Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen – Übung 5

Laura Merker | 7. Juli 2022

Orga

- Nächste Woche keine Übung
- Übungstermine: 21. Juli, 28. Juli
- Prüfungstermine im Ilias
- Evaluation

Übungsblatt 5

- k-Faktoren
- k-Faktoren finden
- Schnitte, Kreise und Bäume im Dualgraphen
- Minimale Spannbäume

k-Faktoren

- Hat jeder maximale außenplanare Graph einen 2-Faktor?

k-Faktoren

- Hat jeder maximale außenplanare Graph einen 2-Faktor?
  $\rightarrow$ Ja, äußerer Kreis
- Hat jeder maximalplanare Graph einen 2-Faktor?

k-Faktoren

- Hat jeder maximale außenplanare Graph einen 2-Faktor?
  $\rightarrow$ Ja, äußerer Kreis
- Hat jeder maximalplanare Graph einen 2-Faktor?
  $\rightarrow$ Nein, Graph mit $f > n$, füge einen Knoten in jede Facette ein, der mit allen Knoten der Facette verbunden wird; ein Kreis hat nie zwei aufeinanderfolgende neue Knoten
- Hat jeder planare, 3-reguläre Graph einen 2-Faktor?

k-Faktoren

- Hat jeder maximale außenplanare Graph einen 2-Faktor?
  $\rightarrow$ Ja, äußerer Kreis
- Hat jeder maximalplanare Graph einen 2-Faktor?
  $\rightarrow$ Nein, Graph mit $f > n$, füge einen Knoten in jede Facette ein, der mit allen Knoten der Facette verbunden wird; ein Kreis hat nie zwei aufeinanderfolgende neue Knoten
- Hat jeder planare, 3-reguläre Graph einen 2-Faktor?
  $\rightarrow$ Nein, konstruiere Graph mit Seperatorknoten $\rightsquigarrow$ nicht Teil eines Kreises

k-Faktoren

- Geben Sie für jedes $k \geqslant 1$ einen planaren Graphen an, der keinen k-Faktor hat.

k-Faktoren

- Geben Sie für jedes $k \geqslant 1$ einen planaren Graphen an, der keinen k-Faktor hat.
  $\rightarrow$ Stern, hat Knoten mit Grad 1 (für $k > 1$) und hat kein perfektes Matching ($k = 1$)
- Für welche $k \geqslant 1$ gibt es planare Graphen, die einen k-Faktor haben?

k-Faktoren

- Geben Sie für jedes $k \geqslant 1$ einen planaren Graphen an, der keinen k-Faktor hat.
  $\rightarrow$ Stern, hat Knoten mit Grad 1 (für $k > 1$) und hat kein perfektes Matching ($k = 1$)
- Für welche $k \geqslant 1$ gibt es planare Graphen, die einen k-Faktor haben?
  $\rightarrow$ $k \geqslant 5$, z.B. platonische Körper; Knoten mit Grad $\leqslant 5 \implies$ kein k-Faktor für $k > 5$
- Für welche $k \geqslant 1$ gibt es planare Graphen mit Minimalgrad k, die keinen k-Faktor haben?

k-Faktoren

- Geben Sie für jedes $k \geqslant 1$ einen planaren Graphen an, der keinen k-Faktor hat.
  $\rightarrow$ Stern, hat Knoten mit Grad 1 (für $k > 1$) und hat kein perfektes Matching ($k = 1$)
- Für welche $k \geqslant 1$ gibt es planare Graphen, die einen k-Faktor haben?
  $\rightarrow k \geqslant 5$, z.B. platonische Körper; Knoten mit Grad $\leqslant 5 \implies$ kein k-Faktor für $k > 5$
- Für welche $k \geqslant 1$ gibt es planare Graphen mit Minimalgrad k, die keinen k-Faktor haben?
  $\rightarrow k \leqslant 5$, zwei Kopien G_1, G_2 eines k-regulären Graphen, sei v_i Knoten an äußerer Facette von G_i, identifiziere v_1 und v_2
- Sei G ein Graph mit n Knoten. Zeigen Sie: Falls n und k ungerade, so hat G keinen k-Faktor.

