Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
Sommersemester 2022
Lars Gottesbüren, Laura Merker, Torsten Ueckerdt

Sechstes Übungsblatt

Ausgabe: 13. Juli 2022
Besprechung: 21. Juli 2022

1 LR-Zerlegungen

Sei G ein planarer Graph mit Einbettung in die Ebene und T ein Tiefensuchbaum von G, dessen Kanten weg von der Wurzel gerichtet sind. Die Nicht-Baum-Kanten richten wir so, dass der Fundamentalkreis ein gerichteter Kreis wird. Weiterhin sei $L \dot{\cup} R$ eine Partition der Nicht-Baum-Kanten, wobei eine Kante in L ist, wenn ihr Fundamentalkreis gegen den Uhrzeigersinn gerichtet ist, sonst in R.

(i) Warum brauchen wir eine Einbettung?

(ii) Zeigen Sie, dass $L \dot{\cup} R$ eine LR-Zerlegung ist, falls der Startpunkt der Tiefensuche an der äußeren Facette liegt.

(iii) Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem $L \dot{\cup} R$ eine nicht gebündelte LR-Zerlegung ist.

(iv) Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem $L \dot{\cup} R$ keine LR-Zerlegung ist.

(v) Warum ist dies kein Widerspruch dazu, dass es für jede Tiefensuche eine LR-Zerlegung gibt?

2 Planare und nicht-planare Einbettungen

(i) Sei G ein planarer Graph und $L \dot{\cup} R$ eine gebündelte LR-Zerlegung von G. Zeigen Sie, dass der Algorithmus aus der Vorlesung eine Einbettung liefert, bei der der Fundamentalkreis zu einer Nicht-Baumkante e gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist, falls $e \in L$, und im Uhrzeigersinn, falls $e \in R$.

(ii) Konstruieren Sie einen planaren Graphen mit einem Tiefensuchbaum T und einer Einbettung, die nicht Ausgabe des Planaritätstests sein kann, wenn die LR-Zerlegung bezüglich T berechnet wird.

(iii) Konstruieren Sie einen Graphen G und eine nicht gebündelten LR-Zerlegung von G, sodass der Algorithmus aus der Vorlesung (ohne Bündeln der LR-Zerlegung), eine nicht-planare Einbettung liefert.

3 Saturierende Flüsse

Ein Fluss Φ *saturiert* eine Kante e eines Flussnetzwerks (D, c, s, t), wenn $\Phi(e) = c(e)$. Ein Schnitt heißt *saturiert*, wenn jede seiner Kanten saturiert ist.

(i) Konstruieren Sie ein Flussnetzwerk, bei dem kein maximaler Fluss eine Kante saturiert, die zu s oder t inzident ist.

(ii) Zeigen Sie, dass jeder maximale Fluss einen saturierten Schnitt erzeugt, ohne das Max-Flow-Min-Cut-Theorem zu verwenden.

4 Ganzzahlige Flüsse

Ein Flussnetzwerk heißt *ganzzahlig*, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind. Ein Fluss heißt *ganzzahlig*, wenn jede Kante einen ganzzahligen Wert zugewiesen bekommt.

(i) Konstruieren Sie ein ganzzahliges Flussnetzwerk, das einen nicht-ganzzahligen maximalen Fluss hat.

(ii) Zeigen Sie, dass jedes ganzzahlige Flussnetzwerk mit s und t an der äußeren Facette einen ganzzahligen maximalen Fluss hat.

5 Anwendung von Flüssen

Ein Graph heißt *k-level-planar*, wenn er eine Partition der Knoten in k Level $L_1, \dots, L_k$ und eine geradlinige planare Zeichnung hat, sodass

- die y-Koordinate jedes Knoten in L_i ist i und
- es gibt nur Kanten zwischen Knoten v, w in zwei unterschiedlichen, aufeinanderfolgenden Leveln, das heißt $v \in L_i$ und $w \in L_{i+1}$ für ein i.

Die Eingabegraphen in dieser Aufgabe erhalten Sie mit einer k-level-planaren Einbettung.

(i) Berechnen Sie ein maximales Matching in einem 2-level-planaren Graphen in Linearzeit.

(ii) Berechnen Sie für einen k-level-planaren Graphen in Linearzeit eine größtmögliche Menge knotendisjunkter Pfade mit je genau einem Knoten in jedem Level (ohne Vorlesung 14).