

# Algorithmen für Routenplanung

20. Vorlesung, Sommersemester 2021

Adrian Feilhauer | 23./28. Juni 2021

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · ALGORITHMIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



## Graph-basiert:

- Dijkstras Algorithmus auf zeitexpandiertem Graph
- Dijkstras Algorithmus auf zeitabhängigem Graph

## Graph-basiert:

- Dijkstras Algorithmus auf zeitexpandiertem Graph
- Dijkstras Algorithmus auf zeitabhängigem Graph

## Näher an den Eingabedaten:

- RAPTOR

**Aber:** Daten müssen pro Route zusammengefasst werden

## Graph-basiert:

- Dijkstras Algorithmus auf zeitexpandiertem Graph
- Dijkstras Algorithmus auf zeitabhängigem Graph

## Näher an den Eingabedaten:

- RAPTOR

**Aber:** Daten müssen pro Route zusammengefasst werden

## Frage:

- Wie nah können wir an den Eingabedaten bleiben?

## Zur Erinnerung:

- Eine **Connection** ist ein 5-Tupel aus:
  - Abfahrtsstop:  $v_{\text{dep}}(c)$
  - Ankunftsstop:  $v_{\text{arr}}(c)$
  - Abfahrtszeit:  $\tau_{\text{dep}}(c)$
  - Ankunftszeit:  $\tau_{\text{arr}}(c)$
  - Trip:  $\text{trip}(c)$

# Earliest Arrival Connection Scan

# Connection Scan

## Idee:

- Vorbereitung: Sortiere Connections aufsteigend nach Abfahrtszeit
- Anfrage: Relaxiere alle Connections in dieser Reihenfolge

## Idee:

- Vorbereitung: Sortiere Connections aufsteigend nach Abfahrtszeit
- Anfrage: Relaxiere alle Connections in dieser Reihenfolge

## Datenstruktur:

- Provisorische Ankunftszeit  $d[v]$  pro Stop  $v$
- Erreichbarkeitsbit  $r[T]$  pro Trip  $T$

## Idee:

- Vorbereitung: Sortiere Connections aufsteigend nach Abfahrtszeit
- Anfrage: Relaxiere alle Connections in dieser Reihenfolge

## Datenstruktur:

- Provisorische Ankunftszeit  $d[v]$  pro Stop  $v$
- Erreichbarkeitsbit  $r[T]$  pro Trip  $T$

## Connection-Relaxierung:

- Teste, ob Connection  $c$  erreichbar ist, d.h., teste, ob man

## Idee:

- Vorbereitung: Sortiere Connections aufsteigend nach Abfahrtszeit
- Anfrage: Relaxiere alle Connections in dieser Reihenfolge

## Datenstruktur:

- Provisorische Ankunftszeit  $d[v]$  pro Stop  $v$
- Erreichbarkeitsbit  $r[T]$  pro Trip  $T$

## Connection-Relaxierung:

- Teste, ob Connection  $c$  erreichbar ist, d.h., teste, ob man
  - einsteigen kann:  $d[v_{\text{dep}}(c)] \leq \tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c))$   
 $\tau_{\text{ch}}(\cdot)$  ist Umstiegszeit
  - bereits im Trip sitzt:  $r[\text{trip}(c)] = \text{true}$

## Idee:

- Vorbereitung: Sortiere Connections aufsteigend nach Abfahrtszeit
- Anfrage: Relaxiere alle Connections in dieser Reihenfolge

## Datenstruktur:

- Provisorische Ankunftszeit  $d[v]$  pro Stop  $v$
- Erreichbarkeitsbit  $r[T]$  pro Trip  $T$

## Connection-Relaxierung:

- Teste, ob Connection  $c$  erreichbar ist, d.h., teste, ob man
  - einsteigen kann:  $d[v_{\text{dep}}(c)] \leq \tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c))$   
 $\tau_{\text{ch}}(\cdot)$  ist Umstiegszeit
  - bereits im Trip sitzt:  $r[\text{trip}(c)] = \text{true}$
- Wenn  $c$  erreichbar ist, dann

## Idee:

- Vorbereitung: Sortiere Connections aufsteigend nach Abfahrtszeit
- Anfrage: Relaxiere alle Connections in dieser Reihenfolge

## Datenstruktur:

- Provisorische Ankunftszeit  $d[v]$  pro Stop  $v$
- Erreichbarkeitsbit  $r[T]$  pro Trip  $T$

## Connection-Relaxierung:

- Teste, ob Connection  $c$  erreichbar ist, d.h., teste, ob man
  - einsteigen kann:  $d[v_{\text{dep}}(c)] \leq \tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c))$   
 $\tau_{\text{ch}}(\cdot)$  ist Umstiegszeit
  - bereits im Trip sitzt:  $r[\text{trip}(c)] = \text{true}$
- Wenn  $c$  erreichbar ist, dann
  - könnte man sitzen bleiben:  $r[\text{trip}(c)] \leftarrow \text{true}$
  - könnte man aussteigen:  $d[v_{\text{arr}}(c)] \leftarrow \min\{d[v_{\text{arr}}(c)], \tau_{\text{arr}}(c)\}$

## Problem der frühesten Ankunft

Eingabe: Sortierte Connection-Liste, Startstop, Startzeit, Zielstop  
 Ausgabe: Früheste Ankunftszeit an Zielstop

Umstiegszeit (in min)		4	10	5	7	3	
Ankunftszeit an Stop	...	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	...

Connections																	
sortiert nach	...	$V_{dep}$	$V_{arr}$	$\tau_{dep}$	$\tau_{arr}$	trip	$V_{dep}$	$V_{arr}$	$\tau_{dep}$	$\tau_{arr}$	trip	$V_{dep}$	$V_{arr}$	$\tau_{dep}$	$\tau_{arr}$	trip	...
Abfahrtszeit																	

Ist Trip erreichbar?	...	false					false					...
----------------------	-----	-------	--	--	--	--	-------	--	--	--	--	-----

## Problem der frühesten Ankunft

Eingabe: Sortierte Connection-Liste, Startstop, Startzeit, Zielstop

Ausgabe: Früheste Ankunftszeit an Zielstop

Umstiegszeit (in min)		4	10	5	7	3	
Ankunftszeit an Stop	...	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	...

Connections																
sortiert nach	$V_{dep}$	$V_{arr}$	9:00	9:25	trip	$V_{dep}$	$V_{arr}$	9:15	9:45	trip	$V_{dep}$	$V_{arr}$	9:25	9:55	trip	...
Abfahrtszeit																

Ist Trip erreichbar?	...	false					false					...
----------------------	-----	-------	--	--	--	--	-------	--	--	--	--	-----

## Problem der frühesten Ankunft

Eingabe: Sortierte Connection-Liste, Startstop, Startzeit, Zielstop  
 Ausgabe: Früheste Ankunftszeit an Zielstop

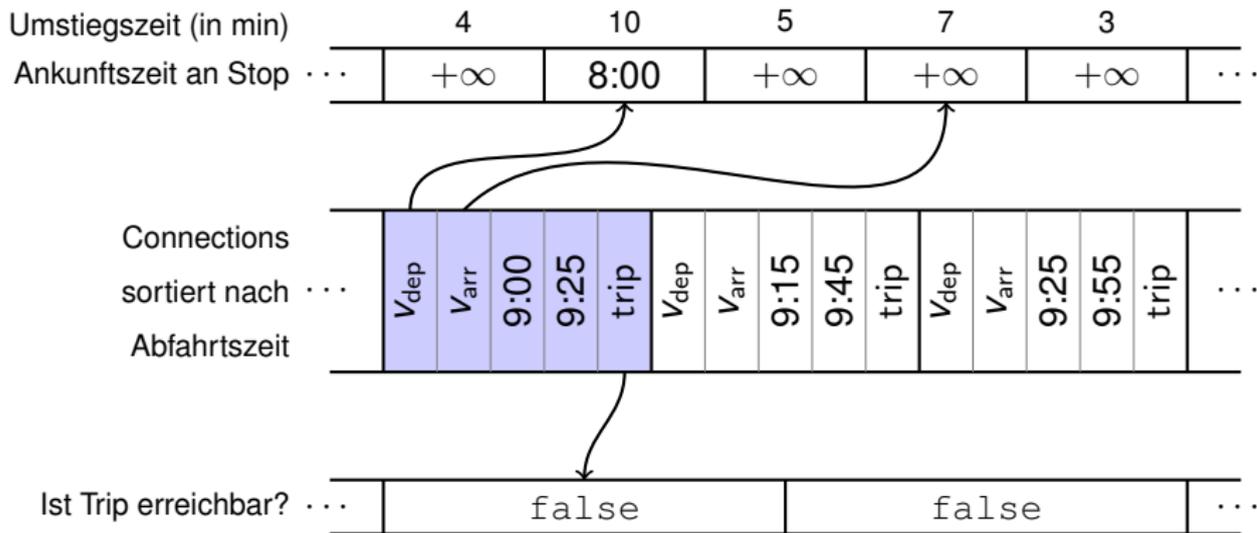
Umstiegszeit (in min)		4	10	5	7	3	
Ankunftszeit an Stop	...	$+\infty$	8:00	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	...

