Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

24. Mai 2022, Übung 3

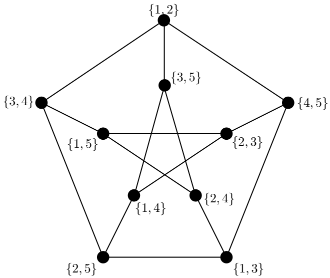
Lars Gottesbüren

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Der Petersengraph

Definition: Petersengraph

- Die Knoten sind alle zweielementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, 5\}$.
- Zwei Knoten sind genau dann verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen leer ist.



Satz von Kuratowski

Karlsruher Institut für Technologie

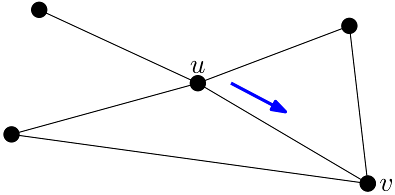
Es gibt zwei Varianten des Satzes von Kuratowski:

- Ein einfacher Graph G ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung von $K_{3,3}$ noch eine Unterteilung von K_5 als Teilgraph enthält. (Topologischer Minor)
- Ein einfacher Graph G ist genau dann planar, wenn er weder $K_{3,3}$ noch K_5 als Minor enthält. (Wagner)

Minor

Kontraktion der Kante $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante e.
- Identifiziere u und v.
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.



Minor

- H ist Minor von G, wenn G einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion H hervorgeht.

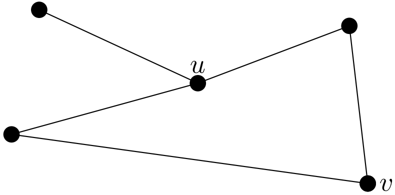
Topologischer Minor

- H ist topologischer Minor von G, wenn G eine Unterteilung von H enthält.

Minor

Kontraktion der Kante $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante e.
- Identifiziere u und v.
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.



Minor

- H ist Minor von G, wenn G einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion H hervorgeht.

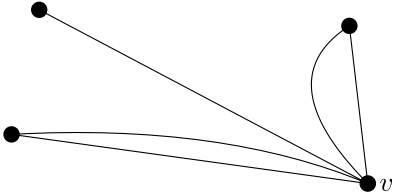
Topologischer Minor

- H ist topologischer Minor von G, wenn G eine Unterteilung von H enthält.

Minor

Kontraktion der Kante $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante e.
- Identifiziere u und v.
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.



Minor

- H ist Minor von G, wenn G einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion H hervorgeht.

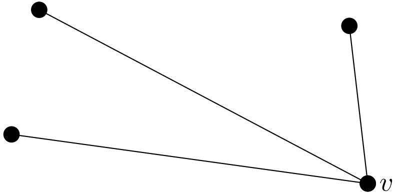
Topologischer Minor

- H ist topologischer Minor von G, wenn G eine Unterteilung von H enthält.

Minor

Kontraktion der Kante $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante e.
- Identifiziere u und v.
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.



Minor

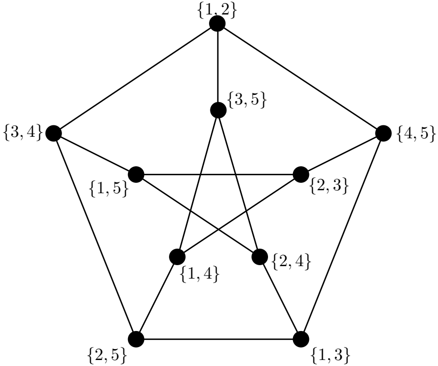
- H ist Minor von G, wenn G einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion H hervorgeht.

Topologischer Minor

- H ist topologischer Minor von G, wenn G eine Unterteilung von H enthält.

Der Petersengraph

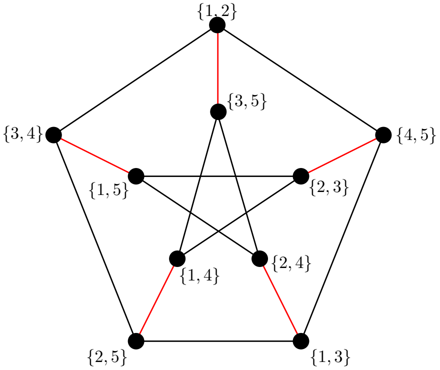
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält K_5 als Minor.

Der Petersengraph

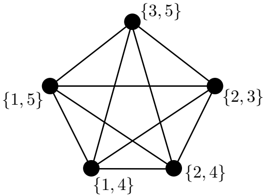
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält K_5 als Minor.

Der Petersengraph

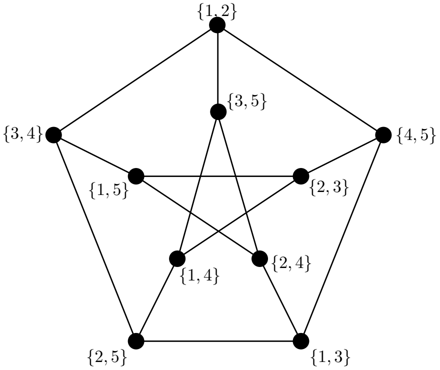
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält K_5 als Minor.

