Viertes Übungsblatt

Ausgabe: 7. Juni
Besprechung: 23. Juni

1 Große und kleine Matchings

Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen planaren, zusammenhängenden Graphen mit n Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

(i) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Kanten

(ii) eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an, wie ein solches kardinalitätsmaximales Matching aussieht.

2 Perfekte Matchings

Ein Matching M zu einem Graphen G heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist. Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen immer ein perfektes Matching?

(i) P_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Pfad mit n Knoten)

(ii) C_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit n Knoten). Hier $n \geq 3$.

(iii) Q_n (der Hyperwürfel mit n-Bit Knoten IDs, siehe Übungsblatt 1)

(iv) K_n

(v) $K_{n,m}$

(vi) Bäume mit n Knoten

(vii) planare, bipartite, zusammenhängende Graphen mit je n Knoten in der Bipartition und Minimalgrad mindestens 2. Hier $n \geq 2$.

(viii) maximale außenplanare Graph mit n Knoten

(ix) maximalplanare Graph mit n Knoten (für große n)

3 Perfektes Matching berechnen

Geben Sie einen Algorithmus an, der in $\mathcal{O}(n^{3/2})$ entscheidet, ob ein gegebener planarer Graph ein perfektes Matching hat.

4 Erhöhende Pfade

Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph. Weiter sei v ein Knoten und M ein kardinalitätsmaximales Matching für $G - v$. Gesucht ist nun ein kardinalitätsmaximales Matching für G.

Geben Sie einen Algorithmus an, der für gegebene G, v, M ein maximales Matching von G in Linearzeit findet. Wie groß kann das Matching sein, abhängig von $|M|$?

Hinweis: Modifizieren Sie eine Breitensuche mit Startknoten v, um nach einem erhöhenden Pfad zu suchen.

5 Folgerung aus dem Planar Separator Theorem

Zeigen Sie: Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten und maximalem Knotengrad Δ gibt es einen Schnitt $S \subseteq E$ von G mit $|S| \in \mathcal{O}(\Delta\sqrt{n})$, sodass $G - S = (V, E \setminus S)$ aus zwei disjunkten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $|V_1| \leq \frac{3}{4}n$, $|V_2| \leq \frac{3}{4}n$, $V_1 \dot\cup V_2 = V$ und $E_1 \dot\cup E_2 = E \setminus S$ besteht.

6 Separator Theoreme für Bäume und außenplanare Graphen

(i) Zeigen Sie, dass jeder Baum einen (2/3)-balancierten Separator der Größe 1 hat.

(ii) Zeigen Sie, dass jeder außenplanare Graph einen (2/3)-balancierten Separator der Größe $\mathcal{O}(1)$ hat.

Hinweis: Das *weak dual* eines planaren Graphen bezeichnet den Dualgraphen ohne den Knoten, der zur äußeren Facette gehört. Beobachten Sie, dass das weak dual eines außenplaneren Graphen ein Baum ist.

7 Gewichtsmaximales Matching in außenplaneren Graphen

Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der für einen gegebenen außenplanaren, gewichteten Graphen ein gewichtsmaximales Matching berechnet.

Hinweis: Sie dürfen wie in der Vorlesung davon ausgehen, dass Sie erhöhende Pfade berechnen können.

Welche Laufzeit hat Ihr Algorithmus?