Connections																
sortiert nach	$V_{dep}$	$V_{arr}$	9:00	9:25	trip	$V_{dep}$	$V_{arr}$	9:15	9:45	trip	$V_{dep}$	$V_{arr}$	9:25	9:55	trip	...
Abfahrtszeit																

Ist Trip erreichbar?	...	false					false					...
----------------------	-----	-------	--	--	--	--	-------	--	--	--	--	-----

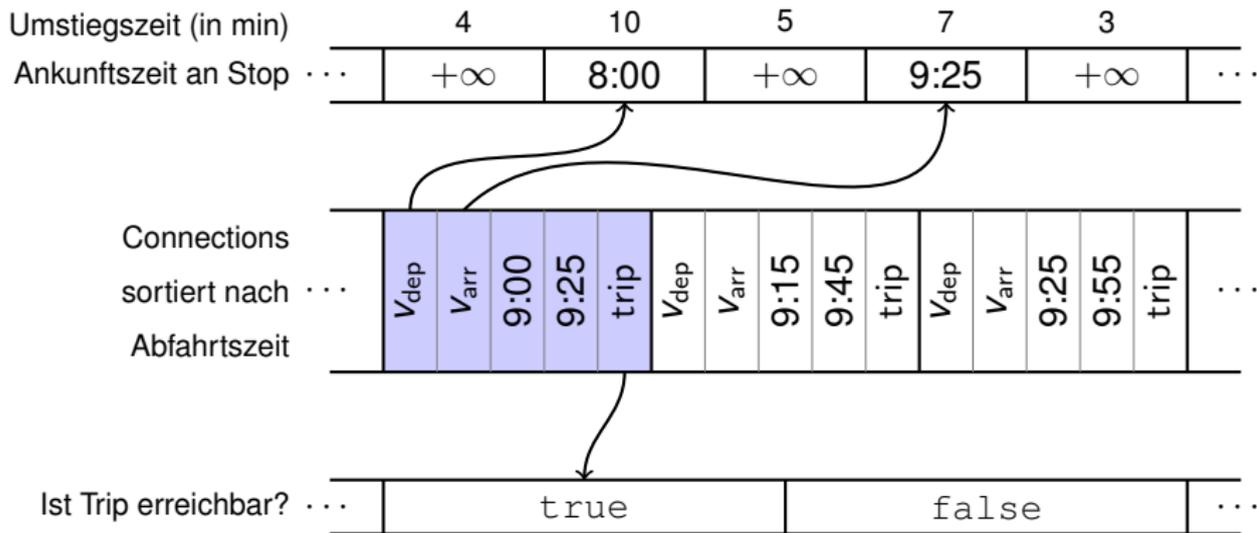
## Problem der frühesten Ankunft

Eingabe: Sortierte Connection-Liste, Startstop, Startzeit, Zielstop  
Ausgabe: Früheste Ankunftszeit an Zielstop



## Problem der frühesten Ankunft

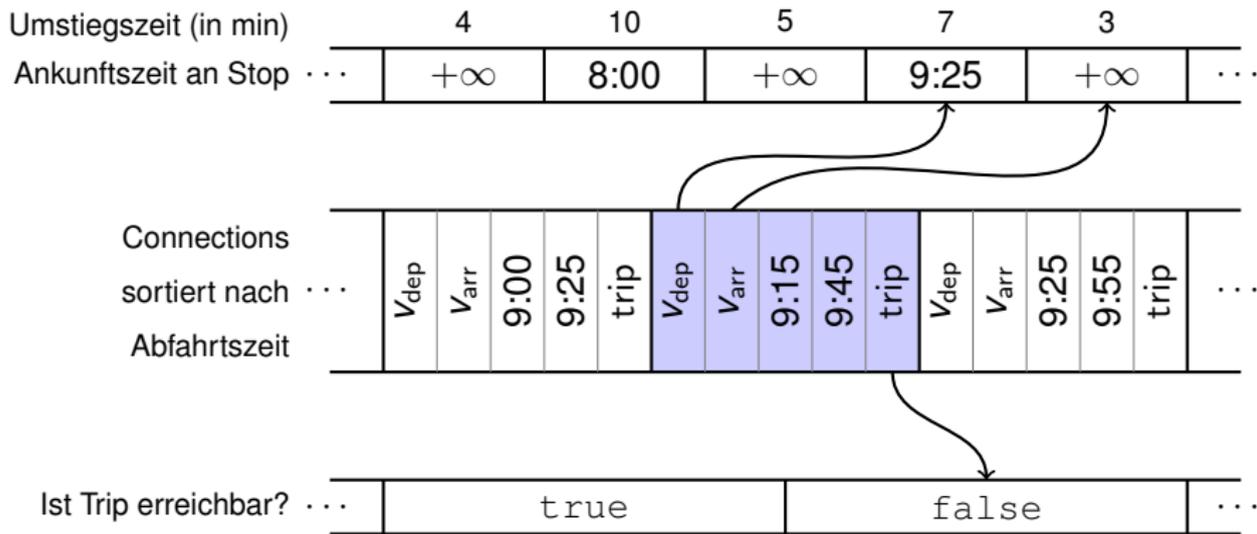
Eingabe: Sortierte Connection-Liste, Startstop, Startzeit, Zielstop  
Ausgabe: Früheste Ankunftszeit an Zielstop



## Problem der frühesten Ankunft

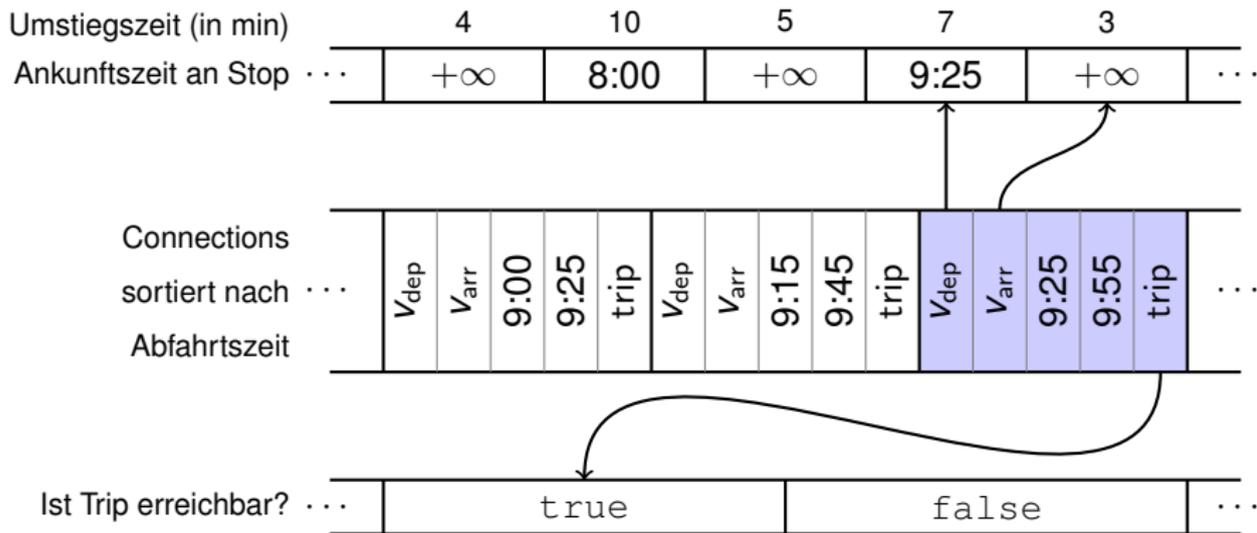
Eingabe: Sortierte Connection-Liste, Startstop, Startzeit, Zielstop

