Algorithmen für Planare Graphen – Übung 4

Laura Merker | 23. Juni 2022

Große und kleine Matchings

Matching: Kantenmenge, in der je zwei Kanten nicht adjazent sind

Gesucht: Planarer, zusammenhängender Graph mit kardinalitätsmaximalem Matching M

$|M| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$|M| = 1$

Große und kleine Matchings

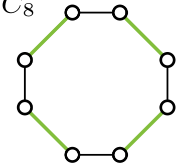
Matching: Kantenmenge, in der je zwei Kanten nicht adjazent sind

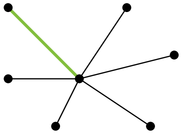
Gesucht: Planarer, zusammenhängender Graph mit kardinalitätsmaximalem Matching M

$|M| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$|M| = 1$

C_8





Perfekte Matchings

Ein Matching M heißt *perfekt*, wenn jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist.

Aufgabenstellung

Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen immer ein perfektes Matching?

Perfekte Matchings

Ein Matching M heißt *perfekt*, wenn jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist.

Aufgabenstellung

Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen immer ein perfektes Matching?

P_n einfacher Pfad mit n Knoten.

Perfekte Matchings

Ein Matching M heißt *perfekt*, wenn jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist.

Aufgabenstellung

Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen immer ein perfektes Matching?

P_n einfacher Pfad mit n Knoten.

- n gerade

Perfekte Matchings

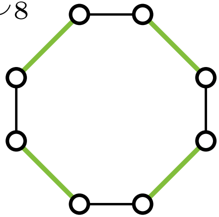
C_n einfacher Kreis mit $n \geq 3$ Knoten.

Perfekte Matchings

C_n einfacher Kreis mit $n \geq 3$ Knoten.

- n gerade

C_8



Perfekte Matchings

Q_n der n-dimensionale Hyperwürfel

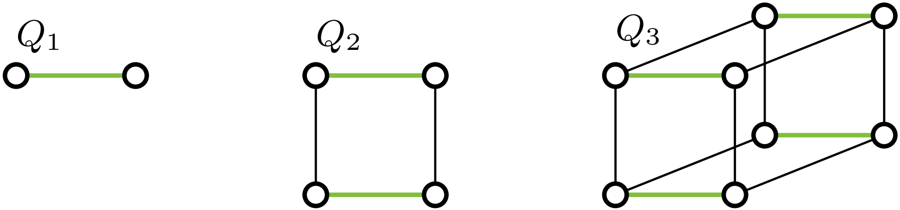
Knoten Bitstrings der Länge n

Kante genau dann, wenn Knoten sich in genau einem Bit unterscheiden

Perfekte Matchings

Q_n der n-dimensionale Hyperwürfel

Knoten	Bitstrings der Länge n
Kante	genau dann, wenn Knoten sich in genau einem Bit unterscheiden
Matching	genau das erste Bit unterschiedlich (perfekt für jedes n)



Kopiere das Matching mit dem Graphen

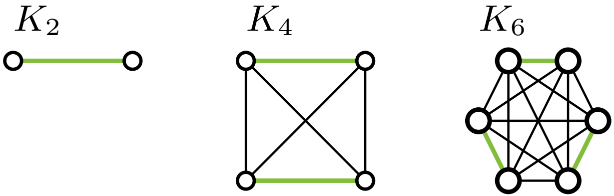
Perfekte Matchings

Vollständiger Graph K_n

Perfekte Matchings

Vollständiger Graph K_n

- n gerade



Beobachtung: K_n enthält Kreis der Länge n

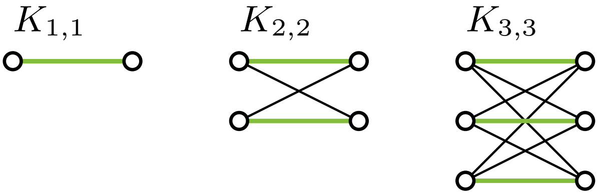
Perfekte Matchings

Vollständig bipartiter Graph $K_{n,m}$

Perfekte Matchings

Vollständig bipartiter Graph $K_{n,m}$

- $n = m$
- Für $n \neq m$ ist mindestens ein Knoten auf einer Seite nicht im Matching.