Der Petersengraph

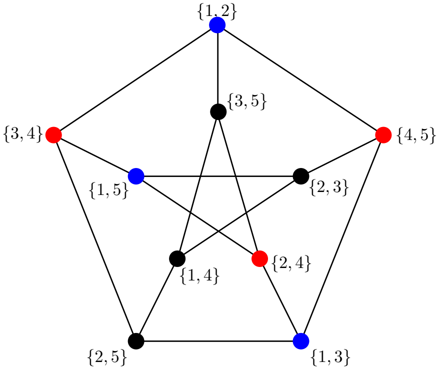
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

Der Petersengraph

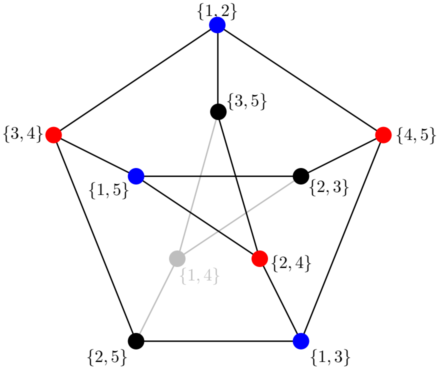
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

Der Petersengraph

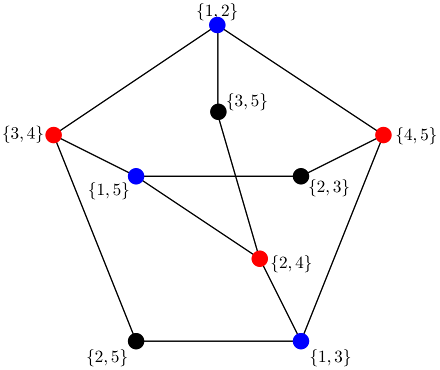
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

Der Petersengraph

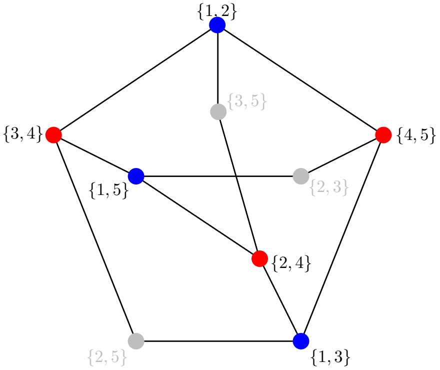
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

Der Petersengraph

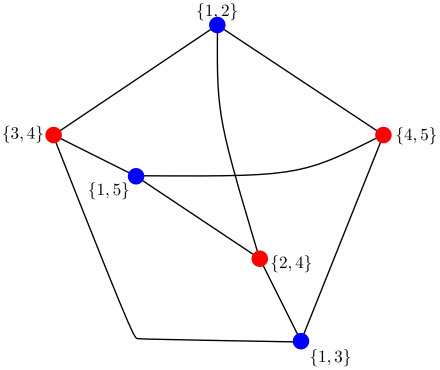
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

Der Petersengraph

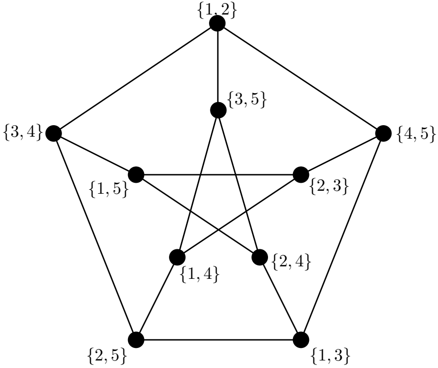
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

Der Petersengraph

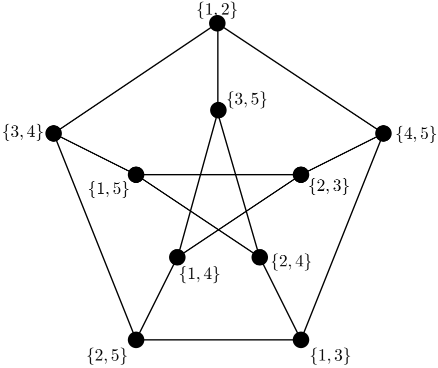
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen P wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - P hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- P hat aber nur 15 Kanten. $\lightning$

Der Petersengraph

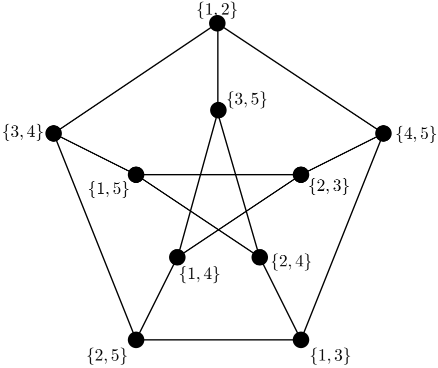
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen *P* wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - *P* hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- *P* hat aber nur 15 Kanten. $\lightning$

Der Petersengraph

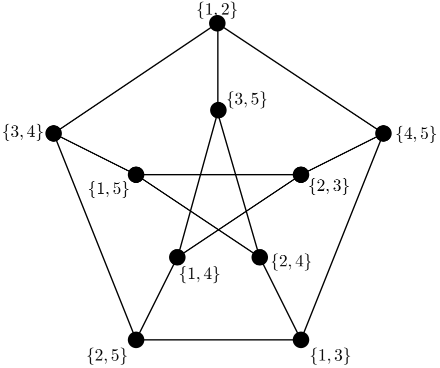
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen P wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - P hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- P hat aber nur 15 Kanten. $\lightning$

Der Petersengraph

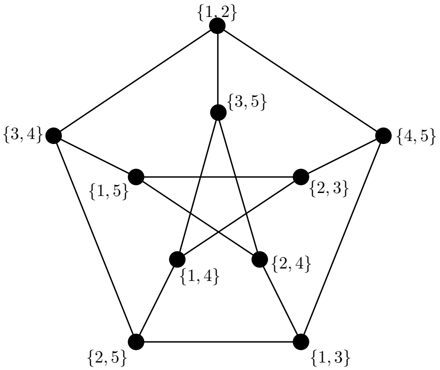
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen P wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - P hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- P hat aber nur 15 Kanten. ↯

Der Petersengraph

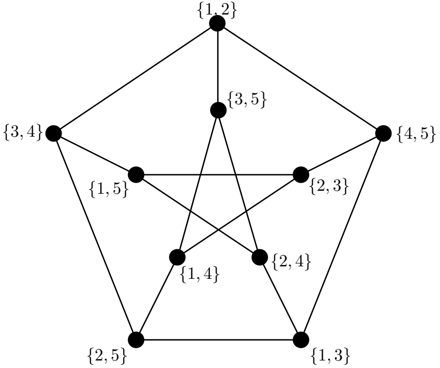
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen P wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - P hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- P hat aber nur 15 Kanten. $\lightning$

Der Petersengraph

Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.