Ausgabe: Früheste Ankunftszeit an Zielstop



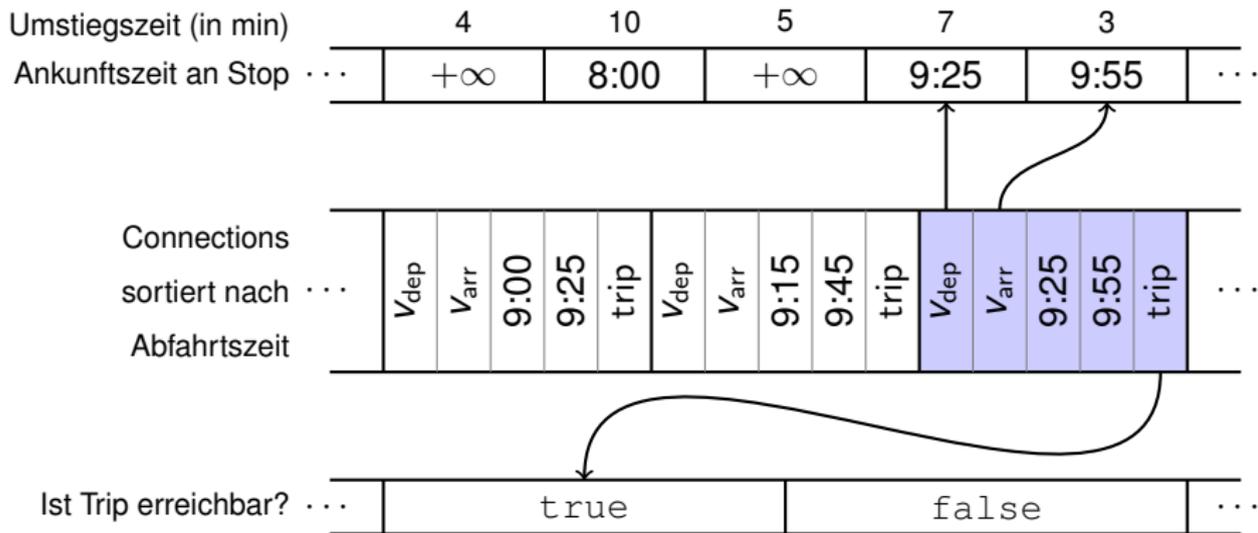
## Problem der frühesten Ankunft

Eingabe: Sortierte Connection-Liste, Startstop, Startzeit, Zielstop  
Ausgabe: Früheste Ankunftszeit an Zielstop



## Problem der frühesten Ankunft

Eingabe: Sortierte Connection-Liste, Startstop, Startzeit, Zielstop  
Ausgabe: Früheste Ankunftszeit an Zielstop



## Problem der frühesten Ankunft

Eingabe: Sortierte Connection-Liste, Startstop, Startzeit, Zielstop

Ausgabe: Früheste Ankunftszeit an Zielstop

Umstiegszeit (in min)		4	10	5	7	3	
Ankunftszeit an Stop	...	$+\infty$	8:00	$+\infty$	9:25	9:55	...

Connections																
sortiert nach	$V_{dep}$	$V_{arr}$	9:00	9:25	trip	$V_{dep}$	$V_{arr}$	9:15	9:45	trip	$V_{dep}$	$V_{arr}$	9:25	9:55	trip	...
Abfahrtszeit																

Ist Trip erreichbar?	...	true					false					...
----------------------	-----	------	--	--	--	--	-------	--	--	--	--	-----

$d[v] \leftarrow \infty$  für alle Stops  $v$

$d[s] \leftarrow \tau_{\text{dep}} - \tau_{\text{ch}}(s)$

$r[T] \leftarrow \text{false}$  für alle Trips  $T$

**for** alle Connections  $c$  aufsteigend nach  $\tau_{\text{dep}}(c)$  **do**

**if**  $d[v_{\text{dep}}(c)] \leq \tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c))$  **or**  $r[\text{trip}(c)] = \text{true}$  **then**

$r[\text{trip}(c)] \leftarrow \text{true}$

$d[v_{\text{arr}}(c)] \leftarrow \min\{d[v_{\text{arr}}(c)], \tau_{\text{arr}}(c)\}$

## Idee:

- Nach Scannen von Connection  $c$ :  
Relaxiere alle von  $v_{arr}(c)$  ausgehenden Fußwege
- Aber nur, falls  $d[v_{arr}(c)]$  durch  $c$  verbessert wurde

## Idee:

- Nach Scannen von Connection  $c$ :  
Relaxiere alle von  $v_{arr}(c)$  ausgehenden Fußwege
- Aber nur, falls  $d[v_{arr}(c)]$  durch  $c$  verbessert wurde

## Begründung:

- Angenommen,  $c$  verbessert  $d[v_{arr}(c)]$  nicht
- Dann wurde bereits eine bessere Journey  $J$  nach  $v_{arr}(c)$  gefunden
- Für jeden Fußweg  $(v_{arr}(c), v)$ : Hänge Fußweg an  $J$  dran
- Ankunftszeit an  $v$  ist dann besser, als wenn man Fußweg an  $c$  hängt

## Voraussetzung:

Fußwege sind transitiv abgeschlossen und erfüllen Dreiecksungleichung!

$d[v] \leftarrow \infty$  für alle Stops  $v$

$d[s] \leftarrow \tau_{\text{dep}} - \tau_{\text{ch}}(s)$

$r[T] \leftarrow \text{false}$  für alle Trips  $T$

**for alle Fußwege  $(s, v)$  mit Länge  $\ell$  do**

└  $d[v] \leftarrow \min\{d[v], \tau_{\text{dep}} + \ell\}$

**for alle Connections  $c$  aufsteigend nach  $\tau_{\text{dep}}(c)$  do**

┌ **if  $d[v_{\text{dep}}(c)] \leq \tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c))$  or  $r[\text{trip}(c)] = \text{true}$  then**

└  $r[\text{trip}(c)] \leftarrow \text{true}$

┌ **if  $d[v_{\text{arr}}(c)] > \tau_{\text{arr}}(c)$  then**

└  $d[v_{\text{arr}}(c)] \leftarrow \tau_{\text{arr}}(c)$

└ **for alle Fußwege  $(v_{\text{arr}}(c), v)$  mit Länge  $\ell$  do**

└└  $d[v] \leftarrow \min\{d[v], \tau_{\text{arr}}(c) + \ell\}$

## Beobachtung:

- Connections vor Startzeit  $\tau_{\text{dep}}$  können nicht verwendet werden
- Finde mit binärer Suche die erste Connection  $c$  mit  $\tau_{\text{dep}}(c) \geq \tau_{\text{dep}}$
- Scanne erst ab  $c$

**Bisher:** Wir lösen das One-to-All-Problem.

**Frage:** Geht es besser, wenn wir den Zielstop  $t$  kennen?

**Bisher:** Wir lösen das One-to-All-Problem.

**Frage:** Geht es besser, wenn wir den Zielstop  $t$  kennen?

**Beobachtung:**

- Connections, die nach der Ankunftszeit an  $t$  abfahren, sind nie nützlich
- ⇒ Scan abbrechen, sobald für aktuelle Connection  $c$  gilt:  $\tau_{\text{dep}}(c) \geq d[t]$

# Profile Connection Scan

**Problem:** Der Fahrgast kennt seine Abfahrts- und Ankunftszeit oft nicht.

**Lösung:** Journeys für eine Zeitspanne angeben.

**Problem:** Der Fahrgast kennt seine Abfahrts- und Ankunftszeit oft nicht.

**Lösung:** Journeys für eine Zeitspanne angeben.

	Karlsruhe Hbf	dep	15:00	2
	Leipzig Hbf	arr	20:18	
	Karlsruhe Hbf	dep	16:00	0
	Leipzig Hbf	arr	20:46	
	Karlsruhe Hbf	dep	18:01	1
	Leipzig Hbf	arr	22:55	
	Karlsruhe Hbf	dep	18:51	2
	Leipzig Hbf	arr	00:10	
	Karlsruhe Hbf	dep	18:51	1
	Leipzig Hbf	arr	00:47	
	Karlsruhe Hbf	dep	19:01	3
	Leipzig Hbf	arr	00:10	
	Karlsruhe Hbf	dep	19:01	2
	Leipzig Hbf	arr	00:47	