Füge die Kante zwischen den beiden neuen Knoten zu M hinzu.

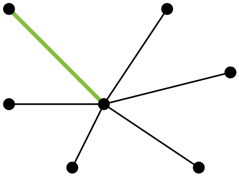
Perfekte Matchings

Bäume mit n Knoten

Perfekte Matchings

Bäume mit n Knoten

- Für jedes $n \neq 2$ gibt es einen Baum, der kein perfektes Matching hat



Perfekte Matchings

Karlsruher Institut für Technologie

Sei G

- planar
- bipartit (je $n \geq 2$ Knoten in der Bipartition $A \dot{\cup} B$)
- zusammenhängend
- Miniamalgrad ≥ 2

Perfekte Matchings

Sei G

- planar
- bipartit (je $n \geq 2$ Knoten in der Bipartition $A \dot\cup B$)
- zusammenhängend
- Miniamalgrad ≥ 2

(Tafel)

Perfekte Matchings

Karlsruher Institut für Technologie

Sei G

- planar
- bipartit (je $n \geq 2$ Knoten in der Bipartition $A \dot{\cup} B$)
- zusammenhängend
- Miniamalgrad ≥ 2

(Tafel)

Für jedes $n \geq 5$ gibt es einen Graphen, der kein perfektes Matching hat.

Beobachtung

Sei $S \subseteq A$. Falls $|S| > |N(S)|$, dann gibt es kein perfektes Matching.

Für $n = 2, 3, 4$ gibt es immer ein perfektes Matching.

Perfekte Matchings

Maximale außenplanare Graphen mit n Knoten

Perfekte Matchings

Maximale außenplanare Graphen mit n Knoten

- n gerade

Beobachtung

Die äußere Facette jedes maximalen außenplanar eingebetteten Graphen mit $n \geq 3$ Knoten wird durch einen einfachen Kreis begrenzt.

Perfekte Matchings

Maximalplanare Graphen mit n' Knoten (für große n')

Perfekte Matchings

Maximalplanare Graphen mit n' Knoten (für große n')

(Tafel)

Perfekte Matchings

Maximalplanare Graphen mit n' Knoten (für große n')

(Tafel)

- Start: Planarer Graph G mit n Knoten und $f \geq n+1$ Facetten
- Füge in mindestens $n+1$ Facetten einen Knoten ein und verbinde mit allen Knoten der Facette
- Beobachtung: Jeder neue Knoten hat nur Nachbarn in G
- $\Longrightarrow$ Es gibt kein perfektes Matching
- G mit $f \geq n+1$ existiert für $n \geq 5 \rightsquigarrow n' \geq n + (n+1) \geq 11$
- Für jedes $n' \geq 11$ gibt es einen maximalplanaren Graphen, der kein prefektes Matching hat

Perfektes Matching berechnen

Gegeben: planarer Graph

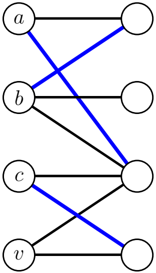
Frage: Gibt es ein perfektes Matching?

Perfektes Matching berechnen

Gegeben: planarer Graph
Frage: Gibt es ein perfektes Matching?

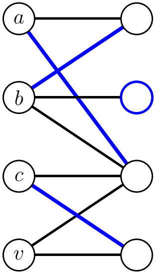
Berechne kardinalitätsmaximales Matching in $O(n^{3/2})$ (Vorlesung) und prüfe, ob $|M| = n/2$.

Erhöhende Wege



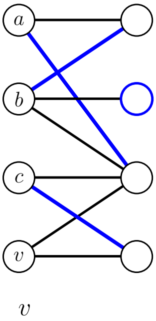
- **Gegeben:** kardinalitätsmaximales Matching M in $G - v$
- **Ziel:** Bestimme erhöhenden Weg bzgl. M mit Endknoten v
- Algorithmus soll in $\mathcal{O}(m)$ liegen.
- *Hinweis:* Modifiziere eine Breitensuche mit Startknoten v.