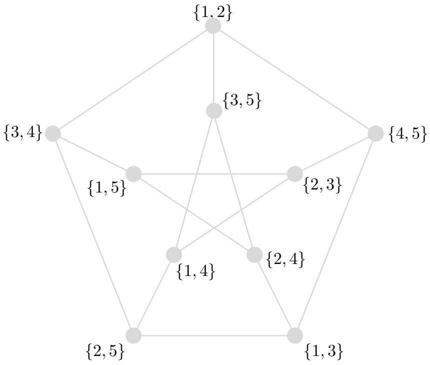


- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen P wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - P hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- P hat aber nur 15 Kanten. ↯

Minor $\not\Rightarrow$ Topologischer Minor

Wenn ein einfacher Graph G einen Graphen H als Minor enthält, dann enthält G auch eine Unterteilung von H als Teilgraph. Stimmt nicht!

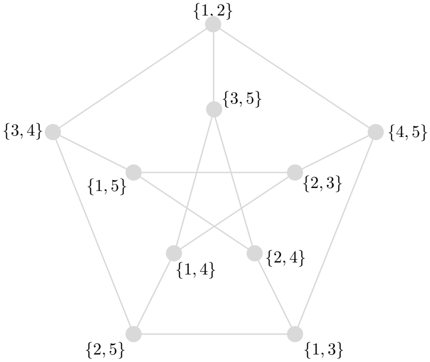
- Der Petersen-Graph P enthält K_5 als Minor.
- Unterteilung erhält den Knotengrad der ursprünglichen Knoten.
- Würde P den Graph K_5 als Unterteilung enthalten, müsste P mindestens 5 Knoten mit Grad 4 haben.



Minor $\not\Rightarrow$ Topologischer Minor

Wenn ein einfacher Graph G einen Graphen H als Minor enthält, dann enthält G auch eine Unterteilung von H als Teilgraph. Stimmt nicht!

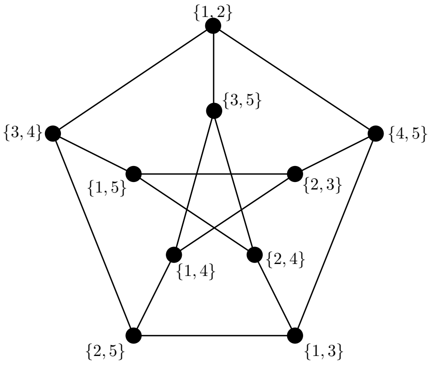
- Der Petersen-Graph P enthält K_5 als Minor.
- Unterteilung erhält den Knotengrad der ursprünglichen Knoten.
- Würde P den Graph K_5 als Unterteilung enthalten, müsste P mindestens 5 Knoten mit Grad 4 haben.



Minor $\not\Rightarrow$ Topologischer Minor

Wenn ein einfacher Graph G einen Graphen H als Minor enthält, dann enthält G auch eine Unterteilung von H als Teilgraph. Stimmt nicht!

- Der Petersen-Graph P enthält K_5 als Minor.
- Unterteilung erhält den Knotengrad der ursprünglichen Knoten.
- Würde P den Graph K_5 als Unterteilung enthalten, müsste P mindestens 5 Knoten mit Grad 4 haben.



Umfang

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G. Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞.

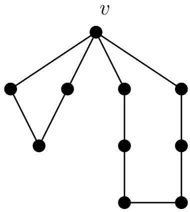
Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen Knoten v von G entweder

- die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
- entscheidet, dass v nicht auf einem Kreis liegt.

Umfang

SHORTCIRCLE(v)

- Breitensuche beginnend bei v
- Wird ein Knoten zum zweiten Mal besucht, ist ein Kreis gefunden.
- Ein kürzester Kreis wird zuerst gefunden.



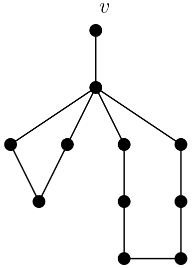
Umfang

SHORTCIRCLE(v)

- Breitensuche beginnend bei v
- Wird ein Knoten zum zweiten Mal besucht, ist ein Kreis gefunden.
- Ein kürzester Kreis wird zuerst gefunden.

Aber: v liegt nicht notwendigerweise auf diesem Kreis. Deshalb:

- Nummeriere ("labele") Knoten auf dem ersten Level (Nachbarn von v)
- Vererbe Label auf neu gefundene Knoten
- Wenn sich unterschiedliche Label treffen ist das ein Kreis, der v enthält.



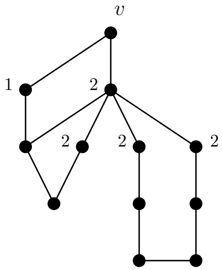
Umfang

SHORTCIRCLE(v)

- Breitensuche beginnend bei v
- Wird ein Knoten zum zweiten Mal besucht, ist ein Kreis gefunden.
- Ein kürzester Kreis wird zuerst gefunden.

Aber: v liegt nicht notwendigerweise auf diesem Kreis. Deshalb:

- Nummeriere ("labele") Knoten auf dem ersten Level (Nachbarn von v)
- Vererbe Label auf neu gefundene Knoten
- Wenn sich unterschiedliche Label treffen ist das ein Kreis, der v enthält.



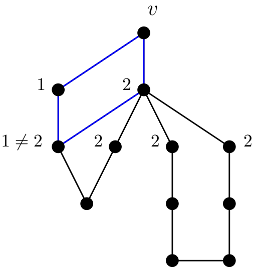
Umfang

SHORTCIRCLE(v)

- Breitensuche beginnend bei v
- Wird ein Knoten zum zweiten Mal besucht, ist ein Kreis gefunden.
- Ein kürzester Kreis wird zuerst gefunden.

