Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
Sommersemester 2022
Lars Gottesbüren, Laura Merker, Torsten Ueckerdt

Fünftes Übungsblatt

Ausgabe:	24. Juni 2022
Besprechung:	7. Juli 2022

1 k-Faktoren

(i) Hat jeder maximale außenplanare Graph einen 2-Faktor?

(ii) Hat jeder maximalplanare Graph einen 2-Faktor?

(iii) Hat jeder planare, 3-reguläre Graph einen 2-Faktor?

(iv) Geben Sie für jedes $k \geq 1$ einen planaren Graphen an, der keinen k-Faktor hat.

(v) Für welche $k \geq 1$ gibt es planare Graphen, die einen k-Faktor haben?

(vi) Für welche $k \geq 1$ gibt es planare Graphen mit Minimalgrad k, die keinen k-Faktor haben?

(vii) Sei G ein Graph mit n Knoten. Zeigen Sie: Falls n und k ungerade, so hat G keinen k-Faktor.

2 Faktoren finden

(i) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen k-regulären planaren Graphen einen $(k-1)$-Faktor findet, falls dieser existiert.

(ii) Nehmen Sie an, Sie könnten für einen gegebenen gewichteten, planaren Graphen einen gewichtsmaximalen k-regulären Subgraphen berechnen. Geben Sie einen Algorithmus an, der einen gewichtsmaximalen k-Faktor berechnet, falls dieser existiert.

Hinweis: Ideen aus Vorlesung 11 (28. Juni) verwenden

3 Schnitte, Kreise und Bäume im Dualgraph

Zeigen Sie:

(i) Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^\star$. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^*, E^* \setminus E'^*)$ von G^* unzusammenhängend ist.

(ii) Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^* = (V^*, E^*)$, und $E' \subseteq E$. Dann ist (V, E') ein aufspannender Baum von G genau dann, wenn $(V^*, E^* \setminus E'^*)$ ein aufspannender Baum von G^* ist.

4 Minimale Spannbäume in planaren Graphen

Sei G ein einfacher, zusammenhängender planarer Graph mit positiven Kantengewichten. Geben Sie einen Algorithmus an, der in erwartet linearer Laufzeit einen Spannbaum minimalen Gewichts berechnet.

Hinweis: Sie dürfen die folgenden beiden Aussagen ohne Beweis verwenden:

- Sei v ein Knoten und e eine Kante minimalen Gewichts inzident zu v. Dann gibt es einen Spannbaum minimalen Gewichts von G, der e enthält.
- Sei e eine Kante, die in einem Spannbaum minimalen Gewichts von G vorkommt. Sei T ein Spannbaum minimalen Gewichts auf dem Graphen, den man durch die Kontraktion von e erhält. Dann ist $T \cup \{e\}$ ein Spannbaum minimalen Gewichts auf G.