k-Faktoren

- Geben Sie für jedes $k \geqslant 1$ einen planaren Graphen an, der keinen k-Faktor hat.
  $\rightarrow$ Stern, hat Knoten mit Grad 1 (für $k > 1$) und hat kein perfektes Matching ($k = 1$)
- Für welche $k \geqslant 1$ gibt es planare Graphen, die einen k-Faktor haben?
  $\rightarrow$ $k \geqslant 5$, z.B. platonische Körper; Knoten mit Grad $\leqslant 5 \implies$ kein k-Faktor für $k > 5$
- Für welche $k \geqslant 1$ gibt es planare Graphen mit Minimalgrad k, die keinen k-Faktor haben?
  $\rightarrow$ $k \leqslant 5$, zwei Kopien G_1, G_2 eines k-regulären Graphen, sei v_i Knoten an äußerer Facette von G_i, identifiziere v_1 und v_2
- Sei G ein Graph mit n Knoten. Zeigen Sie: Falls n und k ungerade, so hat G keinen k-Faktor.
  $\rightarrow$ $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$ ist gerade für jeden Graphen, aber $\sum_{v \in V} \deg(v) = nk$ wäre ungerade

k-Faktoren finden

Gegeben: k-regulärer, planarer Graph
Gesucht: $(k-1)$-Faktor

k-Faktoren finden

Gegeben: k-regulärer, planarer Graph

Gesucht: $(k-1)$-Faktor

Beobachtung

Ein k-regulärer Graph hat genau dann einen k-Faktor, wenn er ein perfektes Matching hat.

(Vgl. Vorlesung 10, Folie 13)

k-Faktoren finden

Gegeben: planarer Graph G, Gewichtsfunktion $w\colon E(G) \to \mathbb{R}$

Annahme: Wir können gewichtsmaximalen k-regulären Subgraphen berechnen

Gesucht: k-Faktor

k-Faktoren finden

Gegeben: planarer Graph G, Gewichtsfunktion $w\colon E(G) \to \mathbb{R}$
Annahme: Wir können gewichtsmaximalen k-regulären Subgraphen berechnen
Gesucht: k-Faktor

- $w'(e) = W + w(e)$ mit $W > 2|E(G)| \cdot \max_{e \in E(G)} |w(e)|$
- Berechne gewichtsmaximalen k-regulären Subgraphen H
- H ist kardinalitätsmaximal, da W sehr groß, also ist H ein k-Faktor, falls existent
- H ist gewichtsmaximal unter allen k-regulären Subgraphen mit der gleichen Anzahl an Kanten

(Vgl. Vorlesung 11, Folie 5)

Schnitte und Kreise

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ planar, zusammenhängend und $E' \subseteq E$.
Zeige (V, E') enthält Kreis $C \iff (V^*, E^* - E'^*)$ unzusammenhängend

(Vgl. Vorlesung 10, Folie 10)

Schnitte und Kreise

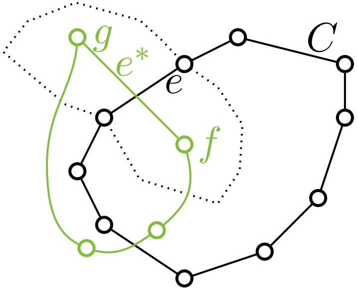
Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ planar, zusammenhängend und $E' \subseteq E$.
Zeige (V, E') enthält Kreis $C \iff (V^*, E^* - E'^*)$ unzusammenhängend

(Vgl. Vorlesung 10, Folie 10)

„$\Longrightarrow$“ Sei C ein Kreis in E'

- Sei $f \in V^*$ im Inneren, $g \in V^*$ im Äußeren von C
- Alle Pfade in G^* die f und g verbinden, laufen über Kanten dual zu C
- Also gibt es keinen Pfad zwischen f und g in $(V^*, E^* - E'^*)$



Schnitte und Kreise

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ planar, zusammenhängend und $E' \subseteq E$.
Zeige (V, E') enthält Kreis $C \iff (V^*, E^* - E'^*)$ unzusammenhängend

(Vgl. Vorlesung 10, Folie 10)

„$\Longleftarrow$“ Sei $(V^*, E^* - E'^*)$ unzusammenhängend

- Sei $H^* \subsetneq G^*$ eine Zusammenhangskomponente von $(V^*, E^* - E'^*)$
- Sei $C^* \subseteq E'^*$ der durch H^* induzierte Schnitt
- Dann ist C ein Kreis in G (einfacher Kreis, da H^* zusammenhängend)