Aber: v liegt nicht notwendigerweise auf diesem Kreis. Deshalb:

- Nummeriere (“labele”) Knoten auf dem ersten Level (Nachbarn von v)
- Vererbe Label auf neu gefundene Knoten
- Wenn sich unterschiedliche Label treffen ist das ein Kreis, der v enthält.



Umfang

Karlsruher Institut für Technologie

Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil 6.1, um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

- Breitensuche für eine Zusammenhangskomponente liegt in $\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}(|E|)$.
- Wiederhole für jeden Knoten und gib den kleinsten Kreis aus: $\mathcal{O}(|V||E|)$.

Umfang

Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil 6.1, um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

- Breitensuche für eine Zusammenhangskomponente liegt in $\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}(|E|)$.
- Wiederhole für jeden Knoten und gib den kleinsten Kreis aus: $\mathcal{O}(|V||E|)$.

Umfang für planare Graphen

Algorithm PLANARGIRTH

$C \leftarrow \infty$

for jede Zusammenhangskomponente H von G **do**

$(V_1, V_2, S) \leftarrow \textsc{PlanarSeparator}(H)$

$C \leftarrow \min\{C, \min\{\textsc{ShortCircle}(v) \mid v \in S\}\}$

$C \leftarrow \min\{C, \textsc{PlanarGirth}(V_1)\}$

$C \leftarrow \min\{C, \textsc{PlanarGirth}(V_2)\}$

return C

Umfang für planare Graphen

Algorithm PLANARGIRTH

$C \leftarrow \infty$

for jede Zusammenhangskomponente H von G **do** $\mathcal{O}(n_G^{1,5}\log(n_G))$

$(V_1, V_2, S) \leftarrow \text{PLANARSEPARATOR}(H)$ $\mathcal{O}(n_H)$ $\mathcal{O}(n_H^{1,5})$

$C \leftarrow \min\{C, \min\{\text{SHORTCIRCLE}(v) \mid v \in S\}\}$ $\mathcal{O}(\sqrt{n_H} \cdot n_H)$

$C \leftarrow \min\{C, \text{PLANARGIRTH}(V_1)\}$ $\mathcal{O}(T(|V_1|))$ $\mathcal{O}(T(n_H))$

$C \leftarrow \min\{C, \text{PLANARGIRTH}(V_2)\}$ $\mathcal{O}(T(|V_2|))$

return C

- $\mathcal{O}(\log(n))$ Rekursionslevel
- Jeder Knoten nur einmal pro Level $\Rightarrow$ pro Level $\mathcal{O}(n^{1.5})$ Arbeit
- Insgesamt: $\mathcal{O}(\log(n) \cdot n^{1.5})$

Triangulierung

Triangulierung in $\mathcal{O}(n)$

1. Füge Kanten hinzu, so dass es keine Grad-1 Knoten mehr gibt.
2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.
3. Löse Schleifen und Multikanten durch Kantentausch auf.

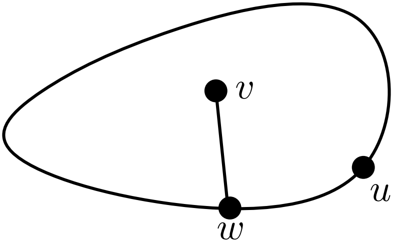
Triangulierung

Triangulierung in $\mathcal{O}(n)$

1. Füge Kanten hinzu, so dass es keine Grad-1 Knoten mehr gibt.
2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.
3. Löse Schleifen und Multikanten durch Kantentausch auf.

Triangulierung

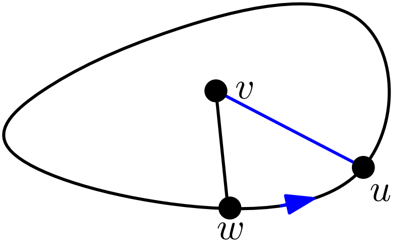
1. Füge Kanten hinzu, so dass es keine Grad-1-Knoten mehr gibt.



- Sei v Knoten mit Grad 1.
- Seine Kante sei $\{v, w\}$ und f die Facette in der er liegt.
- Laufe f von w aus im Gegenuhrzeigersinn ab.
- Verbinde v mit dem zweiten besuchten Knoten u.

Triangulierung

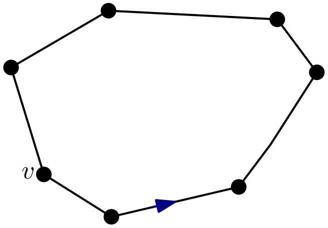
1. Füge Kanten hinzu, so dass es keine Grad-1-Knoten mehr gibt.



- Sei *v* Knoten mit Grad 1.
- Seine Kante sei $\{v, w\}$ und *f* die Facette in der er liegt.
- Laufe *f* von *w* aus im Gegenuhrzeigersinn ab.
- Verbinde *v* mit dem zweiten besuchten Knoten *u*.

Triangulierung

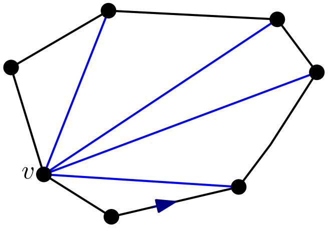
2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.



- Für jede Facette f wähle beliebigen Knoten v.
- Laufe f ab und verbinde v mit allen besuchten Knoten, außer dem Vorgänger und Nachfolger von v auf f.

Triangulierung

2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.

