Drittes Übungsblatt

Ausgabe: 12. Mai 2022
Besprechung: 24. Mai 2022

1 Minoren vs topologische Minoren

1. Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.
2. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph G (der größere) einen Graphen H (der kleinere) als Minor enthält, dann enthält G auch eine Unterteilung von H als Teilgraph.

2 Umfang

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G. Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegeben Knoten v von G entweder
   - die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
   - entscheidet, dass v nicht auf einem Kreis in G liegt.

b) Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil a), um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

c) Beschleunigen Sie Ihren Algorithmus für den Fall, dass der Eingabegraph planar ist.

3 Triangulierung

Geben Sie einen *Linearzeit*- Algorithmus (in der Anzahl der Knoten n) an, der eine Triangulierung $G' = (V, E')$ von G mit kombinatorischer Einbettung $\mathcal{G}'$ findet.
Hinweis: Die Triangulierung muss einfach sein, darf also insbesondere keine Mehrfachkanten enthalten.

Bitte wenden

4 Dreiecke zählen in planaren Graphen

Sei G ein einfacher, planarer Graph. Geben Sie einen Linearzeit-Algorithmus an, der für jeden Knoten v die Anzahl (graphentheoretischer) Dreiecke berechnet, in denen v vorkommt. Das Ergebnis soll also ein Array sein, in dem der i-te Eintrag die Anzahl Dreicke des i-ten Knoten angibt. Formal ist die Menge der Dreiecke von v durch die Menge an verbundenen Paaren von Nachbarknoten $\{\{x, y\} \in E | \{v, x\}, \{v, y\} \in E\}$ definiert. Die Einbettung spielt dabei keine Rolle.

5 Maximum Independent Set

Sei G ein einfacher planarer Graph. Eine unabhängige Menge besteht aus Knoten die untereinander nicht mit einer Kante verbunden sind. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $2^{O(\sqrt{n})}$ der eine optimale unabhängige Menge in G berechnet.

6 Außenplanare Graphen

Ein planarer Graph G heißt *außenplanar*, falls er eine planare Einbettung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Eine äquivalente Formulierung ist, dass G genau dann außenplanar ist, wenn man zu G noch einen weiteren Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten hinzufügen kann, ohne die Planarität von G zu verletzen.

1. Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann außenplanar, wenn er keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$ enthält.
2. Zeigen Sie, dass ein außenplanarer Graph G mit n Knoten höchstens $2n-3$ Kanten enthält.

7 Planare Einbettungen und geradlinige Zeichnungen

1. Zeigen Sie dass es in einfachen, maximal planaren Graphen mit mindestens 4 Knoten auch mindestens 4 Knoten mit Grad ≤ 5 gibt. Hinweis: Euler und Minimalgrad 3.
2. Sei G ein einfacher, zusammenhängender planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird. Hinweis: Halte äußere Facette intakt, Museumswächter.