ gilt

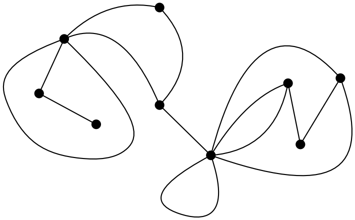
- $\gamma_e(t) \neq \gamma_{e'}(t')$

Ein Graph ist **planar** wenn er mindestens eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt.

Zeichnungen und Planarität

Definition (fast formal korrekt).
Eine **Zeichnung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist

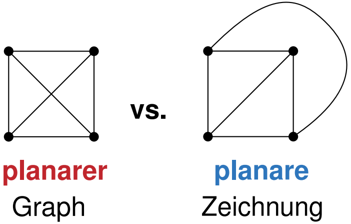
- Knoten sind Punkte in der Ebene, d.h. $V \subset \mathbb{R}^2$
- Kante $e = uv$ ist injektive, stetige Kurve von u nach v, d.h. $\gamma_e \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit
  - $\gamma_e(0) = u$ und $\gamma_e(1) = v$
  - $\gamma_e(t) \notin V$ für alle $0 < t < 1$



Eine Zeichnung ist **kreuzungsfrei** oder **planar** wenn für je zwei Kanten e, e' und $0 < t, t' < 1$ gilt

- $\gamma_e(t) \neq \gamma_{e'}(t')$

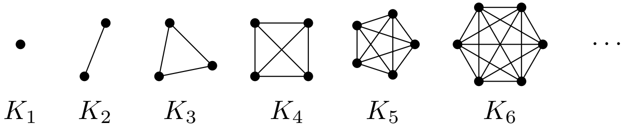
Ein Graph ist **planar** wenn er mindestens eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt.



Vollständige Graphen

Für $n \in \mathbb{N}$ ist der vollständige Graph K_n

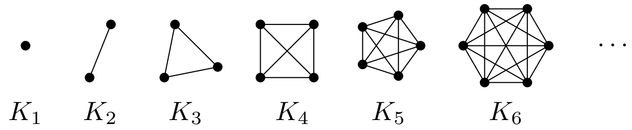
- $V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $E(K_n) = \{v_i v_j \mid i \neq j \in [n]\}$



Vollständige Graphen

Für $n \in \mathbb{N}$ ist der vollständige Graph K_n

- $V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $E(K_n) = \{v_i v_j \mid i \neq j \in [n]\}$

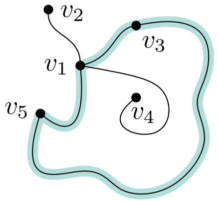


Lemma.

Der Graph K_5 ist nicht planar.

Beweis. Betrachte Zeichnung von K_5.

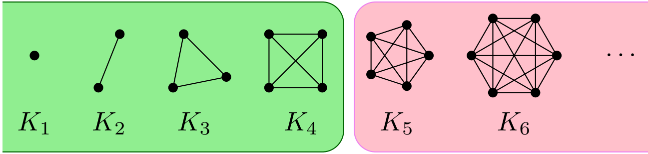
- Betrachte v_1 und seine vier ausgehenden Kanten
- OBdA Kanten kreuzungsfrei zu v_2, v_3, v_4, v_5 in dieser zyklischen Reihenfolge um v_1
- Kanten $v_1 v_3$, $v_3 v_5$, $v_5 v_1$ bilden geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ die v_2 und v_4 trennt $\Rightarrow$ $v_2 v_4$ kann nicht kreuzungsfrei gezeichnet sein



Vollständige Graphen

Für $n \in \mathbb{N}$ ist der vollständige Graph K_n

- $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$
- $E(K_n) = \{v_i v_j \mid i \neq j \in [n]\}$

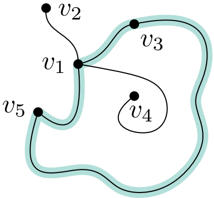


Lemma.

Der Graph K_5 ist nicht planar.

Beweis. Betrachte Zeichnung von K_5.

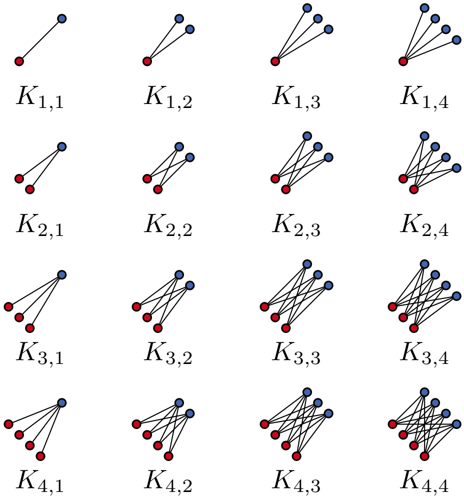
- Betrachte v_1 und seine vier ausgehenden Kanten
- OBdA Kanten kreuzungsfrei zu v_2, v_3, v_4, v_5 in dieser zyklischen Reihenfolge um v_1
- Kanten $v_1 v_3$, $v_3 v_5$, $v_5 v_1$ bilden geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ die v_2 und v_4 trennt $\Rightarrow$ $v_2 v_4$ kann nicht kreuzungsfrei gezeichnet sein