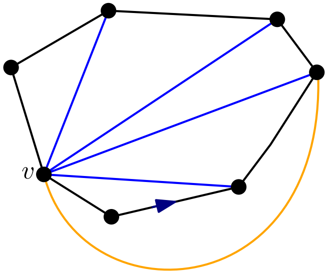


- Für jede Facette f wähle beliebigen Knoten v.
- Laufe f ab und verbinde v mit allen besuchten Knoten, außer dem Vorgänger und Nachfolger von v auf f.

Triangulierung

KIT
Karlsruher Institut für Technologie

2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.

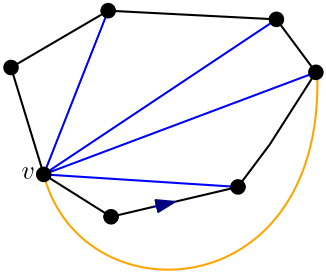


- Für jede Facette f wähle beliebigen Knoten v.
- Laufe f ab und verbinde v mit allen besuchten Knoten, außer dem Vorgänger und Nachfolger von v auf f.

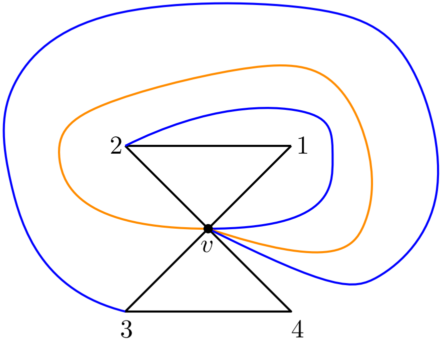
Doppelkanten

Triangulierung

2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.



Doppelkanten



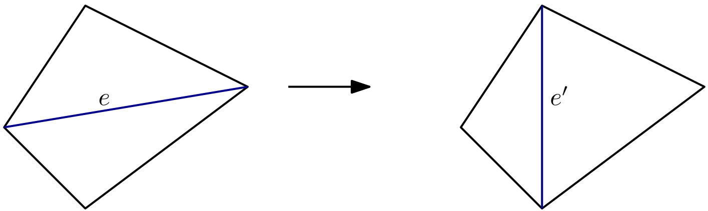
Schleifen

Triangulierung

3. Löse Schleifen und Multikanten durch Kantentausch auf.

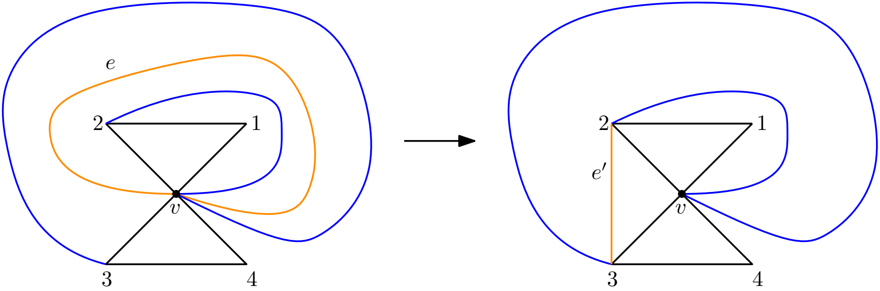
Kantentausch

- Betrachte Kante e eines triangulierten Graphen.
- Das Entfernen von e ergibt eine Facette f mit Grad 4.
- Füge Kante e' in f ein, die nicht die gleichen Knoten wie e verbindet.



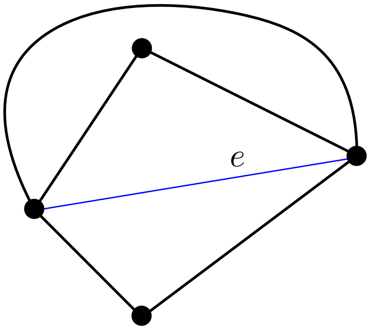
Triangulierung

3. Löse **Schleifen** und Multikanten durch Kantentausch auf.



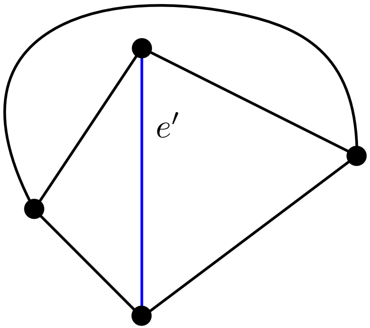
Triangulierung

3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.
   - Sei e eine Multikante.
   - Kann e' eine Multikante sein?



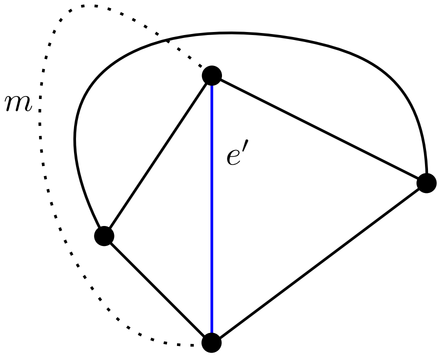
Triangulierung

3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.
   - Sei *e* eine Multikante.
   - Kann e' eine Multikante sein?



Triangulierung

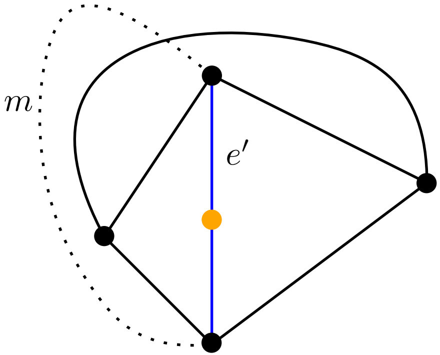
3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.



- Sei *e* eine Multikante.
- Kann e' eine Multikante sein?
- Angenommen es gibt eine planare Einbettung mit Kante *m*.

Triangulierung

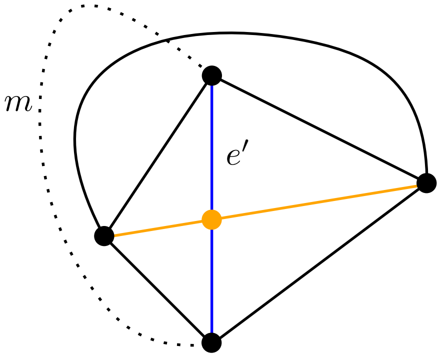
3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.