Screenshot von bahn.de

**Problem:** Der Fahrgast kennt seine Abfahrts- und Ankunftszeit oft nicht.

**Lösung:** Journeys für eine Zeitspanne angeben.

Startstop →

Zielstop →

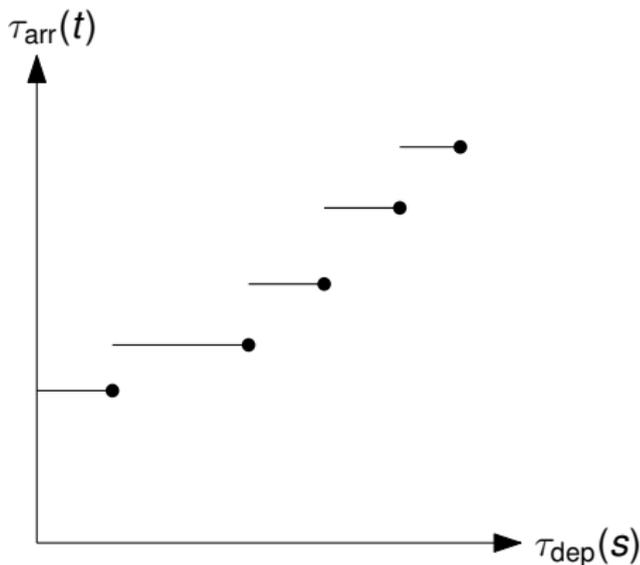
Karlsruhe Hbf	dep	15:00	2
Leipzig Hbf	arr	20:18	
Karlsruhe Hbf	dep	16:00	0
Leipzig Hbf	arr	20:46	
Karlsruhe Hbf	dep	18:01	1
Leipzig Hbf	arr	22:55	
Karlsruhe Hbf	dep	18:51	2
Leipzig Hbf	arr	00:10	
Karlsruhe Hbf	dep	18:51	1
Leipzig Hbf	arr	00:47	
Karlsruhe Hbf	dep	19:01	3
Leipzig Hbf	arr	00:10	
Karlsruhe Hbf	dep	19:01	2
Leipzig Hbf	arr	00:47	

minimale Abfahrtszeit

maximale Ankunftszeit

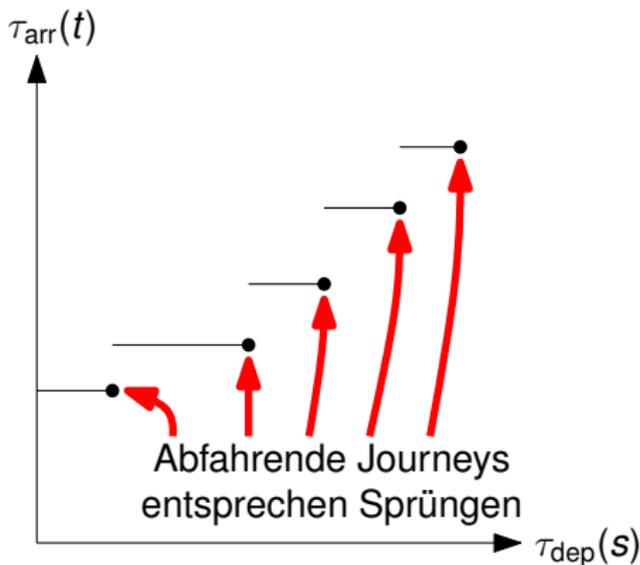
Screenshot von bahn.de

# Profile Connection Scan



## Problem der frühesten *Rückwärts*-Ankunftsprofile

Eingabe: Fahrplan, Zielstop  $t$ , Zeitspanne  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$   
Ausgabe:  $s$ - $t$ -Profil für jeden Stop  $s$  (außer  $t$ )



## Problem der frühesten *Rückwärts*-Ankunftsprofile

Eingabe: Fahrplan, Zielstop  $t$ , Zeitspanne  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$   
Ausgabe:  $s-t$ -Profil für jeden Stop  $s$  (außer  $t$ )

Initialisiere Profil  $P[v]$  pro Stop  $v$

Initialisiere optimale Ankunftszeit  $d_{\text{trip}}[T]$  pro Trip  $T$

**for alle Connections  $c$  absteigend nach  $\tau_{\text{dep}}(c)$  do**

```
// 1. Bestimme Ankunftszeit, falls  $c$  benutzt wird
```

```
 $\tau_1 \leftarrow$  Ankunftszeit, wenn man zum Ziel läuft
```

```
 $\tau_2 \leftarrow$  Ankunftszeit, wenn man sitzenbleibt (benutzt  $d_{\text{trip}}[\text{trip}(c)]$ )
```

```
 $\tau_3 \leftarrow$  Ankunftszeit, wenn man umsteigt (benutzt  $P[v_{\text{arr}}(c)]$ )
```

```
//  $\tau_c$ : Optimale Ankunftszeit, falls  $c$  benutzt wird
```

```
 $\tau_c \leftarrow \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ 
```

```
// 2. Aktualisiere Stop- und Trip-Daten
```

```
Füge  $\tau_c$  zu  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  hinzu
```

```
Aktualisiere  $d_{\text{trip}}[\text{trip}(c)]$  mit  $\tau_c$ 
```

## Idee:

- Connections werden absteigend nach Abfahrtszeit eingeführt
- Verwalte Profile bezüglich aller eingeführten Connections
- Initial gibt es keine Connections → triviale Initiallösung
- Wenn Connection  $c$  eingeführt wird, dann wird die Lösung angepasst

## Idee:

- Connections werden absteigend nach Abfahrtszeit eingeführt
- Verwalte Profile bezüglich aller eingeführten Connections
- Initial gibt es keine Connections → triviale Initiallösung
- Wenn Connection  $c$  eingeführt wird, dann wird die Lösung angepasst

## Beobachtung:

- Wenn eine Connection  $c$  eingeführt wird, gibt es keine frühere
- ⇒ Niemand, der bereits unterwegs ist, kann  $c$  verwenden
- ⇒  $c$  kann nur am Anfang einer Journey vorkommen

- Verwalte Array  $d_t[v]$ , das die Laufdistanz von  $v$  zu  $t$  enthält
- $d_t[\cdot]$  wird in einem Preprocessing-Schritt berechnet

- Aus

$\tau_1 \leftarrow$  Ankunftszeit, wenn man zum Ziel läuft

- wird

**for alle Stops  $v$  do**

$d_t[v] \leftarrow \infty$

**for alle Fußwege  $(v, t)$  mit Länge  $\ell$  do**

$d_t[v] \leftarrow \ell$

$d_t[t] \leftarrow 0$

...

$\tau_1 \leftarrow \tau_{\text{arr}}(c) + d_t[v_{\text{arr}}(c)]$

## Trip-Datenstruktur

- Verwalte Array  $d_{\text{trip}}[T]$ , mit einem Wert pro Trip  $T$
- $d_{\text{trip}}[T]$  ist die früheste Ankunftszeit an  $t$ , wenn man in  $T$  startet
- Initial gibt es keine Connections in  $T$

⇒  $d_{\text{trip}}[T] \leftarrow \infty$  für alle  $T$

- Aus

Initialisiere optimale Ankunftszeit  $d_{\text{trip}}[T]$  pro Trip  $T$

- wird

```
for alle Trips  $T$  do  
   $d_{\text{trip}}[T] \leftarrow \infty$ 
```

## Trip-Datenstruktur

- Verwalte Array  $d_{\text{trip}}[T]$ , mit einem Wert pro Trip  $T$
- $d_{\text{trip}}[T]$  ist die früheste Ankunftszeit an  $t$ , wenn man in  $T$  startet
- Initial gibt es keine Connections in  $T$