Erhöhende Wege



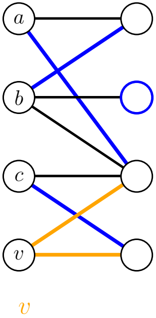
- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$

Erhöhende Wege



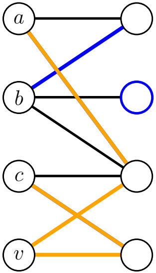
- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten

Erhöhende Wege



- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten

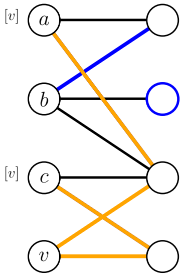
Erhöhende Wege



$v\ a\ c$

- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten

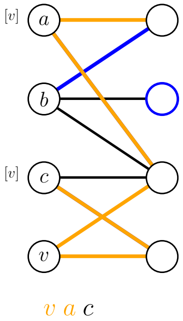
Erhöhende Wege



$v\ a\ c$

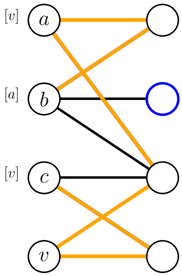
- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten

Erhöhende Wege



- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten

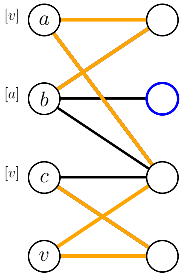
Erhöhende Wege



$v\ a\ c\ b$

- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten

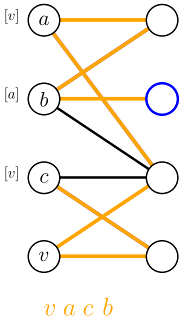
Erhöhende Wege



$v\ a\ c\ b$

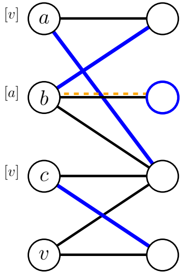
- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten

Erhöhende Wege



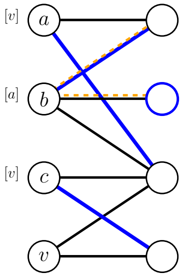
- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten
- Brich ab, wenn markierter Knoten gefunden wird

Erhöhende Wege



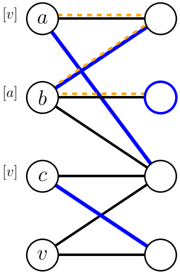
- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten
- Brich ab, wenn markierter Knoten gefunden wird
- Rekonstruiere erhöhenden Pfad

Erhöhende Wege



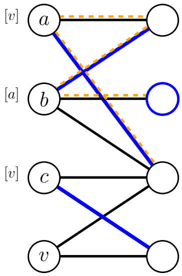
- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten
- Brich ab, wenn markierter Knoten gefunden wird
- Rekonstruiere erhöhenden Pfad

Erhöhende Wege



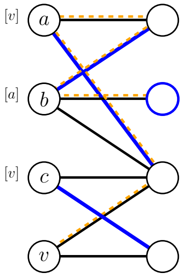
- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten
- Brich ab, wenn markierter Knoten gefunden wird
- Rekonstruiere erhöhenden Pfad

Erhöhende Wege



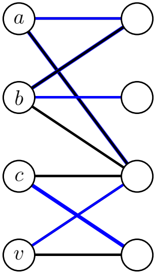
- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten
- Brich ab, wenn markierter Knoten gefunden wird
- Rekonstruiere erhöhenden Pfad

Erhöhende Wege



- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten
- Brich ab, wenn markierter Knoten gefunden wird
- Rekonstruiere erhöhenden Pfad

Erhöhende Wege



- Markiere ungematchte Knoten in $G - v$
- BFS beginnend bei v
- $\rightarrow$ nur Nicht-Matching-Kanten
- $\leftarrow$ nur Matching-Kanten
- Brich ab, wenn markierter Knoten gefunden wird
- Rekonstruiere erhöhenden Pfad

Folgerung aus dem Planar Separator Theorem

Gegeben:

- G zusammenhängend, planar, $n \geq 5$
- Maximalgrad Δ

Gesucht:

- Schnitt $S \subseteq E(G)$ mit $|S| \in \mathcal{O}(\Delta\sqrt{n})$, sodass
- $G - S$ besteht aus zwei disjunkten Teilgraphen der Größe $\leq \frac{3}{4}n$