- Sei *e* eine Multikante.
- Kann e' eine Multikante sein?
- Angenommen es gibt eine planare Einbettung mit Kante *m*.
- Unterteile e'.

Triangulierung

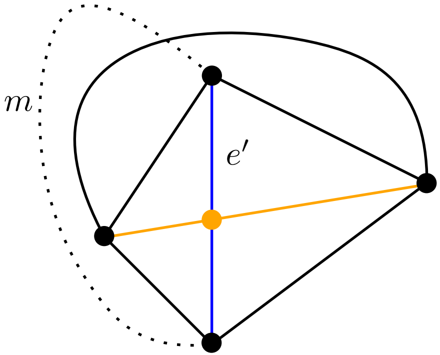
3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.



- Sei *e* eine Multikante.
- Kann *e*′ eine Multikante sein?
- Angenommen es gibt eine planare Einbettung mit Kante *m*.
- Unterteile *e*′.
- Füge weitere Kanten ein, die die Planarität nicht verletzen.

Triangulierung

3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.



- Sei *e* eine Multikante.
- Kann e' eine Multikante sein?
- Angenommen es gibt eine planare Einbettung mit Kante *m*.
- Unterteile e'.
- Füge weitere Kanten ein, die die Planarität nicht verletzen.
- Planare Einbettung für K_5 gefunden. $\lightning$

Triangulierung Laufzeit

Wenn Schleifen und Multikanten bekannt sind, dann braucht Schritt 3 lineare Zeit: $\mathcal{O}(1)$ pro Facette.

Lemma

Doppelkanten und Schleifen können in $\mathcal{O}(n)$ Zeit bestimmt werden.

Für jeden Konten $v \in V$:

- Markiere Nachbarn.
- Wird ein Knoten mehr als einmal markiert ist eine Multikante gefunden.
- Wird v markiert ist eine Schleife gefunden.

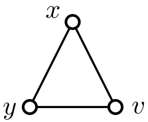
Jede *gerichtete* Kante wird einmal besucht $\Rightarrow \mathcal{O}(n)$

Dreiecke Zählen

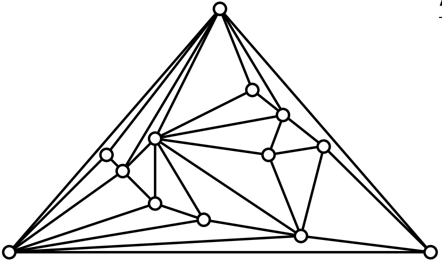
Karlsruher Institut für Technologie

Für alle $v \in V$: bestimme Zahl der *Dreiecke* in denen v vorkommt.
Laufzeit: $\mathcal{O}(n)$

- Gegeben: $G = (V, E)$ ungerichteter, planarer Graph.
- Dreiecke in denen v vorkommt: $\{\{x, y\} \in E | \{v, x\}, \{v, y\} \in E\}$



Dreiecke Zählen

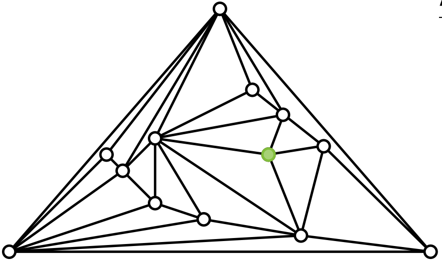


Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**
  $D_v = 0$
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**
    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**
      if ADJAZENT(v, w)
      then
        $D_v = D_v + 1$

Dreiecke Zählen

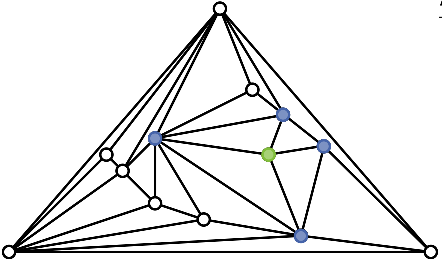


Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**
  $D_v = 0$
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**
    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**
      if ADJAZENT(v, w) **then**
        $D_v = D_v + 1$

Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

  $D_v = 0$

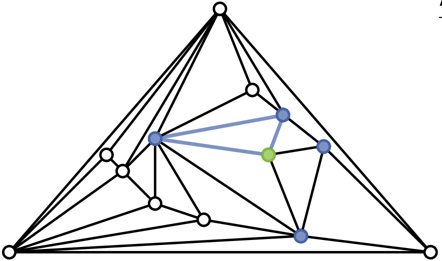
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

      if ADJAZENT(v, w) **then**

        $D_v = D_v + 1$

Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

$D_v = 0$

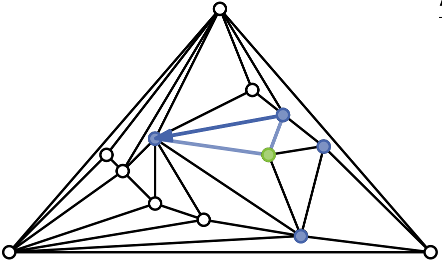
for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

if ADJAZENT(v, w) **then**

$D_v = D_v + 1$

Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

  $D_v = 0$

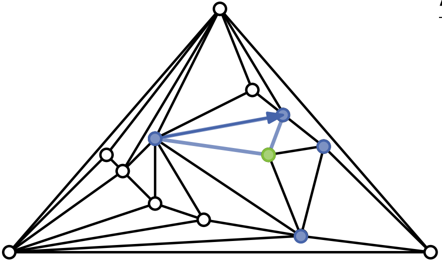
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

      if ADJAZENT(v, w) **then**

        $D_v = D_v + 1$

Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

$D_v = 0$

for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

if ADJAZENT(v, w) **then**

$D_v = D_v + 1$

Maximum Independent Set

Algorithm MIS

$I_{\text{opt}} \leftarrow \emptyset$
$(S, V_1, V_2) \leftarrow \textsc{PlanarSeparator}(G)$
for $I_S \in 2^S$ **do**
  $I_1 \leftarrow \text{MIS}(G[V_1 - N(I_S)])$
  $I_2 \leftarrow \text{MIS}(G[V_2 - N(I_S)])$
  $I \leftarrow I_S \cup I_1 \cup I_2$
  if $|I| > |I_{\text{opt}}$ **then**
    $I_{\text{opt}} \leftarrow I$
return I_{opt}