$\Rightarrow d_{\text{trip}}[T] \leftarrow \infty$  für alle  $T$

- Aus

$\tau_2 \leftarrow$  Ankunftszeit, wenn man sitzenbleibt

- wird

$\tau_2 \leftarrow d_{\text{trip}}[\text{trip}(c)]$

## Trip-Datenstruktur

- Verwalte Array  $d_{\text{trip}}[T]$ , mit einem Wert pro Trip  $T$
- $d_{\text{trip}}[T]$  ist die früheste Ankunftszeit an  $t$ , wenn man in  $T$  startet
- Initial gibt es keine Connections in  $T$

$\Rightarrow d_{\text{trip}}[T] \leftarrow \infty$  für alle  $T$

- Aus

Aktualisiere  $d_{\text{trip}}[\text{trip}(c)]$  mit  $\tau_c$

- wird

$d_{\text{trip}}[\text{trip}(c)] \leftarrow \tau_c$

## Stop-Datenstruktur

- Verwalte Array  $P[\cdot]$  von Profilen
- $P[v]$  ist das Profil von Stop  $v$  zu  $t$

- Aus

Initialisiere Profil  $P[v]$  pro Stop  $v$

- wird

```
for alle Stops v do  
   $P[v] \leftarrow \{\forall \tau: \tau \mapsto \infty\}$ 
```

## Stop-Datenstruktur

- Verwalte Array  $P[\cdot]$  von Profilen
- $P[v]$  ist das Profil von Stop  $v$  zu  $t$

- Aus

$\tau_3 \leftarrow$  Ankunftszeit, wenn man umsteigt

- wird

$\tau_3 \leftarrow$  werte  $P[v_{\text{arr}}(c)]$  zum Zeitpunkt  $\tau_{\text{arr}}(c)$  aus

## Stop-Datenstruktur

- Verwalte Array  $P[\cdot]$  von Profilen
- $P[v]$  ist das Profil von Stop  $v$  zu  $t$

- Aus

Füge  $\tau_C$  zu  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  hinzu

- wird

Füge  $(\tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c)), \tau_C)$  in  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  ein

- $P[v]$  ist stückweise lineare Ankunftszeit-Funktion
- ⇒ Speichere  $P[v]$  als Array von Breakpoints  $(d, a)$   
 $d \hat{=}$  Abfahrtszeit,  $a \hat{=}$  Ankunftszeit
- Breakpoints dominieren sich nicht
    - Es gibt keine zwei Breakpoints  $(d_1, a_1)$  und  $(d_2, a_2)$  mit  $d_1 < d_2$  und  $a_1 > a_2$
  - Array ist dynamisch und kann am Anfang wachsen
  - Array ist sortiert, d.h., in  $P[v][0]$  steht die früheste Abfahrt

- Jedes Array endet mit Breakpoint  $(\infty, \infty)$
- Also ist die Ankunftszeit  $\infty$ , wenn alle Connections abgefahren sind
- $(\infty, \infty)$ -Breakpoint wird bei der Initialisierung eingefügt
- Aus

```
for alle Stops  $v$  do  
   $P[v] \leftarrow \{\forall \tau: \tau \mapsto \infty\}$ 
```

- wird

```
for alle Stops  $v$  do  
   $P[v] \leftarrow \{(\infty, \infty)\}$ 
```

- Auswertung mit binärer oder linearer Suche
- Hier ist lineare Suche besser
- Aus

```
 $\tau_3 \leftarrow$  werte  $P[v_{arr}(c)]$  zum Zeitpunkt  $\tau_{arr}(c)$  aus
```

- wird

```
for  $i \leftarrow 0, \dots, |P[v_{arr}(c)]| - 1$  do  
   $(d, a) \leftarrow P[v_{arr}(c)][i]$   
  if  $\tau_{arr}(c) \leq d$  then  
     $\tau_3 \leftarrow a$   
    break
```

- Erstmal ohne Fußwege (später mit)
- Alle bisherigen Connections fahren nicht vor  $\tau_{\text{dep}}(c)$  ab
- Wenn  $(\tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c)), \tau_C)$  in  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  eingefügt wird, dann an der Stelle  $P[v_{\text{dep}}(c)][0]$

- Aus

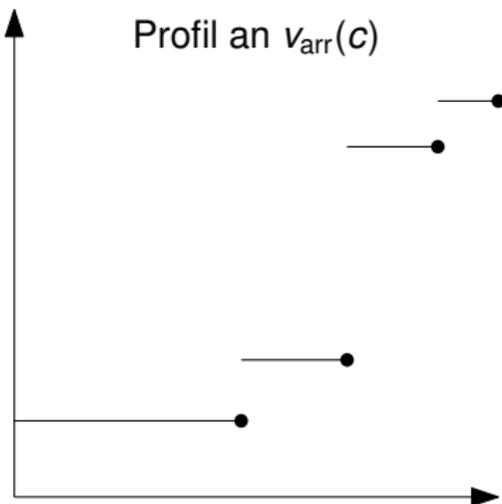
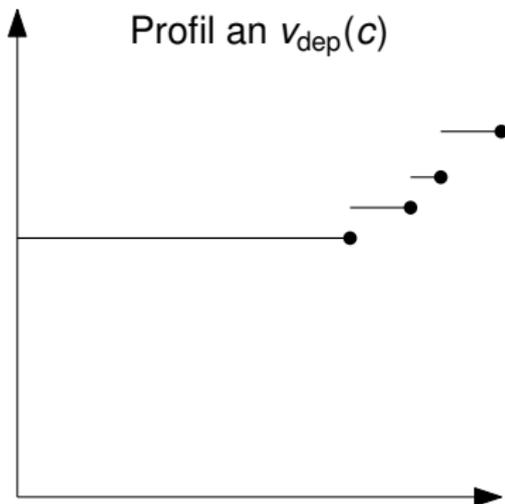
Füge  $(\tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c)), \tau_C)$  in  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  ein

- wird

```
(d, a) ← (τdep(c) - τch(vdep(c)), τC)  
if a < P[vdep(c)][0].a then  
  | if d = P[vdep(c)][0].d then  
  | | P[vdep(c)][0].a ← a  
  else  
  | | Füge (d, a) am Anfang von P[vdep(c)] ein
```

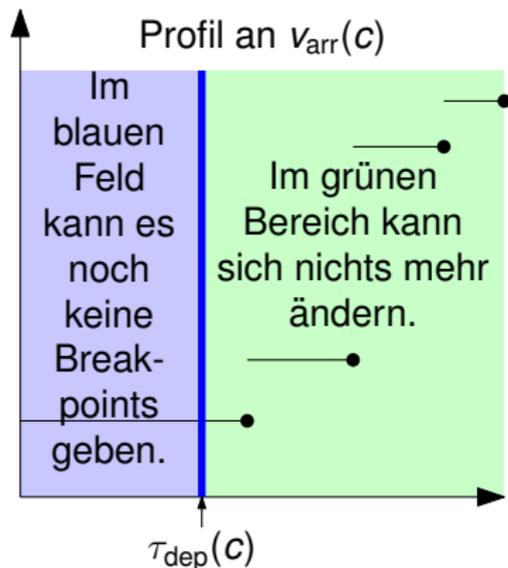
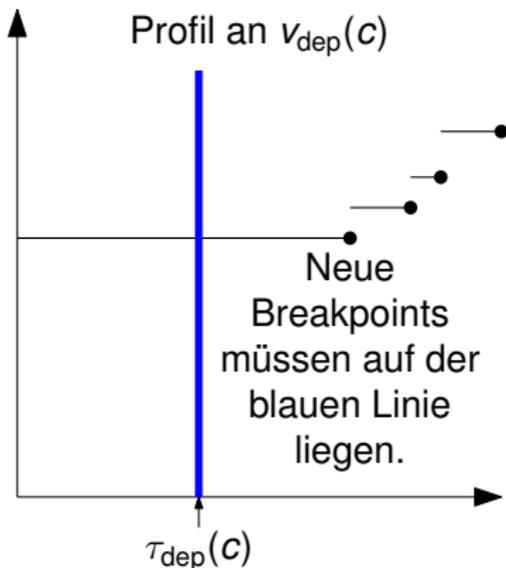
# Profile Connection Scan

Für jede Connection  $c$  **absteigend** nach Abfahrtszeit:



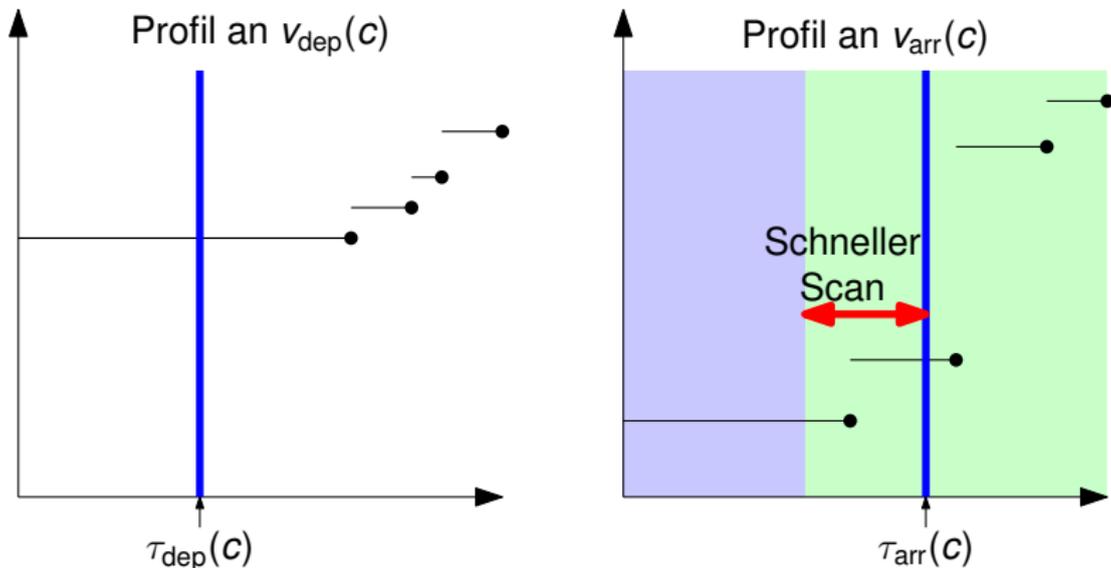
# Profile Connection Scan

Für jede Connection  $c$  **absteigend** nach Abfahrtszeit:



# Profile Connection Scan

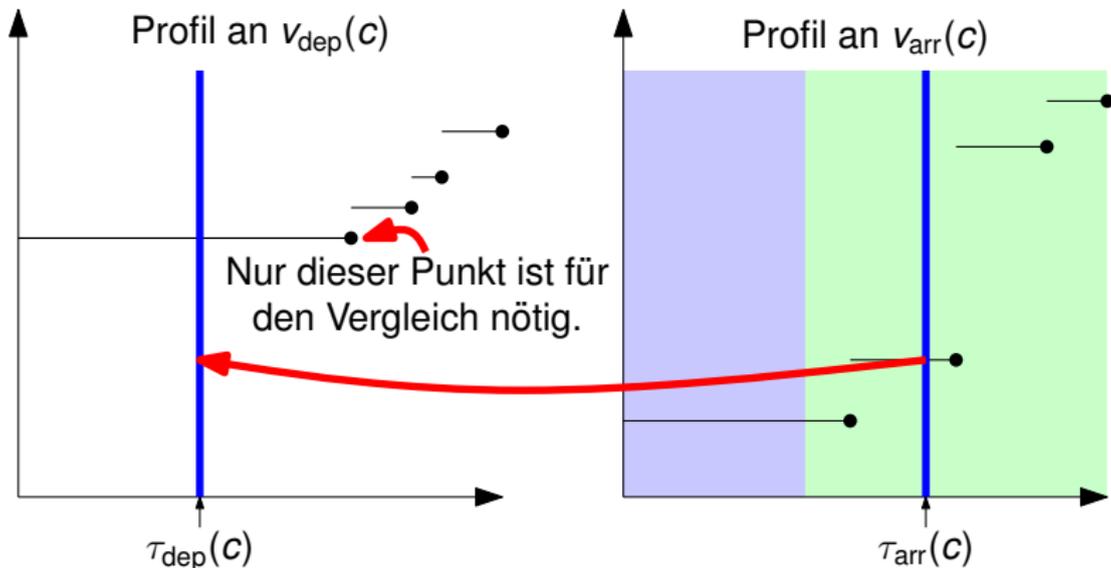
Für jede Connection  $c$  absteigend nach Abfahrtszeit:



In der Praxis: Sehr kurzer linearer Scan  $\rightarrow$  lineare Suche besser

# Profile Connection Scan

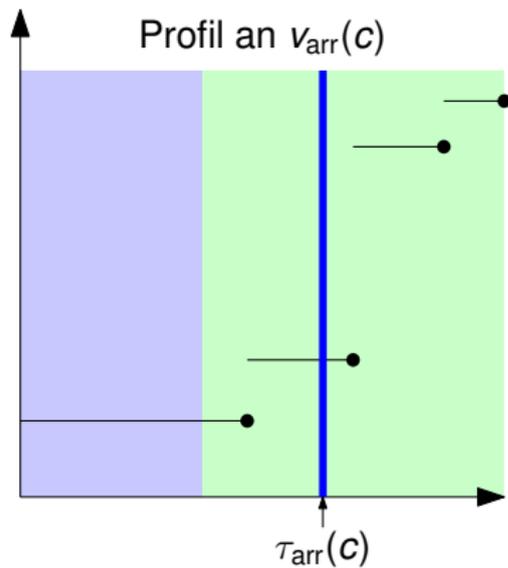
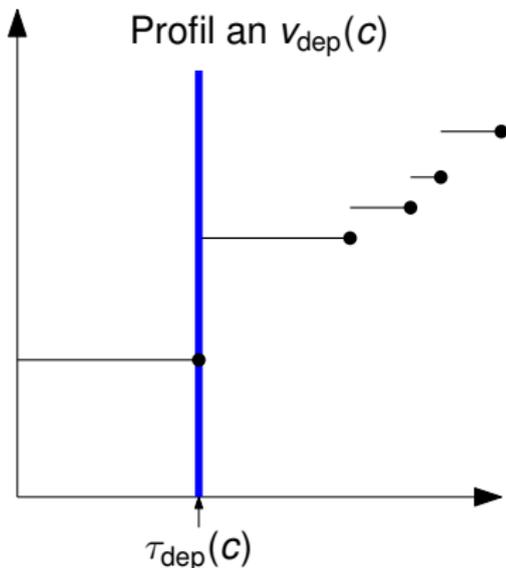
Für jede Connection  $c$  **absteigend** nach Abfahrtszeit:



Teste, ob der neue Breakpoint unterhalb dem bereits existierenden ist.

# Profile Connection Scan

Für jede Connection  $c$  **absteigend** nach Abfahrtszeit:



Neuen Breakpoint einfügen, wenn er unterhalb ist.

- Auswertung der Profile in der Praxis schnell
- Geht das auch beweisbar in  $\mathcal{O}(1)$ ?

- Auswertung der Profile in der Praxis schnell
- Geht das auch beweisbar in  $\mathcal{O}(1)$ ?
  
- Ja, mit leichter Modifikation
- (Geht nicht mit Fußwegen)

- **Idee:** Füge einen Breakpoint für jede Connection ein

- Aus

Füge  $(\tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c)), \tau_C)$  in  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  ein

- wird

$d \leftarrow \tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c))$   
 $x \leftarrow (d, \min\{\tau_C, P[v_{\text{dep}}(c)][0].a\})$   
Füge  $x$  am Anfang von  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  ein

## Warum?

- Aufeinander folgende Breakpoints mit derselben Ankunftszeit möglich
- Mehr Breakpoints als nötig?
- Was bringt uns das?

## Warum?

- Aufeinander folgende Breakpoints mit derselben Ankunftszeit möglich
- Mehr Breakpoints als nötig?
- Was bringt uns das?

## Antwort:

- Auswertung von  $P[v_{\text{arr}}(c)]$  zum Zeitpunkt  $\tau_{\text{arr}}(c)$ :
    - Finde erste erreichbare Connection  $c'$ , die an  $v_{\text{arr}}(c)$  abfährt
    - $P[v_{\text{arr}}(c)]$  hat einen Breakpoint für  $c'$
    - Gib Ankunftszeit dieses Breakpoints aus
  - Index des Breakpoints für  $c'$  ist unabhängig von  $t$
- Berechne Index von  $c'$  für jede Connection  $c$  vor
- Profilauswertung in  $\mathcal{O}(1)$
- Zeit für Profilsuche beweisbar linear in der Anzahl an Connections

# $\mathcal{T}_{\min}$ und $\mathcal{T}_{\max}$ verwenden

- Profilanfrage fragt nur nach Journeys in Zeitspanne  $[\mathcal{T}_{\min}, \mathcal{T}_{\max}]$
- Wie nutzen wir das aus?

