

## Erstes Übungsblatt

**Ausgabe:** 19. April 2022  
**Besprechung:** 28. April 2021

### 1 Hyperkubus

**Definition:** Für  $n \in \mathbb{N}$  ist der  $n$ -dimensionale Würfel  $Q_n$  der Graph mit folgenden Knoten und Kanten: Die Knotenmenge besteht aus den Wörtern der Länge  $n$  über dem Alphabet  $\{0, 1\}$ . D.h.  $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$ . Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden.

1. Wieviele Knoten hat  $Q_n$ ? Wieviele Kanten hat  $Q_n$ ?
2. Beschreiben Sie die Knotengrade der Knoten im  $Q_n$ .
3. Betten Sie  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  und  $Q_4$  (wenn möglich kreuzungsfrei) in die Ebene ein.
4. Betten Sie  $Q_4$  kreuzungsfrei auf der Oberfläche eines Torus ein.

### 2 Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph  $G$  mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die  $f$  Facetten enthält. Sei  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq f$ , die Anzahl der zur Facette  $i$  inzidenten Kanten von  $G$ . Nummeriere die Facetten so, dass die Folge  $(a_1, a_2, \dots, a_f)$  nichtabsteigend sortiert ist.

Kann es zu einem planaren Graph  $G$  zwei Einbettungen in die Ebene geben, sodass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind?

### 3 Skewness

Die *Skewness* eines Graphen  $G$  ist die minimale Anzahl von Kanten, die aus  $G$  gelöscht werden müssen, damit der resultierende Graph planar ist. D.h. die Skewness eines Graphen ist 0 genau dann, wenn der Graph planar ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen einfachen Graphen  $G$  mit  $n \geq 3$  Knoten und  $m$  Kanten gilt:  
$$\text{skewness}(G) \geq m - 3n + 6.$$
2. Berechnen Sie die *Skewness* von  $K_3$ ,  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  und  $K_6$ .

**Bitte wenden!**

## 4 Maximal planare Graphen und Triangulierungen

Gegeben sei ein einfacher Graph  $G$  mit einer planaren Einbettung und mindestens 3 Knoten.  $G$  heißt *maximal-planar*, falls keine Kante zwischen bestehenden Knoten so zu  $G$  hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.  $G$  heißt *trianguliert*, falls jede Facette einen Kreis der Länge 3 als Rand hat. Zeigen Sie, dass  $G$  genau dann maximal-planar ist, wenn  $G$  trianguliert ist.

## 5 Bäume

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Graphen  $G$  mit  $n$  Knoten:

1.  $G$  ist ein Baum, d.h.  $G$  ist zusammenhängend und kreisfrei.
2.  $G$  ist zusammenhängend und hat  $n - 1$  Kanten.
3.  $G$  ist kreisfrei und hat  $n - 1$  Kanten.

## 6 Selbstdualität

**Definition:**  $G$  heißt *selbstdual*, wenn  $G$  isomorph zum geometrischen Dualgraphen  $G^*$  ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen selbstdualen Graph mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten gilt:  $m = 2n - 2$ .
2. Geben Sie für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  einen selbstdualen Graphen  $G$  mit einer festen Einbettung an.

**Hinweis:** Für  $n = 2$  und  $n = 3$  muss der Graph Multikanten enthalten.