Maximum Independent Set

Algorithm MIS

```
I_opt ← ∅
(S, V_1, V_2) ← PlanarSeparator(G)
for I_S ∈ 2^S do
    I_1 ← MIS(G[V_1 − N(I_S)])
    I_2 ← MIS(G[V_2 − N(I_S)])
    I ← I_S ∪ I_1 ∪ I_2
    if |I| > |I_opt| then
        I_opt ← I
return I_opt
```

$$t(n) \leq 2^{\sqrt{n}} \cdot t(\alpha^1 n) \leq 2^{\sqrt{n}} \cdot 2^{\sqrt{\alpha n}} \cdot t(\alpha^2 n) \leq \cdots \leq 2^{\sqrt{n} \cdot \sum_{i=0}^{\log(n)} \alpha^i}$$

Außenplanare Graphen

G ist *außenplanar*.

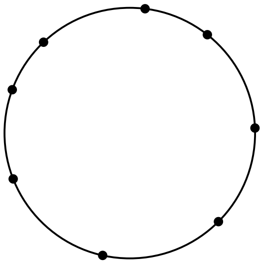
$\Leftrightarrow$ G lässt sich so planar einbetten, dass jeder Knoten auf der äußeren Facette liegt.

$\Leftrightarrow$ Fügt man einen Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten zu G hinzu, ist G immer noch planar.

1. G ist genau dann außenplanar, wenn er keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$ enthält.
2. Ein außenplanarer Graph hat höchstens $2n - 3$ Kanten.

Außenplanare Graphen

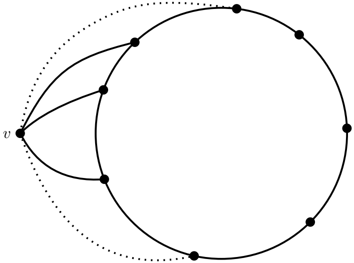
G ist außenplanar $\Rightarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Betrachte außenplanare Einbettung von G.

Außenplanare Graphen

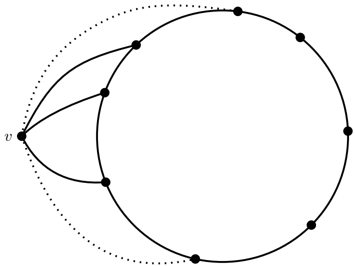
G ist außenplanar $\Rightarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Betrachte außenplanare Einbettung von G.
- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus $G \rightarrow G'$.
- Falls G eine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$ enhält wird K_5 oder $K_{3,3}$ in G' daraus
- Aber G' ist planar.
  $\Rightarrow$ G enthält keine Unterteilung des K_4 oder $K_{2,3}$.

Außenplanare Graphen

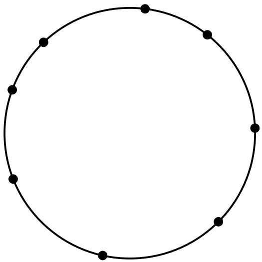
G ist außenplanar $\Leftarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus $G \rightarrow G'$.
- G' enthält weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Unterteilung.
- $\Rightarrow$ G' ist planar.
- Betrachte planare Einbettung von G' mit v auf der äußeren Facette.

Außenplanare Graphen

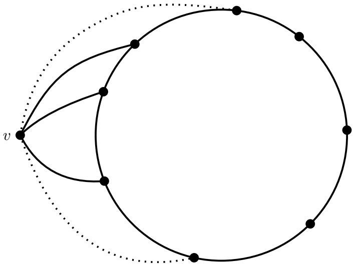
G ist außenplanar $\Leftarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus $G \rightarrow G'$.
- G' enthält weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Unterteilung.
- $\Rightarrow$ G' ist planar.
- Betrachte planare Einbettung von G' mit v auf der äußeren Facette.
- Lösche v $\Rightarrow$ alle Knoten von G liegen auf der äußeren Facette.

Außenplanare Graphen

Ein außenplanarer Graph G enthält höchstens $2n - 3$ Kanten.



- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten von $G \to G'$.
- G' hat $m' = m + n$ Kanten und $n' = n + 1$ Knoten.
- Da G' planar ist gilt: $m' \leq 3n' - 6$
- Also: $n + m \leq 3(n + 1) - 6$
  $\Rightarrow m \leq 2n - 3$

Geradlinige Zeichnungen

Sei G ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

- Wir führen den Beweis für alle zusammenhängenden maximal planaren Graphen.

Induktion über n:

- **IA:** $n = 3$
- **IV:** Jeder einfache, eingebettete, maximal planare Graph mit $n-1$ Knoten lässt sich geradlinig zeichnen.

Geradlinige Zeichnungen

Sei G ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

- Wir führen den Beweis für alle zusammenhängenden maximal planaren Graphen.

Induktion über n:

- **IA:** $n = 3$
- **IV:** Jeder einfache, eingebettete, maximal planare Graph mit $n - 1$ Knoten lässt sich geradlinig zeichnen.

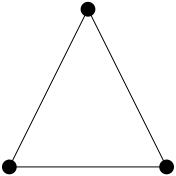
Geradlinige Zeichnungen

Sei G ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

- Wir führen den Beweis für alle zusammenhängenden maximal planaren Graphen.