- Profilanfrage fragt nur nach Journeys in Zeitspanne  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$
- Wie nutzen wir das aus?

## $\tau_{\min}$ und $\tau_{\max}$ verwenden:

- Scanne nur Connections  $c$  mit  $\tau_{\min} \leq \tau_{\text{dep}}(c) \leq \tau_{\max}$
- Finde späteste Connection  $c$  mit  $\tau_{\text{dep}}(c) \leq \tau_{\max}$  durch binäre Suche

- **Bisher:** Wir haben gesehen, wie man finale Fußwege behandelt.
- **Nun:** Wie geht man mit initialen und Fußwegen in der Mitte um?

- **Bisher:** Wir haben gesehen, wie man finale Fußwege behandelt.
- **Nun:** Wie geht man mit initialen und Fußwegen in der Mitte um?

## Idee 1:

- Expandiere Fußwege zu Connections
- Für jede Connection, die per Fußweg erreichbar ist:  
Füge zeitabhängige Fußweg-Connection ein
- Können sehr viele Connections werden

- **Bisher:** Wir haben gesehen, wie man finale Fußwege behandelt.
- **Nun:** Wie geht man mit initialen und Fußwegen in der Mitte um?

## Idee 1:

- Expandiere Fußwege zu Connections
- Für jede Connection, die per Fußweg erreichbar ist:  
Füge zeitabhängige Fußweg-Connection ein
- Können sehr viele Connections werden

## Idee 2:

- Laufe Fußwege beim Einfügen von Breakpoints ab

- Aus

Füge  $(\tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c)), \tau_C)$  in  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  ein

- wird

Füge  $(\tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c)), \tau_C)$  in  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  ein

**for alle Fußwege  $(v, v_{\text{dep}}(c))$  mit Länge  $\ell$  do**

  └ Füge  $(\tau_{\text{dep}}(c) - \ell, \tau_C)$  in  $P[v]$  ein

## Problem:

- Wegen unterschiedlicher Fußweglängen werden Breakpoints nicht mehr immer absteigend nach Abfahrtszeit eingefügt
- Einfügeoperation wird komplizierter

## Problem:

- Wegen unterschiedlicher Fußweglängen werden Breakpoints nicht mehr immer absteigend nach Abfahrtszeit eingefügt
- Einfügeoperation wird komplizierter

## Idee:

- $(d, a)$  soll eingefügt werden
- Verschiebe alle Breakpoints  $(d', a')$  mit  $d' < d$  in Hilfsarray  $T_{mp}$
- Füge  $(d, a)$  wie gewohnt ein
- Füge danach alle Paare von  $T_{mp}$  wieder ein

Aus

Füge  $(d, a)$  in  $P[v]$  ein

wird

```
Tmp ← {}  
while  $P[v][0].d < d$  do  
  | Füge  $P[v][0]$  in Tmp ein  
  | Lösche  $P[v][0]$  aus  $P[v]$   
if  $a < P[v][0].a$  then  
  | if  $P[v][0].d = d$  then  
  |   |  $P[v][0].a \leftarrow a$   
  | else  
  |   | Füge  $(d, a)$  am Anfang von  $P[v]$  ein  
for alle  $(d', a')$  in Tmp absteigend in  $d'$  do  
  | if  $a' < P[v][0].a$  then  
  |   | Füge  $(d', a')$  am Anfang von  $P[v]$  ein
```

## Optimierung:

- Wenn  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  durch das Einfügen des neuen Breakpoints nicht verändert wurde, muss man die Fußwege nicht ablaufen
- Gültig wegen transitiv abgeschlossener Fußwege mit Dreiecksungleichung
- Analog zu Fußwege-Optimierung bei Earliest Arrival Connection Scan

## Hinweis

Diese Optimierung macht meistens einen signifikanten Unterschied

# Anzahl Umstiege optimieren

## Ziel:

- Ankunftszeit und Umstiege im Pareto-Sinn optimieren

## Ziel:

- Ankunftszeit und Umstiege im Pareto-Sinn optimieren

## Idee:

- Ersetze skalare Ankunftszeit mit Vektor  $a[i]$  mit konstanter Länge
  - In den Beispielen Länge 8
  - Geht mit beliebigen Längen
- $a[i]$  ist Ankunftszeit an  $t$ , wenn man höchstens  $i$ -mal aussteigen darf

## Broadcast

- Eingabe:  $x$
- Ausgabe:  $(x, x, x, x, x, x, x, x)$

## Broadcast

- Eingabe:  $x$
- Ausgabe:  $(x, x, x, x, x, x, x, x)$

## Minimum

- Eingabe:  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$  und  $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$
- Ausgabe:  $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8)$  mit  $z_i = \min\{x_i, y_i\}$

## Broadcast

- Eingabe:  $x$
- Ausgabe:  $(x, x, x, x, x, x, x, x)$

## Minimum

- Eingabe:  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$  und  $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$
- Ausgabe:  $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8)$  mit  $z_i = \min\{x_i, y_i\}$

## Shift

- Eingabe:  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$
- Ausgabe:  $(\infty, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$

## Broadcast

- Eingabe:  $x$
- Ausgabe:  $(x, x, x, x, x, x, x, x)$

## Minimum

- Eingabe:  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$  und  $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$
- Ausgabe:  $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8)$  mit  $z_i = \min\{x_i, y_i\}$

## Shift

- Eingabe:  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$
- Ausgabe:  $(\infty, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$
  
- Geht alles mit SIMD/SSE/AVX

Initialisiere Profil  $P[v]$  pro Stop  $v$

Initialisiere optimale Ankunftszeiten  $d_{\text{trip}}[T]$  pro Trip  $T$

**for** alle Connections  $c$  absteigend nach  $\tau_{\text{dep}}(c)$  **do**

```
// 1. Bestimme Ankunftszeit, falls  $c$  benutzt wird
```

```
 $\tau_1 \leftarrow$  Ankunftszeit, wenn man zum Ziel läuft
```

```
 $\tau_2 \leftarrow$  Ankunftszeit, wenn man sitzenbleibt (benutzt  $d_{\text{trip}}[\text{trip}(c)]$ )
```

```
 $\tau_3 \leftarrow$  Ankunftszeit, wenn man umsteigt (benutzt  $P[v_{\text{arr}}(c)]$ )
```

```
//  $\tau_c$ : Optimale Ankunftszeit, falls  $c$  benutzt wird
```

```
 $\tau_c \leftarrow \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ 
```

```
// 2. Aktualisiere Stop- und Trip-Daten
```

```
Füge  $\tau_c$  zu  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  hinzu
```

```
Aktualisiere  $d_{\text{trip}}[\text{trip}(c)]$  mit  $\tau_c$ 
```

- $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  und  $\tau_c$  sind nun **Vektoren**
- Abfahrtszeiten bleiben Skalare

- Aus

$\tau_1 \leftarrow$  Ankunftszeit, wenn man zum Ziel läuft

- wird

$\tau_1 \leftarrow \text{broadcast}(\tau_{\text{arr}}(c) + d_t[v_{\text{arr}}(c)])$