Vollständig Bipartite Graphen

Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist der vollständig bipartite Graph $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \ldots, a_m\} \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in [m], j \in [n]\}$



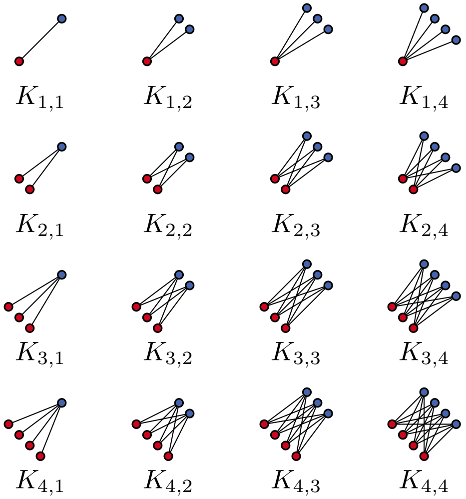
Vollständig Bipartite Graphen

Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist der vollständig bipartite Graph $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \ldots, a_m\} \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in [m], j \in [n]\}$

Lemma.

Der Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar.



Vollständig Bipartite Graphen

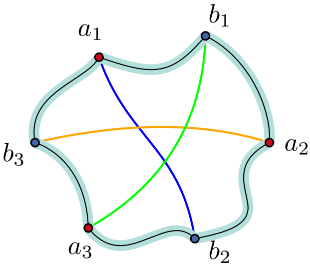
Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist der vollständig bipartite Graph $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \ldots, a_m\} \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in [m], j \in [n]\}$

Lemma.

Der Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar.

Beweis. Betrachte Zeichnung von $K_{3,3}$.



- Kreis $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$ im Graphen bildet eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$
- jede Kante von $a_1 b_2$, $a_2 b_3$, $a_3 b_1$ liegt komplett innerhalb oder komplett ausserhalb dieser Kurve

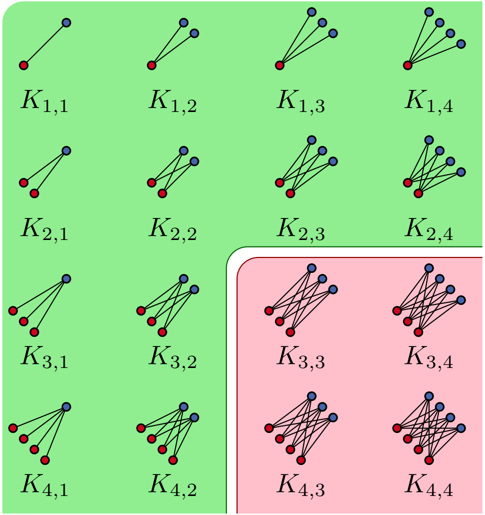
$\Rightarrow$ mindestens zwei liegen auf der gleichen Seite

$\Rightarrow$ diese zwei kreuzen sich

Vollständig Bipartite Graphen

Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist der vollständig bipartite Graph $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \ldots, a_m\} \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in [m], j \in [n]\}$



Lemma.
Der Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar.

Beweis. Betrachte Zeichnung von $K_{3,3}$.

- Kreis $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$ im Graphen bildet eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$
- jede Kante von $a_1 b_2$, $a_2 b_3$, $a_3 b_1$ liegt komplett innerhalb oder komplett ausserhalb dieser Kurve

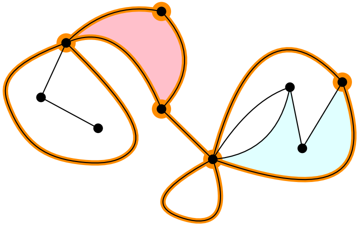
$\Rightarrow$ mindestens zwei liegen auf der gleichen Seite

$\Rightarrow$ diese zwei kreuzen sich

Weitere Notation

Für eine feste planare Zeichnung eines planaren Graphen definiere:

- **Facetten** sind die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2$ nach Entfernen aller Knoten und Kanten
  - genau eine äußere Facette
  - eventuell mehrere innere Facetten
- äußere Knoten sind die inzident zur äußeren Facette
- innere Knoten sind die übrigen Knoten
- äußere Kanten sind die komplett im Rand der äußeren Facette liegen
- innere Kanten sind die übrigen Kanten



$n = 9$ Knoten (5 äußere, 4 innere)
$m = 14$ Kanten (8 äußere, 6 innere)
$f = 7$ Facetten (1 äußere, 6 innere)

Satz von Euler

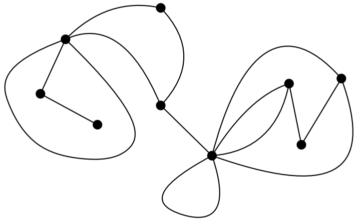
Satz (Euler-Formel).

Sei G ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2.$$

Bemerkungen.

- jede planare Zeichnung eines zushgd. Graphen hat die gleiche Anzahl Facetten, nämlich $f = 2 + m - n$
- es gibt Versionen für
  - unzusammenhängende Graphen
  - kreuzungsfreie Zeichnungen auf dem Torus, etc.



$n = 9$ Knoten
$m = 14$ Kanten
$f = 7$ Facetten

Euler:

$n - m + f = 9 - 14 + 7 = 2$