Bäume

Aufgabe

Zeige: Für $E' \subseteq E$

$$\begin{array}{rll} & T = (V, E') & \text{ist ein Spannbaum von } G \\ \iff & T^* = (V^*, E^* - E'^*) & \text{ist ein Spannbaum von } G^* \end{array}$$

Bäume

Aufgabe

Zeige: Für $E' \subseteq E$

$$
\begin{array}{rlll}
 & T = & (V, E') & \text{ist ein Spannbaum von } G \\
\Longleftrightarrow & T^* = & (V^*, E^* - E'^*) & \text{ist ein Spannbaum von } G^*
\end{array}
$$

Wiederholung

(V, E') enthält Kreis $C \iff (V^*, E^* - E'^*)$ unzusammenhängend

Bäume

Aufgabe

Zeige: Für $E' \subseteq E$

$$\begin{array}{llll} & T = & (V, E') & \text{ist ein Spannbaum von } G \\ \iff & T^* = & (V^*, E^* - E'^*) & \text{ist ein Spannbaum von } G^* \end{array}$$

Wiederholung

(V, E') enthält Kreis $C \iff (V^*, E^* - E'^*)$ unzusammenhängend

„$\Longrightarrow$“

- T Spannbaum $\implies$ T ist kreisfrei $\implies$ T^* ist zusammenhängend
- $n - m + f = 2 \implies m - n = f - 2$
- $|E^* - E'^*| = m - (n - 1) = f - 1$

Bäume

Aufgabe

Zeige: Für $E' \subseteq E$

$$\begin{array}{lll} & T = (V, E') & \text{ist ein Spannbaum von } G \\ \iff & T^* = (V^*, E^* - E'^*) & \text{ist ein Spannbaum von } G^* \end{array}$$

Wiederholung

(V, E') enthält Kreis $C \iff (V^*, E^* - E'^*)$ unzusammenhängend

„$\Longleftarrow$“

- T^* Spannbaum $\implies$ T^* zusammenhängend $\implies$ T kreisfrei
- $n - m + f = 2 \implies m - f = n - 1$
- $|E'| = |E'^*| = m - |E^* - E'^*| = m - (f - 1) = n - 1$

Minimale Spannbäume

Karlsruher Institut für Technologie

Gegeben: gewichteter, planarer, zusammenhängender Graph G

Gesucht: MST in erwartet $\mathcal{O}(n)$

Ohne Beweis zu verwenden:

- Sei v ein Knoten und e eine Kante minimalen Gewichts inzident zu v. Dann gibt es einen MST von G, der e enthält. (Schnitteigenschaft)
- Sei e eine Kante, die in einem MST von G vorkommt. Sei T ein MST auf dem Graphen, den man durch die Kontraktion von e erhält. Dann ist $T \cup e$ ein MST auf G. (Kreiseigenschaft)

Minimale Spannbäume

Algorithm MST

$T \leftarrow \emptyset$

while G nicht leer **do**

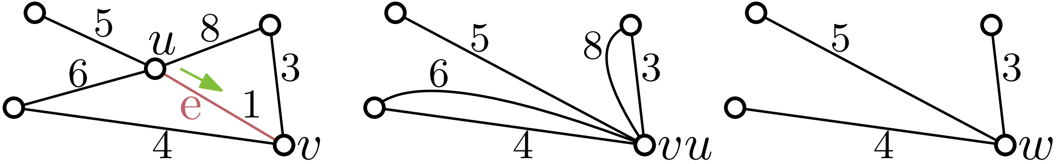
  Wähle $v \in V$ mit $\deg(v) \leqslant 5$

  $e \leftarrow \operatorname{argmin}_{e' \in \mathcal{N}(v)} w(e')$

  $T \leftarrow T \cup e$

  Kontrahiere e

  Entferne Multikanten und behalte nur die mit geringstem Gewicht



Erwartete Laufzeit

Kontraktion von $\{u, v\}$ mit $\deg(v) \leqslant 5$

- Pro Knoten eine Hashmap für seine Nachbarschaft
- Für $x \in \mathcal{N}(v)$ erkenne ob $x \in \mathcal{N}(u)$; in erwartet $\mathcal{O}(1)$
- Falls ja, behalte die Kante mit kleinerem Gewicht in Hashmap für u