- Berechnung von  $d_t[\cdot]$  wie bisher

## Trip-Datenstruktur

- $d_{\text{trip}}[T]$  ist Vektor statt skalarer Ankunftszeit

- Aus

Initialisiere optimale Ankunftszeiten  $d_{\text{trip}}[T]$  pro Trip  $T$

- wird

**for alle Trips  $T$  do**

  |  $d_{\text{trip}}[T] \leftarrow \text{broadcast}(\infty)$

## Trip-Datenstruktur

- $d_{\text{trip}}[T]$  ist Vektor statt skalarer Ankunftszeit

- Aus

$\tau_2 \leftarrow$  Ankunftszeit, wenn man sitzenbleibt

- wird

$\tau_2 \leftarrow d_{\text{trip}}[\text{trip}(c)]$

- Diesmal sind die Variablen aber Vektoren

## Trip-Datenstruktur

- $d_{\text{trip}}[T]$  ist Vektor statt skalarer Ankunftszeit

- Aus

Füge  $\tau_c$  in Daten von Trip  $\text{trip}(c)$  ein

- wird

$d_{\text{trip}}[\text{trip}(c)] \leftarrow \tau_c$

- Diesmal sind die Variablen aber Vektoren

## Stop-Datenstruktur

- Profil bildet Abfahrtszeit auf Vektor von Ankunftszeiten ab

- Aus

Initialisiere Profil  $P[v]$  pro Stop  $v$

- wird

**for alle Stops  $v$  do**

$P[v] \leftarrow \{\forall \tau: \tau \mapsto \text{broadcast}(\infty)\}$

- **Bisher:**  $P[v]$  ist Array von Breakpoints  $(d, a)$
- **Nun:**  $P[v]$  ist Array von Breakpoints  $(d, a = (a_1, \dots, a_8))$
- Array ist nach wie vor sortiert nach Abfahrtszeit

- **Bisher:**  $P[v]$  ist Array von Breakpoints  $(d, a)$
- **Nun:**  $P[v]$  ist Array von Breakpoints  $(d, a = (a_1, \dots, a_8))$
- Array ist nach wie vor sortiert nach Abfahrtszeit

## Interpretation:

- $P[v]$  ist Profil von Stop  $v$  nach  $t$
- $P[v]$  am Zeitpunkt  $\tau_{\text{dep}}$  auswerten ergibt Vektor  $(\tau_{\text{arr}}^1, \dots, \tau_{\text{arr}}^8)$
- In  $\tau_{\text{arr}}^i$  steht, wann ich an  $t$  ankomme, wenn ich
  - um  $\tau_{\text{dep}}$
  - an  $v$  losfahre
  - und höchstens  $i$  mal aussteigen darf

- Jedes Array endet mit Breakpoint  $(\infty, \text{broadcast}(\infty))$
- Aus

```
for alle Stops  $v$  do  
   $\lfloor P[v] \leftarrow \{\forall \tau: \tau \mapsto \text{broadcast}(\infty)\}$ 
```

- wird

```
for alle Stops  $v$  do  
   $\lfloor P[v] \leftarrow \{(\infty, \text{broadcast}(\infty))\}$ 
```

- Pseudocode für Profilauswertung bleibt unverändert
- **Aber:**  $a$  ist nun ein Vektor
- Shift-Operation, um Anzahl Umstiege zu erhöhen
- Aus

```
 $\tau_3 \leftarrow$  werte  $P[v_{arr}(c)]$  zum Zeitpunkt  $\tau_{arr}(c)$  aus
```

- wird

```
for  $i \leftarrow 0, \dots, |P[v_{arr}(c)|] - 1$  do  
   $(d, a) \leftarrow P[v_{arr}(c)][i]$   
  if  $\tau_{arr}(c) \leq d$  then  
     $\tau_3 \leftarrow \text{shift}(a)$   
    break
```

- Füge Breakpoint ein, wenn mindestens eine Komponente besser ist
- Neuer Breakpoint ist komponentenweises Minimum
- Aus

Füge  $(\tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c)), \tau_C)$  in  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  ein

- wird

```
d ←  $\tau_{\text{dep}}(c) - \tau_{\text{ch}}(v_{\text{dep}}(c))$ 
a ←  $\min\{\tau_C, P[v_{\text{dep}}(c)][0].a\}$ 
if  $a \neq P[v_{\text{dep}}(c)][0].a$  then
  | if  $d = P[v_{\text{dep}}(c)][0].d$  then
  | |  $P[v_{\text{dep}}(c)][0].a \leftarrow a$ 
  | else
  | | Füge  $(d, a)$  am Anfang von  $P[v_{\text{dep}}(c)]$  ein
```

- Vektor  $a$  der Länge  $n$  hat die Komponenten:

$$(a_1, a_2 \dots a_n)$$

- Journeys werden gefunden bis maximal  $n$  Mal aussteigen
- $\rightarrow$  bis  $n - 1$  Umstiege

- Vektor  $a$  der Länge  $n$  hat die Komponenten:

$$(a_1, a_2 \dots a_n)$$

- Journeys werden gefunden bis maximal  $n$  Mal aussteigen
- $\rightarrow$  bis  $n - 1$  Umstiege
  
- Vektorlänge in der Regel 8
- 7 Umstiege ist für die meisten Anwendungen gut genug

## Beobachtung:

- Man kann die Shift-Operation so modifizieren, dass  $a_n$  die früheste Ankunftszeit ohne beschränkte Umstiege ist.
- Die Bedeutung von  $a_i$  für  $i < n$  bleibt erhalten: höchstens  $i$  Ausstiege
- Ist in manchen Anwendungen nützlich

## Modifiziertes Shift

- Eingabe:  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$
- Ausgabe:  $(\infty, x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, \min\{x_7, x_8\})$

# Weitere Optimierungen



**Problem:** Algorithmus ist memory-bound

Der Speicher ist fast vollständig mit Ankunftszeiten gefüllt

→ Komprimiere Ankunftszeiten

**Beobachtung:** Nicht an jedem Zeitpunkt fährt ein Zug

**Idee:** Berechne für jeden Stop ein geordnetes Array von Zeitpunkten

$\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ , an denen ein Zug abfährt oder ankommt

- Indizes respektieren die zeitliche Ordnung, d.h.,  $\tau_i < \tau_j \iff i < j$
- Indizes passen oft in 16 Bit
- Kopiere Indizes anstatt von Zeitpunkten

**Problem:** Algorithmus ist memory-bound

Der Speicher ist fast vollständig mit Ankunftszeiten gefüllt

→ Komprimiere Ankunftszeiten

**Beobachtung:** Nicht an jedem Zeitpunkt fährt ein Zug

**Idee:** Berechne für jeden Stop ein geordnetes Array von Zeitpunkten

$\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ , an denen ein Zug abfährt oder ankommt

- Indizes respektieren die zeitliche Ordnung, d.h.,  $\tau_i < \tau_j \iff i < j$
- Indizes passen oft in 16 Bit
- Kopiere Indizes anstatt von Zeitpunkten

## Fußwege

Nicht-triviale Interaktion mit Fußwegen (nicht in der Vorlesung)

## Option 1:

- Speichere mit jeder Ankunftszeit im Profil das erste Leg der entsprechenden Journey
- Entpacke Journeys rekursiv

## Option 1:

- Speichere mit jeder Ankunftszeit im Profil das erste Leg der entsprechenden Journey
- Entpacke Journeys rekursiv

## Option 2:

- Traversiere Fahrplan DFS-mäßig von  $s$  in der Zeit vorwärts
- Benutze Profile, um frühzeitig zu prunen
- Kann genutzt werden, um eine Journey zu finden
- Kann auch genutzt werden, um alle optimalen Journeys zu finden

London-Instanz mit 4 850 431 Connections

Earliest Arrival One-to-One:

- Time-Expanded: 64.4 ms
- Time-Dependent: 10.9 ms
- Connection Scan: 2.0 ms

Earliest Arrival One-to-All:

- Time-Expanded: 876.2 ms
- Time-Dependent: 18.9 ms
- Connection Scan: 9.7 ms

(Time-Dependent kriegt man etwas schneller mit Ideen, die nicht in der Vorlesung vorkommen.)

## Non-Pareto Profile All-to-One:

■ Self-Pruning-Connection-Setting:	1 262 ms
■ Connection Scan:	177 ms
■ + constant eval:	134 ms
■ + time compress:	104 ms

## Pareto Profile All-to-One (mit höchstens 8 Trips pro Journey):

■ RAPTOR:	1 179 ms
■ Connection Scan:	255 ms
■ + SSE:	221 ms

 Julian Dibbelt, Thomas Pajor, Ben Strasser, and Dorothea Wagner.  
Intriguingly simple and fast transit routing.

In *Proceedings of the 12th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'13)*, volume 7933 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 43–54. Springer, 2013.

 Ben Strasser and Dorothea Wagner.  
Connection scan accelerated.

In *Proceedings of the 16th Meeting on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'14)*, pages 125–137. SIAM, 2014.