Folgerung aus dem Planar Separator Theorem

Gegeben:

- G zusammenhängend, planar, $n \geq 5$
- Maximalgrad Δ

Gesucht:

- Schnitt $S \subseteq E(G)$ mit $|S| \in \mathcal{O}(\Delta\sqrt{n})$, sodass
- $G - S$ besteht aus zwei disjunkten Teilgraphen der Größe $\leq \frac{3}{4}n$

Planar Separator Theorem

Jeder planare Graph mit $n \geq 5$ Knoten hat einen $(3/4)$-balancierten Separator der Größe $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Folgerung aus dem Planar Separator Theorem

Gegeben:

- G zusammenhängend, planar, $n \geq 5$
- Maximalgrad Δ

Gesucht:

- Schnitt $S \subseteq E(G)$ mit $|S| \in \mathcal{O}(\Delta\sqrt{n})$, sodass
- $G - S$ besteht aus zwei disjunkten Teilgraphen der Größe $\leq \frac{3}{4}n$

Planar Separator Theorem

Jeder planare Graph mit $n \geq 5$ Knoten hat einen $(3/4)$-balancierten Separator der Größe $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Lösung:

- Sei V_S der Separator aus dem Planar Separator Theorem $\rightsquigarrow V(G - V_S) = V \,\dot{\cup}\, W$
- $S = \{vw \in E(G) \mid v \in V_S \text{ oder } w \in V_S\}$
- Verteile (in $G - S$ isolierte) Knoten aus V_S auf V und W

Separator Theorems

Karlsruher Institut für Technologie

Gegeben: Baum mit n Knoten

Gesucht: Knoten v und Partition $V(G - v) = V \,\dot\cup\, W$ mit $|V|, |W| \leq \frac{2}{3}n$

Separator Theorems

Gegeben: Baum mit n Knoten

Gesucht: Knoten v und Partition $V(G-v) = V \dot{\cup} W$ mit $|V|, |W| \leq \frac{2}{3}n$

(Tafel)

Separator Theorems

Gegeben: Baum mit n Knoten

Gesucht: Knoten v und Partition $V(G - v) = V \dot{\cup} W$ mit $|V|, |W| \leq \frac{2}{3}n$

(Tafel)

- Orientiere Kanten zu größerem Teilbaum
- v ist der Knoten, der nur eingehende Kanten hat
- Seien $G_1, \dots, G_t$ die Zusammenhangskomponenten von $G - v$ in absteigender Größe
- Wähle $V = V(G_1) \cup \dots \cup V(G_i)$, sodass $|V| \leq 2n/3$, aber $|V \cup V_{i+1}| > 2n/3$
- W ist der Rest

Separator Theorems

Gegeben: außenplanarer Graph mit n Knoten

Gesucht: Separator S konstanter Größe und Partition $V(G - S) = V \dot{\cup} W$ mit $|V|, |W| \leq \frac{2}{3}n$

Hinweis: Dualgraph ohne äußere Facette (weak dual) ist ein Baum.

Separator Theorems

Gegeben: außenplanarer Graph mit n Knoten

Gesucht: Separator S konstanter Größe und Partition $V(G - S) = V \dot\cup W$ mit $|V|, |W| \leq \frac{2}{3}n$

Hinweis: Dualgraph ohne äußere Facette (weak dual) ist ein Baum.

(Tafel)

Separator Theorems

Gegeben: außenplanarer Graph mit n Knoten

Gesucht: Separator S konstanter Größe und Partition $V(G-S) = V \dot\cup W$ mit $|V|, |W| \leq \frac{2}{3}n$

Hinweis: Dualgraph ohne äußere Facette (weak dual) ist ein Baum.

(Tafel)

- Finde Separatorknoten v im weak dual
- S enthält die drei Knoten, die zu der Facette von v adjazent sind
- V und W entsprechen der Partition des weak duals

Gewichtsmaximales Matching in außenplanaren Graphen

- Wie in der Vorlesung, aber mit $\mathcal{O}(1)$-Separator S
- Finden von $|S|$ erhöhenden Wegen in $f(n) \implies$ Laufzeit $\mathcal{O}(f(n)\log(n))$

(Tafel)