Induktion über n:

- **IA:** $n = 3$
- **IV:** Jeder einfache, eingebettete, maximal planare Graph mit $n - 1$ Knoten lässt sich geradlinig zeichnen.



Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

- Sei G ein maximal planarer Graph mit $n \geq 4$ Knoten.

Lemma

Es gibt mindestens 4 Knoten mit $\deg(v) \leq 5$.

- Minimalgrad 3.
  - Offensichtlich hat G keinen Grad 0 oder 1 Knoten.
  - Angenommen Knoten v in G hat Grad 2.
  - $G - v$ hat $n-1$ Knoten und $m-2$ Kanten.
  - $m = 3n - 6$
  - $m - 2 = 3n - 8 = 3(n-1) - 5 > 3(n-1) - 6$ ↯
- $\sum(6 - deg(v)) = 6n - 2m = 6n - 2(3n-6) = 12$

Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

- Sei G ein maximal planarer Graph mit $n \geq 4$ Knoten.

Lemma

Es gibt mindestens 4 Knoten mit $\deg(v) \leq 5$.

- Minimalgrad 3.
  - Offensichtlich hat G keinen Grad 0 oder 1 Knoten.
  - Angenommen Knoten v in G hat Grad 2.
  - $G - v$ hat $n - 1$ Knoten und $m - 2$ Kanten.
  - $m = 3n - 6$
  - $m - 2 = 3n - 8 = 3(n - 1) - 5 > 3(n - 1) - 6$ ↯
- $\sum(6 - deg(v)) = 6n - 2m = 6n - 2(3n - 6) = 12$

Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

- Sei G ein maximal planarer Graph mit $n \geq 4$ Knoten.

Lemma

Es gibt mindestens 4 Knoten mit $\deg(v) \leq 5$.

- Minimalgrad 3.
  - Offensichtlich hat G keinen Grad 0 oder 1 Knoten.
  - Angenommen Knoten v in G hat Grad 2.
  - $G - v$ hat $n-1$ Knoten und $m-2$ Kanten.
  - $m = 3n - 6$
  - $m - 2 = 3n - 8 = 3(n-1) - 5 > 3(n-1) - 6$ ↯
- $\sum(6 - deg(v)) = 6n - 2m = 6n - 2(3n-6) = 12$

Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

- Sei G ein maximal planarer Graph mit $n \geq 4$ Knoten.

Lemma

Es gibt mindestens 4 Knoten mit $\deg(v) \leq 5$.

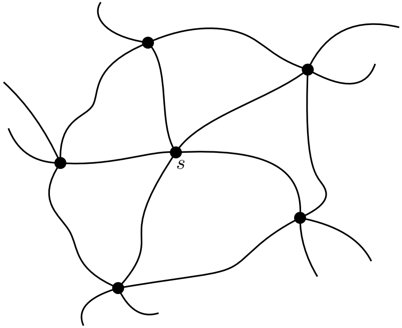
- Minimalgrad $3 \Rightarrow 6 - deg(v) \leq 3$
- $\sum_{v \in V}(6 - deg(v)) = 12$

$\Rightarrow$ Es gibt mindestens $\frac{12}{3} = 4$ Knoten mit $6 - deg(v) > 0$.
$\Rightarrow$ Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.

Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

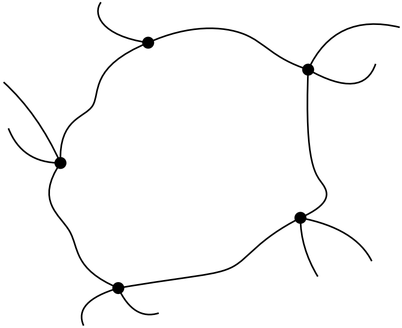
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

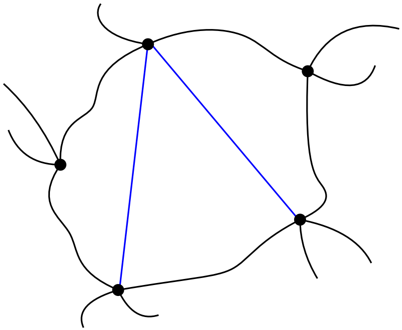
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

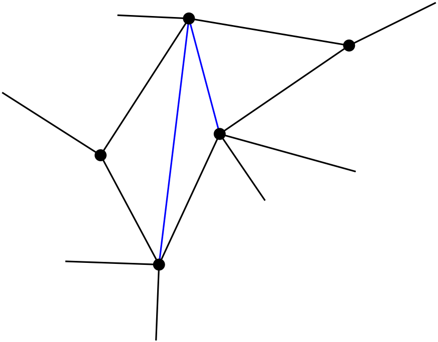
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

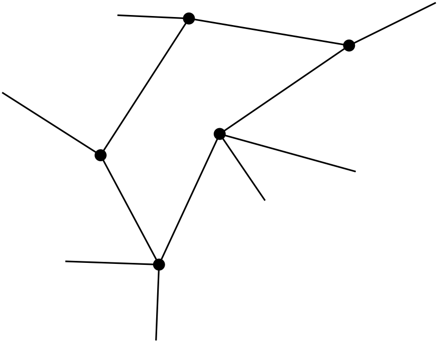
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

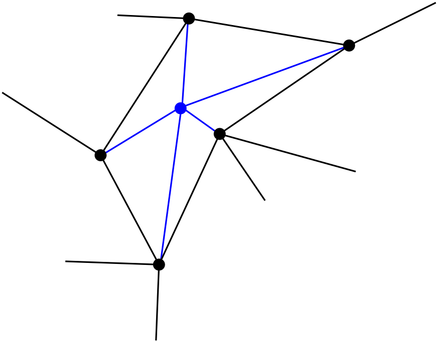
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



- *Problem der Museumswächter*
- Zur Bewachung eines überschneidungsfreien, geschlossenen, planaren Polygons mit n Ecken sind maximal $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter nötig.